

Л. П. Хорошун<sup>1</sup>, Л. В. Назаренко<sup>2</sup>

**ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С АНИЗОТРОПНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ (ОБЗОР)**

<sup>1</sup> *Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,*

*ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

<sup>2</sup> *Институт материаловедения, механики материалов, Гельмгольц-Центр,*

*Макс-Планк штр. 1, 21502, Гестахт, Германия; e-mail: Lidia.Nazarenko@hzg.de*

**Abstract.** A statistical model is proposed for the coupled deformation and damage of composites with porous transversally isotropic and orthotropic components. A mechanism of damage of the composites is studied basing on assumption that the micro-strength of material is inhomogeneous. The single micro-damage is modeled by the formation of an empty quasi-spherical pore at the place of micro-volume, which is damaged according to the Huber-Mises criterion. The microstrength limit is assumed to be a random function of coordinates. The one-point distribution function is described by the Weibull distribution. Basing on the conditional moments method, balance equations of material damage and the Newton-Raphson method, the algorithm of evaluation of effective deformation characteristics of composite materials is built depending on macro-deformations. The general regularities of effect of the material damage on a link between macro-stresses and macro-strains are established. An effect of physical-mechanical properties of material, the volume fraction and porosity of components, geometrical parameters of structure and the character of distribution of micro-strength on the damage of material and as a consequence on the macro-deformation curves is analyzed.

**Key words:** discrete-fibrous composite material, stochastic structure, anisotropic components, stress-strain state, micro-damage, porosity, effective characteristics, porosity balance equation.

**Введение.**

Основной задачей механики композитных материалов является исследование закономерностей их механического поведения в зависимости от свойств компонентов и геометрических параметров структуры с целью определения оптимальных структурных параметров и необходимого состава материала, для обеспечения оптимальной работы конструкций при минимальных технологических затратах.

Многие современные композитные материалы имеют анизотропные компоненты, а также при достаточно высоких нагрузках некоторые пористые композитные материалы деформируются нелинейно (так называемая структурная нелинейность), где нелинейность обусловлена микроразрушениями в скелетах их компонентов, которые проявляются в виде увеличения числа микропор или микротрещин. К ним относятся полимерные композитные материалы при низких температурах, композиты на основе углеродного связующего, а также керамические композитные материалы. Микроразрушения в компонентах композитного материала можно описать зависимостью соответствующих модулей упругости от их пористости, которая, в свою очередь, зависит от деформаций в компонентах.

Основным фактором, приводящим к нелинейности деформирования при микроразрушениях, является перераспределение напряжений в компонентах вследствие исчерпания несущей способности материала в области микроразрушений. Реальное единичное микроразрушение представляет собой микротрещину или микропору, заполненную частицами разрушенного материала. Если пренебречь остаточным сопротивлением разрушенного материала, заполняющего микропоры, и частью материала в

окрестности трещины, которая не работает при нагружении, то приходим к самой простой модели участков микроразрушений – системе пустых пор.

Накопление повреждений является весьма сложным физическим процессом, зависящим, прежде всего, от уровня и вида напряженно-деформированного состояния, температуры, химических и радиационных воздействий, структуры и механических свойств материала. Экспериментальные данные и наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки.

Конкретный характер повреждений в виде рассеянных субмикротрещин, их размеры и форма, зависимость от режимов нагружения достаточно хорошо изучены для полимерных материалов [45, 46]. Основные закономерности образования повреждений в ряде полимеров сводятся к следующему. Размеры субмикротрещин практически не зависят от деформации, величины приложенного напряжения, а также от времени пребывания образца под нагрузкой. Отношение продольного по отношению к направлению растяжения размера субмикротрещины к поперечному для различных полимеров находится в пределах от 0,4 до 1,3. Определенному значению растягивающей деформации соответствует определенное содержание субмикротрещин, которое возрастает с увеличением деформации. При этом субмикротрещины образуются, начиная только с некоторого значения деформации. Если задано растягивающее напряжение, то определенное число субмикротрещин, соответствующее величине напряжения, образуется в начальный момент, затем происходит накопление субмикротрещин во времени. При этом вначале его скорость велика, а с течением времени уменьшается. Скорость накопления субмикротрещин и уровень их объемного содержания, увеличивающийся с течением времени, возрастают с ростом величины приложенного напряжения. При малых напряжениях, не превосходящих 0,5 от разрывного, накопление субмикротрещин практически не наблюдается в течение довольно большого промежутка времени.

Физически объяснить описанные выше экспериментальные закономерности микромеханики разрушения полимеров можно на основе статистических представлений. На микроскопическом уровне прочность материала является неоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. При действии на макрообразец постоянного растягивающего напряжения часть микрообъемов, предел прочности которых ниже приложенного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микрополости. На тех микроучастках, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости приложенного напряжения к пределу микропрочности. С течением времени микроучастки с пределами прочности, близкими к приложенному напряжению, исчерпываются и накопление повреждений затухает. С увеличением напряжения в процесс микроразрушений вовлекаются новые микроучастки с более высокими пределами микропрочности. При этом интенсивность процесса возрастает за счет перераспределения микронапряжений вследствие исчерпания несущей способности разрушенных микроучастков.

Изучению процесса накопления микроразрушений в материалах посвящены многочисленные работы. Оно проводилось, в основном, в *трех направлениях*. В работах *первого направления* рассматриваются субмикротрещины, возникающие в материалах при нагружении, как источник их разрушения, и строятся модели разрушения материалов вследствие накопления микроповреждений. Статистические модели разрушения однородных и композитных материалов построены в работах В. Вейбулла [121], Н.Н. Афанасьева [3], Т.А. Конторовой, Я.И. Френкеля, О.А. Тимошенко [18, 19], В.В. Болотина [4], С.Д. Волкова [7], Н.Н. Давиденкова [13], В.П. Когаева [16], Л.Г. Седра-

кьяна [41], С.В. Серенсена [42], Н.К. Снитко [43], Я.Б. Фридмана [47], Б.Б. Чечулина [51], Е.М. Шевадина [52], М.-Н. Berger, D. Jeulin [55], W.A. Curtin [67, 68], G. Cusatis, Z. Bazant, L. Cedolin [69], F. Desrumaux, F. Meraghni, L. Benzeggagh [70], Y.T. Zhu, W.R. Blumenthal, B.L. Zhou [129] и др.]

Наиболее известной статистической теорией усталостной прочности металлов является теория Н.Н. Афанасьева [3], где предполагается, что усталостная трещина возникает в результате объединения в единое целое ряда микроразрушений в отдельных перенапряженных вследствие неоднородности процесса деформирования зернах. Предполагается, что зерна в направлении действующей силы имеют одинаковый предел текучести, но различно напряжены. Степень неоднородности напряженного состояния зерен задается в виде функции распределения. Причиной разрушения отдельных зерен, испытывающих напряжения выше предела текучести, в момент достижения нормальными напряжениями сопротивления материала отрыву является упрочнение, вызванное циклической нагрузкой.

Весьма широкое распространение получили статистические теории хрупкой прочности, основанные на гипотезе «слабого звена». К таким работам отнесены работы В. Вейбулла [121], Т.А. Конторовой, Я.И. Френкеля, О.А. Тимошенко [18, 19], В.В. Болотина [4], В.П. Когаева [16], Л.Г. Седракияна [41], Б.Б. Чечулина [51], М.-Н. Berger, D. Jeulin [55], W.A. Curtin [67, 68], F. Desrumaux, F. Meraghni, L. Benzeggagh [70], Y.T. Zhu, W.R. Blumenthal, B.L. Zhou [129] и др. В них предполагается, что тело состоит из большого количества структурных элементов. Разрушение каждого элемента есть случайное событие, независимое от состояния соседних элементов. Элемент разрушается, когда некоторая характеристика (напряжение, деформация и др.) превышает значение его прочности. Прочность элементов является случайной функцией с заданным распределением (распределение Вейбулла, нормальное распределение или логарифмическое нормальное распределение). Источником разрушения может стать элемент низкой прочности («слабое звено»). Его разрушение вызывает быстро распространяющееся разрушение всего тела независимо от его размеров. Чем крупнее тело, тем больше вероятность обнаружить элемент низкой прочности, тем ниже прочность тела в целом (так называемый «масштабный эффект»).

Предложены такие подходы, представляющие синтез экспериментального изучения разрушения композитных материалов с построением теоретических моделей развития процессов разрушения в них. Так в работах Тамужа В.П., Куксенко В.С. и др. [23, 44 – 46, 117] на основе экспериментального изучения закономерностей зарождения, образования и укрупнения субмикротрещин в материале с использованием методов микромеханики построена статистическая модель кинетики разрушения материалов. Для характеристики разрушенности материала был введен в уравнения состояния дополнительный параметр – мера поврежденности. Для него построено дополнительное уравнение, определяющее кинетику разрушения. Изучено напряженно-деформированное состояние в материале с развитием его поврежденности. И.М. Копьев, А.С. Овчинский и др. [20] изучили различные механизмы микроразрушений в волокнистых композитах. Критерии срабатывания этих механизмов они получили на основе анализа перераспределения напряжений в композите при разрыве отдельных волокон. Перераспределение напряжений в волокнистом композите при разрыве волокон и скольжении по границам волокно – матрица изучены в [62, 63] и др.

В работах [39, 55, 57, 70, 71 и др.] построены также статистические модели деформирования и разрушения материала. В этих работах процесс разрушения материала рассматривается как процесс постепенного накопления повреждений в нагружаемой системе структурных связей в соответствии со случайным характером их прочности. Рассматривается распределение Вейбулла и др. для прочностей элементарных связей. Напряжения последовательно перераспределяются на уцелевшие после начала актов разрушения связи. Изучена взаимосвязь напряжений и деформаций с функцией вероятности разрушения элементарных структурных связей.

В работах *второго направления* для характеристики разрушенности материала формально вводят параметр поврежденности, который может быть скаляром или тензором. Точный физический смысл параметра поврежденности не всегда указывается, часто не может быть однозначно определен и зависит от способа изменения характеристик материала, изменяющихся в процессе нагружения. Наиболее часто параметр поврежденности идентифицируется с плотностью микротрещин в окрестности рассматриваемой точки или с относительным количеством разрушенных связей, но может рассматриваться как усредненные по локальному объему перемещения поверхностей трещин, относительная площадь расслоения компонентов и др. Формулируются эволюционные уравнения, устанавливающие связь между изменением параметра поврежденности и макронапряжениями или макродеформациями. К таким работам относятся работы [В.П. Голуба [8 – 10], Л.М. Качанова [14], Дж. Коллинза [15], Е.С. Переверзева [37], Ю.Н. Работнова [38], J.-L. Chaboche [63] и др.].

В работах *третьего направления* повреждаемость материала трактуется как термодинамический параметр, который может быть скаляром или тензором; затем авторы пользуются формализмом термодинамических потенциалов, составляют балансовые соотношения термодинамики и из условия существования связей между термодинамическими силами и потоками формально записывают соотношения между напряжениями или деформациями и рассматриваемыми параметрами поврежденности. К работам этого направления относятся работы [В.Н. Аптукова, В.Л. Белоусова [1, 2], А.А. Вакуленко, Л.М. Качанова [5], В.И. Кондаурова [17], С.А. Лурье [24, 25], S. Chandrakanth, P.C. Pandey [64] и др.].

Для прогнозирования механического поведения композитных материалов наряду с изучением процесса накопления микроповреждений необходимо исследовать изменения эффективных упругих свойств материалов при происходящих в них микроразрушениях. Этому вопросу посвящен ряд работ. Как и в случае изучения процесса накопления повреждений, исследования проводились, в основном, в *трех направлениях*. В работах *первого направления* изменение упругих свойств поврежденного материала связывается с предположением о конкретной форме и размере микроразрушений или же их объемном содержании. В работах [В.П. Тамужа, В.С. Куксенко и др. [44 – 46, 117], Р.Л. Салганика [40], R.J. O'Connell, B. Budiansky [110] и др.] проведен расчет изменения упругих свойств поврежденного материала с изолированными невзаимодействующими плоскими дискообразными трещинами одинакового размера. В этих работах получены приближенные результаты, совпадающие с экспериментальными только при очень малых концентрациях микротрещин. У Р.Л. Салганика [40] расчет произведен путем усреднения деформаций по микрообъемам, содержащим по-разному ориентированные микротрещины. Этот способ расчета, по существу, соответствует схеме Рейсса. В [110] расчет произведен по аналогичной схеме, но при вычислениях использована самосогласованная модель, т.е. предполагалось, что микротрещина находится в среде с неизвестными константами уже дефектного материала. В работе [45] показан расчет упругих характеристик как по схеме Рейсса, так и по схеме Фойхта, причем в этих схемах он использовал также самосогласованную модель. При расчете по схеме Рейсса рассмотрена дополнительная деформация, возникающая под действием напряжений в поврежденном материале и зависящая от его поврежденности. Для получения результатов по схеме Фойхта исследовано снижение напряжений вследствие наличия трещин при постоянной деформации. Получены аналитические выражения для расчета упругих характеристик изотропного материала при возникновении в нем дискообразных трещин. Для анизотропного материала аналогичный расчет изменения жесткости в аналитическом виде может быть произведен в случае, когда нормаль к поверхности трещины совпадает с осью симметрии среды. В работе [109] рассчитано уменьшение жесткости трансверсально-изотропного композитного материала с однонаправленным армированием при наличии плоских круглых трещин. В работах [11, 44, 45, 117] предложены формулы для определения изменения модуля упругости и модуля сдвига трансверсально-изотропного однонаправленного волокни-

стого материала в результате разрыва волокон, причем каждый разрыв волокна отождествляется с появлением дискообразной микротрещины.

В ряде работ на основании стохастических моделей разрушения материалов с использованием методов осреднения получены зависимости плотности микропор или микротрещин от действующей нагрузки; установлено, что микроразрушения приводят к нелинейному характеру взаимосвязи между напряжениями и деформациями; исследовано влияние накопления микроразрушений на упругие свойства материалов. К ним относятся работы [О.Б. Наймарка [97], М.-Н. Berger, D. Jeulin [55], W.A. Curtin [67, 68], F. Desrumeaux, F. Meraghni, L. Benzeggagh [70] и др.].

В [97] с использованием результатов комплексных структурных и феноменологических исследований на основании статистической модели описан процесс накопления микротрещин и изучено их влияние на упругие и релаксационные свойства твердых тел: установлено, что процесс накопления микротрещин приводит к нелинейным деформационным свойствам при сжатии.

В работах [70 и др.] для изучения влияния поврежденности на упругие свойства композитов использованы стохастические модели и комбинация методов Эшелби и Мори – Танака; также рассматриваются повреждения сфероидальных волокон трех видов: полное дробление с образованием пустот сфероидальной формы; растрескивание с образованием дискообразных трещин, плоскости которых перпендикулярны действующему напряжению; отслоение от матрицы с образованием пустот сфероидальной формы, а также накопление повреждений, имеющих форму однонаправленных сфероидальных пор в матрице. Исследовано влияние повреждений на модуль упругости композита в процессе одноосного нагружения. Отмечено, что вследствие возникновения повреждений в изотропной матрице, она становится трансверсально-изотропной, что существенно усложняет численные расчеты тензора Эшелби при использовании метода Мори – Танака для определения эффективных деформативных свойств композитного материала с повреждениями.

Задачи о накоплении повреждений и определении упругих постоянных материала с регулярным распределением микротрещин при их взаимодействии рассмотрены в работе [111 и др.]. Авторы рассмотрели проблемы повреждаемости и определения упругих постоянных материала с большим количеством микротрещин. Они решали задачу о нахождении макрохарактеристик материала с учетом взаимодействия плоской периодической системы параллельных микротрещин, используя приближенный метод, согласно которому каждая трещина представляется уединенной, но под воздействием суммы нагрузок, генерируемых другими трещинами на месте расположения рассматриваемого дефекта. Макрохарактеристики поврежденной среды определяются путем осреднения.

В работах *второго направления* для характеристики разрушенности материала вводят параметр поврежденности, не имеющий точного физического смысла. К работам этого направления относятся работы В.П. Тамужа, В.С. Куксенко [46], V.A. Lubarda, D. Krajcinovic, S. Mastilovic [92] и др.]. В [46] расчет изменения упругих свойств поврежденного материала основан на формальном вычислении характеристик материала путем усреднения локально измененных свойств по всем возможным направлениям. В результате усреднения соотношений между локальными деформациями, напряжениями и поврежденностью получены соотношения между средними напряжениями и деформациями, содержащие меру поврежденности. К ним следует добавить кинетическое уравнение для поврежденности. Отсюда следует, что накопление микроповреждений в материале приводит к нелинейному характеру зависимостей между напряжениями и деформациями. Поскольку неизвестна плотность, форма и размеры микродефектов, то в соотношения между напряжениями и деформациями входят некоторые константы, которые определяются из опытов на простое нагружение. После определения этих констант можно предсказать изменение механических характеристик при других видах нагружения. В [92] рассмотрены материалы с различной прочностью при растяжении и сжатии. Для более точного учета влияния гид-

ростатического напряжения на усредненные свойства среды предложена новая структура поверхности поврежденности. Для случаев одноосного растяжения и сжатия получены нелинейные зависимости между напряжением, продольной, поперечной и объемной деформациями.

В работах *третьего направления* для изучения механического поведения однородных и композитных материалов в условиях накопления повреждений при нагружении авторы исходят из соотношений термодинамики и энергетических критериев разрушения. К этому направлению относятся [72, 76, 115, 116, 118, 127, 128 и др.].

В [115] на основе соотношений термодинамики получены определяющие и эволюционные уравнения упруго-хрупкого материала с анизотропными повреждениями и исследовано снижение упругой жесткости материала вследствие образования микропор и микротрещин. В [127, 128] построено уравнение, описывающее изменение параметра поврежденности, представляющего собой относительную долю микротрещин. Из энергетических соотношений получены условия скачкообразного роста микротрещин; эти условия связаны с напряженным состоянием в окрестности микротрещины и ее ориентацией. В результате суммирования вкладов от различно ориентированных микротрещин получено уравнение типа вязкоупругости, описывающее изменение жесткости материала в процессе нагружения. Для плоских деформированного и напряженного состояний даны выражения для инженерных модулей упругого тела с микротрещинами. В работе [118] изучено накопление повреждений в слоистом композите при растяжении или сдвиге в плоскости слоев. Теория основана на анализе напряженного состояния с использованием уравнений теории упругости и энергетическом критерии разрушения. Получены аналитические зависимости упругих характеристик от плотности трещин. В [116] рассмотрены следующие виды повреждений однонаправленно армированных волокнистых композитов: растрескивание матрицы, проскальзывание по поверхности раздела и расслоение поверхности раздела компонентов. При построении определяющих уравнений тензоры поврежденности рассматриваются как параметры состояния и включаются в число аргументов свободной энергии. Получены определяющие уравнения для фиксированного поврежденного состояния и выражения для упругих модулей, включающие параметры поврежденности. В [76] на основе функции диссипации с применением экстремальных принципов изучена поврежденность компонентов однонаправленного волокнистого материала и исследовано деформирование композита с учетом накопления повреждений в компонентах при нагружении. Для случаев одноосного нагружения получены нелинейные диаграммы деформирования и оценки поврежденности по изменению касательного модуля композита. В [72] разработана теория расчета снижения термоупругих характеристик слоистых и слоисто-волокнистых композитных материалов с трещинами в матрице. Метод основан на записи выражений для упругой энергии в терминах напряжений и деформаций с последующим вычислением вариационными методами тензоров жесткости и податливости. Получена достаточно узкая граница между верхней и нижней оценками термоупругих свойств композита.

Представленный краткий обзор исследований по определению эффективных деформативных свойств пористых композитных материалов и накоплению микроразрушений в компонентах в процессе нагружения показывает: в большинстве работ, посвященных построению моделей накопления микроразрушений в материалах и прогнозированию их эффективных деформативных свойств, микроразрушения предполагаются изолированными невзаимодействующими или же рассмотрены упрощенные самосогласующиеся схемы, причем исследования проведены при частных видах нагружения.

Наиболее адекватным реальным процессам повреждаемости представляется неформальное *первое направление*, которое исходит из микронеоднородности деформативно-прочностных свойств материала, приводящей при нагружении к образованию рассеянных микроразрушений. Стохастическая неоднородность микропрочности, присущая реальным материалам и описываемая вероятностными распределениями, позволяет объяснить и построить модель кратковременной (мгновенной) повреждае-

мости, проявляющейся при высоких нагрузках. Математическая теория кратковременной (мгновенной) повреждаемости [81, 82] основана на моделировании разрушенных микрообъемов материала системой стохастически расположенных микропор (пустых или наполненных частицами разрушенного материала) с описанием микродеформирования и эффективных упругих свойств пористого материала на основе стохастических уравнений теории упругости. Условием разрушения микрообъема принимается критерий Губера – Мизеса или Шлейхера – Надаи, где предел микропрочности является случайной функцией координат с заданным законом статистически однородного одноточечного распределения, удовлетворяющего свойству эргодичности. Исходя из общего свойства одноточечной функции распределения эргодического случайного поля предела микропрочности, сформулировано уравнение баланса микроповреждений (пористости), устанавливающее зависимость пористости от макронапряжений или макродеформаций. Совместные уравнения связи между макронапряжениями и макродеформациями, зависимостей эффективных упругих постоянных от пористости и баланса пористости описывают связанные процессы деформирования и повреждаемости материала, которые приводят к нелинейным зависимостям между макронапряжениями и макродеформациями. Закономерности связанных процессов деформирования и повреждаемости исследованы как для однородных [27, 81 – 83, 98, 99], так и для композитных материалов [28 – 34, 36, 84, 86 – 89, 100 – 104, 106 – 108] при силовых и температурных воздействиях в случае линейных и физически нелинейных соотношений упругости компонентов.

Построенная теория связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости материалов описывает взаимовлияние механических явлений, происходящих на различных структурных уровнях. В случае повреждаемости однородных материалов исследуется взаимовлияние процессов на двух структурных уровнях – макродеформирование пористого материала и микроразрушения в неповрежденной части материала. Если рассматривать макродеформирование композитных материалов и микроповреждаемость их компонентов, то здесь механические явления происходят на трех структурных уровнях – макродеформирование композита, состоящего из определенного числа компонентов, деформирование пористых компонентов и микроразрушения в неповрежденных частях компонентов. Принимая во внимание существующую классификацию и терминологию, сложившиеся в механике деформируемых твердых тел [81], есть все основания отнести рассматриваемую теорию связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости к одному из направлений мезомеханики, изучающей механические явления на различных структурных уровнях.

В настоящей работе систематизированы исследования по математическим моделям, применимым для описания связанных процессов деформирования и микроповреждаемости линейно-упругих композитных материалов стохастической структуры. В основу положены работы, выполненные в Институте механики Национальной Академии наук Украины на протяжении 2001 – 2012 годов.

## **§1. Деформативные свойства и кратковременная повреждаемость композитных материалов.**

### ***1.1. Уравнения механики композитных материалов стохастической структуры.***

Композитный материал стохастической структуры представляет собой микроненормальный материал, физико-механические характеристики которого являются случайными функциями координат.

Рассмотрим представительный объем  $V$  композитного материала. Задача о напряженно-деформированном состоянии в микроточке такого композитного материала при статическом нагружении в линейной постановке сводится:

к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}(x) + F_i(x) = 0 \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}); \quad (1.1)$$

соотношениям Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij}(x) = \lambda_{ijmn}(x) \varepsilon_{mn}(x) - \beta_{ij}(x) \theta; \quad \beta_{ij}(x) = \lambda_{ijmn}(x) \alpha_{mn}(x) \quad (m, n \in \{1, 2, 3\}); \quad (1.2)$$

$$\text{или } \varepsilon_{ij}(x) = (\lambda_{ijmn}(x))^{-1} \sigma_{mn}(x) - \alpha_{ij}(x)\theta; \quad (1.3)$$

соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij}(x) = u_{(i,j)}(x) \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)), \quad (1.4)$$

где  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x)$  – соответственно, тензоры напряжений и деформаций,  $u_i(x)$ ;  $F_i(x)$  – векторы перемещений и объемных сил;  $\theta$  – приращение температуры;  $\lambda_{ijmn}(x)$ ,  $\beta_{ij}(x)$ ,  $\alpha_{ij}(x)$  – тензоры модулей упругости, коэффициентов термических напряжений и коэффициентов линейного температурного расширения.

Тензоры  $\lambda_{ijmn}(x)$ ,  $\beta_{ij}(x)$ ,  $\alpha_{ij}(x)$  являются заданными статистически однородными случайными функциями координат, тогда одноточечная плотность распределения термоупругих характеристик имеет вид

$$f(\lambda_{ijmn}(x)) = \sum_{k=1}^2 c_k \delta(\lambda_{ijmn}(x) - \lambda_{ijmn}^{[k]}); \quad f(\alpha_{ij}(x)) = \sum_{k=1}^2 c_k \delta(\alpha_{ij}(x) - \alpha_{ij}^{[k]}), \quad (1.5)$$

где  $\lambda_{ijmn}^{[k]}$  – тензор модулей упругости  $k$ -го компонента;  $\alpha_{ij}^{[k]}$  – тензор коэффициентов термических напряжений  $k$ -го компонента;  $c_k$  – относительное объемное содержание  $k$ -го компонента,

$$c_k = \frac{V_k}{V}; \quad \sum_{k=1}^2 c_k = 1. \quad (1.6)$$

Подставляя соотношения (1.2), (1.4) в уравнение (1.1) при нулевых объемных силах  $F_i = 0$ , получаем уравнения равновесия в перемещениях

$$[\lambda_{ijmn}(x)u_{m,n}(x) - \beta_{ij}(x)\theta]_{,j} = 0. \quad (1.7)$$

Случайные поля  $\lambda_{ijmn}(x)$  и  $u_i(x)$  удобно представить в виде суммы флуктуации и математического ожидания

$$\lambda_{ijmn}(x) = \lambda_{ijmn}^c + \lambda_{ijmn}^0(x); \quad u_i(x) = \langle u_i \rangle + u_i^0(x) \quad (1.8)$$

$$(\langle u_i \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j), \quad (1.9)$$

а тензор  $\lambda_{ijmn}^c$  – некоторый тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами, называемый тензором тела сравнения, о выборе которого будет сказано ниже.

Подставив выражения (1.8) в уравнение (1.7), получим систему дифференциальных уравнений относительно флуктуаций перемещений

$$\lambda_{ijmn}^c u_{m,nj}^0(x) + (\lambda_{ijmn}^0(x)\varepsilon_{mn}(x) - \beta_{ij}(x)\theta)_{,j} = 0, \quad (1.10)$$

где  $u_m^0(x)$  и  $\lambda_{ijmn}^0(x)$  определяются соотношениями (1.8).

При этом граничные условия на поверхности макрообъема имеют вид

$$u_i(x)|_S = \langle \varepsilon_{ij} \rangle x_j. \quad (1.11)$$

Из соотношений (1.8), (1.9) и (1.11) следует, что на границе макрообъема флуктуации перемещений должны обращаться в нуль

$$u_i^0(x)|_S = 0. \quad (1.12)$$



Поскольку макрообъем композитного материала существенно превосходит размеры структурных элементов, то занимаемую им область можно рассматривать как бесконечную. Поэтому задача о напряженно-деформированном состоянии макрообъема композитного материала сводится к решению уравнения (1.10) для бесконечной области при условии, что на бесконечности выполняется условие

$$u_i^0(x)|_{\infty} = 0. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.10) можно представить в интегральной форме

$$u_i^0(x) = \int_V G_{ik}(x-y) [\lambda_{kijmn}^0(y) \varepsilon_{mn}(y) - \beta_{kj}(y) \theta]_j d^3y \quad (k \in \{1, 2, 3\}), \quad (1.14)$$

где функция Грина  $G_{ik}(x-y)$  удовлетворяет уравнению

$$\lambda_{ijmn}^c G_{mk,jn}(x-y) - \delta(x-y) \delta_{ik} = 0; \quad G_{mk}(x-y)|_{\infty} = 0. \quad (1.15)$$

Подставляя (1.14) в соотношения Коши (1.4) и учитывая представление (1.8), получим стохастические интегральные уравнения относительно случайного поля микродеформаций

$$\varepsilon_{ij}(x) = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + K_{ijkl}(x-y) * [\lambda_{klmn}^0(y) \varepsilon_{mn}(y) - \beta_{kl}(y) \theta] \quad (l \in \{1, 2, 3\}). \quad (1.16)$$

В этом уравнении интегральный оператор  $K_{ijkl}(x-y)$  действует в соответствии с правилом

$$\begin{aligned} K_{ijkl}(x-y) * \psi(y) &= \frac{1}{2} \int_V [G_{ik,jl}(x-y) + G_{kj,li}(x-y)] \psi(y) d^3y + \\ &+ \frac{1}{2} \oint_S [G_{ik,j}(x-y) + G_{jk,i}(x-y)] \psi(y) n_l(y) d^2y, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где  $S$  – бесконечно удаленная граница области  $V$ ;  $n_l$  – направляющие косинусы нормали к ней.

