

Е. Ю. Башук, В. Ю. Бойчук,

**ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ОСНОВНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: numer@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** Within the framework of the exact approach, the statement and solution is given for the plane problem of stability of the hinged (in the integral form) plate with the central crack. The plate is compressed along the crack direction by the surface loading of constant intensity in the inhomogeneous subcritical state. The mechanical effects due to presence of inhomogeneity of the basic stress state are revealed.

**Keywords:** hinged (in the integral form) plate, central crack, inhomogeneous subcritical state, exact approach.

**Введение.**

В настоящее время решение задач устойчивости деформируемых твердых тел с трещинами осуществляется, в основном, с использованием прикладных подходов, позволяющих свести трехмерные уравнения к одномерным или двумерным. Наиболее часто используется балочный подход. Суть его состоит в том, что область, содержащая трещину, заменяется областью, имеющую форму стержня (балки), длина которой принимается равной длине трещины, а ширина выбирается, исходя из соображений физического характера. Граничные условия на концах стержня выбирают по-разному – от шарнирного до жесткого защемления. Таким образом, при применении балочного приближения, кроме погрешностей приближенного подхода, имеют место неустранимые погрешности, связанные с формулировкой граничных условий на торцах стержня. Отметим, что балочный подход применим к задачам устойчивости тел с трещинами только в случае однородного начального состояния. Оценка достоверности результатов, полученных в рамках балочного приближения, является достаточно актуальной задачей как с количественной, так и с качественной точек зрения, и она может быть выполнена с использованием уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [4, 5]. Оценка погрешности балочного приближения в задаче устойчивости пластины с трещиной при однородном докритическом состоянии дана в работе [2].

В работах [1, 3] в рамках второго варианта ТЛТУДТ исследована задача устойчивости прямоугольной пластины с центральной трещиной для случая однородного начального состояния. В данной статье рассмотрена аналогичная задача устойчивости пластины с трещиной при неоднородном начальном состоянии.

Для деформируемых тел и элементов конструкций, находящихся в условиях однородного начального состояния разработана и достаточно развита методика решения задач ТЛТУДТ, в которой применим операторный метод решения уравнений ТЛТУДТ [4, 5]. Если начальное состояние неоднородно, то операторный метод не применим. В этом случае не применим также и балочный подход. При неоднородном начальном состоянии решение уравнений ТЛТУДТ существенно усложняется необходимостью определения начальных напряжений  $\sigma_{ij}^0$  из решений соответствующей задачи теории упругости и использования этих напряжений в качестве переменных параметров в уравнениях ТЛТУДТ.

В силу определенной трудности численного решения задач ТЛТУДТ в настоящее время при решении задач устойчивости, в основном, рассматриваются двумерные задачи [9 – 11].

В случае необходимости решения общих (при неоднородном начальном состоянии) уравнений ТЛТУДТ целесообразно, для определенных классов задач, исследовать влияние неоднородности на критические параметры устойчивости рассматриваемых тел и в случае малого их различия заменять неоднородное состояние однородным.

Ниже рассмотрена задача ТЛТУДТ для изотропной прямоугольной пластины с центральной трещиной при неоднородном начальном состоянии. По торцам пластины в направлении трещины приложена сжимающая нагрузка  $p$  постоянной интенсивности. Условия закрепления торцов соответствуют в интегральной форме условиям шарнирного закрепления [5]. Для приближенного решения задачи применен модифицированный вариационно-разностный метод с использованием концепции базовой схемы [6]. Для конкретного примера получены критические параметры устойчивости пластины с трещиной. Получено также решение аналогичной задачи ТЛТУДТ для однородного начального состояния и выполнено сравнение результатов. Установлено, что для шарнирно закрепленной (в интегральной форме) пластины с центральной трещиной неоднородность начального состояния можно не учитывать.

### §1. Постановка задачи ТЛТУДТ.

Рассмотрим прямоугольную изотропную пластину, достаточно протяженную в направлении  $0x_3$  и имеющую в этом направлении сквозную трещину длиной  $2t$ . Вдоль оси  $0x_2$  (в направлении трещины) пластина сжимается нагрузкой постоянной интенсивности  $p$ , обеспечивающей в теле пластины состояние плоской деформации (плоскость  $x_1 0x_2$ ) (рис. 1, а). К решению задачи устойчивости применим уравнения ТЛТУДТ и используем второй вариант теории [4].

