

Л. В. Мольченко¹, И. И. Лоос², Л. М. Федорченко

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ МАГНИТОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ГИБКОЙ
ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ ОРТОТРОПНОЙ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, пр. Глушкова, 4-Е,
03127, Киев, Украина; e-mail: ¹ Mol_lv@univ.kiev.ua, ² Loiri@univ.kiev.ua

Abstract. The nonlinear problem of magnetoelasticity is considered in the axisymmetric statement for a circular ring plate. The resolving system of nonlinear differential equations is obtained, which describes the stress-strain state of the flexible orthotropic ring plate in mechanical and magnetic fields. The numerical example is given. An analysis of the stress state of orthotropic plate is carried out depending on the tangential component of the magnetic induction.

Keywords: ring flexible plate, magnetic field, magnetoelasticity.

Введение.

В механике сопряженных полей существенное место занимают вопросы изучения движения оболочек и пластин в нелинейной постановке, в том числе и кольцевых пластин, с учетом электромагнитных эффектов. Исследование механики связанных полей в деформированных телах имеют как фундаментальный, так и прикладной характер, что придает им особую актуальность. В современной технике используются конструкционные материалы, которые в недеформированном состоянии являются анизотропными.

В данной статье исследовано напряженно-деформированное состояние гибких ортотропных кольцевых пластин, находящихся в магнитном поле.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Предполагая, что на тело действует внешнее магнитное поле, уравнения магнитоупругости в лагранжевых переменных в области, занимаемой телом (внутренняя задача), представим в виде [1 – 3]

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho(\vec{f} + \vec{f}^{\wedge}) + \operatorname{div} \vec{P}, \quad (2)$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля; \vec{H} – напряженность магнитного поля; \vec{B} – магнитная индукция; \vec{D} – электрическая индукция; \vec{J} – плотность электрического тока; ρ – плотность материала; \vec{f} – объемная механическая сила; \vec{f}^{\wedge} – объемная сила Лоренца; \vec{V} – скорость деформирования.

Для рассматриваемого случая квадратичной нелинейности [1, 4] принимаем, что деформации и сдвиги малы в сравнении с углами поворота элемента, а сами углы существенно меньше единицы. Упругие свойства материала соответствуют ортотропному телу, главные направления упругости которого совпадают с направлениями со-

ответствующих координатных линий, а электромагнитные свойства материала характеризуются тензорами электрической проводимости σ_{ij} , магнитной проницаемости μ_{ij} , диэлектрической проницаемости ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). При этом, исходя из кристаллографии [2], для класса проводящих ортотропных тел с ромбической кристаллической структурой тензора σ_{ij} , μ_{ij} , ε_{ij} принимают диагональный вид. В этом случае материальные соотношения, обобщенный закон Ома и выражения пондеромоторных сил запишем, соответственно, в виде [3, 5]

$$\vec{B} = \mu_{ij} \vec{H}; \quad \vec{D} = \varepsilon_{ij} \vec{E}; \quad (3)$$

$$\vec{J} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}); \quad (4)$$

$$\rho \vec{f}^{\wedge} = \sigma_{ij} (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (5)$$

При исследовании деформации круглой ортотропной пластины в магнитном поле отнесем ее к цилиндрической системе координат r, θ, z так, чтобы срединная плоскость пластины была связана с полярной системой координат и центр пластины находился в начале координат.

Рассмотрим кольцевую пластину в одномерной постановке по пространственной координате r ; предположим, что $\partial/\partial\theta = 0$; $\nu = 0$; $E_r = 0$; $B_\theta = 0$; $S = 0$; $H_\theta = 0$; $f_\theta = 0$; $f_\theta^{\wedge} = 0$; $h = h(r)$, где S – сдвигающее усилие; ν – окружное перемещение.