### **1.2. Теория эффективных модулей композитных материалов стохастической структуры.**

Если считать, что тензорные поля модулей упругости  $\lambda_{ijmn}(x)$  и коэффициентов термических напряжений  $\beta_{ij}(x)$  являются статистически однородными на расстояниях, значительно превосходящих характерные размеры неоднородностей, тогда микронапряжения  $\sigma_{ij}(x)$  и микродеформации  $\varepsilon_{ij}(x)$  будут также статистически однородными. Так как масштаб корреляции случайных полей  $\lambda_{ijmn}(x)$ ,  $\beta_{ij}(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$  и  $\varepsilon_{ij}(x)$  пренебрежимо мал по сравнению с размерами макрообъема, то они удовлетворяют свойству эргодичности, т.е. осреднение случайных полей по области определения совпадает со статистическим осреднением по ансамблю реализаций. Принимая эти допущения композитный материал можно рассматривать как однородный материал с эффективными характеристиками [26, 48 – 50].

В связи с этим необходимо различать микро- и макропараметры. Микроточки – это элементарные объемы и площадки, размеры которых значительно превосходят молекулярные, но значительно меньше характерных размеров структурных элементов. Микропараметры, которые относятся к микроточке и, таким образом, характеризуют изменения на расстояниях, меньших структурных элементов. Под микроточкой будем понимать элементарный объем структурно-неоднородного тела, размеры которого значительно превосходят размеры структурных элементов, но значительно меньше размеров физического объекта. Макропараметры относятся к элементарному объему и представляют собой средние значения по элементарному объему от соответствующих микропараметров.

Наряду с тензорами микронапряжений  $\sigma_{ij}(x)$  и микродеформаций  $\varepsilon_{ij}(x)$ , векторами микроперемещений  $u_i(x)$  и объемных сил в микроточке  $F_i(x)$  можно ввести тензоры макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ , векторы макроперемещений  $\langle u_i \rangle$  и объемных сил в макроточке  $\langle F_i \rangle$  как среднее от соответствующих микропараметров по элементарному объему (для композитных материалов стохастической структуры по ансамблю реализаций). Тогда соответствующие уравнения статики относительно макроскопических параметров имеют вид:

уравнения равновесия

$$\langle \sigma_{ij} \rangle_{,j} + \langle F_i \rangle = 0; \quad (1.18)$$

соотношения термоупругости

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{ij}^* \theta; \quad \beta_{ij}^* = \lambda_{ijmn}^* \alpha_{mn}^* \quad (1.19)$$

$$\text{или } \langle \varepsilon_{ij} \rangle = (\lambda_{ijmn}^*)^{-1} \langle \sigma_{mn} \rangle - \alpha_{ij}^* \theta; \quad (1.20)$$

соотношения Коши

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \langle u_{(i} \rangle_{,j)} \equiv \frac{1}{2} (\langle u_i \rangle_{,j} + \langle u_j \rangle_{,i}), \quad (1.21)$$

где  $\lambda_{ijmn}^*$ ,  $\beta_{ij}^*$  и  $\alpha_{ij}^*$  – соответственно, тензоры эффективных модулей упругости, коэффициентов термических напряжений и коэффициентов линейного температурного расширения.

Эффективные термоупругие постоянные характеризуют свойства элементарных макрообъемов композитного материала, поэтому при статистически однородной структуре они будут независимыми от координат. Тогда задача (1.18) – (1.21) сводится к уравнениям с постоянными коэффициентами, решение которых строится известными аналитическими или численными методами. Задача же механики композитных материалов в этом случае состоит в определении эффективных постоянных.

Для определения эффективных свойств композитного материала необходимо решить задачу о напряженно-деформированном состоянии в микроточках макрообъема при условии, что он находится в условиях однородного статического нагружения и равномерного нагрева, т.е.  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \text{const}$ ;  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \text{const}$ ;  $\theta = \text{const}$ .

Проведя статистическое осреднение соотношений термоупругости (1.2), получаем

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijmn}^{[k]} \langle \varepsilon_{mn} |_k \rangle - \langle \beta_{ij} \rangle \theta, \quad (1.22)$$

где  $\langle \varepsilon_{mn} |_k \rangle = \langle \varepsilon_{mn}(x) |_{x \in V_k} \rangle$  – средние значения компонентов тензора деформаций по объему  $k$ -го компонента  $V_k$ .

Усредняя непосредственно тензор деформаций, можно записать

$$\langle \varepsilon_{mn} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \langle \varepsilon_{mn} |_k \rangle. \quad (1.23)$$

Сравнивая выражения (1.19) и (1.22), (1.23), видим, что для определения тензора эффективных упругих модулей  $\lambda_{ijmn}^*$  и коэффициентов температурных напряжений  $\beta_{ij}^*$  достаточно определить соотношения, связывающие средние деформации в ком-

поненте  $\langle \varepsilon_{mn} |_k \rangle$ , средние деформации в макрообъеме композита  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$  и приращение температуры  $\theta$ . Действительно, если такие соотношения имеют вид

$$\langle \varepsilon_{ij} |_k \rangle = A_{ijmn}^k \langle \varepsilon_{mn} \rangle + B_{ij}^k \theta, \quad (1.24)$$

то подставляя (1.24) в (1.22) и сравнивая с (1.19), получаем следующие выражения для эффективных модулей:

$$\lambda_{ijmn}^* = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijpq}^{[k]} A_{pqmn}^k; \quad \alpha_{ij}^* = \lambda_{ijmn}^{*-1} \beta_{mn}^*; \quad \beta_{ij}^* = \sum_{k=1}^2 c_k \lambda_{ijpq}^{[k]} B_{pq}^k. \quad (1.25)$$

Таким образом, задача об определении эффективных термоупругих постоянных сводится к определению тензоров  $A_{ijmn}^k$  и  $B_{pq}^k$ .

### 1.3. Метод условных моментов для определения эффективных термоупругих свойств композитов с анизотропными компонентами.

Изложим суть метода условных моментов, разработанного для решения задачи об эффективных термоупругих свойствах композитного материала стохастической структуры [26, 48 – 50].

Рассмотрим представительный объем  $V$  композитного материала, который состоит из матрицы, армированной стохастически распределенными однонаправленными эллипсоидальными включениями. Для сокращения дальнейших выкладок представим уравнение (1.16) в символической без индексной форме

$$\varepsilon^{(1)} = \langle \varepsilon \rangle + K(x^{(1)} - x^{(2)}) * [\lambda^{0(2)} \varepsilon^{(2)} - \beta_{ij}^{(2)} \theta] \quad (1.26)$$

$$(\varepsilon^{(1)} = \varepsilon(x^{(1)}); \varepsilon^{(2)} = \varepsilon(x^{(2)}); \lambda^{0(2)} = \lambda^0(x^{(2)}); \text{ и } \beta^{(2)} = \beta(x^{(2)})), \quad (1.27)$$

интегральный оператор  $K(x^{(1)} - x^{(2)})$  определяется соотношением (1.17), а  $\lambda^0(x^{(2)})$  первым уравнением (1.8).

Умножим уравнение (1.26) на условную плотность  $f_1(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \lambda^{(2)} |_\nu^{(1)})$  (плотность распределения деформаций в точке  $x^{(1)}$ , деформаций и модулей упругости в точке  $x^{(2)}$  при условии, что в точке  $x^{(1)}$  находится  $\nu$ -ый компонент) и проведем статистическое осреднение. В результате получим

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \langle \varepsilon \rangle + K(x^{(1)} - x^{(2)}) * \sum_{k=1}^2 f\left(\frac{(2)}{k} |_\nu^{(1)}\right) \left[ \lambda_k' \langle \varepsilon^{(2)} |_{k, \nu}^{(2), (1)} \rangle - \beta^{[k]} \theta \right] \quad (1.28)$$

$$\left( \langle \varepsilon_\nu \rangle = \langle \varepsilon^{(1)} |_\nu^{(1)} \rangle; \lambda_k' = \lambda^{[k]} - \lambda^c; k, \nu \in \{1, 2\} \right); \quad (1.29)$$

$\langle \varepsilon_\nu \rangle$  – средняя деформация  $\nu$ -го компонента;  $\lambda^{[k]}$  и  $\beta^{[k]}$  – тензоры упругих модулей и коэффициентов температурных напряжений  $k$ -го компонента;  $f\left(\frac{(2)}{k} |_\nu^{(1)}\right)$  – вероятность определения точки  $x^{(2)}$  в  $k$ -ом компоненте при условии, что точка  $x^{(1)}$  находится в  $\nu$ -ом компоненте;  $\langle \varepsilon^{(2)} |_{k, \nu}^{(2), (1)} \rangle$  – математическое ожидание тензора деформаций в точке  $x^{(2)}$  при условии, что точка  $x^{(2)}$  находится в  $k$ -ом компоненте, а точка  $x^{(1)}$  – в  $\nu$ -ом компоненте.

Чтобы решить эту систему, необходимо определить условные двух точечные моменты  $\langle \varepsilon^{(2)} |_{k, \nu}^{(2), (1)} \rangle$ . Для этого умножим уравнение (1.26) на условную плотность  $f_2(\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \lambda^{(2)} |_{k, \nu}^{(2), (1)})$  и проведем статистическое осреднение. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu, k}^{(1), (3)} \rangle = \langle \varepsilon \rangle + K(x^{(1)} - x^{(3)}) \sum_{\rho=1}^2 f \left( \begin{matrix} (2) \\ \rho \end{matrix} \middle|_{\nu, k}^{(1), (3)} \right) \left[ \lambda'_\rho \langle \varepsilon^{(2)} |_{\rho, \nu, k}^{(2), (1), (3)} \rangle - \beta^{[\rho]} \theta \right]. \quad (1.30)$$

Продолжая этот процесс, получаем бесконечную систему уравнений относительно условных моментов

$$\langle \varepsilon_{\nu_1} \rangle; \quad \langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2}^{(1), (2)} \rangle; \quad \langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (2), \dots, (i)} \rangle; \quad \nu_1, \nu_2 \in \{1, 2\}. \quad (1.31)$$

Замыкание этой системы может быть осуществлено путем обрыва процесса на некотором шаге. Можно принять, например, одно из условий

$$\langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (2), \dots, (i)} \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (2), \dots, (i)} \rangle = \langle \varepsilon \rangle; \quad \langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (2), \dots, (i)} \rangle = \langle \varepsilon_{\nu_1} \rangle. \quad (1.32)$$

Для решения полученной системы необходимо задать условные многоточечные плотности распределения компонентов

$$f \left( \begin{matrix} (2) \\ k \end{matrix} \middle|_{\nu_1}^{(1)} \right), \quad f_1 \left( \begin{matrix} (2) \\ k \end{matrix} \middle|_{\nu_1, \nu_2}^{(1), (3)} \right), \quad \dots, \quad f_i \left( \begin{matrix} (2) \\ k \end{matrix} \middle|_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (3), \dots, (i)} \right). \quad (1.33)$$

При построении теории многокомпонентных материалов целесообразно ограничиться двухточечным приближением и замкнуть систему принятием следующего условия:

$$\langle \varepsilon^{(1)} |_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}^{(1), (2), \dots, (i)} \rangle = \langle \varepsilon_{\nu_1} \rangle, \quad (1.34)$$

что соответствует пренебрежению флуктуаций деформаций в пределах каждого компонента. Тогда достаточно рассмотреть уравнение (1.28) при условии (1.34). В результате приходим к системе алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^2 K_{\nu k} \left( \lambda'_k \langle \varepsilon_k \rangle - \beta^{[k]} \theta \right) \quad \nu \in \{1, 2\}, \quad (1.35)$$

где матрица  $K_{\nu k}$  определяется формулой

$$K_{\nu k} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x) p_{\nu k}(x) dx. \quad (1.36)$$

Здесь интегральный оператор  $K(x)$  определяется через функцию Грина в соответствии с соотношением (1.17), при этом имеем

$$p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)}) = f \left( \begin{matrix} (2) \\ k \end{matrix} \middle|_{\nu}^{(1)} \right). \quad (1.37)$$

Для вероятности перехода примем представление [49, 50]

$$p_{\nu k}(x) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k) \varphi(x). \quad (1.38)$$

Тогда из (1.36), (1.37) следует, что

$$K_{vk} = (\delta_{vk} - c_k)g; \quad g = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x)\varphi(x) dx. \quad (1.39)$$

С учетом этого соотношения приведем уравнения (1.35) к виду

$$\langle \varepsilon_v \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^2 (\delta_{vk} - c_{vk})g \left( \lambda'_k \langle \varepsilon_k \rangle - \beta^{[k]} \theta \right). \quad (1.40)$$

Решение системы (1.40) находится в замкнутом виде. Вычислив сумму

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^2 c_s g \lambda'_s \langle \varepsilon_s \rangle &= \left[ I + \sum_{l=1}^2 c_l g \lambda'_l (I - g \lambda'_l)^{-1} \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k g \lambda'_k \times \right. \\ &\times \left. (I - g \lambda'_k)^{-1} \langle \varepsilon \rangle - \sum_{k=1}^2 c_k g \lambda'_k (I - g \lambda'_k)^{-1} \left( g \beta^{[k]} - \sum_{\nu=1}^2 c_\nu g \beta^{[\nu]} \right) \theta \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

где  $I$  – единичный тензор, после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_v \rangle &= (I - g \lambda'_v)^{-1} \left\{ \left[ \sum_{s=1}^2 c_s (I - g \lambda'_s)^{-1} \right]^{-1} \langle \varepsilon \rangle + \right. \\ &+ \left. \left[ \sum_{s=1}^2 c_s (I - g \lambda'_s)^{-1} \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k (I - g \lambda'_k)^{-1} g \beta^{[k]} - g \beta^{[\nu]} \right] \theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Подставив полученное выражение в соотношение (1.22) и сравнив с (1.19), определим тензор эффективных модулей упругости

$$\lambda^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \lambda^{[\nu]} (I - g \lambda'_\nu)^{-1} \left[ \sum_{s=1}^2 c_s (I - g \lambda'_s)^{-1} \right]^{-1} \quad (1.43)$$

и тензор эффективных коэффициентов термических напряжений

$$\beta^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \beta^{[\nu]} + \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \left( \lambda^{[\nu]} - \lambda^* \right) (I - g \lambda'_\nu)^{-1} g \beta^{[\nu]}. \quad (1.44)$$

В индексной форме записи имеем равенства

$$\lambda_{ijmn}^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \lambda_{ijpq}^{[\nu]} \left( I_{pquk} - g_{pqst} \lambda_{stuk}^{\nu} \right)^{-1} \left[ \sum_{s=1}^2 c_s \left( I_{ukmn} - g_{ukrl} \lambda_{rlmn}^{\prime s} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (1.45)$$

$$(i, j, m, n, l, k, p, q, s, t, u \in \{1, 2, 3\});$$

$$\beta_{ij}^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \beta_{ij}^{[\nu]} + \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \left( \lambda_{ijpq}^{[\nu]} - \lambda_{ijpq}^* \right) \left( I_{pquk} - g_{pqst} \lambda_{stuk}^{\nu} \right)^{-1} g_{ukrl} \beta_{rl}^{[\nu]}. \quad (1.46)$$

Формулы для определения эффективных термоупругих постоянных (1.45), (1.46) содержат тензор  $g_{ukrl}$ , определяемый через условную двухточечную плотность распределения  $p_{vk}(x^{(1)} - x^{(2)})$  при помощи соотношений (1.38), (1.39), а также через функцию Грина на основании уравнений (1.17) и тензор модулей упругости тела сравнения  $\lambda_{ijmn}^c$ .

Чтобы решить систему (1.42), необходимо задать двухточечные условные вероятности  $p_{vk}(x^{(1)} - x^{(2)}) = f\left(\begin{smallmatrix} (2) \\ k \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} (1) \\ v \end{smallmatrix}\right)$ , которые характеризуют форму и расположение включений, построить тензорную функцию Грина, которая учитывает анизотропию термоупругих свойств компонентов, а также определить тензор модулей упругости тела сравнения  $\lambda_{ijmn}^c$ .

Условная плотность распределения  $p_{vk}(x^{(1)} - x^{(2)})$ , в среднем характеризующая форму структурных элементов, может быть определена или экспериментально по фотографиям сечений композита, или теоретически, задавая распределения размеров структурных элементов в различных сечениях.

Тензорная функция Грина для анизотропной среды не может быть получена непосредственно из уравнения (1.15). Так как в правой части уравнения (1.15) присутствует дельта-функция, то удобно перейти в пространство Фурье-образов данной функции, найти Фурье-образ функции Грина и затем применить обратное преобразование Фурье.

Наличие тензора  $\lambda_{ijmn}^c$  объясняется пренебрежением флуктуациями параметров в пределах компонента. Выбором тензора  $\lambda_{ijmn}^c$  во многом определяется близость вычисленных тензоров эффективных модулей упругости  $\lambda_{ijmn}^*$  и коэффициентов термических напряжений  $\beta_{ij}^*$  к их истинным значениям. В работе [50] показано, что при  $\lambda_{ijmn}^c = 0$  приходим к постоянным Рейсса, при  $\lambda_{ijmn}^c = \infty$  – к постоянным Фойхта. Полагая  $\lambda_{ijmn}^c$  равным тензору модулей упругости компонента с максимальной и минимальной жесткостью, приходим, соответственно, к верхней и нижней границам Хашина – Штрикмана. Физические соображения и сравнение с результатами, полученными другими методами, показывают [48, 49], что в случае матричной структуры целесообразно принять  $\lambda_{ijmn}^c = \langle \lambda_{ijmn} \rangle$ , если жесткость матрицы больше жесткости включений, и  $\lambda_{ijmn}^c = \langle \lambda_{ijmn}^{-1} \rangle^{-1}$ , если жесткость включений больше жесткости матрицы. Для двухкомпонентного материала  $\lambda_{ijmn}^c$  имеет вид

$$\lambda_{ijmn}^c = \begin{cases} \langle \lambda_{ijmn} \rangle, & \lambda_{ijmn}^{[1]} \leq \lambda_{ijmn}^{[2]}; \\ \langle \lambda_{ijmn}^{-1} \rangle^{-1}, & \lambda_{ijmn}^{[1]} \geq \lambda_{ijmn}^{[2]}. \end{cases} \quad (1.47)$$

$$\left( \langle \lambda_{ijmn} \rangle = c_1 \lambda_{ijmn}^{[1]} + c_2 \lambda_{ijmn}^{[2]} \quad \text{и} \quad \langle \lambda_{ijmn}^{-1} \rangle = c_1 \left( \lambda_{ijmn}^{[1]} \right)^{-1} + c_2 \left( \lambda_{ijmn}^{[2]} \right)^{-1} \right), \quad (1.48)$$

причем тензор  $(\lambda_{ijmn}^{-1})^{-1}$  является обратным к тензору  $\lambda_{ijmn}$ .

#### **1.4. Эффективные деформативные свойства композитных материалов при микроповреждениях в компонентах.**

Рассмотрим макрообъем композитного материала с пористыми анизотропными компонентами, находящийся в условиях однородных макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и температуры  $\theta$ . Примем, что в процессе нагружения в компонентах происходят микро-разрушения, которые моделируем системой стохастически расположенных пустых квазисферических пор. Обозначим тензор модулей упругости и тензор коэффициентов термических напряжений неразрушенной части  $k$ -го компонента, соответственно,  $\lambda_{ijmn}^k$  и  $\beta_{ij}^k$ , а начальную пористость –  $p_{0k}$ . Тогда зависимости между средними по пористому  $k$ -ому компоненту напряжениями, деформациями и температурой имеют вид

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^{kp} \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{ij}^{kp} \theta \quad (k \in \{1, 2\}), \quad (1.49)$$

где  $\lambda_{ijmn}^{kp}$  и  $\beta_{ij}^{kp}$  – тензор эффективных модулей упругости и тензор коэффициентов термических напряжений пористого (поврежденного)  $k$ -го компонента, соответственно. Эффективные модули упругости и коэффициенты термических напряжений пористого  $k$ -го компонента определяются согласно п. 1.3 по формулам типа (1.45), (1.46)

$$\lambda_{ijmn}^{kp}(p_{0k}) = (1 - p_{0k}) \lambda_{ijwq}^k \left( I_{wquv} - p_{0k} g_{wqst}^0 \lambda_{stuv}^k \right)^{-1} \left\{ (1 - p_{0k}) \times \left( I_{uvmn} - p_{0k} g_{uvrh}^0 \lambda_{rhmn}^k \right)^{-1} + \right. \\ \left. + p_{0k} \left[ I_{uvmn} + (1 - p_{0k}) g_{uvrh}^0 \lambda_{rhmn}^k \right]^{-1} \right\} \quad (1.50)$$

$$(i, j, m, n, l, h, q, r, s, t, u, v, w \in \{1, 2, 3\});$$

$$\beta_{ij}^{kp}(p_{0k}) = (1 - p_{0k}) \beta_{ij}^k + (1 - p_{0k}) \left( \lambda_{ijwq}^k - \lambda_{ijwq}^{kp} \right) \left( I_{wquv} - p_{0k} g_{wqst}^0 \lambda_{stuv}^k \right)^{-1} g_{uvrh}^0 \beta_{rh}^k. \quad (1.51)$$

Средние по неразрушенной части  $k$ -го компонента напряжения  $\overline{\sigma}_{ij}^k$  связаны со средними по пористому  $k$ -ому компоненту напряжениями  $\langle \sigma_{ij}^k \rangle$  соотношениями

$$\overline{\sigma}_{ij}^k = \frac{1}{1 - p_{0k}} \langle \sigma_{ij}^k \rangle. \quad (1.52)$$

Критерий разрушения неразрушенной части  $k$ -го компонента примем в виде предельного значения интенсивности средних касательных напряжений в ней, т.е.

$$I_{\sigma}^k = \left( \overline{\sigma}_{ij}^k \overline{\sigma}_{ij}^{k'} \right)^{1/2} = k^k, \quad (1.53)$$

где  $\overline{\sigma}_{ij}^{k'}$  – девиатор средних по неразрушенной части  $k$ -го компонента напряжений.

Предельное значение интенсивности средних касательных напряжений в неразрушенной части компонента  $k^k$  может быть одинаковым для всех его микрообъемов или же являться случайной функцией координат с известным одноточечным распределением. В обоих случаях для определения изменяющейся вследствие микроразрушений пористости используются уравнения, предложенные в работах [82, 83].

Рассмотрим вначале более простой случай, когда предел прочности одинаков для всех микрообъемов компонента. Исходя из (1.49) – (1.53), получим выражение предельной поверхности для пористого  $k$ -го компонента в пространстве средних по пористому компоненту деформаций. Если средние по пористому  $k$ -ому компоненту деформации не выходят за эту предельную поверхность, то зависимости между  $\langle \sigma_{ij}^k \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$  и  $\theta$  являются линейными и определяются формулами (1.49) – (1.51). При выходе деформаций  $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$  за предельную поверхность в  $k$ -ом компоненте происходят микроразрушения, т.е. появляется дополнительная пористость  $p_k - p_{0k}$ , в результате чего жесткость материала уменьшается, и напряжения в неразрушенной части материала не превосходят предельного значения (1.53). Для материала с пористостью  $p_k$  можно получить выражение для предельной поверхности в пространстве средних по пористому  $k$ -ому компоненту деформаций, позволяющее по заданным деформациям  $\langle \varepsilon_{rs}^k \rangle$  определить текущую пористость  $k$ -го компонента  $p_k$  [82, 83]

$$p_k = p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right). \quad (1.54)$$

В случае, когда предел прочности  $k$ -го компонента является случайной функцией координат, одноточечная плотность распределения  $f^k(k^k)$  случайной функции  $k^k$  представляет собой асимметричную и ограниченную снизу кривую. Наиболее подходящей аппроксимацией экспериментально наблюдаемой кривой является закон Вейбулла, представляющий собой экспоненциально-степенную функцию распределения, т.е.

$$F^k(k^k) = \int_{-\infty}^{k^k} f^k(k^k) dk^k = \begin{cases} 0, & k^k < k_0^k; \\ 1 - \exp \left[ -n^k (k^k - k_0^k)^{\alpha^k} \right], & k^k \geq k_0^k, \end{cases} \quad (1.55)$$

где  $k_0^k$  – минимальная величина предельного значения  $I_{\sigma}^k$ , с которого начинается разрушение в микроточках  $k$ -го компонента;  $n^k, \alpha^k$  – коэффициенты, выбираемые из условия наилучшей аппроксимации разброса прочности  $k$ -го компонента.

Функция распределения прочности  $k$ -го компонента  $F^k(k^k)$  определяет относительное содержание материала скелета  $k$ -го компонента, в котором предел прочности меньше соответствующего значения  $k^k$ . Поэтому при напряжениях  $\bar{\sigma}_{ij}^k$  функция  $F^k(I_{\sigma}^k)$  определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов материала скелета  $k$ -го компонента. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то можно записать уравнение баланса пористости [82, 83]

$$p_k = p_{0k} + F^k(I_{\sigma}^k)(1 - p_{0k}). \quad (1.56)$$

Согласно (1.49) – (1.52) средние в неразрушенной части  $k$ -го компонента напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^k$  можно выразить через средние в  $k$ -ом компоненте деформации  $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$ . Таким образом, формулы (1.49) – (1.53), (1.55), (1.56) определяют текущую пористость  $k$ -го компонента  $p_k$  как функцию средних в  $k$ -ом компоненте деформаций  $\langle \varepsilon_{mn}^k \rangle$ , т.е. снова приходим к соотношению вида (1.54).

Подставив  $p_k$  вместо  $p_{0k}$  в формулы для эффективных термоупругих характеристик  $k$ -го компонента (1.50), (1.51), получим

$$\begin{aligned} \lambda_{ijmn}^{kp}(p_k) &= (1 - p_k) \lambda_{ijwq}^k \left( I_{wquv} - p_k g_{wqst}^0 \lambda_{stuv}^k \right)^{-1} \times \\ &\times \left\{ (1 - p_k) \left( I_{uvmn} - p_k g_{uvrh}^0 \lambda_{rhmn}^k \right)^{-1} + p_k \left[ I_{uvmn} + (1 - p_k) g_{uvrh}^0 \lambda_{rhmn}^k \right]^{-1} \right\} \\ &(i, j, m, n, l, h, q, r, s, t, u, v, w \in \{1, 2, 3\}); \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\beta_{ij}^{kp}(p_k) = (1 - p_k) \beta_{ij}^k + (1 - p_k) \left( \lambda_{ijwq}^k - \lambda_{ijwq}^{kp} \right) \left( I_{wquv} - p_k g_{wqst}^0 \lambda_{stuv}^k \right)^{-1} g_{uvrh}^0 \beta_{rh}^k. \quad (1.58)$$

Эффективные деформативные характеристики  $k$ -го компонента (1.57), (1.58) зависят от текущей пористости, а, следовательно, согласно (1.54), от средних по пористому  $k$ -му компоненту деформаций  $\langle \varepsilon_{rs}^k \rangle$ , т.е.



$$\lambda_{ijmn}^{kp} (p_k) = \lambda_{ijmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) = \lambda_{ijmn}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \quad (1.59)$$

$$\beta_{ij}^{kp} (p_k) = \beta_{ij}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) = \beta_{ij}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right). \quad (1.60)$$

Поэтому зависимости между средними по  $k$ -му компоненту напряжениями, деформациями и температурой становятся нелинейными и могут быть представлены в виде

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{ij}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \theta; \quad (1.61)$$

или

$$\langle \sigma_{ij}^k \rangle = \lambda_{ijmn}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{ij}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \theta. \quad (1.62)$$

Усреднив (1.2) по макрообъему композита, получим

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sum_{k=1}^2 c_k \left[ \lambda_{ijmn}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{ij}^{k\varepsilon} \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \theta \right]. \quad (1.63)$$

Следовательно, для определения нелинейных зависимостей между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , макродеформациями  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$  и температурой  $\theta$  необходимо получить средние деформации компонентов  $\langle \varepsilon_{rs}^k \rangle$  как функции макродеформаций  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$  и температуры  $\theta$  и подставить в (1.63). Для этого проведем условное осреднение уравнений (1.26) и, пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} K_{ijkl} (x) p_{vk} (x) dx \left[ \lambda_{lqmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{lq}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \theta \right], \quad (1.64)$$

$k, v \in \{1, 2\}$

$$\left( \langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \Big|_{\nu}^{(1)} \right); \lambda_{lqmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) = \lambda_{lqmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) - \lambda_{lqmn}^c;$$

$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle$  – средняя деформация  $\nu$ -го компонента;  $p_{vk}(x)$  – вероятности перехода определяемые (1.37);  $\lambda_{lqmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right)$  и  $\beta_{lq}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right)$  – тензоры упругих модулей и коэффициентов температурных напряжений поврежденного  $k$ -го компонента).