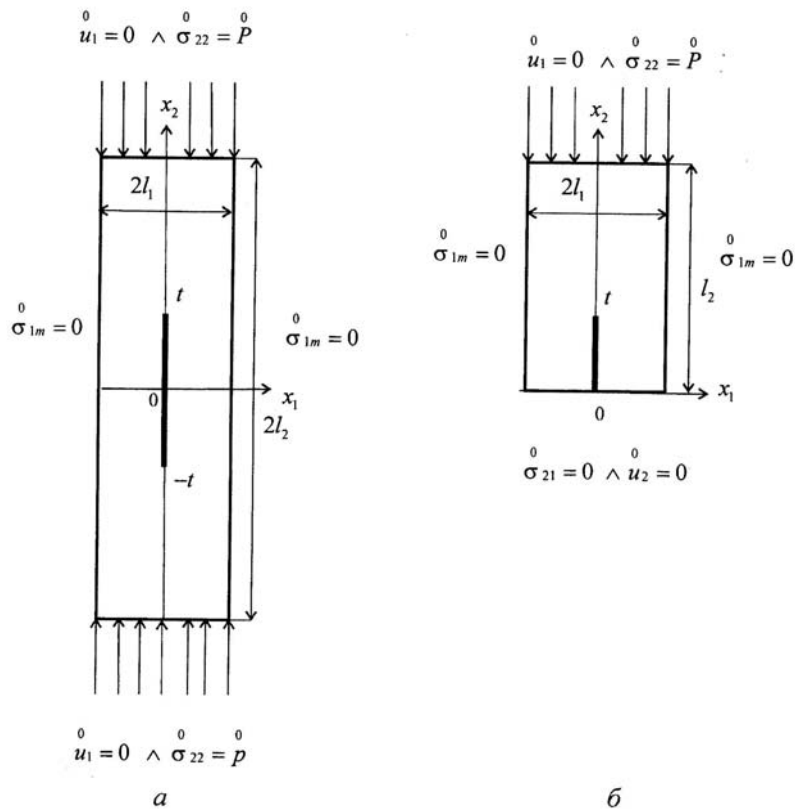


Рис. 1

Для решения задачи (уравнений ТЛТУДТ) необходимо предварительно получить решение соответствующей задачи линейной теории упругости, из которой определяем начальные напряжения  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  в теле (пластине) с трещиной. Расчетная схема задачи, с учетом симметрии решения, приведена на рис. 1, б. Сформулируем задачу теории упругости.

*1.1. Постановка задачи.* Определим функцию  $\overset{\circ}{\mathbf{u}}=(\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$ , удовлетворяющую таким соотношениям:

уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i} = \overset{\circ}{F}_m \quad (\mathbf{x} \in \overline{\Omega} \setminus 0); \quad (1.1)$$

граничные условия

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0, \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad \overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{\sigma}_{22} = -p, \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2; \quad (1.2)$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0, \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (1.3)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad A_{ii} = \lambda + 2G; \quad A_{12} = \lambda;$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (1.4)$$

В соотношениях (1.1) – (1.4) обозначено:  $\overline{\Omega}$  – расчетная область;  $\overset{\circ}{F}_m$  – компонента массовой силы;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – точка расчетной области;  $A_{ij}$  – упругие постоянные (коэффициенты жесткости);  $G$  – модуль сдвига;  $\lambda$  – коэффициент Ламе. В (1.3)  $x = -0$  соответствует левому берегу трещины.