С учетом диагонального вида тензоров электропроводности полная система уравнений, позволяющая описать геометрически нелинейную модель магнитоупругости ортотропных кольцевых пластин, состоит из [1, 6, 7]:

уравнений магнитоупругости

$$\begin{aligned} \frac{\partial(rN_r)}{\partial r} - N_\theta + r(f_r + \rho f_r^{\wedge}) &= r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} + r(f_z + \rho f_z^{\wedge}) = r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta - rQ_r - rN_r \mathcal{G}_r &= 0; \quad -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}; \\ \sigma_2 \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] &= -\frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{H_r^+ - H_r^-}{h}; \end{aligned} \quad (6)$$

выражений для деформаций:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_r^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \chi_r = \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r}; \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \mathcal{G}_r, \quad (7)$$

где $\mathcal{G}_r = -\frac{\partial w}{\partial r}$ – угол поворота нормали;

соотношений упругости:

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{e_r h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_r + \nu_\theta \varepsilon_\theta); \quad N_\theta = \frac{e_\theta h}{1 - \nu_r \nu_\theta} (\varepsilon_\theta + \nu_r \varepsilon_r); \\ M_r &= \frac{e_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_r + \nu_\theta \chi_\theta); \quad M_\theta = \frac{e_\theta h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} (\chi_\theta + \nu_r \chi_r). \end{aligned} \quad (8)$$

В равенствах (6) – (8) принято: $\nu_r = \nu_{\theta r}$, $\nu_\theta = \nu_{r\theta}$, $e_r \nu_\theta = e_\theta \nu_r$; ν_r , ν_θ – коэффициенты Пуассона; e_r, e_θ – модули Юнга; u, w – перемещения; N_r, N_θ – тангенциальные усилия; M_r, M_θ – изгибающие моменты; Q_r – обобщенное перерезывающее усилие; χ_r, χ_θ – главные кривизны срединной поверхности пластины; B_r^\pm – известные значения компонент тангенциальных составляющих магнитной индукции на поверхностях пластины.

Компоненты силы Лоренца имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \rho f_r^\wedge &= \sigma_1 h \left[E_\theta B_z - \frac{\partial u}{\partial t} B_z^2 + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right]; \\ \rho f_z^\wedge &= -\sigma_2 h \left[0,5 E_\theta (B_r^+ + B_r^-) - \right. \\ &\left. -0,25 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-)^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ - B_r^-)^2 - 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) B_z \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

2. Разрешающая система уравнений магнитоупругости ортотропной кольцевой пластины.

При построении разрешающей системы уравнений в качестве искомым функций выбираем $u, w, \mathfrak{g}_r, N_r, Q_r, M_r, B_z, E_\theta$, которые также используем при задании граничных условий.

После соответствующих преобразований соотношений (6) – (9) получаем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1 - \nu_r \nu_\theta}{e_r h} N_r - \frac{\mathfrak{g}_\theta}{r} u - 0,5 \mathfrak{g}_r^2; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = -\mathfrak{g}_r; \quad \frac{\partial \mathfrak{g}_r}{\partial r} = \frac{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}{e_r h^3} M_r - \frac{\nu_\theta}{r} \mathfrak{g}_r; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) N_r + \frac{e_\theta h}{r^2} u - (f_r + \rho f_r^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial Q_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} Q_r - (f_z + \rho f_z^\wedge) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} (\nu_\theta - 1) M_r + \frac{e_\theta h^3}{12 r^2} \mathfrak{g}_r + Q_r + N_r \mathfrak{g}_r; \\ \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -\sigma_2 \mu \left[E_\theta + 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) - \frac{\partial u}{\partial t} B_z \right] + \frac{B_r^+ - B_r^-}{h}; \quad \frac{\partial E_\theta}{\partial r} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{1}{r} E_\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Полученная связанная нелинейная система гипербола-параболических уравнений магнитоупругости восьмого порядка в частных производных с переменными коэффициентами описывает симметричную деформацию гибких кольцевых пластин переменной вдоль радиуса толщины.

Краевые условия для функций, характеризующих механическую часть задачи, задаем как и в обычной теории оболочек. Краевые условия для электромагнитных функций могут быть заданы с учетом электрического поля или комбинации электрических и магнитных полей. Начальные условия задаем в классическом виде.

3. Методика решения.

Методика решения нелинейной задачи магнитоупругости кольцевой пластины переменной жесткости вдоль радиальной координаты основана на последовательном использовании схемы Ньюмарка, метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [1, 8 – 11].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную схему Ньюмарка, с помощью которой нелинейная краевая задача сводится к последовательности нелинейных одномерных краевых задач на каждом временном шаге.