Воспользовавшись для вероятностей перехода  $p_{vk}(x)$  представлениями (1.38), (1.39), приведем уравнения (1.64) к виду

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + \sum_{k=1}^2 (\delta_{vk} - c_k) g_{ijkl} \left[ \lambda_{lqmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \langle \varepsilon_{mn}^k \rangle - \beta_{lq}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \theta \right]. \quad (1.65)$$

Отсюда получаем уравнение

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle = \left[ I_{ijq} - g_{ijzt} \lambda_{zjq}^{vp} \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle \right) \right) \right]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{jqlm} - g_{jqhw} \lambda_{hwlm}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \langle \varepsilon_{lm} \rangle +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{fqlm} - g_{fqhw} \lambda'_{hwlm} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \left\{ \sum_{e=1}^2 c_e \left[ I_{lmab} - g_{lmcd} \lambda'_{cdab} \left( p_e \left( \langle \varepsilon_{rs}^e \rangle \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \times \\
& \quad \times \left\{ g_{abfg} \beta_{fg}^{ip} \left( p_e \left( \langle \varepsilon_{rs}^e \rangle \right) \right) - g_{lmfg} \beta_{fg}^{vp} \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle \right) \right) \right\} \theta \quad (1.66) \\
& \quad (a, b, d, f, i, j, m, l, h, q, r, s, t, u, v, w, z \in \{1, 2, 3\}),
\end{aligned}$$

где характеристики  $\lambda_{ijmn}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right)$ ,  $\beta_{ij}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle \right) \right)$  определяются по формулам (1.57), (1.58), а  $I_{ijpq}$  – единичный тензор.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (1.66) относительно средних по компонентам деформаций будем строить методом Ньютона – Рафсона. Итерационную схему решения (1.66) можно представить следующим образом:

$$p_k^{(n)} = p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(n-1)} \right); \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_{ijlm}^{kp} \left( p_k^{(n)} \right) = \left( 1 - p_k^{(n)} \right) \lambda_{ijpq}^k \left( I_{yquv} - p_k^{(n)} g_{yqst}^0 \lambda_{stuv}^k \right) \times \\
& \quad \times \left\{ \left( 1 - p_k^{(n)} \right) \left( I_{uvlm} - p_k^{(n)} g_{uvrh}^0 \lambda_{rhlm}^k \right)^{-1} + p_k^{(n)} \left[ I_{uvlm} + \left( 1 - p_k^{(n)} \right) g_{uvrh}^0 \lambda_{rhlm}^k \right]^{-1} \right\}^{-1}; \quad (1.68)
\end{aligned}$$

$$\beta_{ij}^{kp} \left( p_k^{(n)} \right) = \left( 1 - p_k^{(n)} \right) \beta_{ij}^k + \left( 1 - p_k^{(n)} \right) \left[ \lambda_{ijqz}^k - \lambda_{ijqz}^{kp} \left( p_k^{(n)} \right) \right] \left( I_{qzuv} - p_k^{(n)} g_{qzst}^0 \lambda_{stuv}^k \right)^{-1} g_{uvrh}^0 \beta_{rh}^k;$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} &= \left[ I_{ijfq} - g_{ijzt} \lambda'_{zifq} \left( p_v^{(n-1)} \right) \right]^{-1} \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{fqlm} - g_{fqhw} \lambda'_{hwlm} \left( p_k^{(n-1)} \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \langle \varepsilon_{lm} \rangle + \\
& \quad + \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{fqlm} - g_{fqhw} \lambda'_{hwlm} \left( p_k^{(n-1)} \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \times \\
& \quad \times \left\{ \sum_{e=1}^2 c_e \left[ I_{lmab} - g_{lmcd} \lambda'_{cdab} \left( p_e^{(n-1)} \right) \right]^{-1} g_{abfg} \beta_{fg}^{ip} \left( p_e^{(n-1)} \right) - g_{lmfg} \beta_{fg}^{vp} \left( p_v^{(n-1)} \right) \right\} \theta \quad (1.69) \\
& \quad (k, v \in \{1, 2\}, n = 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

причем в нулевом приближении предполагается, что материал компонентов деформируется линейно и используется решение задачи об эффективных термоупругих постоянных, которое находится методом условных моментов и позволяет учесть случайный характер распределения включений и микрповреждений. Т. е. в нулевом приближении пористость компонентов является постоянной и равной начальной их пористости

$$p_k^{(0)} = p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(0)} \right) = p_{0k}; \quad (1.70)$$

$$\lambda_{ijlm}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(0)} \right) \right) = \lambda_{ijlm}^{kp} \left( p_{0k} \right); \quad \beta_{ij}^{kp} \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(0)} \right) \right) = \beta_{ij}^{kp} \left( p_{0k} \right). \quad (1.71)$$

Подставляя (1.70) в (1.22) и сравнивая с (1.19), находим в  $n$ -ом приближении выражение для макронапряжений

$$\langle \sigma_{ij} \rangle^{(n)} = \lambda_{ijlm}^{*(n)} \langle \varepsilon_{lm} \rangle - \beta_{ij}^{*(n)} \theta, \quad (1.72)$$

где  $n$ -ое приближение эффективных деформативных характеристик определяется по формулам

$$\lambda_{ijlm}^{*(n)} = \sum_{v=1}^2 c_v \lambda_{ijpq}^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) \left[ I_{pquv} - g_{pqgt} \lambda_{gtuv}'^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) \right]^{-1} \times \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{uvlm} - g_{uvha} \lambda_{halm}'^k \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(n-1)} \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1}; \quad (1.73)$$

$$\beta_{ij}^{*(n)} = \sum_{v=1}^2 c_v \beta_{ij}^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) + \sum_{v=1}^2 c_v \left[ \lambda_{ijpq}^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) - \lambda_{ijpq}^{*(n)} \right]^{-1} \times \left[ I_{pquv} - g_{pqgt} \lambda_{gtuv}'^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) \right]^{-1} g_{uvha} \beta_{ha}^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right). \quad (1.74)$$

Соотношения (1.70), (1.71), (1.73), (1.74) позволяют вычислить значения эффективных деформативных характеристик при заданных значениях макродеформаций  $\langle \varepsilon_{lm} \rangle$  и температуры  $\theta$ . Однако на практике обычно задают макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  – это различные виды простого и сложного нагружений. Для обобщения алгоритма (1.70), (1.71), (1.73), (1.74) на этот случай вместо (1.72) используем соотношение

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle^{(n)} = \left( \lambda_{ijlm}^{*(n)} \right)^{-1} \langle \sigma_{lm} \rangle + \alpha_{ij}^{*(n)} \theta \quad \left( \alpha_{ij}^{*(n)} = \left( \lambda_{ijlm}^{*(n)} \right)^{-1} \beta_{lm}^{*(n)} \right). \quad (1.75)$$

Подставив (1.75) в (1.70), получим

$$\langle \varepsilon_{ij}^v \rangle^{(n)} = \left[ I_{ijpq} - g_{ijzt} \lambda_{ztpq}'^v \left( p_v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right) \right]^{-1} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{pqlm} - g_{pqhw} \lambda_{hwlm}'^k \left( p_k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(n-1)} \right) \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \times \left[ \left( \lambda_{lmuv}^{*(n)} \right)^{-1} \langle \sigma_{uv} \rangle + \alpha_{lm}^{*(n)} \theta \right] + \left\{ \sum_{k=1}^2 c_k \left[ I_{pqlm} - g_{pqhw} \lambda_{hwlm}'^k \left( \langle \varepsilon_{rs}^k \rangle^{(n-1)} \right) \right]^{-1} \right\}^{-1} \times \left[ \sum_{e=1}^2 c_e \left[ I_{lmab} - g_{lmcd} \lambda_{cdab}'^e \left( \langle \varepsilon_{rs}^e \rangle^{(n-1)} \right) \right]^{-1} \times g_{abfg} \beta_{fg}^e \left( \langle \varepsilon_{rs}^e \rangle^{(n-1)} \right) - g_{lmfg} \beta_{fg}^v \left( \langle \varepsilon_{rs}^v \rangle^{(n-1)} \right) \right] \theta \right\}. \quad (1.76)$$

Соотношения (1.71), (1.73), (1.74), (1.76) позволяют получить зависимости эффективных деформативных характеристик от макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и температуры  $\theta$ , на основе чего построить кривые макродеформирования.

## §2. Повреждаемость материалов с трансверсально-изотропными компонентами.

Пористый материал с нерегулярной структурой можно рассматривать как двухфазный композитный материал, физико-механические характеристики которого являются случайными функциями координат, а жесткость одного компонента (включений) равна нулю. Предположим, что на расстояниях, значительно превосходящих размеры неоднородностей, свойства среды статистически однородны. В таком случае пористый материал можно рассматривать как однородный материал с некоторыми усредненными по пространству термоупругими и другими физико-механическими свойствами, которые могут быть определены методом условных моментов.

Рассмотрим представительный объем материала с квазисферическими пораами. Пусть объемное содержание пор в материале равно  $p_0$ , а модули упругости и коэффициенты термического напряжения пор равны нулю. Как было изложено в п. 1.2, для определения эффективных термоупругих характеристик композитного материала стохастической структуры, необходимо решить систему статистически нелинейных интегральных

уравнений (1.26), где  $\lambda_{ijmn}^0$  определяется первым уравнением (1.8), а интегральный оператор  $K(x^{(1)} - x^{(2)})$  – соотношением (1.17). Тензорная функция Грина  $G_{ik}(x - y)$  удовлетворяет уравнению (1.15).

Применяя к уравнениям (1.26) описанный в п. 1.3 аппарат условного осреднения и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах каждой фазы [48 – 50], получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно средних деформаций фаз

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^2 K_{\nu k} \left( \lambda_k' \langle \varepsilon_k \rangle - \beta^{[k]} \theta \right), \quad \nu \in \{1, 2\}, \quad (2.1)$$

где матрица  $K_{\nu k}$  определяется формулой

$$K_{\nu k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) p_{\nu k}(x) dx. \quad (2.2)$$

В случае, когда поры имеют квазисферическую форму, условные вероятности  $p_{\nu k}(x_l^{(1)} - x_l^{(2)})$  имеют вид [50, 98, 105]

$$p_{\nu k}(x) = c_k + (\delta_{\nu k} - c_k) \exp \left( - \frac{8\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{(1 - p_0)\pi^2 r} \right); \quad \nu, k \in \{1, 2\}, \quad (2.3)$$

где  $c_1 = p_0$ ,  $c_2 = 1 - p_0$ , а  $r$  – средний радиус пор.

Тогда вводя обозначения

$$K_{\nu k} = (\delta_{\nu k} - c_k) g; \quad g = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) \exp \left( - \frac{8\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{(1 - p_0)\pi^2 r} \right) dx, \quad (2.4)$$

можно привести уравнения (2.1) к виду

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \langle \varepsilon \rangle + \sum_{k=1}^2 (\delta_{\nu k} - c_{\nu k}) g \left( \lambda_k' \langle \varepsilon_k \rangle - \beta^{[k]} \theta \right). \quad (2.5)$$

Решение системы (2.5) находим в замкнутом виде

$$\langle \varepsilon_\nu \rangle = \left( I - g \lambda_\nu' \right)^{-1} \times \left\{ \left[ \sum_{s=1}^2 c_s \left( I - g \lambda_s' \right)^{-1} \right]^{-1} \langle \varepsilon \rangle + \left[ \sum_{s=1}^2 c_s \left( I - g \lambda_s' \right)^{-1} \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^2 c_k \left( I - g \lambda_k' \right)^{-1} g \beta^{[k]} - g \beta^{[\nu]} \right] \theta \right\}. \quad (2.6)$$

Подставив полученное выражение в соотношение (1.22) и сравнив с (1.19), получим тензор эффективных модулей упругости

$$\lambda^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \lambda^{[\nu]} \left( I - g \lambda_\nu' \right)^{-1} \left[ \sum_{s=1}^2 c_s \left( I - g \lambda_s' \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.7)$$

и тензор эффективных коэффициентов термических напряжений

$$\beta^* = \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \beta^{[\nu]} + \sum_{\nu=1}^2 c_\nu \left( \lambda^{[\nu]} - \lambda^* \right) \left( I - g \lambda_\nu' \right)^{-1} g \beta^{[\nu]}. \quad (2.8)$$

В формулы для определения эффективных термоупругих постоянных (2.7), (2.8) входит тензор  $g$ , определяемый через условную двухточечную плотность распределения  $p_{\nu k}(x^{(1)} - x^{(2)})$  при помощи соотношений (2.2) – (2.4), а также через функцию Грина на основе равенств (2.2), (1.17).

Тензоры эффективных упругих модулей и эффективных коэффициентов температурного напряжения данного пористого трансверсально-изотропного материала могут быть определены на основании результатов, представленных в [50, 98, 105].

Пусть материал имеет начальную пористость  $p_0$ . Тогда компоненты тензоров эффективных упругих модулей  $\lambda_{ijkl}^*$  и эффективных коэффициентов температурного напряжения  $\beta_{ij}^*$  пористого трансверсально-изотропного материала можно определить через термоупругие постоянные материала  $\lambda_{ijkl}$ ,  $\beta_{ij}$  и его пористость  $p_0$ . Переходя во всех тензорных величинах к матричным соотношениям согласно схеме

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 13 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6, \quad (2.9)$$

получим для эффективных постоянных  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  данного материала соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{13}^* &= (1-p_0) \left\{ \lambda_{13} + \frac{p_0}{\Delta} \left[ (2\lambda_{13}^2 + (\lambda_{11} + \lambda_{12})\lambda_{33})(K_1 - z(2p_0 - 1)\lambda_{13}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_{13}(\lambda_{11} + \lambda_{12})(K_3 + z(2p_0 - 1)\lambda_{33}) + \lambda_{13}\lambda_{33}(K_4 + z(2p_0 - 1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})) \right] \right\}; \\ \lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= (1-p_0) \times \\ &\times \left\{ \lambda_{11} + \lambda_{12} + \frac{p_0}{\Delta} \left[ 4\lambda_{13}(\lambda_{11} + \lambda_{12})(K_1 - z(2p_0 - 1)\lambda_{13}) + (\lambda_{11} + \lambda_{12})^2 (K_3 + z(2p_0 - 1)\lambda_{33}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\lambda_{13}^2 (K_4 + z(2p_0 - 1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})) \right] \right\}; \\ \lambda_{33}^* &= (1-p_0) \left\{ \lambda_{33} + \frac{p_0}{\Delta} \left[ (\lambda_{11} + \lambda_{12})^2 (K_1 - z(2p_0 - 1)\lambda_{13}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_{13}^2 (K_3 + z(2p_0 - 1)\lambda_{33}) + \lambda_{33}^2 (K_4 + z(2p_0 - 1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})) \right] \right\}; \\ \lambda_{44}^* &= (1-p_0) \left\{ \lambda_{44} + \frac{4p_0\lambda_{44}^2 K_5}{1 - 4(2p_0 - 1)\lambda_{44} K_5} \right\}; \\ \lambda_{66}^* &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) = (1-p_0) \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_{11} - \lambda_{12}) + \frac{4p_0(\lambda_{11} - \lambda_{12})^2 K_2}{1 - 4(2p_0 - 1)(\lambda_{11} - \lambda_{12})K_2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

а для коэффициентов линейного температурного расширения  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_3^*$  –

$$\alpha_1^* = \Lambda_1\beta_3^* + \Lambda_2\beta_1^*; \quad \alpha_3^* = 2\Lambda_1\beta_1^* + \Lambda_3\beta_3^*; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= (1-p_0) \left\{ \beta_1 + (p_0/\Delta) \left[ (2\lambda_{33}\beta_1 + (\lambda_{11} + \lambda_{12})\beta_3) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (K_1 - z(2p_0 - 1)\lambda_{13}) + (\lambda_{11} + \lambda_{12})\beta_1 (K_3 + z(2p_0 - 1)\lambda_{33}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \lambda_{13}\beta_3 (K_4 + z(2p_0 - 1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})) \right] \right\}; \\ \beta_3^* &= (1-p_0) \left\{ \beta_3 + p_0/\Delta \left[ (2\lambda_{13}\beta_1 + \lambda_{33}\beta_3)(K_1 - z(2p_0 - 1)\lambda_{13}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\lambda_{13}\beta_1 (K_3 + z(2p_0 - 1)\lambda_{33}) + \lambda_{33}\beta_3 (K_4 + z(2p_0 - 1)(\lambda_{11} + \lambda_{12})) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_{13}^*}{a}; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_{33}^*}{a}; \quad \Lambda_3 = \frac{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}{a}; \quad a = (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*)\lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2. \quad (2.13)$$

В (2.12) также обозначено

$$\Delta = 1 - (2p_0 - 1)[4K_1\lambda_{13} + K_3(\lambda_{11} + \lambda_{12}) + K_4\lambda_{33}] + z(2p_0 - 1)^2[2\lambda_{13}^2 - (\lambda_{11} + \lambda_{12})\lambda_{33}]; \quad (2.14)$$

$$z = 2K_1^2 - K_3K_4. \quad (2.15)$$

Параметры  $K_n$  ( $n = 1, \dots, 5$ ) определяются следующим образом:

$$K_1 = -4(1 - p_0)(\lambda_{13} + \lambda_{44})(A_2 - A_3); \quad K_4 = 8(1 - p_0)[\lambda_{11}A_2 - (\lambda_{11} - \lambda_{44})A_3];$$

$$K_2 = (1 - p_0)[\lambda_{44}A_1 + (\lambda_{33} - 2\lambda_{44})A_2 - (\lambda_{33} - \lambda_{44})A_3 + A_4 - A_5];$$

$$K_3 = 4(1 - p_0)[\lambda_{44}A_1 + (\lambda_{33} - 2\lambda_{44})A_2 - (\lambda_{33} - \lambda_{44})A_3]; \quad (2.16)$$

$$K_5 = (1 - p_0)[\lambda_{11}A_1 - 2(\lambda_{11} + \lambda_{13})A_2 + (\lambda_{11} + 2\lambda_{13} + \lambda_{33})A_3 + A_4]$$

$$\left( A_1 = -\frac{1}{8(1 - p_0)^2 \lambda_{11} \lambda_{44}} [(1 - q)I_1 + 2(f - 1)(2fI_1 + I_2)]; \right. \quad (2.17)$$

$$\left. A_2 = -\frac{1}{8(1 - p_0)^2 \lambda_{11} \lambda_{44}} [(f - 1)I_1 + I_2]; \quad A_3 = -\frac{1}{8(1 - p_0)^2 \lambda_{11} \lambda_{44}} \left[ \frac{2}{1 - 2f + q} + I_1 \right] \right).$$

Здесь величины  $I_1$  и  $I_2$ , входящие в выражение (2.17), принимают различные значения в зависимости от знака параметра  $Q$ , который определяется соотношением

$$Q = f^2 - q. \quad (2.18)$$

Если  $Q > 0$ , то

$$I_1 = \frac{D_1 - D_2}{2\sqrt{Q}}; \quad I_2 = \frac{D_1 + D_2}{2} \quad (2.19)$$

$$D_i = \begin{cases} \frac{1}{z_i^{3/2}} \arctg \sqrt{z_i}, & z_i > 0; \\ -\frac{1}{2(-z_i)^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{-z_i}}{|1 - \sqrt{-z_i}|}, & z_i < 0; \end{cases}$$

$$i \in \{1, 2\}; \quad z_1 = a + \sqrt{Q}; \quad z_2 = a - \sqrt{Q}; \quad a = f - 1. \quad (2.20)$$

Если  $Q < 0$ , то

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{z_3^3 \sqrt{-Q}} \left[ \sqrt{z_3 - a}(z_3 + 2a) \operatorname{arccctg} \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{z_3 + a}(z_3 - 2a) \ln \beta \right]; \quad (2.21)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{z_3^3} \left[ \sqrt{z_3 + a}(z_3 - 2a) \operatorname{arccctg} \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{z_3 - a}(z_3 + 2a) \ln \beta \right]$$

$$\left( z_3 = \sqrt{z_1 z_2}; \quad \alpha = \frac{1 - z_3}{\sqrt{2(z_3 + a)}}; \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{2(z_3 - a) + z_3}}{1 - \sqrt{2(z_3 - a) + z_3}} \right). \quad (2.22)$$

Если  $Q = 0$ , то

$$I_1 = \frac{1-3fD}{2fa^2}; \quad I_2 = \frac{D}{a} \quad (2.23)$$

$$D = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \arctg \sqrt{a}, & a > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \ln \frac{1+\sqrt{-a}}{\sqrt{|f|}}, & a < 0 \end{cases}. \quad (2.24)$$

Величины  $A_4$  и  $A_5$  из (2.16) определяются формулами

$$A_4 = -\frac{E}{8(1-p_0)\lambda_{66}}; \quad A_5 = -\frac{1-E}{8(1-p_0)\lambda_{66}(\mu-1)} \quad (2.25)$$

$$E = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu-1}} \arctg \sqrt{\mu-1}, & \mu > 0; \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1+\sqrt{1-\mu}}{\sqrt{\mu}}, & \mu < 0 \end{cases}. \quad (2.26)$$

При этом для параметров  $f$ ,  $q$  и  $\mu$  в уравнениях (2.17) – (2.26) имеем выражения

$$f = \frac{\lambda_{11}\lambda_{33} - \lambda_{13}(\lambda_{13} + 2\lambda_{44})}{2\lambda_{11}\lambda_{44}}; \quad q = \frac{\lambda_{33}}{\lambda_{11}}; \quad \mu = \frac{\lambda_{44}}{\lambda_{66}}. \quad (2.27)$$

Если задан тензор макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , то на основе зависимостей (1.19) и соотношений для определения эффективных термоупругих постоянных (2.10) – (2.27) определим средние по скелету напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$ , которые связаны с макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  соотношениями

$$\bar{\sigma}_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle / (1-p_0). \quad (2.28)$$

Для изотропных материалов наиболее простая структурная модель микроповреждаемости композита [81, 82] строится на основе критерия прочности микрообъема в форме предельного значения второго инварианта девиатора средних касательных напряжений в неповрежденной части материала компонента, т.е. критерия Губера – Мизеса. В случае трансверсально-изотропных компонентов с плоскостью изотропии  $x_1x_2$  исходим из обобщенного критерия Губера – Мизеса, который примем в виде

$$I_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{ij}' + a_1 (\bar{\sigma}_{33}')^2 + a_2 (\bar{\sigma}_{11}' + \bar{\sigma}_{22}') \bar{\sigma}_{33}' + a_3 \left( (\bar{\sigma}_{13}')^2 + (\bar{\sigma}_{23}')^2 \right)} = k, \quad (2.29)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}'$  – девиатор средних по скелету напряжений;  $a_1, a_2, a_3$  – безразмерные детерминированные постоянные, характеризующие трансверсальную изотропию прочности неразрушенной части материала;  $k$  – предельное значение соответствующего выражения, которое является случайной функцией координат.

При  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  из (2.29) следует критерий Губера – Мизеса

$$I_{\bar{\sigma}} = (\bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{ij}')^{1/2} = k. \quad (2.30)$$

Согласно (1.19), (2.28) напряжения в материале скелета  $\bar{\sigma}_{ij}$  выразим через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ ; тогда можно получить выражение предельной поверхности для пористого трансверсально-изотропного материала в пространстве макродеформаций

$$I_{\bar{\sigma}} = \frac{1}{1-p_0} \left\{ \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* - \lambda_{22}^*)^2 \left[ (\langle \varepsilon_{11} \rangle - \langle \varepsilon_{22} \rangle)^2 + 4 \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \left( \frac{3}{2} + a_1 - a_2 \right) \left[ (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - 2\lambda_{13}^*) (\langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(\lambda_{33}^* - 2\lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right]^2 + 4(2+a_3)\lambda_{44}^* (\langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{22} \rangle^2) - 2(\beta_1^* - \beta_3^*)^2 \theta \right\}^{1/2}, \quad (2.31)$$

где  $\lambda_{ij}^*$  и  $\beta_i^*$  определяются на основании соотношений (2.10) – (2.27).

Если макродеформации не выходят за предельную поверхность (2.31), то зависимости между макронапряжениями, макродеформациями и температурой являются линейными и определяются формулами (1.19), (2.10) – (2.27). При выходе макродеформаций за предельную поверхность (1.19), в слабых микрообъемах скелета материала происходят микроразрушения. Примем, что участки микроразрушений полностью теряют сопротивление, т. е. ведут себя как дополнительные пустые поры. В результате появления дополнительной пористости  $p - p_0$  при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  снижается жесткость материала и напряжения в неразрушенной части материала не превосходят предельного значения (2.29).

В реальных материалах микропрочность является случайной функцией координат, т.е. микрообъемы имеют различную прочность с определенным законом распределения. Одноточечную функцию распределения  $F(k)$  предельного значения прочности материала  $k$  можно описать степенным законом на конечном интервале, т.е.

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left( \frac{k - k_0}{k_1 - k_0} \right)^\alpha, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k \geq k_1 \end{cases} \quad (2.32)$$

или распределением Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp\left(-m (k - k_0)^\alpha\right), & k \geq k_0, \end{cases} \quad (2.33)$$

где  $k_0$  – минимальная величина предельного значения  $k$ , с которого начинается разрушение материала;  $k_1$ ,  $m$ ,  $\alpha$  – постоянные, характеризующие разброс микропрочности материала.

Если до начала деформирования начальная микроповрежденность материала характеризуется его пористостью  $p_0$ , тогда функция распределения  $F(k)$  предельного значения прочности материала  $k$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание неразрушенной части материала, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k$ . Поэтому если в скелете материала действуют напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$ , то функция  $F(I_{\bar{\sigma}})$  определяет, согласно (2.29) – (2.33), относительное



содержание разрушенных микрообъемов скелета материала. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F(I_{\bar{\sigma}}). \quad (2.34)$$

Подставив  $p$  вместо  $p_0$  в формулы (2.10) – (2.27), определим эффективные деформативные характеристики, которые, согласно (2.29), зависят от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , и поскольку закон связи между макронапряжениями и макродеформациями определяется формулами (1.19), (2.10) – (2.27), то деформирование становится нелинейным и пористость материала  $p$  определяется как функция макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$p = p(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (2.35)$$

Подставляя затем (2.10) – (2.27), (2.34) в (1.19), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  и температурой  $\theta$ .

**2.1. Итерационная схема решения.** Для решения такой задачи предлагается численно-аналитический алгоритм, который базируется на решении стохастических дифференциальных уравнений теории упругости методом условных моментных функций [48 – 50] с последующим применением метода Ньютона – Рафсона для решения нелинейного трансцендентного уравнения.

Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (1.19), (2.29) – (2.34), (2.10) – (2.27) представим следующим образом:

– пористость материала в  $n$ -ом приближении  $p^{(n)}$  связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала в  $n$ -ом приближении  $k^{(n)}$ , т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_{\bar{\sigma}}^{(n)}$ ;

– интенсивность средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_{\bar{\sigma}}^{(n)}$  связана с текущей пористостью матрицы в  $(n-1)$ -ом приближении  $p^{(n-1)}$ , эффективными термоупругими постоянными всего композита в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  согласно соотношениям (1.19), (2.28), (2.29), (2.34);

– эффективные термоупругие модули в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  в свою очередь также связаны с текущей пористостью материала в  $(n-1)$ -ом приближении  $p^{(n-1)}$  в соответствии с формулами (2.10) – (2.27).