Задачу (1.1) – (1.4) запишем в операторной форме

$$\mathbf{A} \overset{\circ}{\mathbf{u}} = \overset{\circ}{\Phi} \quad \text{или} \quad A_m \overset{\circ}{\mathbf{u}} = \overset{\circ}{\Phi}_m; \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}; \quad (1.5)$$

$$A_m \overset{\circ}{\mathbf{u}} = \begin{cases} -\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i}, & \mathbf{x} \in \overline{\Omega}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{1m}, & |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \\ \overset{\circ}{u}_1 \wedge \overset{\circ}{\sigma}_{22}, & |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{1m}, & x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t; \end{cases} \quad \overset{\circ}{\Phi}_m = \begin{cases} \overset{\circ}{F}_m \\ 0 \\ \dots \\ 0 \wedge -p \\ 0 \end{cases}. \quad (1.6)$$

В (1.5), (1.6) дано запись операторного уравнения в векторной и координатной формах;  $F_m^0$  – компонента вектора объемной силы;  $-p^0$  – компонента поверхностной силы, действующая на границе  $x_2 = \text{const}$ .

1.2. Численное решение задачи упругости. Приближенное решение задачи получим на основе метода конечных разностей.

Сеточные уравнения строим при помощи модификации вариационно-разностного метода [6]. Модификация состоит в том, что используемый здесь функционал Лагранжа рассматриваем в области  $\omega_i$ , которую занимает базовая ячейка сетки. На шаблоне базовой ячейки функционал аппроксимируем и минимизируем. Базовая ячейка представляет собой произвольно принятую прямоугольную ячейку на обычной сетке. На рис. 2 показано, что область  $\bar{\Omega}$ , которую занимает пластина, представлена объединением прямоугольных областей.

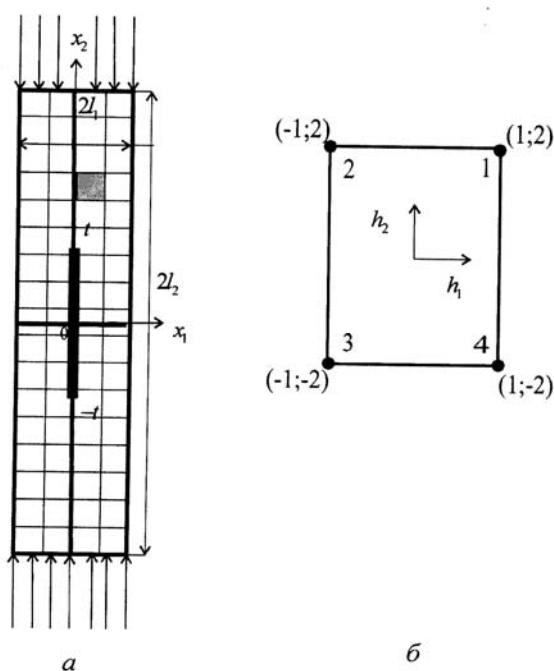


Рис. 2

Пусть обычная сетка (рис. 2, а) имеет  $N$  узлов и  $M$  ячеек. Заметим, что трещина учитывается тем, что сеточная область  $\bar{\omega}$  разделяется на четыре прямоугольные области. При наличии большего числа трещин (параллельных координатным осям) область  $\bar{\omega}$  разделяем на большее число прямоугольных областей.

На обычной сетке выбираем произвольную ячейку сетки  $\bar{\omega}$  (на рис. 2, а она выделена), называемую базовой ячейкой. Наличие базовой ячейки предполагает, что она однородна. Базовая ячейка, а значит и базовая схема однородны (все ячейки сетки  $\bar{\omega}$  обрабатываем по одному правилу).

На базовой сетке введены обозначения (рис. 2, б):  $\xi(\xi_i) = \xi(\xi_1, \xi_2) = \xi(\pm 1, \pm 2)$  – параметр (бииндекс) ячейки,  $\xi_i = \pm i, i \geq 0$ . Компонента  $\xi_i$  параметра  $\xi$  соответствует направлению координаты  $x_i$ . При переходе к соседней точке компонента  $\xi_i$  меняет знак на  $-\xi_i$ , т.е.  $\xi_i$  меняется на  $\xi_{-i} = -\xi_i$  (рис. 2, б); параметр  $\xi$  упорядочен следующим образом:  $\xi = \{(1, 2), (-1, 2), (-1, -2), (1, -2)\}$ .