Следующий этап решения последовательности нелинейных краевых задач магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации, с помощью которого нелинейная краевая задача сводится к последовательности линейных краевых задач. Далее каждую из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решаем численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации.

4. Числовой пример.

Исследуем напряженно-деформированное состояние металлической (бороалюминий) кольцевой пластины постоянной толщины h , внутреннего радиуса r_0 , внешнего r_1 , находящейся под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки P_z и внешнего магнитного поля с заданным вектором магнитной индукции $\vec{B}^{(e)}$. Внешние токи и внешние электрические заряды отсутствуют.

Контуры пластины закреплены следующим образом:

$$u = 0; \quad Q_r = 0; \quad M_r = 0; \quad B_z = 0,1 \sin \omega t \quad (\text{при } r = r_0);$$

$$u = 0; \quad w = 0; \quad M_r = 0; \quad B_z = 0 \quad (\text{при } r = r_1) \quad (\omega - \text{круговая частота}).$$

Параметры пластины и материала приняты следующие:

$$r_0 = 0,49\text{м}; \quad r_1 = 0,86\text{м}; \quad h = 2 \cdot 10^{-2}\text{м}; \quad P_z = 3 \cdot 10^{-2}\text{Н/м}^2;$$

$$e_r = 22,9 \cdot 10^{10}\text{Н/м}^2; \quad e_\theta = 10,7 \cdot 10^{10}\text{Н/м}^2; \quad \mu = 1,256 \cdot 10^{-6}\text{Гн/м};$$

$$\nu_r = 0,262; \quad \nu_\theta = 0,32; \quad \rho = 2600\text{кг/м}^3; \quad \omega = 314,16\text{с}^{-1};$$

$$\sigma_1 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \quad \sigma_2 = 0,454 \cdot 10^8 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}; \quad B_r^\pm = 0,5T.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 10^{-2}\text{с}$, шаг интегрирования по времени $\Delta t = 10^{-3}\text{с}$.

Исследовано влияние тангенциальных составляющих магнитной индукции на напряженно-деформированное состояние кольцевой пластины для двух вариантов задачи:

$$1) B_r^\pm = \pm 1 \cdot 10^{-3}; \pm 5 \cdot 10^{-3}; \pm 1 \cdot 10^{-2}T; \quad 2) B_r^\pm = \pm 0,15; \pm 0,25; \pm 0,5T.$$

Результаты решения рассматриваемой задачи представлены ниже в виде графиков.

На рис. 1, 2 (вариант 1, вариант 2) представлено максимальное распределение прогиба пластины $w(r)$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}\text{с}$. Линии 1 – 3 соответствуют отрицательным значениям магнитной индукции, линии 4 – 6 – положительным значениям для вариантов 1, 2.

Положительные значения прогиба соответствуют отрицательным значениям магнитной индукции (рис. 1, 2).