Таким образом, на основании выражений (2.33), (2.34) получим

$$p^{(n)} = p_0 + (1 - p_0)F(k^{(n)}), \quad (2.36)$$

где принимаем распределение Вейбулла

$$F(k^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k^{(n)} < k_0; \\ 1 - \exp(-m(k^{(n)} - k_0)^\alpha), & k^{(n)} \geq k_0. \end{cases} \quad (2.37)$$

В свою очередь, согласно соотношениям (2.30), (2.31) имеем

$$k^{(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{(n)}(\lambda_{ij}^{*(n-1)}, \beta_i^{*(n-1)}, p^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad (2.38)$$

в то время как в соответствии с соотношениями (2.10) – (2.27)

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^{*(n-1)}(\lambda_{mn}, p^{(n-1)}); \quad \beta_i^{*(n-1)} = \beta_i^{*(n-1)}(\lambda_{mn}, \beta_j, p^{(n-1)}). \quad (2.39)$$

Следовательно, уравнения (2.10) – (2.27), (2.29) – (3.34) позволяют определить эффективные упругие характеристики пористого трансверсально-изотропного материала

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle); \quad \beta_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_i^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (2.40)$$

Таким образом, соотношения (1.19), (2.10) – (2.27), (2.28) – (2.34), (2.36) – (2.39) позволяют получить зависимости пористости (поврежденности) и эффективных деформативных характеристик пористого трансверсально-изотропного материала при микроразрушениях в нем как функции макродеформаций.

**2.2. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основе полученных соотношений проведены расчеты и построены графики зависимостей макронапряжений от макродеформаций. На рис. 2.1, показаны расчетные кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (ГПа) от растягивающих макродеформаций  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  в пористом материале при микроразрушениях для различных значений параметра  $m$  функции распределения прочности  $F(k)$ . По оси абсцисс отложено значение макродеформации одноосного растяжения  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$ , по оси ординат – макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (в ГПа). Графики построены для материала с упругими характеристиками:

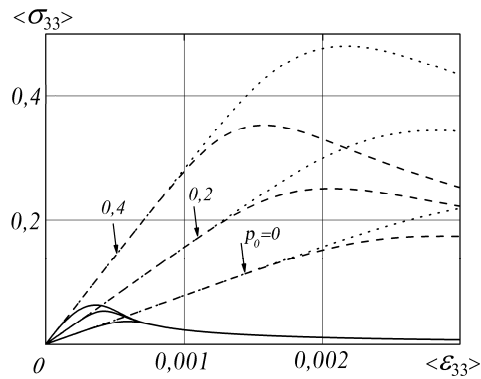


Рис. 2.1

$\lambda_{11} = 263$  ГПа;  $\lambda_{33} = 283$  ГПа;  $\lambda_{13} = 133$  ГПа;  $\lambda_{12} = 152$  ГПа;  $\lambda_{44} = 52$  ГПа; (2.41)  
начальном содержании пор

$$p_0 = 0; 0,2; 0,4, \quad (2.42)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности

$$\alpha = 6; \quad m = 10^4; \quad 10^5; \quad k_0 = 0,05 \text{ ГПа}, \quad (2.43)$$

где  $k_0$  – нижнее предельное значение интенсивности средних касательных напряжений в скелете материала, с которого начинается разрушение;  $m$  и  $\alpha$  – значения параметров функции распределения прочности  $F(k)$  в микрообъемах материала (точечной линией обозначена кривая, полученная для  $m = 10^4$ ; штриховой – для  $m = 10^5$ ; сплошной – где функция прочности является константой и равна  $k_0$ ).

Графики показывают, что параметр  $m$  существенно влияет на кривые макродеформирования и с его увеличением уменьшается величина макронапряжения, соответствующего фиксированному значению макродеформации. Из рис. 2.1 также следует, что диаграммы макродеформирования, в которых учитывался разброс микропрочности, существенно зависят от начальной пористости.

### §3. Повреждаемость однонаправленных дискретно-волоконистых композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами.

**3.1. Эффективные термоупругие модули композитных материалов с трансверсально-изотропными компонентами.** Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными дискретными волокнами. Матрица предполагается изотропной, а волокна – трансверсально-изотропными с совпадающими плоскостями изотропии, причем в процессе нагружения в волокнах и матрице возникают микроразрушения, которые будем моделировать случайно расположенными пустыми микропорами квазисфери-

ческой формы. Примем, что заданы макродеформации композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , тогда макро-напряжения в композите  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  связаны с ними соотношениями (1.19). Здесь  $\lambda_{ijkl}^*$ ,  $\beta_{ij}^*$  – тензоры эффективных упругих модулей и эффективных коэффициентов температурного напряжения, которые в случае трансверсально-изотропной симметрии композита имеют пять и две независимых постоянных  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  и  $\beta_1^*$ ,  $\beta_3^*$ , которые являются функциями термоупругих модулей поврежденных компонентов  $\lambda_{ij}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ij}^{[2]}$ ,  $\beta_i^{[1]}$ ,  $\beta_i^{[2]}$ , объемных концентраций включений  $c_1$ ,  $c_2$  и их пористости, а также параметров формы включений. Индексы 1 и 2 обозначают, соответственно, включения и матрицу. Если форму дискретных волокон моделировать вытянутыми сфероидальными с размером полуосей в поперечном и продольном направлениях, соответственно,  $t_1$ ,  $t_2$ , то зависимость тензоров эффективных модулей упругости  $\lambda_{ij}^*$  и эффективных коэффициентов температурного напряжения  $\beta_i^*$  от термоупругих постоянных поврежденных компонентов  $\lambda_{ij}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ij}^{[2]}$ ,  $\beta_i^{[1]}$ ,  $\beta_i^{[2]}$ , объёмного содержания включений  $c_1$  в матрице и параметра формы включений можно определить на основании следующих соотношений:

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^* \left( \lambda_{mnpq}^{[1]}, \lambda_{mnpq}^{[2]}, c_1, t \right); \quad \beta_{ij}^* = \beta_{ij}^* \left( \beta_{kl}^{[1]}, \beta_{kl}^{[2]}, \lambda_{mnpq}^{[1]}, \lambda_{mnpq}^{[2]}, c_1, t \right); \quad t = t_2/t_1. \quad (3.1)$$

Тензоры эффективных упругих модулей и эффективных коэффициентов температурного напряжения данного трансверсально-изотропного композитного материала могут быть определены на основании результатов, представленных в [50, 78, 98, 105].

Рассмотрим представительный объем композитного материала, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными сфероидальными дискретными волокнами. Матрица и волокна предполагаются трансверсально-изотропными с совпадающими плоскостями изотропии. Тогда компоненты тензора эффективных упругих модулей определяются пятью независимыми постоянными, а тензор коэффициентов температурных напряжений – двумя независимыми постоянными.

Если форму дискретных волокон моделировать вытянутыми сфероидальными с размером полуосей в поперечном и продольном направлениях, соответственно,  $t_1$ ,  $t_3$ , то условная плотность распределения  $p_{vk}(x^{(1)} - x^{(2)})$  для композитного материала, представляющего собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными сфероидальными волокнами, имеет вид [50, 78, 98, 105]

$$p_{vk}(x) = c_\kappa + (\delta_{vk} - c_\kappa) \varphi(x); \quad \varphi(x) = \exp\left(-\sqrt{n_1^2(x_1^2 + x_2^2) + n_3^2 x_3^2}\right); \quad (3.2)$$

$$n_1 = \beta/t_1; \quad n_3 = \beta/t_3; \quad \beta = 8/\pi^2 c_2.$$

Здесь  $c_2 = 1 - c_1$ ;  $c_1$  – объёмное содержание включений в матрице.

Построив Фурье-образ функции Грина для трансверсально-изотропного материала [50, 105], подставив выражения, определяющие условную плотность распределения композитного материала с однонаправленными сфероидальными включениями, и Фурье-образ функции Грина для трансверсально-изотропной среды в соотношения (2.2), затем проинтегрировав их и подставив в (2.1), получим соотношения для определения эффективных термоупругих свойств композитного материала с трансверсально-изотропными компонентами в явном виде, как функцию термоупругих постоянных пористых компонентов композитного материала  $\lambda_{ij}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ij}^{[2]}$ ,  $\beta_i^{[1]}$ ,  $\beta_i^{[2]}$ , объёмного содержания включений  $c_1$  в матрице и параметра, характеризующего форму

включений. Эффективные упругие постоянные  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$  и коэффициенты температурных напряжений  $\beta_1^*$ ,  $\beta_3^*$  исследуемого материала можно определить в соответствии с соотношениями

$$\begin{aligned}\lambda_{13}^* &= \langle \lambda_{13} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[ \left( 2\lambda_{13}^{[3]2} + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) \lambda_{33}^{[3]} \right) (K_1 - z\lambda_{13}') + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{13}^{[3]} (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) (K_3 + z\lambda_{13}') + \lambda_{13}^{[3]} \lambda_{33}^{[3]} (K_4 + z(\lambda_{11}' + \lambda_{12}')) \right]; \quad (3.3) \\ \lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{12} \rangle + \\ &+ \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[ 4\lambda_{13}^{[3]} (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) (K_1 - z\lambda_{13}') + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]})^2 (K_3 + z\lambda_{33}') + 2\lambda_{13}^{[3]2} (K_4 + z(\lambda_{11}' + \lambda_{12}')) \right]; \\ \lambda_{33}^* &= \langle \lambda_{33} \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left[ 4\lambda_{13}^{[3]} \lambda_{33}^{[3]} (K_1 - z\lambda_{13}') + 2\lambda_{13}^{[3]2} (K_3 + z\lambda_{33}') + \lambda_{33}^{[3]2} (K_4 + z(\lambda_{11}' + \lambda_{12}')) \right]; \\ \lambda_{44}^* &= \langle \lambda_{44} \rangle + \frac{4c_1 c_2 \lambda_{44}^{[3]2} K_5}{1 - 4\lambda_{44}' K_5}; \quad \lambda_{66}^* = \frac{1}{2} (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) = \frac{1}{2} (\langle \lambda_{11} \rangle - \langle \lambda_{12} \rangle) + \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^{[3]} - \lambda_{12}^{[3]})^2 K_2}{1 - 2(\lambda_{11}' - \lambda_{12}') K_2}\end{aligned}$$

и 2 составляющих матрицы эффективных коэффициентов линейного температурного расширения

$$\alpha_1^* = A_1 \beta_3^* + A_2 \beta_1^*; \quad \alpha_3^* = 2A_1 \beta_1^* + A_3 \beta_3^* \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\beta_1^* &= \langle \beta_1 \rangle + \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left\{ \left[ 2\lambda_{33}^{[3]} \beta_1^{[3]} + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) \beta_3^{[3]} \right] (K_1 - z\lambda_{13}') + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_{11}^{[3]} + \lambda_{12}^{[3]}) \beta_1^{[3]} (K_3 + z\lambda_{33}') + \lambda_{13}^{[3]} \beta_3^{[3]} [K_4 + z(\lambda_{11}' + \lambda_{12}')] \right\}, \quad (3.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3^* &= \langle \beta_3 \rangle + \\ &+ \frac{c_1 c_2}{\Delta} \left\{ \left[ 2\lambda_{13}^{[3]} \beta_1^{[3]} + \lambda_{33}^{[3]} \beta_3^{[3]} \right] (K_1 - z\lambda_{13}') + 2\lambda_{13}^{[3]} \beta_1^{[3]} (K_3 + z\lambda_{33}') + \lambda_{33}^{[3]} \beta_3^{[3]} [K_4 + z(\lambda_{11}' + \lambda_{12}')] \right\}.\end{aligned}$$

В (3.3) – (3.5) приняты обозначения:

$$\Delta = 1 - 4K_1 \lambda_{13}' - K_3 (\lambda_{11}' + \lambda_{12}') - K_4 \lambda_{44}' + z \left[ 2\lambda_{13}'^2 - (\lambda_{11}' + \lambda_{12}') \lambda_{33}' \right] \quad (3.6)$$

и

$$A_1 = \frac{\lambda_{13}^*}{a}; \quad A_2 = \frac{\lambda_{33}^*}{a}; \quad A_3 = \frac{\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*}{a}; \quad a = (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \quad (3.7)$$

$$(z = 2K_1^2 - K_3 K_4, \quad \lambda_{ij}^{[3]} = \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^{[2]}, \quad \lambda_{ij}' = c_1 \lambda_{ij}^{[1]} + c_2 \lambda_{ij}^{[3]} - \lambda_{ij}^c), \quad (3.8)$$

а постоянные  $\lambda_{ij}^c$  принимаются в виде (1.47).

Параметры  $K_n$  ( $n = 1, \dots, 5$ ) определяются формулами

$$K_1 = -4(\lambda_{13}^c + \lambda_{44}^c)(A_2 - A_3); \quad K_4 = 8 \left[ \lambda_{11}^c A_2 - (\lambda_{11}^c - \lambda_{44}^c) A_3 \right];$$

$$K_2 = \lambda_{44}^c A_1 + (\lambda_{33}^c - 2\lambda_{44}^c) A_2 - (\lambda_{33}^c - \lambda_{44}^c) A_3 + A_4 - A_5;$$

$$K_3 = 4 \left[ \lambda_{44}^c A_1 + (\lambda_{33}^c - 2\lambda_{44}^c) A_2 - (\lambda_{33}^c - \lambda_{44}^c) A_3 \right]; \quad (3.9)$$

$$K_5 = \lambda_{11}^c A_1 - 2(\lambda_{11}^c + \lambda_{13}^c) A_2 + (\lambda_{11}^c + 2\lambda_{13}^c + \lambda_{33}^c) A_3 + A_4$$

$$\left( A_1 = -\frac{1}{8\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c} \left\{ \frac{(t^2 - 1)^2}{t^4 - 2ft^2 + q} + [1 + 2f(f - 1) - q] I_1 + 2(f - 1) I_2 \right\}; \quad (3.10)$$

$$A_2 = -\frac{1}{8\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c} \left[ -\frac{t^2 - 1}{t^4 - 2ft^2 + q} - (f - 1) I_1 - I_2 \right]; \quad A_3 = -\frac{1}{8\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c} \left[ \frac{2}{t^4 - 2ft^2 + q} + I_1 \right].$$

При этом величины  $I_1$  и  $I_2$ , входящие в выражения (3.10), имеют различный вид в зависимости от знака параметра  $Q$ , определяющегося выражением

$$Q = f^2 - q. \quad (3.11)$$

Если  $Q > 0$ , тогда

$$I_1 = \frac{D_1 - D_2}{2t^2 \sqrt{Q}}; \quad I_2 = \frac{D_1 + D_2}{2t^2} \quad (3.12)$$

$$D_i = \begin{cases} \frac{1}{z_i^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{z_i}, & z_i > 0 \\ -\frac{1}{2(-z_i)^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{-z_i}}{1 - \sqrt{-z_i}}, & z_i < 0 \end{cases}; \quad i \in \{1, 2\}; \quad z_1 = \frac{f - t^2 + \sqrt{Q}}{t^2}; \quad z_2 = \frac{f - t^2 - \sqrt{Q}}{t^2}. \quad (3.13)$$

Если  $Q < 0$ , тогда

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 z_3^3 \sqrt{-Q}} \left[ \sqrt{z_3 - a} (z_3 + 2a) \operatorname{arccctg} \alpha + \frac{1}{2} \sqrt{z_3 + a} (z_3 - 2a) \ln \beta \right];$$

$$I_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{t^2 z_3^3} \left[ \sqrt{z_3 + a} (z_3 - 2a) \operatorname{arccctg} \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{z_3 - a} (z_3 + 2a) \ln \beta \right] \quad (3.14)$$

$$\left( z_3 = \sqrt{z_1 z_2}; \quad \alpha = \frac{1 - z_3}{\sqrt{2(z_3 + a)}}; \quad \beta = \frac{1 + \sqrt{2(z_3 - a)} + z_3}{1 - \sqrt{2(z_3 - a)} + z_3}; \quad a = \frac{f - t^2}{t^2} \right). \quad (3.15)$$

Если  $Q = 0$ , тогда

$$I_1 = \frac{t^2 - 3fD}{2fz_4^2}; \quad I_2 = \frac{D}{z_4}; \quad z_4 = f - t^2 \quad (3.16)$$

$$D = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{z_4}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{z_4}}{t}, & z_4 > 0; \\ -\frac{t}{\sqrt{-z_4}} \ln \frac{t + \sqrt{-z_4}}{\sqrt{|f|}}, & z_4 < 0 \end{cases}; \quad (3.17)$$

$t$  – параметр, характеризующий форму включений

$$t = t_1/t_3; \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.18)$$

а  $t_1, t_3$  – размеры полуосей сфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях, соответственно.

Величины  $A_4$  и  $A_5$  из (3.9) определяются формулами

$$A_4 = -\frac{1}{8\lambda_{66}^c} \frac{1-t^2 + (1-\mu)E}{\mu-t^2}; \quad A_5 = -\frac{1}{8\lambda_{66}^c} \frac{1-E}{\mu-t^2}; \quad (3.19)$$

$$E = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{\mu-t^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\mu-t^2}}{t}, & \mu-t^2 > 0; \\ -\frac{t}{\sqrt{t^2-\mu}} \ln \frac{t+\sqrt{t^2-\mu}}{\sqrt{\mu}}, & \mu-t^2 < 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

При этом параметры  $f, q$  и  $\mu$  в уравнениях (3.9) – (3.20) определяются соотношениями

$$f = \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{33}^c - \lambda_{13}^c (\lambda_{13}^c + 2\lambda_{44}^c)}{2\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c}; \quad q = \frac{\lambda_{33}^c}{\lambda_{11}^c}; \quad \mu = \frac{\lambda_{44}^c}{\lambda_{66}^c}. \quad (3.21)$$

Тензоры модулей упругости и коэффициентов температурных напряжений поврежденных компонентов  $\lambda_{ij}^{[1]}, \lambda_{ij}^{[2]}, \beta_i^{[1]}, \beta_i^{[2]}$  определяются через тензоры модулей упругости и коэффициентов температурного напряжения скелетов компонентов  $\lambda_{ij}^1, \lambda_{ij}^2, \beta_i^1, \beta_i^2$  и их пористости  $p_1, p_2$ , характеризующие поврежденность, на основании соотношений (2.10) – (2.27), представленных в п. 2, т. е.

$$\lambda_{ijkl}^{[r]} = \lambda_{ijkl}^{[r]} (\lambda_{mnpq}^r, p_r); \quad \beta_{ij}^{[r]} = \beta_{ij}^{[r]} (\lambda_{mnpq}^r, \beta_{ij}^r, p_r), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (3.22)$$

Таким образом, зная термоупругие постоянные пористых компонентов, их объемное содержание, геометрические параметры структуры, а также объемное содержание пор в компонентах на основании соотношений (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21) можно определить эффективные термоупругие модули и коэффициенты температурных напряжений дискретно-волокнистого композитного материала с трансверсально-изотропными пористыми компонентами. Эффективные термоупругие постоянные таких композитов определяются в два этапа. На первом этапе по известным термоупругим свойствам материала компонентов и объемным содержаниям пор в компонентах определяются эффективные свойства пористых компонентов на основании соотношений (2.10) – (2.27); на втором этапе по вычисленным эффективным свойствам пористых компонентов, их объемным содержаниям и геометрическим параметрам структуры можно определить эффективные термоупругие постоянные всего композитного материала на основании соотношений (3.9) – (3.21).

Приведем сравнение результатов для эффективных упругих модулей пористого трансверсально-изотропного материала, полученных методом условных моментов и другими методами.

На рис. 3.1, 3.2 показаны кривые зависимостей модулей Юнга  $E_1^*, E_3^*$  трансверсально-изотропного материала, ослабленного стохастически расположенными квазисферическими порами, от концентрации пор  $c_1$ , полученные различными методами. Сплошной кривой изображены данные, полученные методом условных моментов; пунктирной линией – модули, полученные методом, не учитывающим взаимодействие

включений; точечной линией – данные, полученные методом эффективных полей [113]; штрих-пунктирной линией – данные, полученные детерминированным методом «единичной ячейки» [90] для следующих упругих постоянных трансверсально-изотропного материала:  $\lambda_{11}^{[1]} = 2,179$ ;  $\lambda_{33}^{[1]} = 10,345$ ;  $\lambda_{13}^{[1]} = 0,689$ ;  $\lambda_{13}^{[1]} = 0,579$ ;  $\lambda_{44}^{[1]} = 1$ .

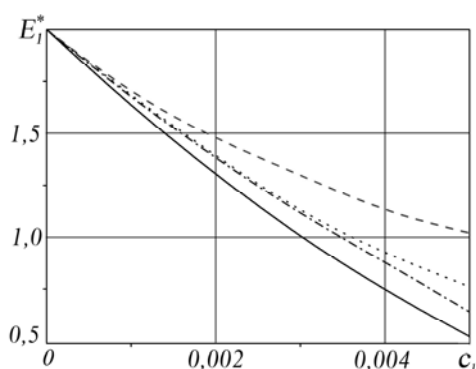


Рис. 3.1

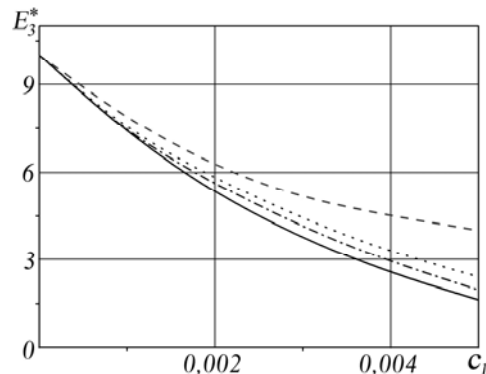


Рис. 3.2

Следует отметить, что результаты, полученные методом условных моментов и детерминированным методом «единичной ячейки» имеют незначительные различия даже при высокой концентрации пор (более 30%). Метод «единичной ячейки» является достаточно точным численным методом (для периодических структур), особенно при изучении свойств композитных материалов, у которых физико-механические свойства фаз имеют существенное различие и при большом объемном содержании включений или пор, где структура материала и взаимодействие включений (пор) оказывают существенное влияние на эффективные свойства. Однако в качестве недостатка этого метода следует отметить, что в данном случае эффективные упругие константы, полученные детерминированным методом «единичной ячейки» имеют ортотропную симметрию, в то время как реальные материалы в рассматриваемом случае имеют трансверсально-изотропную симметрию. Т.е., регуляризация структуры порождает дополнительную анизотропию. Поэтому используется дополнительное допущение, позволяющее понизить анизотропию данного пористого материала. В тоже время метод условных моментов учитывает случайный характер расположения включений или пор (что свойственно реальным материалам) и учитывает взаимное влияние включений или пор на эффективные свойства материала без дополнительных ограничений и допущений в рамках двухточечного приближения. Большие различия наблюдаются между результатами, полученными методом условных моментов и постоянными, полученными методом, не учитывающим взаимодействие включений и методом эффективных полей. Это можно объяснить тем, что последние два метода не учитывают взаимодействие пор, что, при большой их концентрации, оказывает существенное влияние на эффективные свойства.

Ниже в табл. 3. 1 приведено сравнение с экспериментальными данными (d) для эффективных упругих характеристик углепластика, имеющего трансверсально-изотропную фазу (угольные волокна) и теоретическими результатами, вычисленными (a) «cross-property connections» [114], (b) «approximate cross-property connections» [112] и (c) методом условных моментов, которые подтверждают тот факт, что метод условных моментов дает более точные приближения по сравнению с другими методами.

Для проверки результатов использованы экспериментальные данные [65] для полипропиленовой матрицы (PPS), упрочненной угольными волокнами, и теоретические результаты [112, 114]. Угольные волокна имеют сильную анизотропию (трансверсально-изотропные свойства вдоль оси волокна). Упругие свойства матрицы и волокон являются следующими: угольные волокна –  $E_1^{[1]} = 13,8$  ГПа;  $E_3^{[1]} = 231$  ГПа;  $G_{13}^{[1]} = 12,4$  ГПа;

$G_{12}^{[1]} = 5,52$  ГПа;  $\nu_{13}^{[1]} = 0,2$ ;  $\nu_{12}^{[1]} = 0,25$ , полипропиленовая матрица –  $E^{[2]} = 4,0$  ГПа;  $\nu^{[2]} = 0,4$ ; отношение полуосей сфероидов –  $t = 17$ .

Таблица 3.1

$\lambda_{ij}^*$	$c_1 = 0,24$				$c_1 = 0,34$			
	(a)	(b)	(c)	(d)	(a)	(b)	(c)	(d)
$\lambda_{11}^*$	9,3 (7%)	9,3 (7%)	9,5 (5%)	10	9,4 (13%)	9,5 (12%)	9,9 (8%)	10,8
$\lambda_{22}^*$	9,3 (2%)	8,9 (6%)	9,5 (0%)	9,5	9,4 (9%)	9,1 (12%)	9,9 (4%)	10,3
$\lambda_{33}^*$	36,1 (5%)	13,3 (35%)	40 (5%)	38,0	40,7 (2%)	14,1 (66%)	58 (38%)	41,7
$\lambda_{44}^*$	2,0 (13%)	2,1 (8%)	2,2 (4%)	2,3	2,0 (20%)	2,2 (12%)	2,6 (4%)	2,5
$\lambda_{55}^*$	2,0 (41%)	2,1 (38%)	2,2 (35%)	3,4	2,0 (49%)	2,2 (44%)	2,6 (33%)	3,9
$\lambda_{66}^*$	1,8 (0%)	1,7 (5%)	1,9 (5%)	1,8	1,8 (10%)	1,8 (10%)	2,1 (5%)	2,0
$\lambda_{12}^*$	5,8 (12%)	5,7 (10%)	5,7 (10%)	5,2	5,8 (5%)	5,7 (6%)	5,7 (6%)	6,1
$\lambda_{13}^*$	5,7 (8%)	5,7 (8%)	5,6 (9%)	6,2	5,6 (22%)	5,7 (21%)	5,5 (23%)	7,2
$\lambda_{23}^*$	5,7 (10%)	5,7 (10%)	5,6 (8%)	5,2	5,6 (10%)	5,7 (8%)	5,5 (11%)	6,2

Отметим, что точность результатов, полученных методом условных моментов, является более высокой по сравнению с другими методами для постоянных  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{22}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$ , особенно для более высокой концентрации включений ( $c_1 = 0,34$ ). В тоже время для постоянных  $\lambda_{66}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{23}^*$  точность результатов, полученных всеми методами, является приблизительно одинаковой для всех объемных содержаний включений. Исключение составляет только  $\lambda_{33}^*$  для более высокой концентрации включений. Здесь наблюдается значительное различие результатов эксперимента и результатов, полученных методом условных моментов. Это можно объяснить не идеальностью контакта матрица – включение, влияние которого, больше всего, проявляется в направлении волокон (33). Также сказывается разориентация волокон в образце, для которого были получены экспериментальные данные. Известно, что для волокнистого композита эффективные упругие постоянные в направлении волокон могут быть определены приближением Фойхта [12], в соответствии с которым модуль  $\lambda_{33}^*$  возрастает пропорционально объемной концентрации волокон. В случае, когда отношение полуосей сфероидальных включений является достаточно большим  $t = 17$ , то  $\lambda_{33}^*$  должно возрастать почти пропорционально  $c_1$ , что и показывает метод условных моментов.

### 3.2. Повреждаемость однонаправленных дискретно-волоконистых материалов.

Если задан тензор макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , то на основе зависимостей (1.19) и соотношений

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta, \quad r \in \{1, 2\}, \quad (3.23)$$

а также равенств

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \langle \sigma_{ij}^1 \rangle + c_2 \langle \sigma_{ij}^2 \rangle, \quad \langle \varepsilon_{kl} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{kl}^1 \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{kl}^2 \rangle, \quad (3.24)$$

находим, что

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{*[r]} \langle \varepsilon_{kl} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta, \quad (3.25)$$



$$\lambda_{ijmn}^{*[r]} = \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right), \quad (3.26)$$

где  $I_{pqmn}$  – единичный тензор, а  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  – соответственно, тензоры средних напряжений и средних деформаций поврежденного  $r$ -го компонента.