Сеточная векторная функция  $z(\xi) = (z_1, z_2)$  в узлах ячейки обозначена следующим образом:  $z = z^{\xi_0} = z(\xi) = z(\xi_1, \xi_2)$  – значение  $z$  в узлах  $\xi_0$ . Символ  $\xi_0$  означает рассматриваемый (или несдвинутый) узел;  $z^{-\xi_i} = z(-\xi_i, \xi_{3-i}) = z(\xi_{-i}, \xi_{3-i})$  – функция  $z$  в узле, соседнем с узлом  $\xi$ , по направлению с узлом  $ox_i$  (сдвинутый узел);  $z^{-\xi_1 - \xi_2}$  – функция  $z$ , сдвинутая по обоим направлениям.

Ячейку наделяем также геометрическими характеристиками (она имеет площадь  $h = h_1 \cdot h_2$ , где  $h_i$  – шаг сетки в направлении  $ox_i$ ) и техническими постоянными  $(E, \nu)$  материала, который ее заполняет.

Ячейка сетки занимает область  $\omega_h = h = h_1 \cdot h_2$ . На шаблоне ячейки  $\omega_h$  сетки вводим величины  $\tau_{ij}, e_{ij}, y_m$  – аналоги континуальных величин  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_m$ . Остальные сеточные величины обозначаем так же, как и соответствующие континуальные величины. Разностный аналог закона Гука (1.4) записываем в форме

$$\tau_{ii} = A_{ik} e_{kk}; \quad \tau_{12} = 2G e_{12}; \quad e_{12} = 0,5(y_{i, \xi_j} + y_{j, \xi_i}), \quad (1.7)$$

$$y_{i, \xi_j} = \frac{y_i^{-\xi_j} - y_i}{\eta_{\xi_j}} \quad \text{или} \quad y_{i, \xi_j} = -\text{sign}(\xi_j) \frac{y_i^{-\xi_j} - y_i}{h_{\xi_j}} \quad (1.8)$$

– разностная производная по направлению  $ox_i$ , правая при  $\xi_i < 0$ . В (1.8) обозначено:  $\eta_{\xi_j} = -\text{sign}(\xi_j) h_{\xi_j}$  – знакопеременный шаг ячейки;  $h_{\xi_j} = -\text{sign}(\xi_j) \eta_{\xi_j} > 0$  – знакопостоянный шаг. В силу знакопостоянности шага сетки имеет место соотношение  $h_{\xi_j} = h_{-\xi_j} = h_{\xi_j} > 0$ .

*1.3. Построение сеточных уравнений задачи теории упругости.* При построении сеточных уравнений удобнее всего начинать построение произвольной задачи с первой основной задачи. После построения базовой схемы, соответствующей первой задаче, базовую схему реальной задачи получаем заменой аппроксимации граничного условия в напряжениях  $\tau_{ij} = p_{ij}$ ,  $x \in S_{\tau_{im}}$  на аппроксимацию реальных граничных условий. Заменяем в (1.6) условие  $u_1 = \overset{\circ}{U}_1$  на условие  $\overset{\circ}{\tau}_{21} = \overset{\circ}{p}_{21}$ , а объемная сила  $F_m = 0$ . Запишем функционал Лагранжа, соответствующий первой задаче теории упругости (знак „ $\circ$ ” сверху опускаем);

$$\begin{aligned} I = (\mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2(\Phi, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} A_m u_m \cdot u_m d\Omega - 2 \int_{S_{\sigma_m}} p_{im} \cdot u_m ds = \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - 2 \int_{S_{\sigma_m}} p_{im} \cdot u_m ds. \end{aligned}$$

$$I = \int_{\Omega} \left\{ A_{11} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + A_{22} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + G \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\} d\Omega - 2 \int_{S_{\sigma_m}} p_{im} u_{im} dS_{\sigma_m}. \quad (1.9)$$

Функционал (1.9) выписываем на шаблоне базовой сетки и аппроксимируем по формуле обобщенных трапеций, что приводит базовую схему к однородной. Тогда имеем равенства:

$$I_h = \sum_{k=0}^2 \{ A_{11} y_1^2{}_{, \xi_1} + A_{22} y_2^2{}_{, \xi_2} + 2A_{12} y_1{}_{, \xi_1} y_2{}_{, \xi_2} + G(y_1{}_{, \xi_2} + y_2{}_{, \xi_1})^2 \} h. \quad (1.10)$$