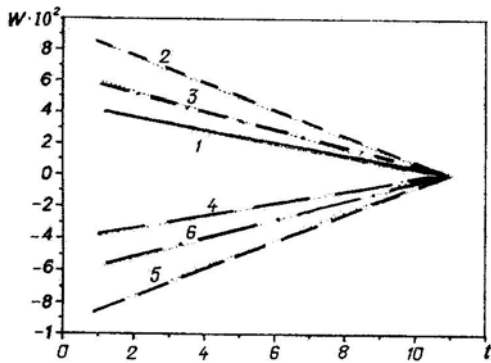


Рис. 1

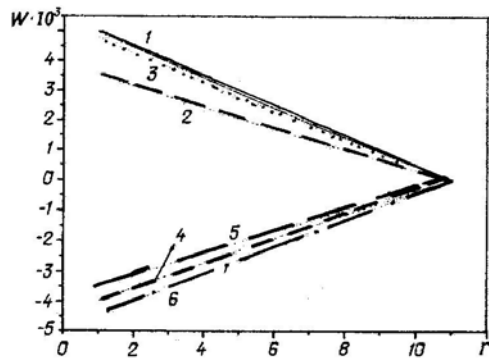


Рис. 2

Максимальное значение прогиба отвечает линии 2 на рис. 1 ($B_r^\pm = -5 \cdot 10^{-3} T$), минимальное – линии 1 ($B_r^\pm = -1 \cdot 10^{-3} T$) для положительных значений прогиба. Аналогичная картина наблюдается и для отрицательных значений прогиба на рис. 1. Максимальному значению w по абсолютной величине соответствует линия 5 ($B_r^\pm = 5 \cdot 10^{-3} T$), минимальному – линия 4 ($B_r^\pm = 1 \cdot 10^{-3} T$).

На рис. 2 максимальное значение для положительного прогиба достигается при $B_r^\pm = -0,15T$ (линия 1), минимальное – при $B_r^\pm = -0,25T$ (линия 2). Для отрицательных значений прогиба максимальное значение по абсолютной величине достигается при $B_r^\pm = 0,5T$ (линия 6), минимальное – при $B_r^\pm = 0,25T$ (линия 5).

Как следует из представленных результатов (рис. 1, 2), при увеличении значений тангенциальной составляющей магнитной индукции B_r^\pm значения прогиба уменьшаются и сближаются между собой (рис. 2). Это соответствует общей нелинейной теории пластин (с увеличением тангенциальных усилий пластина становится более жесткой). Однако, установить прямую закономерность между величиной прогиба и изменением тангенциальной составляющей магнитного поля, как это происходит с тангенциальными силами в геометрически нелинейной теории пластин без влияния магнитного поля, не удастся.

На рис. 3, 4 представлены максимальные значения прогиба $w(t)$ на внутреннем контуре пластины для вариантов 1, 2. Картина распределения максимальных значений прогиба в зависимости от времени соответствует результатам, приведенным на рис. 1, 2. Положительные и отрицательные значения прогиба отвечают тем же значениям магнитной индукции, что и на рис. 1, 2. Получено, что с увеличением значений B_r^\pm прогиб уменьшается по абсолютной величине.