Средние по скелету  $r$ -го компонента напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  связаны со средними напряжениями  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  поврежденного  $r$ -го компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1-p_r} \langle \sigma_{ij}^r \rangle. \quad (3.27)$$

Тогда на основе (3.23) – (3.27) получим выражения средних по скелету  $r$ -го компонента напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  через макродеформации

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1-p_r} \left[ \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta \right]; \quad (3.28)$$

$$\langle \lambda_{pqkl} \rangle = c_1 \lambda_{pqkl}^{[1]} + c_2 \lambda_{pqkl}^{[2]}. \quad (3.29)$$

В случае трансверсально-изотропных компонентов с плоскостью изотропии  $x_1x_2$  – исходим из обобщенного критерия разрушения в форме Губера – Мизеса, который для скелета  $r$ -го компонента примем в виде

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^{r'} \bar{\sigma}_{ij}^{r'} + a_{1r} (\bar{\sigma}_{33}^{r'})^2 + a_{2r} (\bar{\sigma}_{11}^{r'} + \bar{\sigma}_{22}^{r'}) \bar{\sigma}_{33}^{r'} + a_{3r} (\bar{\sigma}_{13}^{r'2} + \bar{\sigma}_{23}^{r'2})} = k_r. \quad (3.30)$$

Здесь  $a_{1r}$ ,  $a_{2r}$ ,  $a_{3r}$  – безразмерные детерминированные постоянные, характеризующие трансверсальную изотропию прочности неразрушенной части материала  $r$ -го компонента;  $k_r$  – предельное значение выражения (3.30), которое является случайной функцией координат.

При  $a_{1r} = a_{2r} = a_{3r} = 0$  из (3.30) следует критерий Губера – Мизеса.

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^{r'} \bar{\sigma}_{ij}^{r'}} = k_r. \quad (3.31)$$

Согласно (3.25), (3.28) напряжения в материале скелета  $r$ -го компонента  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  выразим через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ , тогда получим выражение предельной поверхности для материала  $r$ -го компонента в пространстве макродеформаций

$$\begin{aligned} I_{\sigma}^r = \frac{1}{1-p_r} & \left\{ \frac{1}{2} \left( \lambda_{11}^{*[r]} - \lambda_{22}^{*[r]} \right)^2 \left[ \left( \langle \varepsilon_{11} \rangle - \langle \varepsilon_{22} \rangle \right)^2 + 4 \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{9} \left( \frac{3}{2} + a_{1r} - a_{2r} \right) \left[ \left( \lambda_{11}^{*[r]} + \lambda_{12}^{*[r]} - 2\lambda_{13}^{*[r]} \right) \left( \langle \varepsilon_{11} \rangle + \langle \varepsilon_{22} \rangle \right) - \right. \\ & \left. \left. - 2 \left( \lambda_{33}^{*[r]} - 2\lambda_{13}^{*[r]} \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right]^2 + 4 \left( 2 + a_{3r} \right) \lambda_{44}^{*[r]} \left( \langle \varepsilon_{11} \rangle^2 + \langle \varepsilon_{22} \rangle^2 \right) - 2 \left( \beta_1^{[r]} - \beta_3^{[r]} \right)^2 \theta \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Одноточечную функцию распределения  $F(k_r)$  параметра  $k_r$  можно описывать степенным законом на конечном интервале

$$F(k_r) = \begin{cases} 0, & k_r < k_{0r}; \\ \left( \frac{k_r - k_{0r}}{k_{1r} - k_{0r}} \right)^{\alpha_r}, & k_{0r} \leq k_r \leq k_{1r}; \\ 1, & k_r \geq k_{0r}; \end{cases} \quad (3.33)$$

или распределением Вейбулла

$$F(k_r) = \begin{cases} 0, & k_r < k_{0r}; \\ 1 - \exp(-m_r(k_r - k_{0r})^{\alpha_r}), & k_r \geq k_{0r}, \end{cases} \quad (3.34)$$

где  $k_{0r}$  – минимальная величина предельного значения  $k_r$ , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах  $r$ -го компонента;  $k_{1r}$ ,  $m_r$ ,  $\alpha_r$  – постоянные, характеризующие разброс микропрочности в  $r$ -ом компоненте.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность  $r$ -го компонента характеризуется пористостью  $p_{0r}$ . Тогда функция распределения  $F(k_r)$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части  $r$ -го компонента, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k_r$ . Поэтому если в неразрушенной части  $r$ -го компонента напряжения равны  $\bar{\sigma}_{ij}^r$ , то функция  $F(I_\sigma^r)$  определяет, согласно (3.30) – (3.34), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета  $r$ -го компонента. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82]

$$p_r = p_{0r} + (1 - p_{0r})F(I_\sigma^r), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (3.35)$$

Подставляя (3.32) в (3.35), получаем систему уравнений для определения пористости компонентов  $p_r$  как функций макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$p_r = p_r(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (3.36)$$

Подставляя затем (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21), (3.32), (3.35) в (1.19), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  композита.

На основе соотношений (1.19), (3.32), (3.35) можно записать алгоритм последовательных приближений для определения текущей пористости (поврежденности) материала, а зависимости (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21) дают возможность определить его эффективные деформативные характеристики.

**3.3. Итерационная схема решения трансцендентного уравнения.** Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (1.19), (3.32), (3.35), (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21), можно представить следующим образом:

– пористость  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $p_r^{(n)}$  связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $k_r^{(n)}$ , т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_\sigma^{r(n)}$ ;

– интенсивность средних касательных напряжений скелета  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $I_\sigma^{r(n)}$  связана с текущей пористостью скелета  $r$ -го компонента в

( $n-1$ )-ом приближении  $p_r^{(n-1)}$ , эффективными термоупругими постоянными всего композита в ( $n-1$ )-ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  согласно соотношениям (3.32), (3.35);

– эффективные термоупругие постоянные в ( $n-1$ )-ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  в свою очередь также связаны с текущей пористостью скелета  $r$ -го компонента в ( $n-1$ )-ом приближении  $p_r^{(n-1)}$  в соответствии с соотношениями (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21).

Таким образом, на основании выражений (3.32), (3.35) находим

$$p_r^{(n)} = p_{0r} + (1 - p_{0r}) F(k_r^{(n)}), \quad (3.37)$$

где принимаем распределение Вейбулла

$$F(k_r^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k_r^{(n)} < k_{0r}; \\ 1 - \exp\left(-m_r(k_r^{(n)} - k_{0r})^{\alpha_r}\right), & k_r^{(n)} \geq k_{0r}. \end{cases} \quad (3.38)$$

В свою очередь, согласно соотношениям (1.19), (3.32) имеем

$$k_r^{(n)} = I_{\sigma}^{r(n)} = I_{\sigma}^{r(n)} \left( \lambda_{ij}^{*(n-1)}, \beta_i^{*(n-1)}, p_r^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle \right), \quad (3.39)$$

в то время как в соответствии с соотношениями ((2.10) – (2.27), (3.10) – (3.22)

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^{*(n-1)} \left( \lambda_{mn}^r, c_1, p_r^{(n-1)}, t \right); \quad \beta_i^{*(n-1)} = \beta_i^{*(n-1)} \left( \lambda_{mn}^r, \beta_j^r, p_r^{(n-1)}, t \right). \quad (3.40)$$

Следовательно, уравнения (1.19), (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.34) позволяют определить эффективные термоупругие характеристики пористого трансверсально-изотропного композита в зависимости от макродеформаций

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)} \left( \langle \varepsilon_{kl} \rangle \right), \quad \beta_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_i^{*(n)} \left( \langle \varepsilon_{kl} \rangle \right). \quad (3.41)$$

Таким образом, задавая макродеформации, которым подвергается композит, и определив его эффективные термоупругие характеристики, на основании выражений (1.19), (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.34) можно вычислить макронапряжения.

**3.4. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основании полученных зависимостей исследованы диаграммы макродеформирования композитного материала на основе изотропной матрицы и однонаправлено ориентированных дискретных трансверсально-изотропных сфероидальных включений при микроразрушениях в компонентах для различных случаев одноосной деформации при заданных упругих характеристиках, объемных содержаниях и пористости компонентов, а также заданных геометрических параметрах структуры.

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в матрице композитного материала. Построим диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами ( $a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0$ ) для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \quad (3.42)$$

при заданных упругих характеристиках включений

$$\lambda_{11}^1 = 263 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{33}^1 = 283 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{13}^1 = 133 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{12}^1 = 152 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{44}^1 = 52 \text{ ГПа}; \quad (3.43)$$

эпоксидной матрицы

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,35, \quad (3.44)$$

объемной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в матрице

$$c_1 = 0,4; \quad t = 2; \quad p_{02} = 0; 0,2; 0,4, \quad (3.45)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности связующего  $F(k_2)$

$$\alpha_2 = 2; \quad m_2 = 10^3; 10^4; \quad k_{02} = 0,03 \text{ ГПа}. \quad (3.46)$$

На рис. 3.3 показаны кривые зависимости поврежденности матрицы  $p_2$  от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  и на рис. 3.4 – кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для различных значений начальной пористости матрицы  $p_{02}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_2$ , а также без учёта разброса микропрочности (предполагается, что  $k_2$  является постоянной величиной равной  $k_{02}$ ). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, пунктирной – учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2$ ;  $m_2 = 10^3$ , точечной – с параметрами  $\alpha_2 = 2$ ;  $m_2 = 10^4$ .

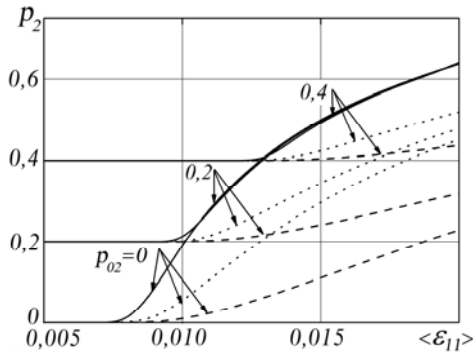


Рис. 3.3

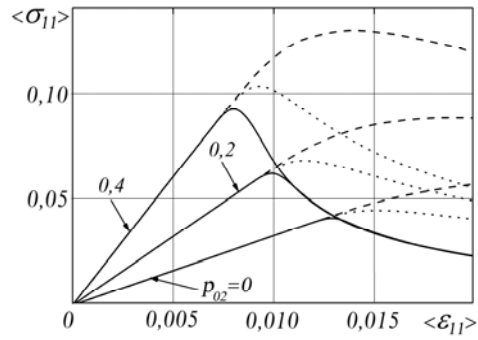


Рис. 3.4

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в волокне рассматриваемого композитного материала. Построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами ( $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$ ) для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0, \quad (3.47)$$

при объёмной концентрации включений, начальном содержании пор в волокне и отношении полуосей сфероидального волокна

$$c_1 = 0,4; \quad p_{01} = 0; 0,2; 0,4; \quad t = 20, \quad (3.48)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности угольного волокна  $F(k_1)$

$$\alpha_1 = 6; \quad m_1 = 10^3; 10^4; \quad k_{01} = 0,4 \text{ ГПа}. \quad (3.49)$$

На рис. 3.5 показаны кривые зависимости поврежденности волокон  $p_1$  от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  и на рис. 3.6 показаны кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (в ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для различных значений начальной пористости волокна  $p_{01}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_1$ , а также без учёта разброса микропрочности (предполагается, что  $k_1$  является постоянной величиной, равной  $k_{01}$ ). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, пунктирной – кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_1 = 6$ ,

$m_1 = 10^3$ , точечной – учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_1 = 6$ ,  $m_1 = 10^4$ .

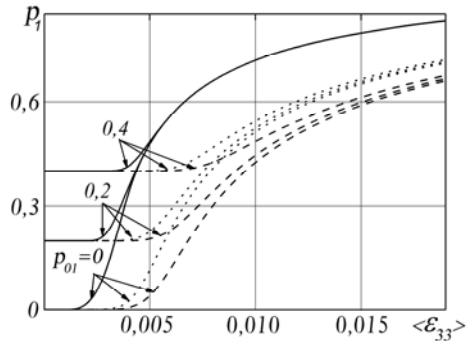


Рис. 3.5

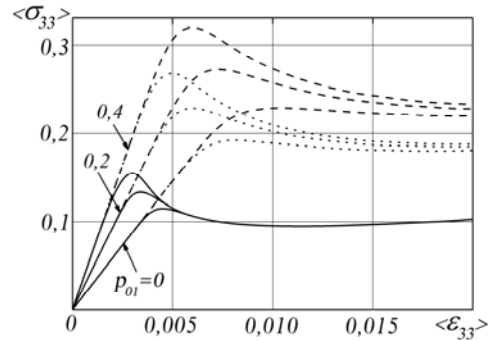


Рис. 3.6

Из графиков видно, что кривые, полученные без учёта разброса микропрочности, не учитывают влияния начальной пористости волокон  $p_{01}$  на поведение материала после начала образования микрповреждений. Из рис. 3.4, 3.6, также следует, что характер зависимостей кривых макродеформирования существенно зависит от параметров функции распределения прочности как при микроразрушениях в матрице  $F(k_2)$ , так и в волокнах  $F(k_1)$ . С увеличением значения параметров  $m_1, m_2$  уменьшается макронапряжение, соответствующее фиксированному значению макродеформации, и характер кривых зависимости приближается к характеру соответствующих кривых, построенных без учета разброса прочности в микрообъемах компонентов композита.

Кривая деформирования состоит из двух звеньев – прямолинейного восходящего и гиперболического, сначала восходящего, а затем нисходящего. Максимум кривой соответствует началу микроразрушений. Экспериментальная кривая деформирования материала при микроразрушениях обычно представляет собой только восходящее выпуклое звено, в конце которого происходит мгновенный разрыв. Отсутствие нисходящего звена в эксперименте объясняется трудностью задания макродеформации. Однако существуют работы [69, 118], подтверждающие наличие нисходящего звена при растяжении, что обусловлено возникновением рассеянных разрушений в материале и уменьшением его эффективной жесткости и как следствие уменьшением макронапряжений, соответствующих фиксированным значениям макродеформаций. Выпуклость восходящего звена экспериментальной кривой можно объяснить реальной неоднородностью напряжений и предела прочности в материале.

#### §4. Повреждаемость зернисто-волокнистых композитов с трансверсально-изотропными компонентами.

В данном разделе модель кратковременной микроповреждаемости [81, 82] обобщена на случай трех компонентного композитного материала. Рассмотрим представительный объем  $V$  композитного материала при заданных макродеформациях  $\langle \epsilon_{ij} \rangle$ . Композитный материал представляет собой матрицу, армированную однонаправленными бесконечными волокнами и случайно расположенными однонаправленными дискретными сфероидальными включениями, причем предполагается, что волокна и дискретные включения имеют различные упругие свойства, которые характеризуются трансверсально-изотропной симметрией. Кроме того, полагаем, что повреждаемость компонентов характеризуется пористостью, а микрповреждения моделируются стохастически расположенными порами квазисферической формы.

Эффективные модули и напряженно-деформированное состояние такого композитного материала определяются на основании стохастических уравнений теории упругости, учитывающих случайный характер распределения включений и микропор в

компонентах методом условных моментных функций [48, 49, 105]. При однородном нагружении в представительном объеме напряжения и деформации образуют статистически однородные случайные поля, удовлетворяющие условию эргодичности, что позволяет заменить операцию усреднения по представительному объему на операцию усреднения по ансамблю реализаций. Тогда для макронапряжений и макродеформаций такого материала будет справедлив закон Гука в следующей форме:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^{**} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\lambda_{ijkl}^{**}$  – тензор эффективных упругих постоянных композитного материала;  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – тензоры напряжений и деформаций, а угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций. Тензор эффективных упругих постоянных данного композита определяется в три этапа. На первом этапе на основании соотношений представленных в §2. для пористых материалов (2.10) – (2.27), определяем эффективные упругие модули компонентов, ослабленных порами. Затем на основании результатов, представленных в §3 для материалов, упрочненных однонаправленными сфероидными с трансверсально-изотропной симметрией физико-механических свойств (3.9) – (3.21), последовательно в два этапа определяем эффективные свойства всего композита с двумя различными типами включений.

Предположим, что матрица имеет начальную пористость  $p_{02}$ , а включения –  $p_{01}^1$  (волокна) и  $p_{01}^2$  (дискретные сфероидальные включения); концентрация включений в матрице равна  $c_{11}$  и  $c_{12}$  для волокон и дискретных сфероидальных включений, соответственно. Тогда компоненты тензора эффективных упругих модулей всего композита можно определить как функции упругих модулей компонентов  $\lambda_{ijkl}^{[1,1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[1,2]}$  и  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$  (индексы 1,1 и 1,2 обозначают включения первого (волокна) и второго (сфероиды) типа, соответственно, а 2 обозначает матрицу), объемного содержания включений  $c_{11}$ ,  $c_{12}$  в матрице, пористости компонентов  $p_{01}^1$ ,  $p_{01}^2$ ,  $p_{02}$  и параметра, характеризующего форму дискретных сфероидальных включений ( $t = t_3/t_1$ ).

$$\lambda_{ijkl}^{**} = \lambda_{ijkl}^{**}(\lambda_{mnpq}^{[1,1]}, \lambda_{mnpq}^{[1,2]}, \lambda_{mnpq}^{[2]}, c_{11}, c_{12}, p_{01}^1, p_{01}^2, p_{02}, t), \quad m, n, p, q \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.2)$$

Здесь  $t_1$ ,  $t_3$  – полуоси сфероидов в направлении их осей симметрии. Тензоры  $\lambda_{ijkl}^{[1,1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[1,2]}$  и  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$  определяются на основании соотношений (2.10) – (2.27) через тензоры упругих модулей скелетов компонентов  $\lambda_{ijkl}^{1,1}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{1,2}$  и  $\lambda_{ijkl}^2$  и их пористости  $p_{01}^1$ ,  $p_{01}^2$ ,  $p_{02}$ , которые характеризуют повреждаемость каждого компонента.

$$\lambda_{ijkl}^{[1,1]} = \lambda_{ijkl}^{[1,1]}(\lambda_{mnpq}^{1,1}, p_{01}^1); \quad \lambda_{ijkl}^{[1,2]} = \lambda_{ijkl}^{[1,2]}(\lambda_{mnpq}^{1,2}, p_{01}^2); \quad \lambda_{ijkl}^{[2]} = \lambda_{ijkl}^{[2]}(\lambda_{mnpq}^2, p_{02}). \quad (4.3)$$

Зная макродеформации и определив тензор эффективных упругих модулей всего композита, можно вычислить средние деформации матрицы  $\langle \varepsilon_{pq} |_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{pq} |_2 \rangle &= (I_{pqkl} + (1 - c_{12})(c_{12}\lambda_{pqkl}^{[1,2]} + (1 - c_{12})\lambda_{pqkl}^* - \lambda_{pqkl}^{**}))(\lambda_{klrs}^{[1,2]} - \lambda_{klrs}^*)^{-1} \times \\ &\times (I_{rsmn} + c_2'(c_1'\lambda_{rsmn}^{[1,1]} + c_2'\lambda_{rsmn}^{[2]} + \lambda_{rsmn}^*))\lambda_{mnij}^{[3]^{-1}} \langle \varepsilon_{ij} \rangle; \quad p, q, r, s \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

и включений первого  $\langle \varepsilon_{pq} |_{1,1} \rangle$  и второго типа  $\langle \varepsilon_{pq} |_{1,2} \rangle$  на основании соотношений

$$\langle \varepsilon_{pq} |_{1,2} \rangle = (I_{pqmn} + c_{12}(c_{12}\lambda_{pqkl}^{[1,2]} + (c_{11} + c_2)\lambda_{pqkl}^* - \lambda_{pqkl}^{**}))(\lambda_{klmn}^* - \lambda_{klmn}^{[1,2]})^{-1} \langle \varepsilon_{mn} \rangle;$$

$$\langle \varepsilon_{pq} \rangle = c_{11} \langle \varepsilon_{pq} |_{1,1} \rangle + c_{12} \langle \varepsilon_{pq} |_{1,2} \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{pq} |_2 \rangle; \quad (\lambda_{mnij}^{[3]} = \lambda_{mnij}^{[1,1]} - \lambda_{mnij}^{[2]}); \quad (4.5)$$

$c_2$  – объемное содержание матрицы;  $c_{11}$  и  $c_{12}$  – концентрация волокон и дискретных сфероидальных включений в матрице соответственно;  $c'_1$  и  $c'_2$  определяются следующими соотношениями:

$$c'_1 = \frac{c_{11}}{c_{11} + c_2}; \quad c'_2 = \frac{c_2}{c_{11} + c_2}; \quad c_{11} + c_{12} + c_2 = 1, \quad (4.6)$$

а  $\lambda_{pqkl}^*$  – тензор эффективных упругих постоянных композита на основе пористой матрицы и бесконечных волокон, который можно определить на основании соотношений (3.9) – (3.21), представленных в § 3, положив  $t = \infty$

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^* (\lambda_{mnpq}^{[1,1]}, \lambda_{mnpq}^{[2]}, c_{11}, p_{01}, p_{02}); \quad m, n, p, q \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.7)$$

В свою очередь, зная средние деформации компонентов  $\langle \varepsilon_{kl} |_{1,1} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{kl} |_{1,2} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{kl} |_2 \rangle$ , можно определить средние напряжения в каждом компоненте  $\langle \sigma_{ij} |_{1,1} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{ij} |_{1,2} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{ij} |_2 \rangle$ , которые связаны между собой следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij} |_{1,1} \rangle = \lambda_{ijkl}^{[1,1]} \langle \varepsilon_{kl} |_{1,1} \rangle; \quad \langle \sigma_{ij} |_{1,2} \rangle = \lambda_{ijkl}^{[1,2]} \langle \varepsilon_{kl} |_{1,2} \rangle; \quad \langle \sigma_{ij} |_2 \rangle = \lambda_{ijkl}^{[2]} \langle \varepsilon_{kl} |_2 \rangle. \quad (4.8)$$

Средние по скелету компонентов напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^{-1,1}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{-1,2}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{-2}$ , связаны со средними напряжениями в каждом компоненте  $\langle \sigma_{ij} |_{1,1} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{ij} |_{1,2} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{ij} |_2 \rangle$  зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^{-1,1} = \frac{1}{1 - p_{01}^1} \langle \sigma_{ij} |_{1,1} \rangle; \quad \bar{\sigma}_{ij}^{-1,2} = \frac{1}{1 - p_{01}^2} \langle \sigma_{ij} |_{1,2} \rangle; \quad \bar{\sigma}_{ij}^{-2} = \frac{1}{1 - p_{02}} \langle \sigma_{ij} |_2 \rangle. \quad (4.9)$$

Таким образом, на основании выражений (4.4) – (4.9), средние по скелету компонентов напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^{-1,1}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{-1,2}$ ,  $\bar{\sigma}_{ij}^{-2}$  связаны с макродеформациями посредством соотношений  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{-1,2} &= \frac{1}{1 - p_{01}^2} \lambda_{ijpq}^{[1,2]} \left( I_{pqmn} + c_{12} \left( c_{12} \lambda_{pqkl}^{[1,2]} + (c_{11} + c_2) \lambda_{pqkl}^* - \lambda_{pqkl}^{**} \right) (\lambda_{klmn}^* - \lambda_{klmn}^{[1,2]})^{-1} \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle; \\ \bar{\sigma}_{ij}^{-2} &= \frac{1}{1 - p_{02}} \lambda_{ijpq}^{[2]} \left( I_{pqkl} + (1 - c_{12}) \left( c_{12} \lambda_{pqkl}^{[1,2]} + (1 - c_{12}) \lambda_{pqkl}^* - \lambda_{pqkl}^{**} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\lambda_{klrs}^{[1,2]} - \lambda_{klrs}^*)^{-1} \right) \left( I_{rsmn} + c'_2 \left( \langle \lambda_{rsmn} \rangle + \lambda_{rsmn}^* \right) \lambda_{mnkl}^{[3]} \right)^{-1} \langle \varepsilon_{kl} \rangle; \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_{11} (1 - p_{01}^1) \langle \sigma_{ij}^{1,1} \rangle + c_{12} (1 - p_{01}^2) \langle \sigma_{ij}^{1,2} \rangle + c_2 (1 - p_{02}) \langle \sigma_{ij}^2 \rangle.$$

Предположим, что критерий разрушения скелета компонента определяется предельным значением интенсивности средних по неразрушенной части касательных напряжений

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^r \bar{\sigma}_{ij}^r} = k_r; \quad r \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.11)$$

где  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  – девиатор средних напряжений по скелету  $r$ -го компонента;  $k_r$  – соответствующее предельное значение прочности  $r$ -го компонента, являющееся случайной

функцией координат ( $r = 1; 2; 3$ , где  $1, 1 \rightarrow 1$ ;  $1, 2 \rightarrow 2$ ;  $2 \rightarrow 3$ ), что соответствует включениям первого и второго типа и матрице.

Одноточечная функция распределения  $F(k_r)$  случайной величины  $k_r$  представляет собой ассиметричную кривую. Наиболее подходящая аппроксимация экспериментально наблюдаемой кривой может быть описана распределением Вейбулла на полу бесконечном интервале

$$F(k_r) = \begin{cases} 0, & k_r < k_{0r}; \\ 1 - \exp(-m_r (k_r - k_{0r})^{\alpha_r}), & k_r \geq k_{0r}, \end{cases} \quad r \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.12)$$

Здесь  $k_{0r}$  – минимальная величина предельного значения интенсивности средних по скелету  $r$ -го компонента касательных напряжений  $k_r$ , с которого начинается разрушение материала  $r$ -го компонента;  $k_{0r}$ ,  $m_r$  и  $\alpha_r$  – коэффициенты, выбираемые из условия наилучшей аппроксимации разброса прочности, которые для каждого материала определяются экспериментально.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность  $r$ -го компонента характеризуется пористостью  $p_{0r}$ . Также предположим, что случайное поле предела микропрочности  $k_r$  является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами рассматриваемого макрообъема материала. Тогда имеет место свойство эргодичности, согласно которому функция распределения  $F(k_r)$  определяет относительное содержание неразрушенной части материала  $r$ -го компонента, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k_r$ . Поэтому, если известны напряжения в скелете материала  $r$ -го компонента  $\bar{\sigma}_{ij}^r$ , то функция  $F(I_{\sigma}^r)$  определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов в материале  $r$ -го компонента. Если разрушенные микрообъемы моделировать порами, то можно записать уравнение баланса пористости [81, 82]

$$p_r = p_{0r} + F(I_{\sigma}^r)(1 - p_{0r}); \quad r \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.13)$$

Согласно формуле (4.10), напряжения в скелете материала  $r$ -го компонента  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  можно выразить через макродеформации всего композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ . Подставляя (4.9), (4.11) в (4.13), получим систему уравнений для определения текущей пористости  $r$ -го компонента  $p_r$ , характеризующую микроповреждаемость, возникающую под воздействием приложенных деформаций, т.е.

$$p_r = p_r(\langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad r \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.14)$$

Затем, подставляя  $p_r$  вместо  $p_{0r}$  в уравнения (4.2), (4.3), (4.7), получим нелинейные зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , где нелинейность обусловлена микроразрушениями материала  $r$ -го компонента.

На основе соотношений (4.1) – (4.3), (4.11), (4.12), (4.14) можно записать итерационный алгоритм для определения текущей пористости материала, а зависимости (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21) дают возможность определить его эффективные деформативные характеристики.

**4.1. Итерационная схема решения трансцендентного уравнения.** Решение полученного трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (4.1) – (4.13), можно получить на основании следующей итерационной схемы:



– пористость  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $p_r^{(n)}$  определяется как функция предельного значения интенсивности средних касательных напряжений в каркасе  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $k_r^{(n)}$ , а значит, она зависит от интенсивности средних касательных напряжений скелета  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $I_\sigma^{r(n)}$ ;

– интенсивность средних касательных напряжений скелета  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $I_\sigma^{r(n)}$  согласно соотношениям (4.8) – (4.10) зависит от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , эффективных упругих модулей композита в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{**(n-1)}$  и от текущей пористости  $r$ -го компонента в  $(n-1)$ -ом приближении  $p_r^{(n-1)}$ ;

– эффективные упругие модули композита в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{**(n-1)}$  являются функцией текущей пористости  $r$ -го компонента в  $(n-1)$ -ом приближении  $p_r^{(n-1)}$  согласно уравнениям (4.7), (2.10) – (2.27).