Из минимума функционала  $I_h$  в произвольном узле ячейки сетки  $\xi (\xi_1, \xi_2)$  получим однородную базовую операторную схему  $c(\xi)$

$$c(\xi) = a(\xi)y - \varphi(\xi) = 0, \quad (1.11)$$

которую записываем так:

$$a(\xi)y = \varphi(\xi) \text{ или } a_{im}(\xi)y_h = \varphi_m(\xi). \quad (1.12)$$

Разностные операторы  $a(\xi)$  и  $a_{im}(\xi)$  называют, соответственно, базовым оператором и компонентой базового оператора, а величины  $\varphi$  и  $\varphi_m$  – разностной функцией и ее компонентой.

В результате минимизации функционала получим следующие выражения для составляющих базовой схемы:

$$a_{im}(\xi)y_i = -h \frac{\tau_{im} + \tau_{im}^{-\xi_i}}{\eta_{\xi_i}} \quad (\xi \in s); \quad \varphi_m = -\text{sign}(\xi_i) \left( F_m + \frac{2}{h_i} P_m \right). \quad (1.13)$$

Базовую функцию  $\varphi_m(\xi)$  для  $\xi \in s_{\tau_{im}}$  определяем из базового оператора  $a_{im}(\xi)$  разложением функции  $\tau_{im}^{-\xi_i}$  в ряд Тейлора с удерживанием двух членов разложения и использования затем уравнения равновесия  $-\partial\sigma_{im}/\partial\xi_i = 0$  (так называемая аппроксимация на решении [8]).

Получим представление  $\varphi_m(\xi)$ . Фиксируем произвольную координату  $\xi$  ячейки. На шаблоне ячейки в окрестности точки  $\xi(\xi_1, \xi_2)$  разложим составляющие базовой схемы в ряд Тейлора, удерживая два члена разложения. Получим последовательно с точностью до  $0(h_i)$

$$a_{im}(\xi)y_m = -h \frac{\tau_{im}(\xi) + \tau_{im}(\xi)^{-\xi_i}}{\eta_{\xi_i}} = -h \frac{\tau_{im}(\xi) - \tau_{im}(\xi)^{-\xi_i}}{\eta_{\xi_i}} = \frac{h}{\eta_{\xi_i}} \left( h_i \frac{\partial\sigma_{im}}{\partial\xi_i} - 2\sigma_{im} \right);$$

$$a_{im}(\xi)y_m = \varphi_m(\xi) = \frac{h}{\eta_{\xi_i}} \left( h_i \frac{\partial\sigma_{im}}{\partial\xi_i} - 2\sigma_{im} \right).$$

Если рассматриваемый узел  $\xi$  принадлежит границе  $\xi \in s_{\sigma_m}$ , то  $\sigma_{im} = P_m$  в силу того, что базовая ячейка прямоугольная и грани ячейки параллельны координатным осям (рис 2, б). В соответствии с уравнениями равновесия в области  $\omega_h$ , которую занимает ячейка сетки, имеем  $-\partial\sigma_{im}/\partial\xi_i = F_m$ . Поэтому последнее соотношение принимает вид

$$a_{im}(\xi)y_m = \varphi_m(\xi) = \frac{h}{\eta_{\xi_i}} (h_i F_m + 2P_m).$$

Последнее уравнение запишем также через переменную  $h_i$ . Имеем последовательно:

$$\begin{aligned} \varphi_m(\xi) &= -\frac{h}{\eta_{\xi_i}} (h_i F_m + 2P_m) = \frac{-h}{-\text{sign}(\xi_i) h_i} (h_i F_m + 2P_m) = \frac{-h \text{sign}(\xi_i) h_i}{(\text{sign}(\xi_i) h_i)^2} (h_i F_m + 2P_m) = \\ &= -\frac{h}{h_i} \text{sign}(\xi_i) (h_i F_m + 2P_m) = \text{sign}(\xi_i) h (F_m + 2(P_m/h_i)); \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$a_{im}(\xi)y_m = -\text{sign}(\xi_i) h (F_m + 2(P_m/h_i)).$$

Из базовой операторной схемы выписывается в явном виде глобальная разностная схема.