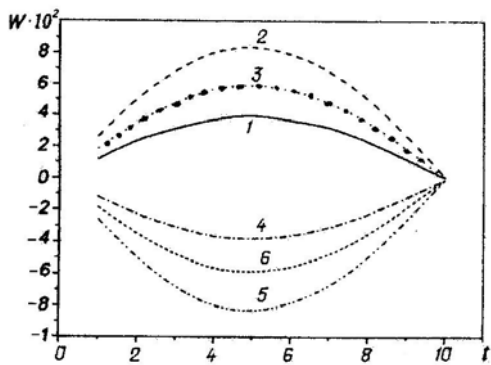


Рис. 3

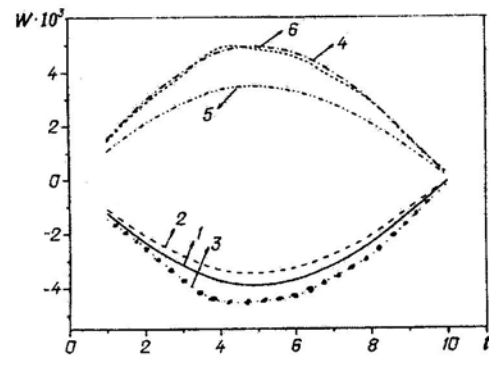


Рис. 4

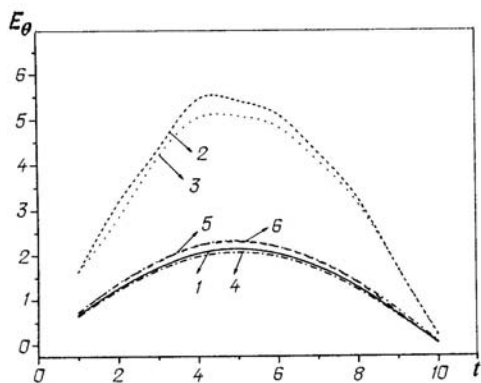


Рис. 5

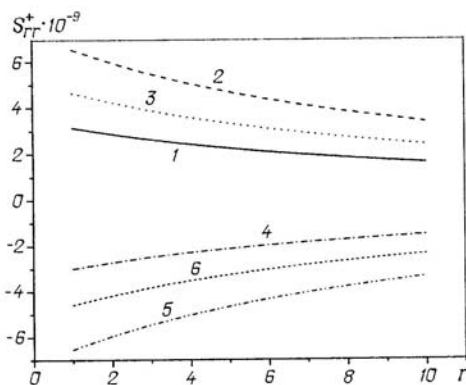


Рис. 6

Максимальное распределение составляющей напряженности электрического поля $E_\theta(t)$ представлено на внутреннем контуре пластины на рис. 5 при $B_r^\pm = 0,15; 0,25; 0,5T$ (линии 1 – 3) и $B_r^\pm = -0,15; -0,25; -0,5T$ (линии 4 – 6). Согласно полученным результатам наибольшее значение напряженности электрического поля E_θ достигается при $B_r^\pm = \pm 0,5T$. Для остальных значений магнитной индукции результаты практически совпадают.

На рис. 6 показано максимальное распределение нормальной составляющей механического напряжения $s_{rr}^+(r)$ при $t = 5 \cdot 10^{-3} c$ по верхней поверхности пластины. Линии 1 – 3 соответствуют значениям магнитной индукции варианта 1 со знаком минус, линии 4 – 6 – со знаком плюс. Как видно из графиков, представленных на рис. 6, нормальные составляющие механического напряжения $s_{rr}^+(r)$ зависят от изменения тангенциальных составляющих магнитной индукции B_r^\pm и соответствуют изменениям прогиба, представленным на рис. 1.

Анализ полученных результатов, позволяет оценить влияние тангенциальных составляющих магнитной индукции на напряженное состояние гибкой ортотропной кольцевой пластины. Исходя из представленных результатов, магнитоупругую нелинейную задачу для кольцевой пластины необходимо рассматривать в связанном виде, что и отражено на рисунках.

Заключение.

В данной статье получено решение нелинейной задачи магнитоупругости ортотропной кольцевой пластины с учетом ортотропной электропроводности. Приведена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая напряженно-деформируемое состояние гибких кольцевых пластин с ортотропной электропроводностью, находящихся в силовом и магнитном полях. Дан числовой пример. Результаты представлены в виде графиков. Проведен анализ влияния тангенциальной составляющей магнитной индукции на напряженное состояние ортотропной пластины.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто нелінійну задачу магнитоупругості в осесиметричній постановці для ортотропної кільцевої пластины з ортотропною електропровідністю. Отримано розв'язувальну систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформівний стан гнучких ортотропних кільцевих пластин в механічному та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Проведено аналіз напруженого стану ортотропної пластины в залежності від тангенційної складової магнітної індукції.

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости: учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403 с.
2. Келли А., Гровс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. – М.: Мир, 1974. – 496 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
4. Мольченко Л. В., Лоос И. И., Индиаминов Р. Ш. Магнитоупругость конической оболочки с учетом ортотропной электропроводности в геометрически нелинейной постановке // Вестник Киев. нац. ун-та. – 2007. Вып. 2. – С. 85 – 90.
5. Стрэттон Д. А. Теория электромагнетизма. – М.: Л.: ГТТИ, 1948. – 540 с.
6. Шаповалов Л.А. Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Инж. журн. МТТ. – 1968. № 1. – С. 56 – 62.
7. Molchenko L.V. A Method for Solving Two-Dimensional Nonlinear Boundary-value Problems of Magneto elasticity for Thin Shells // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 5. – P. 490 – 495.
8. Molchenko L.V., Loos I.I. Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Conical Shell in Non-stationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 11. – P. 1261 – 1267.
9. Molchenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh. Determining the Stress State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 8. – P. 882 – 891.
10. Molchenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh. Stress-strain State of Flexible Ring Plates of Variable Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, N 11. – P. 1236 – 1242.
11. Molchenko L.V., Loos I.I., Plyas I.V. Stress Analysis of a Flexible Ring Plate with Circumferentially Varying Stiffness in a Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 5. – P. 567 – 572.

Поступила 05.04.2011

Утверждена в печать 22.11.2012