Таким образом, на основании зависимостей (4.12), (4.13) можем записать уравнение баланса пористости

$$p_r^{(n-1)} = p_{0r} + (1 - p_{0r})F(k_r^{(n-1)}), \quad r \in \{1, 2, 3\}; \quad (4.15)$$

$$F(k_r^{(n-1)}) = \begin{cases} 0, & k_r^{(n-1)} < k_{0r}; \\ 1 - \exp(-m_r(k_r^{(n-1)} - k_{0r})^{\alpha_r}), & k_r^{(n-1)} \geq k_{0r}; \end{cases} \quad r \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.16)$$

В соответствии с выражениями (4.1) – (4.11) величина  $k_r^{(n-1)}$  в  $(n-1)$ -ом приближении зависит от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , эффективных упругих модулей композита  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{**(n-1)}$  и от пористостей  $r$ -го компонента  $p_r^{(n-1)}$  в  $(n-1)$ -ом приближении

$$k_r^{(n-1)} = I_\sigma^{r(n-1)} = I_\sigma^{r(n-1)}(\lambda_{ij}^{**(n-1)}, p_r^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle); \quad r \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.17)$$

в то время как компоненты тензора эффективных упругих модулей всего композита можно определить на основании соотношений (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21)

$$\lambda_{ij}^{**(n-1)} = \lambda_{ij}^{**(n-1)}(\lambda_{kl}^{[1,1]}, \lambda_{kl}^{[1,2]}, \lambda_{kl}^{[2]}, c_{11}, c_{12}, t, p_r^{(n-1)}). \quad (4.18)$$

Следовательно, уравнения (2.10) – (2.27), (3.9) – (3.21), (4.1) – (4.18) позволяют определить эффективные упругие характеристики пористого трансверсально-изотропного композита в зависимости от макродеформаций

$$\lambda_{ij}^{**} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{**(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (4.19)$$

Таким образом, задавая макродеформации, которым подвергается материал, и определив его эффективные упругие характеристики, можно определить макронапряжения, возникающие в таких композитных материалах.

**4.2. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основе предложенной модели приводится численное решение задачи о напряженно-деформируемом состоянии упругого композита армированного двумя различными типами включений с трансверсально-изотропной симметрией упругих свойств. Предполагается, что матрица имеет начальную пористость, которая характеризует повреждаемость. Рассматривается случай одноосного нагружения материала при задаваемых деформациях. В процессе деформирования в матрице происходит накопление повреждений и, начиная с определенного момента, она начинает разрушаться.

В качестве примера построим диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита на основе эпоксидной матрицы, упрочненной угольными волокнами и зернистыми включениями из алюмоборосиликатного стекла при одноосном нагружении

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0, \quad (4.20)$$

при заданных упругих характеристиках угля и стекла, соответственно:

$$\lambda_{11}^{1,1} = 263 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{33}^{1,1} = 283 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{13}^{1,1} = 133 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{12}^{1,1} = 152 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{44}^{1,1} = 52 \text{ ГПа};$$

$$E_{1,2} = 70 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = 0,2, \quad (4.21)$$

и упругих постоянных матрицы (эпоксид)

$$E_2 = 3 \text{ ГПа}; \quad \nu_2 = 0,382, \quad (4.22)$$

для объемной концентрации включений, начальном содержании пор в матрице и параметре  $t$ , характеризующем форму сфероидальных включений

$$c_{11} = 0,3; \quad c_{12} = 0,1; \quad p_{02} = 0; 0,2; 0,4; \quad t = 1, \quad (4.23)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности:

$$\alpha_3 = 2; \quad m_3 = 100; \quad 10^3; \quad 2 \times 10^4; \quad k_{03} = 0,015 \text{ ГПа}. \quad (4.24)$$

На рис. 4.1 приведены диаграммы макродеформирования  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (в ГПа) в зависимости от  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  при различных значениях начальной пористости матрицы  $p_{02}$  и параметре функции распределения прочности  $m_3$ . На диаграммах сплошной линией обозначены кривые, учитывающие разброс прочности материала матрицы с параметрами  $\alpha_3 = 2$ ,  $m_3 = 100$ , штриховой – кривые, учитывающие разброс прочности с параметрами  $\alpha_3 = 2$ ,  $m_3 = 10^3$ , точечной линией – учитывающие разброс прочности с параметрами  $\alpha_3 = 2$ ;  $m_3 = 2 \times 10^4$ .

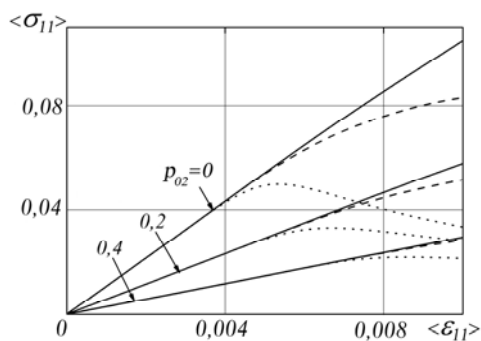


Рис. 4.1

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенный подход, базирующийся на методе условных моментных функций, уравнении баланса пористости и итерационном методе, позволяет нам исследовать эффективные деформативные свойства и напряженно-деформируемое состояние зернисто-волокнутого композита, стохастической структуры, компоненты которого обладают трансверсально-изотропной симметрией упругих свойств. Эффективные упругие модули зависят от упругих свойств компонентов их объемных концентраций, формы включений, начальной пористости матрицы и величины приложенной деформации.

### §5. Повреждаемость ортотропного материала.

Рассмотрим макрообъем линейно-упругого материала ослабленного стохастически расположенными квазисферическими порами при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  и температуре  $\theta$ . Материал скелета принимаем ортотропным, а его начальную пористость равной  $p_0$ . Закон связи между макронапряжениями, макродеформациями и температурой имеет вид (1.19).

Тензоры эффективных упругих модулей и эффективных коэффициентов температурного напряжения данного пористого ортотропного материала могут быть определены на основании результатов, представленных в [79, 98, 99].

Пусть материал имеет начальную пористость  $p_0$ . Тогда компоненты тензора эффективных упругих модулей  $\lambda_{ijkl}^*$  и эффективных коэффициентов температурного напряжения  $\beta_{ij}^*$  пористого ортотропного материала можно определить через термоупругие постоянные материала  $\lambda_{ijkl}$ ,  $\beta_{ij}$  и его пористость  $p_0$ . Переходя к матричным обозначениям компоненты тензора эффективных упругих постоянных  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{22}^*$ ,  $\lambda_{23}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$ ,  $\lambda_{55}^*$ ,  $\lambda_{66}^*$  и коэффициенты температурных напряжений  $\beta_1^*$ ,  $\beta_2^*$ ,  $\beta_3^*$  исследуемого материала определяются в соответствие с соотношениями

$$\lambda_{ij}^* = (1-p_0) \left[ \lambda_{ij} + p_0 \lambda_{iq} P_{qk} M_{kl} \lambda_{kj} \right]; \quad i, j, q, k, l \in \{1, 2, 3\}; \quad (5.1)$$

$$\lambda_{pp}^* = (1-p_0) \left[ \lambda_{pp} + p_0 (\lambda_{pp})^2 \frac{4M_{pp}}{1-4(2p_0-1)M_{pp}\lambda_{pp}} \right]; \quad p \in \{4, 5, 6\};$$

$$P_{qk} = \left( \delta_{qk} - (2p_0-1)M_{ql}\lambda_{lk} \right)^{-1}. \quad (5.2)$$

Здесь суммирование по индексу  $p$  не производится.

Компоненты матрицы  $M_{ij}$ , которые входит в выражения (5.1), (5.2) для определения эффективных упругих модулей, в случае ортотропного материала с квазисферическими порами определяются через определенные интегралы

$$\begin{aligned} M_{11} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{55}\lambda_{66}S_1 + \lambda_{44}(\lambda_{22}S_4 + \lambda_{33}S_8) + S_3u_1 + S_5u_3 + S_6u_8 \right] d\varphi; \\ M_{22} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}\lambda_{66}S_2 + \lambda_{55}(\lambda_{11}S_3 + \lambda_{33}S_9) + S_4u_2 + S_6u_9 + S_7u_3 \right] d\varphi; \\ M_{33} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}\lambda_{55}S_{10} + \lambda_{66}(\lambda_{11}S_5 + \lambda_{22}S_7) + S_6u_7 + S_8u_2 + S_9u_1 \right] d\varphi; \\ M_{23} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6(u_3u_6 - \lambda_{11}u_4) - u_4(\lambda_{66}S_7 + \lambda_{55}S_9) \right] d\varphi; \\ M_{13} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6(u_4u_6 - \lambda_{22}u_5) - u_5(\lambda_{66}S_5 + \lambda_{44}S_8) \right] d\varphi; \\ M_{12} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6(u_4u_5 - \lambda_{33}u_6) - u_6(\lambda_{55}S_3 + \lambda_{44}S_4) \right] d\varphi; \\ M_{44} &= \frac{2(p_0-1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{55}(\lambda_{11}S_5 + \lambda_{33}S_{10}) + \lambda_{66}(\lambda_{11}S_3 + \lambda_{22}S_2) + S_7(\lambda_{22}\lambda_{55} - 2\lambda_{23}\lambda_{66}) + \right. \\ &\quad \left. + S_9(\lambda_{33}\lambda_{66} - 2\lambda_{23}\lambda_{55}) + 2S_6u_{10} + S_8u_9 + S_4u_7 \right] d\varphi; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
M_{55} &= \frac{2(p_0 - 1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\lambda_{44}(\lambda_{22}S_7 + \lambda_{33}S_{10}) + \lambda_{66}(\lambda_{11}S_1 + \lambda_{22}S_4) + S_5(\lambda_{11}\lambda_{44} - 2\lambda_{13}\lambda_{66}) + \\
&\quad + S_8(\lambda_{33}\lambda_{66} - 2\lambda_{13}\lambda_{44}) + 2S_6u_{11} + S_9u_8 + S_3u_7] d\varphi; \\
M_{66} &= \frac{2(p_0 - 1)^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\lambda_{44}(\lambda_{22}S_2 + \lambda_{33}S_9) + \lambda_{55}(\lambda_{11}S_1 + \lambda_{33}S_8) + S_3(\lambda_{11}\lambda_{44} - 2\lambda_{12}\lambda_{55}) + \\
&\quad + S_4(\lambda_{22}\lambda_{55} - 2\lambda_{12}\lambda_{44}) + 2S_6u_{12} + S_7u_8 + S_5u_9] d\varphi.
\end{aligned}$$

Здесь величины  $u_i$  ( $i = 1, \dots, 12$ ) являются постоянными и определяются формулами

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_{44}\lambda_{66} + \lambda_{22}\lambda_{55}; \quad u_2 = \lambda_{55}\lambda_{66} + \lambda_{11}\lambda_{44}; \quad u_3 = \lambda_{44}\lambda_{55} + \lambda_{33}\lambda_{66}; \\
u_4 &= \lambda_{23} + \lambda_{44}; \quad u_5 = \lambda_{13} + \lambda_{55}; \quad u_6 = \lambda_{12} + \lambda_{66}; \\
u_7 &= \lambda_{11}\lambda_{22} - (\lambda_{12})^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{66}; \quad u_8 = \lambda_{22}\lambda_{33} - (\lambda_{23})^2 - 2\lambda_{23}\lambda_{44}; \\
u_9 &= \lambda_{11}\lambda_{33} - (\lambda_{13})^2 - 2\lambda_{13}\lambda_{55}; \quad u_{10} = u_3u_6 + \lambda_{55}\lambda_{66} - \lambda_{11}\lambda_{23}; \\
u_{11} &= u_4u_6 + \lambda_{44}\lambda_{66} - \lambda_{22}\lambda_{13}; \quad u_{12} = u_4u_5 + \lambda_{44}\lambda_{55} - \lambda_{33}\lambda_{12},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$S_j$  являются функциями угла  $\varphi$ , по которому выполняется интегрирование, и имеют вид

$$\begin{aligned}
S_1 &= A_1 \cos^6 \varphi; \quad S_2 = (A_4 - 3A_3 + 3A_2 - A_1) \sin^6 \varphi; \\
S_3 &= (A_2 - A_1) \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi; \quad S_4 = (A_3 - 2A_2 + A_1) \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi; \\
S_5 &= A_2 \cos^4 \varphi; \quad S_6 = (A_3 - A_2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \quad S_7 = (A_4 - 2A_3 + A_2) \sin^4 \varphi; \\
S_8 &= A_3 \cos^2 \varphi; \quad S_9 = (A_4 - A_3) \sin^2 \varphi; \quad S_{10} = A_4.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Величины  $A_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), которые также являются функциями угла  $\varphi$  и в зависимости от знака параметра

$$R = h^3 + q^2, \tag{5.6}$$

принимают различные значения, которые будут приведены ниже.

Параметры  $h$  и  $q$  определяются выражениями

$$h = \frac{3b_1b_3 - b_2^2}{9b_1^2}; \quad q = \frac{b_2^3}{27b_1^3} - \frac{b_2b_3}{6b_1^2} + \frac{a_1}{2b_1}, \tag{5.7}$$

где  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) определяются формулами

$$\begin{aligned}
a_1 &= (1 - p_0)^3 (\lambda_{55} \cos^2 \varphi + \lambda_{44} \sin^2 \varphi) (\lambda_{11}\lambda_{66} \cos^4 \varphi + \lambda_{22}\lambda_{66} \sin^4 \varphi + u_7 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi); \\
a_2 &= (1 - p_0)^3 \left[ u_3 (\lambda_{11} \cos^4 \varphi + \lambda_{22} \sin^4 \varphi) - (\lambda_{13}^2 + 2\lambda_{13}\lambda_{55}) \times \right. \\
&\quad \times (\lambda_{66} \cos^2 \varphi + \lambda_{22} \sin^2 \varphi) \cos^2 \varphi - (\lambda_{23}^2 + 2\lambda_{23}\lambda_{44}) (\lambda_{66} \sin^2 \varphi + \lambda_{11} \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi +
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 2\lambda_{44}\lambda_{55}\lambda_{66} + 2u_4u_5u_6 + \lambda_{33}u_7 \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \Big]; \\
a_3 & = (1-p_0)^3 \left[ \left( \lambda_{33}\lambda_{55}\lambda_{66} + \lambda_{44}u_9 \right) \cos^2 \varphi + \left( \lambda_{33}\lambda_{44}\lambda_{66} + \lambda_{55}u_8 \right) \sin^2 \varphi \right]; \\
a_4 & = (1-p)^3 \lambda_{33}\lambda_{44}\lambda_{66}.
\end{aligned}$$

Если  $R \leq 0$ , тогда  $A_j$  ( $j=1, \dots, 4$ ) из (5.5) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
A_j & = \frac{1}{4b_1|h|} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} \frac{\alpha_i^{j-1} I_i}{d_i} \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad A_4 = \frac{1}{b_1} \left( 1 + \frac{1}{4|h|} \sum_{i=1}^3 (-1)^i \frac{\alpha_i^3 I_i}{d_i} \right); \\
I_i & = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_i}, & \alpha_i > 0; \\ -\frac{1}{2\sqrt{-\alpha_i}} \ln \frac{1+\sqrt{-\alpha_i}}{|1-\sqrt{-\alpha_i}|}, & \alpha_i < 0; \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 & = \frac{b_2}{3b_1} + 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_1; \quad \alpha_2 = \frac{b_2}{3b_1} - 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_2; \quad \alpha_3 = \frac{b_2}{3b_1} - 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_3; \\
v_1 & = \cos \left( \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right); \quad v_2 = \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right); \\
v_3 & = \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right);
\end{aligned} \quad (5.10)$$

$$d_1 = (v_1 + v_2)(v_1 + v_3); \quad d_2 = (v_1 + v_2)(v_3 - v_2); \quad d_3 = (v_1 + v_3)(v_3 - v_2).$$

Если  $R > 0$ , тогда имеем

$$\begin{aligned}
A_1 & = L(I_1 - (2a - \alpha)I_2 - I_3); \quad A_2 = L(-\alpha I_1 - z^2 I_2 + \alpha I_3); \\
A_3 & = L(\alpha^2 I_1 - \alpha z^2 I_2 + (z^2 - 2a\alpha)I_3); \\
A_4 & = \frac{1}{b_1} - L(\alpha^3 I_1 + z^2(z^2 - 2a\alpha)I_2 + (2az^2 - 4a^2\alpha + z^2\alpha)I_3);
\end{aligned} \quad (5.11)$$

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha}, & (\alpha > 0); \\ -\frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} \ln \frac{1+\sqrt{-\alpha}}{|1-\sqrt{-\alpha}|}, & (\alpha < 0); \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{b_2}{3b_1} + 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v; \quad v = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right); \quad r = \frac{\sqrt[3]{|h| + \sqrt{R}}}{|h|^{1/2}}; \quad (5.12)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2z}} \left( \frac{1}{2\sqrt{z-a}} \ln \frac{1+\sqrt{2(z-a)}+z}{1-\sqrt{2(z-a)}+z} + \frac{1}{\sqrt{z+a}} \operatorname{arccctg} \frac{z-1}{\sqrt{2(z+a)}} \right);$$

$$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2\sqrt{z-a}} \ln \frac{1+\sqrt{2(z-a)}+z}{1-\sqrt{2(z-a)}+z} + \frac{1}{\sqrt{z+a}} \operatorname{arccctg} \frac{z-1}{\sqrt{2(z+a)}} \right);$$

$$L = \frac{1}{b_1(\alpha^2 - 2a\alpha + z^2)}; \quad a = \frac{b_2}{3b_1} - \operatorname{sign} q \sqrt{|h|} m_1; \quad z = \sqrt{a^2 + 3|h|m_2^2}.$$

Параметры  $m_1$  и  $m_2$  в зависимости от знака величины  $h$  принимают различные значения.

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right); \quad m_2 = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right); \quad (5.13)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right); \quad m_2 = \frac{1}{2} \left( r + \frac{1}{r} \right). \quad (5.14)$$

Если задан тензор макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  или макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , то на основе зависимостей (1.19) и соотношений для определения эффективных термоупругих постоянных (5.1) – (5.14) можно определить средние по скелету напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}$ , которые связаны с макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  соотношениями

$$\bar{\sigma}_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle / (1 - p_0). \quad (5.15)$$

Для изотропных материалов наиболее простая структурная модель микроповреждаемости композита [81, 82] строится на основе критерия прочности микрообъема в форме предельного значения второго инварианта девиатора тензора средних напряжений в неповрежденной части материала компонента, т.е. критерия Губера – Мизеса. В случае ортотропных компонентов, если ограничиться только квадратичной формой, будем исходить из обобщенного критерия Губера – Мизеса, который возьмем в виде

$$I_{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{ij}' + a_1 (\bar{\sigma}_{22}')^2 + a_2 (\bar{\sigma}_{33}')^2 + a_3 \bar{\sigma}_{11}' \bar{\sigma}_{33}' + a_4 \bar{\sigma}_{22}' \bar{\sigma}_{33}' + a_5 (\bar{\sigma}_{13}')^2 + a_6 (\bar{\sigma}_{23}')^2} = k, \quad (5.16)$$

а если учитывать, что на растяжение и на сжатие прочностные свойства материала являются различными, то добавятся еще линейные члены

$$I_{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{ij}' + a_1 (\bar{\sigma}_{22}')^2 + a_2 (\bar{\sigma}_{33}')^2 + a_3 \bar{\sigma}_{11}' \bar{\sigma}_{33}' + a_4 \bar{\sigma}_{22}' \bar{\sigma}_{33}' + a_5 (\bar{\sigma}_{13}')^2 + a_6 (\bar{\sigma}_{23}')^2 + a_7 \bar{\sigma}_{11}' + a_8 \bar{\sigma}_{22}' + a_9 \bar{\sigma}_{33}'} = k; \quad (5.17)$$

$a_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  или  $i \in \{1, \dots, 9\}$  – безразмерные детерминированные постоянные, характеризующие ортотропию прочности неразрушенной части материала;  $k$  – предельное значение соответствующего выражения, которое является случайной функцией координат.

При  $a_i = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  или  $(i = 1, \dots, 9)$  из (5.16), (5.17) следует критерий Губера – Мизеса.

$$I_{\sigma} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}' \bar{\sigma}_{ij}'}. \quad (5.18)$$

Согласно (1.19), (5.14) напряжения в материале скелета  $\bar{\sigma}_{ij}$  можно выразить через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ , тогда можно получить выражение предельной поверхности для пористого материала в пространстве макродеформаций

$$I_{\sigma} = \frac{1}{1-p_0} \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( (\lambda_{11}^* - \lambda_{22}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{12}^* - \lambda_{22}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{13}^* - \lambda_{23}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( (\lambda_{12}^* - \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{22}^* - \lambda_{23}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{23}^* - \lambda_{33}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( (\lambda_{13}^* - \lambda_{11}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{23}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 \right] + (\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle)^2 + \right. \\ \left. + (\lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle)^2 + (\lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle)^2 - \left[ (\beta_1^* - \beta_3^*)^2 + (\beta_2^* - \beta_3^*)^2 + (\beta_1^* - \beta_2^*)^2 \right] \theta \right\}; \quad (5.19)$$

$\lambda_{ij}^*$  и  $\beta_i^*$  определяются на основании соотношений (5.1) – (5.14).

Если макродеформации не выходят за предельную поверхность (5.7), то зависимости между макронапряжениями, макродеформациями и температурой являются линейными и определяются формулами (5.1), (5.1) – (5.14). При выходе макродеформаций за предельную поверхность (5.19) в слабых микрообъемах скелета материала происходят микроразрушения. Примем, что участки микроразрушений полностью теряют сопротивление, т. е. ведут себя как дополнительные пустые поры. В результате появления дополнительной пористости  $p - p_0$  при заданных макродеформациях  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  снижается жесткость материала, и напряжения в неразрушенной части материала не превосходит предельного значения (5.6).

В реальных материалах микропрочность является случайной функцией координат, т.е. микрообъемы имеют различную прочность с определенным законом распределения. Одноточечную функцию распределения  $F(k)$  предельного значения прочности материала  $k$  можно описывать степенным законом на конечном интервале

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left( \frac{k - k_0}{k_1 - k_0} \right)^{\alpha}, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k \geq k_1 \end{cases} \quad (5.20)$$

или распределением Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp\left(-m(k - k_0)^{\alpha}\right), & k \geq k_0, \end{cases} \quad (5.21)$$

где  $k_0$  – минимальная величина предельного значения  $k$ , с которого начинается разрушение материала;  $k_1$ ,  $m$ ,  $\alpha$  – постоянные, характеризующие разброс микропрочности материала.

Если до начала деформирования начальная микроповрежденность материала характеризуется его пористостью  $p_0$ , тогда функция распределения  $F(k)$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части материала, где предел микропрочности меньше соответствующего зна-

чения  $k$ . Поэтому если в скелете материала напряжения равны  $\bar{\sigma}_{ij}$ , то функция  $F(I_{\bar{\sigma}})$  определяет, согласно (5.18) – (5.21), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета материала. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82] в виде

$$p = p_0 + (1 - p_0)F(I_{\bar{\sigma}}). \quad (5.22)$$

Подставив  $p$  вместо  $p_0$  в формулы (5.1) – (5.14), определим эффективные деформативные характеристики, которые, согласно (5.11) (5.18), (5.22), зависят от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , и, поскольку закон связи между макронапряжениями и макродеформациями определяется формулами (1.19), (5.1) – (5.14), деформирование становится нелинейным, а пористость материала  $p$  определяется как функций макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , т.е.

$$p = p(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (5.23)$$

Подставляя затем (5.1) – (5.14), (5.22) в (1.19), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  и температурой  $\theta$ .

На основе соотношений (5.21), (5.22) можно записать алгоритм последовательных приближений для определения текущей пористости материала, а зависимости (5.1) – (5.14) дают возможность определить его эффективные деформативные характеристики.

**5.1. Итерационная схема решения трансцендентного уравнения.** Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (5.1) – (5.14), (5.18) – (5.22), можно представить следующим образом:

– пористость материала в  $n$ -ом приближении  $p^{(n)}$  связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала в  $n$ -ом приближении  $k^{(n)}$ , т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_{\bar{\sigma}}^{(n)}$ ;

– интенсивность средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_{\bar{\sigma}}^{(n)}$  связана с текущей пористостью матрицы в  $(n-1)$ -ом приближении  $p^{(n-1)}$ , эффективными термоупругими постоянными всего композита в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  согласно соотношениям (5.1) – (5.14), (5.19);

– эффективные термоупругие модули  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$ , в свою очередь также связаны с текущей пористостью материала в  $(n-1)$ -ом приближении  $p^{(n-1)}$  в соответствии с формулами (5.1) – (5.14).

Таким образом, на основании выражений (5.20), (5.21) находим

$$p^{(n)} = p_0 + (1 - p_0)F(k^{(n)}), \quad (5.24)$$

где принимаем распределение Вейбулла

$$F(k^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k^{(n)} < k_0; \\ 1 - \exp(-m(k^{(n)} - k_0)^\alpha), & k^{(n)} \geq k_0. \end{cases} \quad (5.25)$$

В свою очередь согласно соотношениям (5.18), (5.19)

$$k^{(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{(n)} = I_{\bar{\sigma}}^{(n)}(\lambda_{ij}^{*(n-1)}, \beta_i^{*(n-1)}, p^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle), \quad (5.26)$$



в то время как в соответствии с соотношениями (5.1) – (5.14)

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^{*(n-1)}(\lambda_{mn}, p^{(n-1)}); \quad \beta_i^{*(n-1)} = \beta_i^{*(n-1)}(\lambda_{mn}, \beta_j, p^{(n-1)}). \quad (5.27)$$

Следовательно, уравнения (5.1) – (5.14), (5.19) – (5.22) позволяют определить эффективные упругие характеристики пористого ортотропного материала в зависимости от макродеформаций

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle); \quad \beta_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_i^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (5.28)$$

Таким образом, соотношения (5.1) – (5.14), (5.19) – (5.22) позволяют найти зависимости пористости и эффективных деформативных характеристик пористого ортотропного материала при микроразрушениях в нем от макродеформаций.

**5.2. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основе полученных соотношений были проведены расчеты и построены графики зависимостей макронапряжений от макродеформаций для ортотропного материала при одноосном растяжении

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0. \quad (5.29)$$

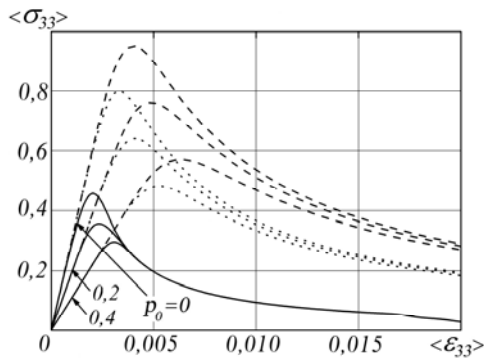


Рис. 5.1

На рис. 5.1 показаны кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (в ГПа) от растягивающих макродеформаций  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  пористого ортотропного материала при микроразрушениях для различных значений параметра  $m$  функции прочности  $F(k)$ . Графики построены для материала с упругими характеристиками

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= 287 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{22} = 365 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{33} = 300 \text{ ГПа}; \\ \lambda_{23} &= 90 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{13} = 85 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{12} = 128 \text{ ГПа}; \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\lambda_{44} = 110 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{55} = 135 \text{ ГПа}; \quad \lambda_{66} = 133 \text{ ГПа};$$

начальном содержании пор –  $p_0 = 0; 0,2; 0,4$  а также при заданных параметрах функции распределения прочности –  $\alpha = 6$ ;  $m = 10^3; 10^4$ ;  $k_0 = 0,4$  ГПа, где  $k_0$  – предельное нижнее значение интенсивности средних касательных напряжений в скелете материала, с которого начинается разрушение;  $m$  и  $\alpha$  – значения параметров функции распределения прочности  $F(k)$  в микрообъемах материала (точечной линией обозначена кривая для  $m = 10^4$ , штриховой для  $m = 10^3$ ; сплошной линией – кривая, где функция прочности является константой и равна  $k_0$ ).

Графики показывают, что параметр  $m$  существенно влияет на кривые макродеформирования и с его увеличением уменьшается величина макронапряжения, соответствующего фиксированному значению макродеформации.

## §6. Повреждаемость композитных материалов, армированных бесконечными ортотропными волокнами.

Ниже модель кратковременной повреждаемости обобщена на случай композитного материала на основе ортотропных матрицы и бесконечных волокон.

Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную однонаправленными бесконечными волокнами. Предполагаем, что матрица и волокна обладают ортотропной симметрией упругих свойств, причем в процессе нагружения в компонентах возникают микроразрушения, которые будем моделировать случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. При-

мом, что заданы макродеформации композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ . Закон связи между макронапряжениями, макродеформациями и температурой имеет вид (1.19)

Пусть компоненты композитного материала имеет начальную пористость  $p_{0k}$ . Тогда компоненты тензора эффективных упругих модулей  $\lambda_{ijkl}^*$  и эффективных коэффициентов температурного напряжения  $\beta_{ij}^*$  ортотропного композитного материала с пористыми компонентами можно определить через термоупругие постоянные поврежденных компонентов  $\lambda_{ij}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ij}^{[2]}$ ,  $\beta_i^{[1]}$ ,  $\beta_i^{[2]}$ , объемные концентрации включений  $c_1$ ,  $c_2$  и их пористости, а также параметр, характеризующий эллипсоидальное волокно  $\bar{t}_2$ . Переходя к матричным обозначениям, компоненты тензора эффективных упругих постоянных  $\lambda_{11}^*$ ,  $\lambda_{12}^*$ ,  $\lambda_{13}^*$ ,  $\lambda_{22}^*$ ,  $\lambda_{23}^*$ ,  $\lambda_{33}^*$ ,  $\lambda_{44}^*$ ,  $\lambda_{55}^*$ ,  $\lambda_{66}^*$  и коэффициенты температурных напряжений  $\beta_1^*$ ,  $\beta_2^*$ ,  $\beta_3^*$  исследуемого материала определим в соответствии с соотношениями [50, 77, 79]

$$\lambda_{ij}^* = \langle \lambda_{ij} \rangle + c_1 c_2 L_{ij}; \quad \lambda_{pp}^* = \langle \lambda_{pp} \rangle + c_1 c_2 \frac{4M_{pp} \lambda_{pp}^{[3]2}}{1 - 4M_{pp} \lambda_{pp}^{[3]}}; \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad p \in \{4, 5, 6\} \quad (6.1)$$

и тремя коэффициентами температурных напряжений  $\beta_1^*$ ,  $\beta_2^*$ ,  $\beta_3^*$

$$\beta_j^* = \langle \beta_j \rangle + c_1 c_2 (aP_{1j} + bP_{2j}), \quad (6.2)$$

где суммирование по индексу  $p$  не производится.

Здесь введены следующие обозначения:

$$L_{ij} = P_{1i} R_{1j} + P_{2i} R_{2j}; \quad \lambda_{ij}' = c_1 \lambda_{ij}^{[2]} + c_2 \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^c; \quad \lambda_{ij}^{[3]} = \lambda_{ij}^{[1]} - \lambda_{ij}^{[2]} \quad (6.3)$$

$$(R_{nj} = M_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + M_{2n} \lambda_{2j}^{[3]}; \quad P_{nj} = N_{1n} \lambda_{1j}^{[3]} + N_{2n} \lambda_{2j}^{[3]}; \quad n \in \{1, 2\}; \quad (6.4)$$

$$a = M_{11} \beta_1^{[3]} + M_{12} \beta_2^{[3]}; \quad b = M_{12} \beta_1^{[3]} + M_{22} \beta_2^{[3]}; \quad \beta_j^{[3]} = \beta_j^{[1]} - \beta_j^{[2]}).$$

Параметры  $M_{nm}$ ,  $N_{nm}$ ,  $n, m \in \{1, 2\}$  и  $M_{pp}$ ,  $p \in \{4, 5, 6\}$  имеют вид

$$M_{11} = -\frac{2}{\pi} \left( \lambda_{66}^c A_3 + \frac{\lambda_{22}^c}{t_2} A_3 \right); \quad M_{12} = -\frac{2}{\pi t_2} (\lambda_{12}^c + \lambda_{66}^c) A_2; \quad M_{22} = -\frac{2}{\pi t_2} \left( \lambda_{11}^c A_2 + \frac{\lambda_{66}^c}{t_2} A_1 \right); \quad (6.5)$$

$$M_{44} = -\frac{1}{2\pi t_2} B_1; \quad M_{55} = -\frac{1}{2\pi} B_2; \quad M_{66} = -\frac{1}{2\pi} \left( \lambda_{11}^c A_3 - \frac{2\lambda_{12}^c}{t_2} A_2 + \frac{\lambda_{22}^c}{t_2} A_1 \right).$$

Постоянные  $\lambda_{ij}^c$  принимаются в виде (1.47), а  $\bar{t}_2$  – параметр эллипсоидального волокна определяется соотношением

$$\bar{t}_2 = t_2 / t_1, \quad (6.6)$$

где  $t_1$ ,  $t_2$  – размеры полуосей эллипса в направлении осей  $x_1$ ,  $x_2$ , соответственно. Величины  $A_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$  имеют различный вид в зависимости от знака параметра  $Q$

$$Q = f^2 - q \quad (6.7)$$

$$\left( f = \frac{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c - \lambda_{12}^c (\lambda_{12}^c + 2\lambda_{66}^c)}{t_2}; \quad q = \frac{4\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}{t_2} \right). \quad (6.8)$$

Если  $Q > 0$ , то имеем варианты:

1)  $p > 0$

$$A_1 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} \left( -t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^{-2} f}{\sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} \left( \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right];$$

$$A_2 = -\frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \left( t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{t_2^{-2} \sqrt{Q}} \left( \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right]; \quad (6.9)$$

$$A_3 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} \left( t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^{-4} f}{t_2^{-4} \sqrt{Q} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} \left( \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} \right) \right];$$

$$z_1 = \frac{1}{2} (p + \sqrt{Q}); \quad z_2 = \frac{1}{2} (p - \sqrt{Q});$$

2)  $p < 0$

$$A_1 = -A_2 = A_3 = -\frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f}. \quad (6.10)$$

Если  $Q = 0$ , то имеем варианты:

1)  $p > 0$

$$A_1 = \frac{\pi t_2^{-4} \left( \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} - 4 t_2^{-2} \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} \right)}{2 \lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10 t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)}; \quad A_2 = -\frac{\pi t_2^{-2}}{4 \lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \left( t_2^{-2} \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} + \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \right)^2};$$

$$A_3 = \frac{\pi t_2^{-4} \left( t_2^{-2} \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} - 4 \sqrt[4]{\lambda_{22}^c} \right)}{2 \lambda_{66}^c \sqrt[4]{\lambda_{11}^c} \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c - 10 t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{22}^c} \right)}; \quad (6.11)$$

2)  $p < 0$

$$A_1 = -A_2 = A_3 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \lambda_{66}^c \left( t_2^{-4} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}. \quad (6.12)$$

Если  $Q < 0$ , то имеем, соответственно, формулы:

$$A_1 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{11}^c} \left( \sqrt{\lambda_{22}^c} - t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} \right) + t_2^{-2} f}{\sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}} \right];$$

$$A_2 = -\frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \left( t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} + \sqrt{\lambda_{22}^c} \right)}{t_2^{-2} \sqrt{f + \sqrt{q}}} \right]; \quad (6.13)$$

$$A_3 = \frac{\pi t_2^{-4}}{2 \left( t_2^{-4} \lambda_{11}^c + \lambda_{22}^c \right) \lambda_{66}^c - t_2^{-4} f} \left[ 1 - \frac{\lambda_{66}^c \sqrt{\lambda_{22}^c} \left( t_2^{-2} \sqrt{\lambda_{11}^c} - \sqrt{\lambda_{22}^c} \right) + t_2^{-4} f}{t_2^{-4} \sqrt{f + \sqrt{q}} \sqrt{\lambda_{11}^c \lambda_{66}^c}} \right].$$

Тензоры модулей упругости и коэффициентов температурного напряжения поврежденных компонентов  $\lambda_{ijkl}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$ ,  $\beta_{ij}^{[1]}$ ,  $\beta_{ij}^{[2]}$  определяются через тензоры модулей упругости и коэффициентов температурного напряжения скелетов компонентов  $\lambda_{ijkl}^1$ ,  $\lambda_{ijkl}^2$ ,  $\beta_{ij}^1$ ,  $\beta_{ij}^2$  и их пористости  $p_1$ ,  $p_2$ , характеризующие поврежденность, на основании соотношений (5.1) – (5.14).

Зная эффективные термоупругие постоянные и макродеформации композита, можно определить деформации в компонентах композита посредством соотношений

$$\langle \varepsilon_{kl}^2 \rangle = \left( I_{klpq} + c_2 \left( \langle \lambda_{klmn} \rangle - \lambda_{klmn}^* \right) \left( \lambda_{mnpq}^{[3]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{kl} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{kl}^1 \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{kl}^2 \rangle, \quad (6.14)$$

где  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  – тензор средних деформаций поврежденного  $r$ -го компонента  $r \in \{1, 2\}$ .

Средние напряжения в  $r$ -го компонента  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  связаны с его средними деформациями  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta; \quad r \in \{1, 2\}, \quad (6.15)$$

или со средними деформациями всего композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{*[r]} \langle \varepsilon_{kl} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta; \quad (6.16)$$

$$\lambda_{ijmn}^{*[r]} = \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right), \quad (6.17)$$

$I_{pqmn}$  – единичный тензор, а

$$\langle \lambda_{pqkl} \rangle = c_1 \lambda_{pqkl}^{[1]} + c_2 \lambda_{pqkl}^{[2]}. \quad (6.18)$$

Средние по скелету  $r$ -го компонента напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  связаны со средними напряжениями  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  поврежденного  $r$ -го компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \langle \sigma_{ij}^r \rangle / (1 - p_r). \quad (6.19)$$

Тогда на основе (6.16), (6.17) получим выражения средних по скелету  $r$ -го компонента напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  через макродеформации в виде

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \left[ \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta \right]. \quad (6.20)$$

В случае ортотропных компонентов, если ограничиться только квадратичной формой, и исходя из обобщенного критерия Губера – Мизеса, который для скелета  $r$ -го компонента примем в виде

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^r \bar{\sigma}_{ij}^r + a_1 (\bar{\sigma}_{22}^r)^2 + a_2 (\bar{\sigma}_{33}^r)^2 + a_3 \bar{\sigma}_{11}^r \bar{\sigma}_{33}^r + a_4 \bar{\sigma}_{22}^r \bar{\sigma}_{33}^r + a_5 (\bar{\sigma}_{13}^r)^2 + a_6 (\bar{\sigma}_{23}^r)^2} = k_r, \quad (6.21)$$

а если учитывать, что на растяжение и на сжатие прочностные свойства материала являются различными, то добавятся еще линейные члены

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\overline{\sigma}_{ij}^{\prime} \overline{\sigma}_{ij}^{\prime} + a_1 (\overline{\sigma}_{22}^{\prime})^2 + a_2 (\overline{\sigma}_{33}^{\prime})^2 + a_3 \overline{\sigma}_{11}^{\prime} \overline{\sigma}_{33}^{\prime} + a_4 \overline{\sigma}_{22}^{\prime} \overline{\sigma}_{33}^{\prime} + a_5 (\overline{\sigma}_{13}^{\prime})^2 + a_6 (\overline{\sigma}_{23}^{\prime})^2 + a_7 \overline{\sigma}_{11}^{\prime} + a_8 \overline{\sigma}_{22}^{\prime} + a_9 \overline{\sigma}_{33}^{\prime}} = k_r. \quad (6.22)$$

Здесь  $\overline{\sigma}_{ij}^{\prime}$  – девиатор средних по скелету материала  $r$ -го компонента напряжений;  $a_{ir}$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  или  $i \in \{1, \dots, 9\}$  – безразмерные детерминированные постоянные, характеризующие ортотропию прочности неразрушенной части материала;  $k_r$  – предельное значение соответствующего выражения, которое является случайной функцией координат.

При  $a_{ir} = 0$   $i \in \{1, \dots, 6\}$  или  $i \in \{1, \dots, 9\}$  из (6.21), (6.22) следует критерий Губера – Мизеса.

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\overline{\sigma}_{ij}^{\prime} \overline{\sigma}_{ij}^{\prime}} = k_r. \quad (6.23)$$

Согласно (6.19), (6.20) напряжения в материале скелета  $\overline{\sigma}_{ij}^{\prime}$  можно выразить через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ , тогда получим выражение предельной поверхности скелета  $r$ -го компонента композитного материала в пространстве макродеформаций

$$I_{\sigma}^r = \frac{1}{1 - p_{0r}} \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( (\lambda_{11}^* - \lambda_{22}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{12}^* - \lambda_{22}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{13}^* - \lambda_{23}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \left( (\lambda_{12}^* - \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{22}^* - \lambda_{23}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{23}^* - \lambda_{33}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \left( (\lambda_{13}^* - \lambda_{11}^*) \langle \varepsilon_{11} \rangle + (\lambda_{23}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{22} \rangle + (\lambda_{33}^* - \lambda_{13}^*) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 \right] + (\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{23} \rangle)^2 + (\lambda_{55}^* \langle \varepsilon_{13} \rangle)^2 + (\lambda_{66}^* \langle \varepsilon_{12} \rangle)^2 - \left[ (\beta_1^* - \beta_3^*)^2 + (\beta_2^* - \beta_3^*)^2 + (\beta_1^* - \beta_2^*)^2 \right] \theta \right\}. \quad (6.24)$$

Одноточечную функцию распределения  $F(k_r)$  параметра  $k_r$  можно описывать распределением Вейбулла

$$F(k_r) = \begin{cases} 0, & k_r < k_{0r}, \\ 1 - \exp(-m_r (k_r - k_{0r})^{\alpha_r}), & k_r \geq k_{0r}, \end{cases} \quad (6.25)$$

где  $k_{0r}$  – минимальная величина предельного значения  $k_r$ , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах  $r$ -го компонента;  $k_{1r}$ ,  $m_r$ ,  $\alpha_r$  – постоянные, характеризующие разброс микропрочности в  $r$ -ом компоненте.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность  $r$ -го компонента характеризуется пористостью  $p_{0r}$ . Функция распределения  $F(k_r)$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части  $r$ -го компонента, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k_r$ . Поэтому если в неразрушенной части  $r$ -го компонента напряжения равны  $\overline{\sigma}_{ij}^r$ , то функция  $F(I_{\sigma}^r)$  определяет, согласно (6.23) – (6.25), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета  $r$ -го компонента. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82]

$$p_r = p_{0r} + (1 - p_{0r}) F\left(I_{\sigma}^r\right). \quad (6.26)$$

Подставляя (6.24) в (6.26), получаем систему уравнений для определения пористости компонентов  $p_r$  как функций макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$p_r = p_r(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (6.27)$$

Подставляя (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13), (6.24) в (6.26), получаем нелинейные зависимости между макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  композита.

**6.1. Решение трансцендентного уравнения.** Итерационную схему решения трансцендентного уравнения, которое описывается соотношениями (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13), (6.24) – (6.26) можно представить следующим образом:

– пористость  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $p_r^{(n)}$  связана с предельным значением интенсивности средних касательных напряжений в каркасе материала  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $k_r^{(n)}$ , т.е. с интенсивностью средних касательных напряжений скелета в  $n$ -ом приближении  $I_{\sigma}^{r(n)}$ ;

– интенсивность средних касательных напряжений скелета  $r$ -го компонента в  $n$ -ом приближении  $I_{\sigma}^{r(n)}$  связана с текущей пористостью скелета  $r$ -го компонента в  $(n-1)$ -ом приближении  $p_r^{(n-1)}$  эффективными термоупругими постоянными всего композита в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  и макродеформациями  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$  согласно соотношениям (6.24);

– эффективные термоупругие постоянные в  $(n-1)$ -ом приближении  $\lambda_{ij}^{*(n-1)}$ ,  $\beta_i^{*(n-1)}$  в свою очередь также связаны с текущей пористостью скелета  $r$ -го компонента в  $(n-1)$ -ом приближении  $p_r^{(n-1)}$  в соответствии с соотношениями (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13).

Таким образом, на основании выражений (6.24) – (6.26) находим

$$p_r^{(n)} = p_{0r} + (1 - p_{0r}) F(k_r^{(n)}), \quad (6.28)$$

где принимаем распределение Вейбулла

$$F(k_r^{(n)}) = \begin{cases} 0, & k_r^{(n)} < k_{0r}; \\ 1 - \exp\left(-m_r (k_r^{(n)} - k_{0r})^{\alpha_r}\right), & k_r^{(n)} \geq k_{0r}. \end{cases} \quad (6.29)$$

В свою очередь, согласно соотношениям (6.24)

$$k_r^{(n)} = I_{\sigma}^{r(n)} = I_{\sigma}^{r(n)}\left(\lambda_{ij}^{*(n-1)}, \beta_i^{*(n-1)}, p_r^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{kl} \rangle\right), \quad (6.30)$$

в то время как в соответствии с соотношениями (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13)

$$\lambda_{ij}^{*(n-1)} = \lambda_{ij}^{*(n-1)}(\lambda_{mn}^r, c_1, p_r^{(n-1)}, \bar{t}_2); \quad \beta_i^{*(n-1)} = \beta_i^{*(n-1)}(\lambda_{mn}^r, \beta_j^r, p_r^{(n-1)}, \bar{t}_2); \quad \bar{t}_2 = t_2/t_1. \quad (6.31)$$

Следовательно, уравнения (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13), (6.24) – (6.26) позволяют определить эффективные термоупругие характеристики ортотропного волокнистого композита в зависимости от макродеформаций

$$\lambda_{ij}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{ij}^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle); \quad \beta_i^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_i^{*(n)}(\langle \varepsilon_{kl} \rangle). \quad (6.32)$$

Таким образом, задавая макродеформации, которым подвергается композит, и определив его эффективные термоупругие характеристики, на основании выражений (5.1) – (5.14), (6.1) – (6.13), (6.24) – (6.26) можно вычислить макронапряжения.

**6.2. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основании полученных зависимостей исследованы диаграммы макродеформирования композитного материала на основе изотропной матрицы, армированной бесконечными однонаправленными ортотропными волокнами, при микроразрушениях в компонентах при заданных отношениях упругих характеристик и объемных содержаниях компонентов. Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в матрице композитного материала. Построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0. \quad (6.33)$$

В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, топаз и эпоксидная смола с термоупругими характеристиками неповрежденной части:

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^1 &= 287 \text{ ГПа}; \lambda_{22}^1 = 365 \text{ ГПа}; \lambda_{33}^1 = 300 \text{ ГПа}; \lambda_{23}^1 = 90 \text{ ГПа}; \lambda_{13}^1 = 85 \text{ ГПа}; \\ \lambda_{12}^1 &= 128 \text{ ГПа}; \lambda_{44}^1 = 110 \text{ ГПа}; \lambda_{55}^1 = 135 \text{ ГПа}; \lambda_{66}^1 = 133 \text{ ГПа}; \\ \alpha_1^1 &= 5,92 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}; \alpha_2^1 = 4,84 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}; \alpha_3^1 = 4,44 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}; \\ E_2 &= 3 \text{ ГПа}; \nu_2 = 0,35; \alpha_2 = 65 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}; \end{aligned} \quad (6.34)$$

объемной концентрации и форме включений; начальном содержании пор в матрице

$$c_1 = 0,4; p_{02} = 0; 0,2; 0,4; t_2 = 2, \quad (6.35)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности связующего  $F(k_2)$

$$\alpha_2 = 2; m_2 = 10^3; 10^4; k_{02} = 0,015 \text{ ГПа}. \quad (6.36)$$

На рис. 6.1 показаны кривые зависимости поврежденности матрицы  $p_2$  от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  и на рис. 6.2 – кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (в ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для различных значений начальной пористости матрицы  $p_{02}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_2$ , а также без учёта разброса микропрочности (предполагается, что  $k_2$  является постоянной величиной, равной  $k_{02}$ ). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, пунктирной линией – кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 10^3$ , точечной линией – кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 10^4$ .

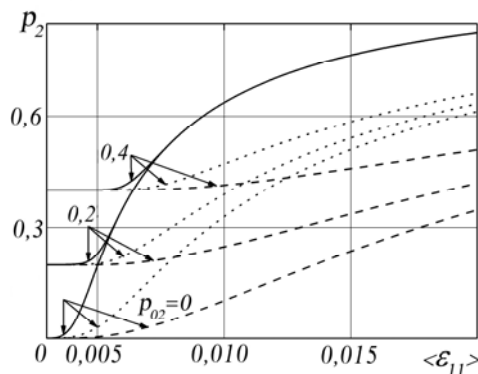


Рис. 6.1

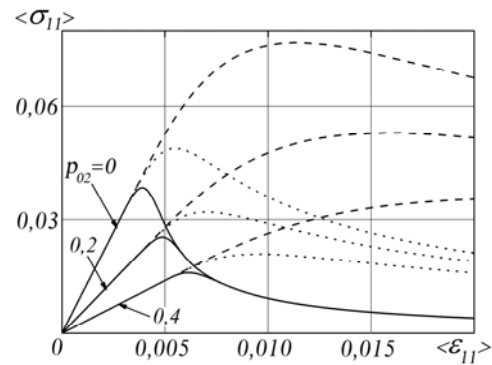


Рис. 6.2

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в волокне рассматриваемого композитного материала. Построим нелинейную диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0 \quad (6.37)$$

при объёмной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в волокне

$$c_1 = 0,6; \quad p_{01} = 0; 0,2; 0,4; \quad \bar{t} = 2, \quad (6.38)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности угольного волокна  $F(k_1)$

$$\alpha_1 = 6, \quad m_1 = 10^3; 10^4, \quad k_{01} = 0,4 \text{ ГПа} . \quad (6.39)$$

На рис. 6.3 показаны кривые зависимости макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (в ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для различных значений начальной пористости волокон  $p_{01}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_1$ , а также без учёта разброса микропрочности ( $k_1$  является постоянной величиной равной  $k_{01}$ ). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, пунктирной – учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_1 = 6; m_1 = 10^3$ , штрих-точечной – учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_1 = 6, m_1 = 10^4$ .

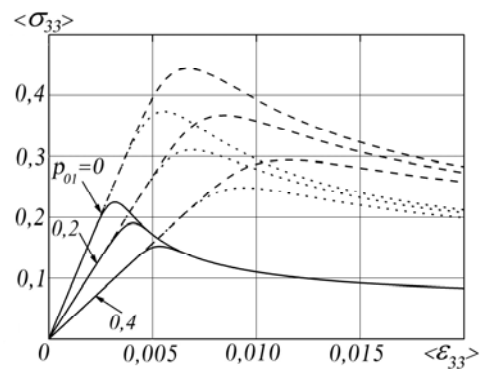


Рис. 6.3

ной – учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_1 = 6, m_1 = 10^4$ .

Из приведенных на рис. 6.2 – 6.3 графиков следует, что характер зависимости кривых макродеформирования существенно зависит от наличия разброса прочности в микрообъемах компонентов композита и от параметров функции распределения прочности как при микроразрушениях в матрице  $F(k_2)$ , так и в волокнах  $F(k_1)$ . Сравнения результатов, полученных без учета разброса прочности и с учетом, показывают, что при наличии разброса прочности характер кривых становится сложнее, с увеличением значения параметров  $m_1, m_2$  уменьшается макронапряжение, соответствующее фиксированному значению макродеформации.

### §7. Деформативные свойства и повреждаемость однонаправленных дискретно-волокнистых ортотропных композитных материалов.

В настоящем разделе вышеизложенная модель обобщена на случай кратковременной повреждаемости композитного материала на основе ортотропных матрицы и однонаправленных дискретных эллипсоидальных волокон и исследуется процесс связанного деформирования и кратковременной микроповреждаемости данного композитного материала. Получены зависимости накопления поврежденностей в компонентах (как матрице, так и волокне) от макродеформаций и диаграммы макродеформирования композита.

Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную однонаправленными дискретными эллипсоидальными волокнами. Предполагается, что матрица и волокна обладают ортотропной симметрией упругих свойств, причем оси симметрии эллипсоидов совпадают с осями ортотропии упругих свойств компонентов. Также предполагается, что в процессе нагружения в компонентах возникают микроразрушения, которые будем моделировать случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Закон связи между макронапряжениями, макродеформациями и температурой имеет вид (1.19).



Пусть компоненты композитного материала имеет начальную пористость  $p_{0k}$ . Тогда компоненты тензора эффективных упругих модулей  $\lambda_{ijkl}^*$  и эффективных коэффициентов температурного напряжения  $\beta_{ij}^*$  ортотропного композитного материала с пористыми компонентами можно определить через термоупругие постоянные поврежденных компонентов  $\lambda_{ij}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ij}^{[2]}$ ,  $\beta_i^{[1]}$ ,  $\beta_i^{[2]}$ , объемных концентраций включений  $c_1$ ,  $c_2$  и их пористости, а также параметры характеризующие дискретное эллипсоидальное включение  $\bar{t}_2$ ,  $\bar{t}_3$ . Компоненты тензора эффективных упругих постоянных и коэффициенты температурных напряжений исследуемого материала определяются в соответствии с равенствами [50, 79]

$$\lambda_{ij}^* = \langle \lambda_{ij} \rangle + c_1 c_2 \lambda_{iq}^{[3]} P_{qk} M_{kl} \lambda_{ij}^{[3]}; \quad \lambda_{pp}^* = \langle \lambda_{pp} \rangle + c_1 c_2 \frac{4M_{pp} \lambda_{pp}^{[3]2}}{1 - 4M_{pp} \lambda_{pp}^{[3]}}; \quad p \in \{4, 5, 6\};$$

$$\beta_{ij}^* = \langle \beta_{ij} \rangle + c_1 c_2 \lambda_{iq}^{[3]} P_{qk} M_{kl} \beta_{ij}^{[3]} \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}), \quad (7.1)$$

где суммирование по индексу  $p$  не производится.

Здесь введены следующие обозначения:

$$P_{qk} = \left( \delta_{qk} - M_{ql} \lambda_{lk}' \right)^{-1}, \quad (7.2)$$

а  $\lambda_{ij}'$ ,  $\lambda_{ij}^{[3]}$  определяются соотношениями (6.3).