Поскольку конструкция тонкостенная, то для получения достаточно точных результатов при определении критических параметров устойчивости целесообразно использовать процедуру оптимизации расчетов. Для этого, кроме базовой операторной схемы, используем базовую матричную схему [1].

*Базовая матричная схема.* Она строится на основе базовой операторной схемы. Запишем базовый оператор в форме  $a(\xi)y = a \cdot y$ . Таким образом, имеем систему алгебраических (матричных) уравнений

$$[a] \cdot y = \varphi. \quad (1.15)$$

В (1.15) матрица  $[a]$  называется базовой матрицей, она блочная и записывается в виде  $[a] = (a_{im})$ , где  $(a_{im})$  – базовые блоки. Это – квадратные матрицы четвертого порядка (по числу компонент бииндекса  $\xi$  (рис 2, б)). Вектор  $\varphi$  называем базовым вектором. Компонентная форма записи (2.10) имеет вид

$$[a_{im}] y_i = \varphi_m \quad (i, m = 1, 2), \quad (1.16)$$

где  $\varphi_m$  –  $m$ -ая компонента базового вектора  $\varphi$ , которая определяется из (1.14);  $a_{im}(\xi)y_i$  определяем как

$$\begin{aligned} a_{im}(\xi)y_i &= \frac{-h}{\eta_{\xi_i}^{\xi_i}} (\tau_{im} + \tau_{im}^{-\xi_i}) = \frac{-h}{\eta_{\xi_i}^{\xi_i}} \{ \delta_{im} A_{ik} (y_{k, \xi_k} + y_{k, \xi_k}^{-\xi_i}) + (1 - \delta_{im}) G_{im} \times \\ &\quad \times (y_{i, \xi_m} + y_{i, \xi_m}^{-\xi_i} + y_{m, \xi_i} + y_{m, \xi_i}^{-\xi_i}) \} = \\ &= 2 \frac{h_{3-m}}{h_m} A_{m, 3-m} (y_{3-m, \xi_{3-m}} + y_{3-m, \xi_{3-m}}^{-\xi_{3-m}} + y_{m, \xi_i}^{-\xi_i}) + \frac{h_m}{h_{3-m}} G (y_{m, \xi_{3-m}} + y_{m, \xi_{3-m}} + y_{3-m, \xi_m}^{-\xi_m}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

*1.4. Постановка задачи устойчивости.* Для определения критических параметров следует определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение  $(p, \mathbf{u})$  спектральной задачи, удовлетворяющей следующие уравнения:

уравнения в возмущениях

$$\begin{aligned} A_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + G \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (A_{12} + G) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \overset{\circ}{\sigma}_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \overset{\circ}{\sigma}_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right\} = 0; \\ A_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + G \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (A_{21} + G) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + p \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \overset{\circ}{\sigma}_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \overset{\circ}{\sigma}_{21} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \overset{\circ}{\sigma}_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \right\} = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}; \end{aligned} \quad (1.18)$$

граничные условия

$$u_1 = 0 \wedge A_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + p \overset{\circ}{\sigma}_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (|x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2);$$

$$A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \wedge \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (|x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2); \quad (1.19)$$

условия на сторонах трещины

$$A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \wedge \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t). \quad (1.20)$$

Закон Гука соответствует соотношениям (1.4), в которых следует опустить индекс «0». Критическую нагрузку определяем согласно формуле

$$p^{kp} = \frac{P}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} p(x_1) dx_1. \quad (1.21)$$

Задача (1.18) – (1.21) является некорректной, т.к. имеется простое нулевое собственное решение

$$\{p_0, \mathbf{u}_0\} = \{0, (0, c)\} \quad (c = \text{const}). \quad (1.22)$$

Для разрешимости задачи (1.18) – (1.21) необходимо выполнение равенства

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0 d\Omega = 0, \quad (1.23)$$

которое с учетом (1.23) сводится к виду

$$\int_{\Omega} u_2 d\Omega = 0. \quad (1.24)$$

Задача (1.18) – (1.21), (1.24) является полностью определенной и поэтому критические параметры пластины соответствуют первым собственным решением, т. е.

$$p^* = p_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1.$$

## §2. Числовые результаты и их анализ.

Для приближенного решения задачи упругости используем метод Холецкого и метод сопряженных градиентов [7], а для приближенного решения уравнений ТЛУДТ используем метод итерирования подпространства и градиентный метод [8].

Рассматриваем изотропную линейно-упругую пластину с техническими постоянными  $E = 250$  ГПа,  $\nu = 0,25$ . Геометрические характеристики изменяются в пределах  $0,05 \leq a \leq 0,3; t < 1$ . Результаты численного решения задачи представлены на рис. 3 – 6.

На основе результатов решения задачи установлено, что при  $0,1 \leq a < 0,3$  берега трещины раскрываются в начальном состоянии (рис. 3) и не взаимодействуют (нет рас-

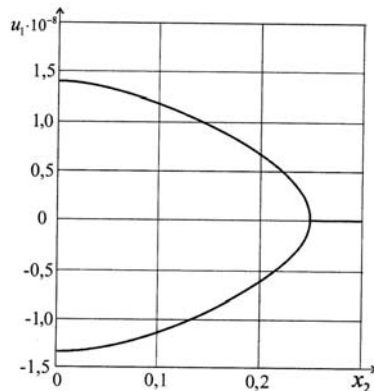


Рис. 3

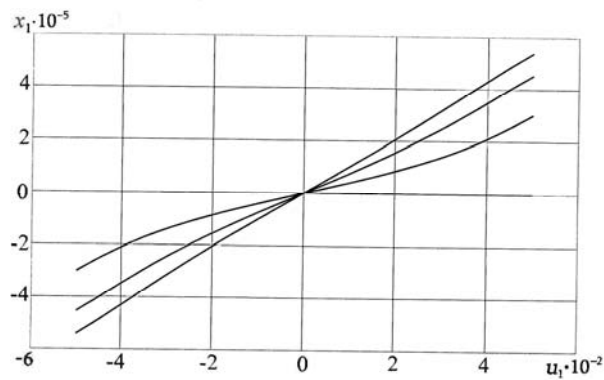


Рис. 4



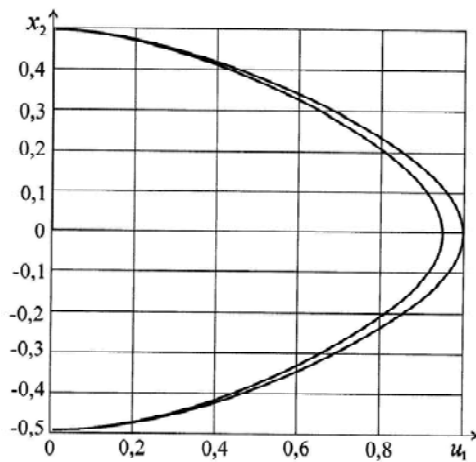


Рис. 5

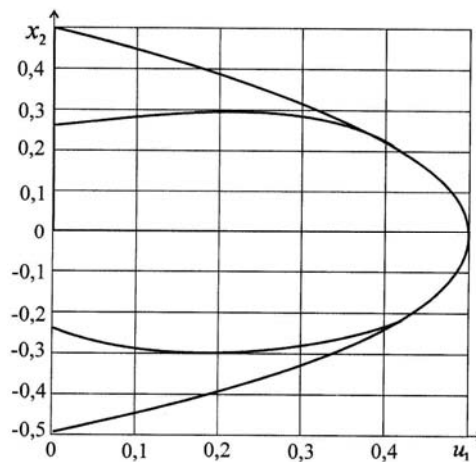


Рис. 6

крытия и надавливания) в возмущенном состоянии. При  $a = 0,3$  и  $t \geq 0,8$  берега трещины взаимодействуют в начальном состоянии и в возмущенном. На рис. 4 показаны графики функций  $u_1(x_1)$  при  $x_2 = \text{const}$ . Видно, что неоднородность сохраняется при  $u_1(x_1, 0 \leq x_2 < 0,475)$ . На рис. 5 представлена форма потери устойчивости пластины. Кривые 1, 2 соответствуют функциям  $u_1(x_2)$  в сечениях  $x_1 = \text{const}$ . Функция  $u_1(x_1, x_2)$  достаточно точно описывается формулой

$$u_1(x_1, x_2) = A(x_1) \cos(\pi x_2 / 2l_2) \quad (2.1)$$

Функция четная и принимает максимальное значение в точке  $x = (0, 0)$ , а минимальное – в точках  $x = (0, \pm l_2)$ .

Для случая однородного и неоднородного основных состояний установлены следующие результаты, являющиеся качественно различными: при однородном начальном состоянии трещина не раскрывается до момента потери устойчивости, а при неоднородном – берега трещины расходятся; в случае однородного начального состояния форма потери устойчивости (возмущения смещений) не приводит к надавливанию или раскрытию берегов трещины во всем интервале ее изменения, а при неоднородном начальном состоянии для  $a = 0,3 \wedge t \geq 0,8$  возмущения смещений представляют собой раздвоенную по линии трещины пластину (рис. 6).

Для случая однородного и неоднородного основных состояний установлены следующие качественно одинаковые результаты: в возмущенном состоянии берега трещины имеют вертикальное смещение. При этом одна сторона трещины является растянутой, а другая – сжатой. Формы потери устойчивости в сечении  $x_1 = \text{const}$  для компоненты  $u_1(x_2)$  достаточно точно описывают косинусоиду; амплитуда  $A(x_1)$  является нелинейной функцией и достигает максимума (минимума) при  $x = (0, 0)$  (при  $x = (0, \pm l_2)$ ).

При решении задачи установлено, что неоднородность незначительно (менее 5%) уменьшает значения критической нагрузки. Для  $a = 0,1$  имеем:  $P_{\text{кр}}^H = 2,052$ ;  $P_{\text{кр}}^o = 2,091$  ( $\approx 2\%$ ).

#### Заключение.

Дана постановка и получено решение задачи о трехмерной устойчивости шарнирно закрепленной (в интегральной форме) пластины, находящейся в условиях одноосного сжатия и неоднородного начального состояния. Приближенное решение получено модифицированным вариационно-разностным методом. Проведен сравнительный анализ результатов для однородного и неоднородного основных состояний. Выявлены механические эффекты, обусловленные наличием неоднородности начального напряженного состояния.

РЕЗЮМЕ. У рамках точного підходу дано постановку та розв'язок плоскої задачі стійкості шарнірно закріпленої (в інтегральній формі) пластини з центральною тріщиною. Пластина перебуває при стиску вздовж напрямку тріщини поверхневим навантаженням постійної інтенсивності у неоднорідному докритичному стані. Виявлено механічні ефекти, які зумовлені наявністю неоднорідності основного напруженого стану.

1. *Гладун Е.Ю.* Зависимость критической нагрузки от геометрических характеристик шарнирно закрепленной пластины с трещиной // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 9. – С. 112 – 122.
2. *Гладун Е.Ю., Гузь А.Н., Коханенко Ю.В.* Оценка погрешности балочного приближения в плоской задаче устойчивости прямоугольной пластины с центральной трещиной // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 11. – С. 117 – 126.
3. *Гузь А.Н., Гладун Е.Ю.*, О трехмерной устойчивости пластин с трещиной // Прикл. механика. – 2001. – **37**, № 10. – С. 53 – 62.
4. *Гузь А. Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.
5. *Гузь А. Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
6. *Коханенко Ю.В.* Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 5. – С. 29 – 45.
7. *Парлет Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Пер. с англ. – М: Мир. – 1983. – 384 с.
8. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решений сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 601 с.
9. *Abromovich H., Zarutskii V.A.* On Influence of the Rigidity of Ribs at Oscillation and Stability of Unclosed Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 10. – P. 866 – 876.
10. *Babich I.Yu., Zhukova H.B., Semenyuk N.P., Trach V.M.* The Stability of Transverse Corrugated Cylindrical Shells at Outer Pressure // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 8. – P. 1101 – 1111.
11. *Babich I.Yu., Zhukova H.B., Semenyuk N.P., Trach V.M.* The Stability of Transverse Corrugated Pressure // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 9. – P. – 906 – 917.

Поступила 06.10.2010

Утверждена в печать 22.11.2012