Компоненты матрицы  $M_{ij}$ , которые входит в выражения (7.1) для определения эффективных упругих модулей, в случае материала с ортотропными эллипсоидальными включениями определяются через интегралы

$$M_{11} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{55}^c \lambda_{66}^c S_1 + \lambda_{44}^c \left( \lambda_{22}^c S_4 + \lambda_{33}^c S_8 \right) + S_3 u_1 + S_5 u_3 + S_6 u_8 \right] d\varphi;$$

$$M_{22} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}^c \lambda_{66}^c S_2 + \lambda_{55}^c \left( \lambda_{11}^c S_3 + \lambda_{33}^c S_9 \right) + S_4 u_2 + S_6 u_9 + S_7 u_3 \right] d\varphi;$$

$$M_{33} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}^c \lambda_{55}^c S_{10} + \lambda_{66}^c \left( \lambda_{11}^c S_5 + \lambda_{22}^c S_7 \right) + S_6 u_7 + S_8 u_2 + S_9 u_1 \right] d\varphi;$$

$$M_{23} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6 \left( u_5 u_6 - \lambda_{41}^c u_4 \right) - u_4 \left( \lambda_{66}^c S_7 + \lambda_{55}^c S_9 \right) \right] d\varphi; \quad (7.3)$$

$$M_{13} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6 \left( u_4 u_6 - \lambda_{22}^c u_5 \right) - u_5 \left( \lambda_{66}^c S_5 + \lambda_{44}^c S_8 \right) \right] d\varphi;$$

$$M_{12} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ S_6 \left( u_4 u_5 - \lambda_{33}^c u_6 \right) - u_6 \left( \lambda_{55}^c S_3 + \lambda_{44}^c S_4 \right) \right] d\varphi;$$

$$M_{44} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{55}^c \left( \lambda_{11}^c S_5 + \lambda_{33}^c S_{10} \right) \lambda_{66}^c \left( \lambda_{11}^c S_3 + \lambda_{22}^c S_2 \right) + S_7 \left( \lambda_{22}^c \lambda_{55}^c - 2\lambda_{23}^c \lambda_{66}^c \right) + \right.$$

$$\left. + S_9 \left( \lambda_{33}^c \lambda_{66}^c - 2\lambda_{23}^c \lambda_{55}^c \right) + 2S_6 u_{10} + S_8 u_9 + S_4 u_7 \right] d\varphi;$$

$$\begin{aligned}
M_{55} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}^c (\lambda_{22}^c S_7 + \lambda_{33}^c S_{10}) + \lambda_{66}^c (\lambda_{11}^c S_1 + \lambda_{22}^c S_4) + S_5 (\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c - 2\lambda_{13}^c \lambda_{66}^c) + \right. \\
&\quad \left. + S_8 (\lambda_{33}^c \lambda_{66}^c - 2\lambda_{13}^c \lambda_{44}^c) + 2S_6 u_{11} + S_9 u_8 + S_3 u_7 \right] d\varphi; \\
M_{66} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \lambda_{44}^c (\lambda_{22}^c S_2 + \lambda_{33}^c S_9) + \lambda_{55}^c (\lambda_{11}^c S_1 + \lambda_{33}^c S_8) + S_3 (\lambda_{11}^c \lambda_{44}^c - 2\lambda_{12}^c \lambda_{55}^c) + \right. \\
&\quad \left. + S_4 (\lambda_{22}^c \lambda_{55}^c - 2\lambda_{12}^c \lambda_{44}^c) + 2S_6 u_{12} + S_7 u_8 + S_3 u_9 \right] d\varphi.
\end{aligned}$$

Здесь величины  $u_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 12\}$ , являются постоянными и определяются формулами

$$\begin{aligned}
u_1 &= \lambda_{44}^c \lambda_{66}^c + \lambda_{22}^c \lambda_{55}^c; \quad u_2 = \lambda_{55}^c \lambda_{66}^c + \lambda_{11}^c \lambda_{44}^c; \quad u_3 = \lambda_{44}^c \lambda_{55}^c + \lambda_{33}^c \lambda_{66}^c; \\
u_4 &= \lambda_{23}^c + \lambda_{44}^c; \quad u_5 = \lambda_{13}^c + \lambda_{55}^c; \quad u_6 = \lambda_{12}^c + \lambda_{66}^c; \quad u_7 = \lambda_{11}^c \lambda_{22}^c - \lambda_{12}^{c2} - 2\lambda_{12}^c \lambda_{66}^c; \\
u_8 &= \lambda_{22}^c \lambda_{33}^c - \lambda_{23}^{c2} - 2\lambda_{23}^c \lambda_{44}^c; \quad u_9 = \lambda_{11}^c \lambda_{33}^c - \lambda_{13}^{c2} - 2\lambda_{13}^c \lambda_{55}^c; \quad u_{10} = u_5 u_6 + \lambda_{55}^c \lambda_{66}^c - \lambda_{11}^c \lambda_{23}^c; \quad (7.4) \\
u_{11} &= u_4 u_6 + \lambda_{44}^c \lambda_{66}^c - \lambda_{22}^c \lambda_{13}^c; \quad u_{12} = u_4 u_5 + \lambda_{44}^c \lambda_{55}^c - \lambda_{33}^c \lambda_{12}^c;
\end{aligned}$$

$S_j$  являются функциями угла  $\varphi$ , по которому выполняется интегрирование, и имеют вид

$$\begin{aligned}
S_1 &= A_1 \cos^6 \varphi; \quad S_2 = \frac{(A_4 - 3A_3 + 3A_2 - A_1)}{\bar{t}_2^6} \sin^6 \varphi; \quad S_3 = \frac{(A_2 - A_1)}{\bar{t}_2^2} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi; \\
S_4 &= \frac{(A_3 - 2A_2 + A_1)}{\bar{t}_2^4} \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi; \quad S_5 = \frac{A_2}{\bar{t}_2^2} \cos^4 \varphi; \quad (7.5) \\
S_6 &= \frac{(A_3 - A_2)}{\bar{t}_2^2 \bar{t}_3^2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi; \quad S_7 = \frac{(A_4 - 2A_3 + A_2)}{\bar{t}_2^4 \bar{t}_3^2} \sin^4 \varphi; \quad S_8 = \frac{A_3}{\bar{t}_3^4} \cos^2 \varphi; \\
S_9 &= \frac{(A_4 - A_3)}{\bar{t}_2^2 \bar{t}_3^4} \sin^2 \varphi; \quad S_{10} = \frac{A_4}{\bar{t}_3^6},
\end{aligned}$$

где  $\bar{t}_2$ ,  $\bar{t}_3$  – параметры формы включений, определяемые выражениями  $\bar{t}_2 = t_2/t_1$ ;  $\bar{t}_3 = t_3/t_1$ , а  $\lambda_{ij}^c$  принимаются в виде тензора с постоянными коэффициентами в виде (1.47).

Величины  $A_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 4\}$ , которые также являются функциями угла  $\varphi$ , и в зависимости от знака параметра

$$R = h^3 + q^2 \quad (7.6)$$

принимают различные значения, которые приведены ниже. Параметры  $h$  и  $q$  определяются выражениями

$$h = \frac{3b_1 b_3 - b_2^2}{9b_1^2}; \quad q = \frac{b_2^3}{27b_1^3} - \frac{b_2 b_3}{6b_1^2} + \frac{a_1}{2b_1}; \quad (7.7)$$

$$(b_1 = \sum_{i=1}^4 (-1)^i a_i; \quad b_2 = 3a_1 - 2a_2 + a_3; \quad b_3 = -3a_1 + a_2;$$

$$a_1 = \left( \lambda_{55}^c \cos^2 \varphi + \frac{\lambda_{44}^c}{\bar{t}_2^2} \sin^2 \varphi \right) \left( \lambda_{11}^c \lambda_{66}^c \cos^4 \varphi + \frac{\lambda_{22}^c \lambda_{66}^c}{\bar{t}_2^4} \sin^4 \varphi + \frac{u_7}{\bar{t}_2^2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right);$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{t_3} \left[ u_3 \left( \lambda_{11}^c \cos^4 \varphi + \frac{\lambda_{22}^c}{t_2} \sin^4 \varphi \right) - \left( (\lambda_{13}^c)^2 + 2\lambda_{13}^c \lambda_{55}^c \right) \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{\lambda_{66}^c}{-2} \sin^2 \varphi + \lambda_{11}^c \cos^2 \varphi \right) \frac{\sin^2 \varphi}{t_2} + \frac{\left( 2\lambda_{44}^c \lambda_{55}^c \lambda_{66}^c + 2u_4 u_5 u_6 + \lambda_{33}^c u_7 \right)}{t_2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right]; \\
a_3 &= \frac{1}{t_3} \left[ \left( \lambda_{33}^c \lambda_{55}^c \lambda_{66}^c + \lambda_{44}^c u_9 \right) \cos^2 \varphi + \frac{\left( \lambda_{33}^c \lambda_{44}^c \lambda_{66}^c + \lambda_{55}^c u_8 \right)}{t_2} \sin^2 \varphi \right]; \quad a_4 = \frac{\lambda_{33}^c \lambda_{44}^c \lambda_{66}^c}{-6 t_3}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Если  $R \leq 0$ , тогда имеем

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{1}{4b_1|h|} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} \frac{\alpha_i^{j-1} I_i}{d_i}, \quad j \in \{1, 2, 3\}; \quad A_4 = \frac{1}{b_1} \left( 1 + \frac{1}{4|h|} \sum_{i=1}^3 (-1)^i \frac{\alpha_i^3 I_i}{d_i} \right); \\
I_i &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha_i}, & \alpha_i > 0; \\ -\frac{1}{2\sqrt{-\alpha_i}} \ln \frac{1+\sqrt{-\alpha_i}}{|1-\sqrt{-\alpha_i}|}, & \alpha_i < 0; \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{7.9}
\end{aligned}$$

$$\left( \alpha_1 = \frac{b_2}{3b_1} + 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_1; \quad \alpha_2 = \frac{b_2}{3b_1} - 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_2; \quad \alpha_3 = \frac{b_2}{3b_1} - 2\operatorname{sign} q \sqrt{|h|} v_3; \right.$$

$$v_1 = \cos \left( \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right); \quad v_2 = \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right); \tag{7.10}$$

$$v_3 = \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-R}}{|h|} \right);$$

$$d_1 = (v_1 + v_2)(v_1 + v_3); \quad d_2 = (v_1 + v_2)(v_3 - v_2); \quad d_3 = (v_1 + v_3)(v_3 - v_2).$$

Если  $R > 0$ , тогда имеем

$$A_1 = L(I_1 - (2a - \alpha)I_2 - I_3); \quad A_2 = L(-\alpha I_1 - z^2 I_2 + \alpha I_3);$$

$$A_3 = L(\alpha^2 I_1 - \alpha z^2 I_2 + (z^2 - 2a\alpha) I_3); \tag{7.11}$$

$$A_4 = \frac{1}{b_1} - L(\alpha^3 I_1 + z^2(z^2 - 2a\alpha)I_2 + (2az^2 - 4a^2\alpha + z^2\alpha)I_3);$$

$$I_1 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arctg} \sqrt{\alpha}, & \alpha > 0; \\ -\frac{1}{2\sqrt{-\alpha}} \ln \frac{1+\sqrt{-\alpha}}{|1-\sqrt{-\alpha}|}, & \alpha < 0; \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{b_2}{3b_1} + 2\text{sign } q\sqrt{|h|}v; \quad v = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right); \quad r = \frac{\sqrt[3]{|h| + \sqrt{R}}}{|h|^{1/2}}; \quad (7.12)$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}z} \left( \frac{1}{2\sqrt{z-a}} \ln \frac{1 + \sqrt{2(z-a)} + z}{1 - \sqrt{2(z-a)} + z} + \frac{1}{\sqrt{z+a}} \text{arcctg} \frac{z-1}{\sqrt{2(z+a)}} \right);$$

$$I_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( -\frac{1}{2\sqrt{z-a}} \ln \frac{1 + \sqrt{2(z-a)} + z}{1 - \sqrt{2(z-a)} + z} + \frac{1}{\sqrt{z+a}} \text{arcctg} \frac{z-1}{\sqrt{2(z+a)}} \right);$$

$$L = \frac{1}{b_1(\alpha^2 - 2a\alpha + z^2)}; \quad a = \frac{b_2}{3b_1} - \text{sign } q\sqrt{|h|}m_1; \quad z = \sqrt{a^2 + 3|h|m_2^2}.$$

Параметры  $m_1$  и  $m_2$  в зависимости от знака величины  $h$  принимают различные значения.

Если  $h < 0$ , то

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right); \quad m_2 = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right). \quad (7.13)$$

Если  $h > 0$ , то

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right); \quad m_2 = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right). \quad (7.14)$$

Тензоры модулей упругости и коэффициентов температурного напряжения поврежденных компонентов  $\lambda_{ijkl}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$ ,  $\beta_{ij}^{[1]}$ ,  $\beta_{ij}^{[2]}$  определяются через тензоры модулей упругости и коэффициентов температурного напряжения скелетов компонентов  $\lambda_{ijkl}^1$ ,  $\lambda_{ijkl}^2$ ,  $\beta_{ij}^1$ ,  $\beta_{ij}^2$  и их пористости  $p_1$ ,  $p_2$ , характеризующие поврежденность, на основании соотношений (5.1) – (5.14).

Зная эффективные термоупругие постоянные и макродеформации композита, можно определить деформации в компонентах композита  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$ ,  $r \in \{1, 2\}$ , посредством соотношений (6.14).

Средние напряжения в  $r$ -го компонента  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  связаны с его средними деформациями  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  следующим образом:

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta, \quad r \in \{1, 2\},$$

или со средними деформациями всего композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{*[r]} \langle \varepsilon_{kl} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta, \quad r \in \{1, 2\}; \quad (7.15)$$

$$\lambda_{ijmn}^{*[r]} = \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right), \quad r \in \{1, 2\}; \quad (7.16)$$

$I_{pqmn}$  – единичный тензор, а  $\langle \lambda_{pqkl} \rangle$  определяется в (6.18)).

Средние по скелету  $r$ -го компонента напряжения  $\overline{\sigma}_{ij}^r$  связаны со средними напряжениями  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$ ,  $r \in \{1, 2\}$  поврежденного  $r$ -го компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \langle \sigma_{ij}^r \rangle / (1 - p_r), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (7.17)$$

Тогда на основе (7.15) – (7.17) получим выражения средних по скелету  $r$ -го компонента напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  через макродеформации

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \left[ \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{ij}^{[r]} \theta \right]. \quad (7.18)$$

В случае ортотропных компонентов будем исходить из обобщенного критерия Губера – Мизеса, который для скелета  $r$ -го компонента имеет вид (6.21), (6.22).

При  $a_{ir} = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , или  $i \in \{1, \dots, 9\}$  из (6.21), (6.22) следует критерий Губера – Мизеса

$$I_{\sigma}^r = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^{r'} \bar{\sigma}_{ij}^{-r'}} = k_r, \quad r \in \{1, 2\}. \quad (7.19)$$

Согласно (7.15), (7.18) напряжения в материале скелета  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  можно выразить через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ , тогда можно получить выражение предельной поверхности для пористого композитного материала в пространстве макродеформаций, которое имеет вид (6.24)

Одноточечную функцию распределения  $F(k_r)$  параметра  $k_r$  можно описывать распределением Вейбулла

$$F(k_r) = \begin{cases} 0, & k_r < k_{0r}; \\ 1 - \exp\left(-m_r (k_r - k_{0r})^{\alpha_r}\right), & k_r \geq k_{0r}; \end{cases} \quad r \in \{1, 2\}, \quad (7.20)$$

где  $k_{0r}$  – минимальная величина предельного значения  $k_r$ , с которого начинается разрушение в некоторых микрообъемах  $r$ -го компонента;  $k_{1r}$ ,  $m_r$ ,  $\alpha_r$  – постоянные, характеризующие разброс микропрочности в  $r$ -ом компоненте.

Пусть до начала деформирования композита начальная микроповрежденность  $r$ -го компонента характеризуется пористостью  $p_{0r}$ . Тогда функция распределения  $F(k_r)$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части  $r$ -го компонента, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k_r$ . Поэтому если в неразрушенной части  $r$ -го компонента напряжения равны  $\bar{\sigma}_{ij}^r$ , то функция  $I_{\sigma}^r$  определяет, согласно (7.19), (7.20), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета  $r$ -го компонента. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82]

$$p_r = p_{0r} + (1 - p_{0r}) F(I_{\sigma}^r), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (7.21)$$

Подставляя (7.19), (7.20) в (7.21), получаем систему уравнений для определения пористости компонентов  $p_r$ ,  $r \in \{1, 2\}$  как функций макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , т.е.

$$p_r = p_r \left( \langle \varepsilon_{kl} \rangle \right), \quad r \in \{1, 2\}. \quad (7.22)$$

На основе этих соотношений можно записать алгоритм последовательных приближений для определения текущей пористости материала  $r$ -го компонента, а зависимости (5.1) – (5.14), (7.1) – (7.14) дают возможность определить эффективные деформативные характеристики композитного материала с пористыми ортотропными компонентами, где включения являются однонаправленными трехосными эллипсоидами.

Имея вычисленные значения модулей упругости и коэффициентов термических напряжений поврежденных компонентов композитного материала в целом можно решить трансцендентные уравнения относительно  $p_1$ ,  $p_2$ , которые описываются соотношениями (5.1) – (5.14), (7.1) – (7.14), (7.19) – (7.21). Итерационная схема является аналогичной случаю, представленному в §6.

**7.1. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основании полученных зависимостей исследованы диаграммы макродеформирования композитного материала на основе изотропной матрицы с ортотропными эллипсоидальными волокнами при микроразрушениях в компонентах и при заданных термоупругих характеристиках и объемных содержаниях компонентов.

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в матрице композитного материала. Построим диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения и равномерного нагрева

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \theta = 30^\circ. \quad (7.23)$$

В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, топаз и эпоксидная смола с термоупругими характеристиками неповрежденной части, представленными в (6.34), объемной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в матрице и отношении полуосей эллипсоидов

$$c_1 = 0,4, \quad p_{02} = 0; 0,2; 0,4, \quad \bar{t}_2 = 2, \quad \bar{t}_3 = 10, \quad (7.24)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности связующего  $F(k_2)$

$$\alpha_2 = 2, \quad m_2 = 2 \cdot 10^3; 10^4; \quad k_{02} = 0,015 \text{ ГПа}. \quad (7.25)$$

На рис. 7.1 – 7.2 показаны кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  и  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (в ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для различных значений начальной пористости матрицы  $p_{02}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_2$ , а также с учетом и без учёта температурного нагрева. Сплошной линией обозначены кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 2 \cdot 10^3$  без учёта нагрева, пунктирной линией – с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 2 \cdot 10^3$  с учетом нагрева на  $30^\circ$ , штрих-точечной линией – кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 10^4$  без учёта нагрева и точечной линией – кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2, m_2 = 10^4$  с учетом нагрева на  $30^\circ$ .

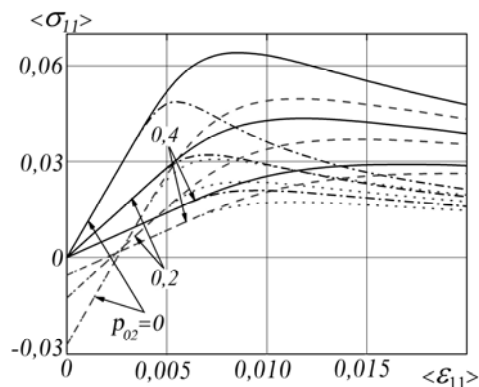


Рис. 7.1

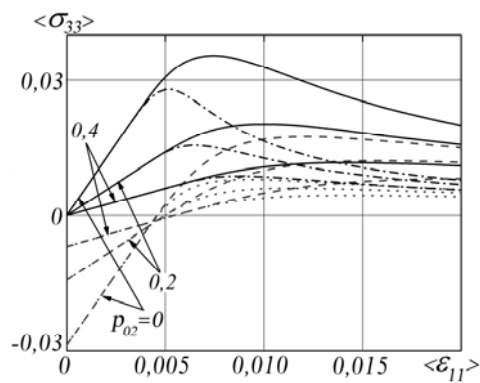


Рис. 7.2

Кривые, построенные без учета температурных воздействий, лежат выше соответствующих кривых, учитывающих нагревание.

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в волокнах рассматриваемого композитного материала. Построим диаграммы макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0 \quad (7.26)$$

при объемной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в волокне

$$c_1 = 0,6; p_{01} = 0; 0,2; 0,4; \bar{t}_2 = 2; \bar{t}_3 = 8, \quad (7.27)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности угольного волокна  $F(k_1)$

$$\alpha_1 = 6, m_1 = 10^3; 10^4; k_{01} = 0,4 \text{ ГПа}. \quad (7.28)$$

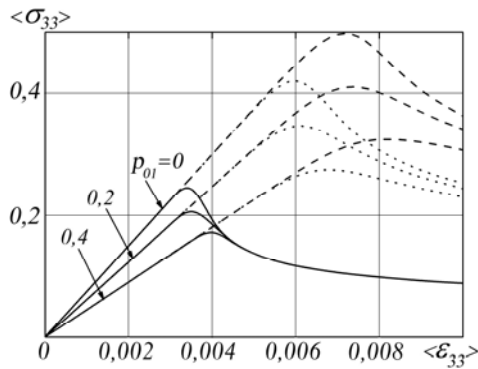


Рис. 7.3

На рис. 7.3 показаны кривые зависимостей макродеформаций  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (в ГПа) от макронапряжений  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для различных значений начальной пористости волокон  $p_{01}$  и параметров функции разброса микропрочности  $m_1$ , а также без учета разброса микропрочности (предполагается, что  $k_1$  является постоянной величиной равной  $k_{01}$ ). Сплошной линией обозначены кривые, не учитывающие разброс микропрочности, пунктирной линией – кривые, учитывающие разброс микро-

прочности с параметрами  $\alpha_1 = 6, m_1 = 10^3$ , штрих-точечной линией – с параметрами  $\alpha_1 = 6, m_1 = 10^4$ .

Из приведенных на рис. 7.1 – 7.3 графиков следует, что характер зависимости кривых макродеформирования существенно зависит от наличия разброса прочности в микрообъемах связующего композита и от параметров функции распределения прочности как при микроразрушениях в матрице  $F(k_2)$ , так и в волокнах  $F(k_1)$ . Сравнения результатов, полученных без учета разброса прочности и с учетом показывают, что при наличии разброса прочности с увеличением значения параметров  $m_1, m_2$  уменьшается макронапряжение, соответствующее фиксированному значению макродеформации.

### §8. Повреждаемость дискретно-волоконистых композитных материалов с произвольно ориентированными включениями.

В данном разделе выше изложенная модель обобщена на случай кратковременной повреждаемости композитного материала на основе изотропных матрицы и дискретных эллипсоидальных ортотропных волокон, которые ориентированы в пространстве определенным образом. Исследуется процесс связанного деформирования и кратковременной микроповреждаемости данного композитного материала. Получены зависимости накопления повреждений в компонентах (как матрице, так и волокне) от макродеформации и нелинейные диаграммы макродеформирования композита.

Рассмотрим композитный материал, армированный хаотически расположенными и определенным образом направленными эллипсоидальными включениями. Представительный объем такого материала представлен на рис. 8.1.

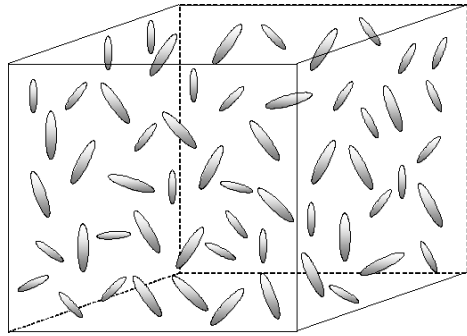


Рис. 8.1

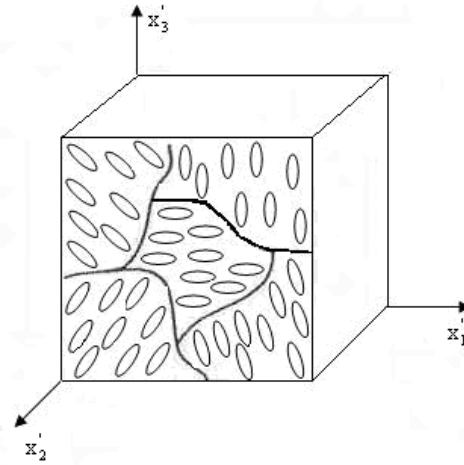


Рис. 8.2

На рис. 8.2 показан представительный объем композитного материала, который рассматривается как совокупность подсистем, каждая из которых представляет собой материал с ориентированными включениями, оси симметрии которого направлены определенным образом относительно исходной системы координат материала в целом. Полагаем, что материал включений является ортотропным, причем геометрические оси эллипсоидов совпадают с осями ортотропии тензора модулей упругости. Также предполагается, что в процессе нагружения в компонентах возникают микроразрушения, которые будем моделировать случайно расположенными пустыми микропорами квазисферической формы. Принимаем, что заданы макродеформации композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , под воздействием которых в компонентах происходит накопление повреждений. Макронапряжения в композите  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  связаны с макродеформациями следующими соотношениями:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \lambda_{ijkl}^{**} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (8.1)$$

где  $\lambda_{ijkl}^{**}$  – тензор эффективных упругих модулей рассматриваемого композитного материала.

Пусть ориентация координатных осей подсистемы  $x_1, x_2, x_3$  относительно основной системы координат материала  $x'_1, x'_2, x'_3$  описывается направляющими косинусами согласно равенству  $x'_i = a_{ik} x_k$ .

Направляющие косинусы могут быть выражены через углы Эйлера по формулам

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi; & a_{21} &= -\cos \psi \sin \varphi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi; \\ a_{31} &= \sin \theta \sin \psi; & a_{12} &= \sin \psi \cos \varphi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi; & a_{13} &= \sin \theta \sin \varphi; \\ a_{22} &= -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi; & a_{32} &= -\sin \theta \cos \psi; & a_{23} &= \sin \theta \cos \varphi; \\ a_{33} &= \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi < 2\pi). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Тогда из формулы преобразования компонент тензора четвертого ранга при переходе из системы координат  $x_i$  в систему  $x'_i$  находим

$$\lambda_{ijkl}^{**} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \lambda_{mnpq}^*, \quad (8.3)$$



где  $\lambda_{mnpq}^*$  – тензор эффективных упругих модулей композитного материала с однонаправленными включениями, который в случае ортотропной симметрии упругих свойств включений определяется на основании соотношений (6.1) – (6.14) для волокнистых материалов или на основании соотношений (7.1) – (7.14) – для дискретно волокнистых материалов и является функцией тензоров упругих модулей поврежденных компонентов  $\lambda_{ijkl}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$ , объемного содержания включений в матрице  $c_1$  и параметров, характеризующих форму эллипсоидального включения  $\bar{t}_2$ ,  $\bar{t}_3$ , т.е.

$$\lambda_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^* \left( \lambda_{ijkl}^{[1]}, \lambda_{ijkl}^{[2]}, c_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3 \right), \quad \bar{t}_2 = t_2/t_1, \quad \bar{t}_3 = t_3/t_1, \quad (8.4)$$

где  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  – размеры полуосей эллипсоида в направлении осей  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , а индексы 1 и 2 сверху обозначают, соответственно, включения и матрицу. Тензоры модулей упругости поврежденных компонентов  $\lambda_{ijkl}^{[1]}$ ,  $\lambda_{ijkl}^{[2]}$  определяются через тензоры модулей упругости скелетов компонентов  $\lambda_{ijkl}^1$ ,  $\lambda_{ijkl}^2$  и их пористости  $p_1$ ,  $p_2$ , характеризующие поврежденность, на основании соотношений (5.1) – (5.14).

Далее вводя функцию распределения, описывающую разброс координатных осей подсистем относительно углов Эйлера  $f(\theta, \varphi, \psi)$ , можно записать среднее значение коэффициентов упругости в виде интеграла по всем трем углам

$$\lambda_{ijkl}^{**} = \langle \lambda_{ijkl}^* \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi, \psi) \lambda_{ijkl}^*(\theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi. \quad (8.5)$$

Таким образом, приближенное определение упругих постоянных композита (системы) можно проводить в два этапа: на первом этапе определяются свойства подсистем, ориентированных определенным образом относительно осей основной системы координат, а затем с помощью заданной функции распределения определяются эффективные свойства всей системы по вычисленным свойствам каждой подсистемы.

Решение задачи первого этапа осуществляется на основе модели композита стохастической структуры, армированного ориентированными эллипсоидами, второго – либо на основе схемы Фойхта, как было изложено выше, либо Рейсса (усредняется тензор упругих податливостей). В этом случае уравнение (8.5) будет иметь вид

$$S_{ijkl}^{**} = \langle S_{ijkl}^* \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi, \psi) S_{ijkl}^*(\theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi, \quad (8.6)$$

где  $S_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^{*-1}$ , и  $S_{ijkl}^{**}$  определяется по аналогии с формулами (8.3).

Зная эффективные модули упругости и макродеформации композита, можно определить деформации в компонентах композита посредством соотношений

$$\langle \varepsilon_{kl} |_2 \rangle = \left( I_{klpq} + c_2 \left( \langle \lambda_{klmn} \rangle - \lambda_{klmn}^{**} \right) \left( \lambda_{mnpq}^{[3]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{pq} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{kl} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{kl} |_1 \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{kl} |_2 \rangle, \quad (8.7)$$

где  $\langle \varepsilon_{kl} |_r \rangle = \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  – тензор средних деформаций поврежденного  $r$ -го компонента  $r \in \{1, 2\}$ ;

$$\langle \lambda_{klmn} \rangle = c_1 \bar{\lambda}_{klmn}^{[1]} + c_2 \lambda_{klmn}^{[2]}; \quad \lambda_{mnpq}^{[3]} = \bar{\lambda}_{mnpq}^{[1]} - \lambda_{mnpq}^{[2]}; \quad (8.8)$$

$$\bar{\lambda}_{ijkl}^{[1]} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi, \psi) \lambda_{ijkl}^{[1]'}(\theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi; \quad (8.9)$$

$\lambda_{ijkl}^{[1]}'(\theta, \varphi, \psi)$  определяется по аналогии с формулами (8.4);  $c_1$ ,  $c_2$  – объемные содержания матрицы и включений в композите.

Средние напряжения в  $r$ -го компонента  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  связаны с его средними деформациями  $\langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$  следующим образом:  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{[r]} \langle \varepsilon_{kl}^r \rangle$ ,  $r \in \{1, 2\}$ , или со средними деформациями всего композита  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$

$$\langle \sigma_{ij}^r \rangle = \lambda_{ijkl}^{**[r]} \langle \varepsilon_{kl} \rangle \quad (8.10)$$

$$\left( \lambda_{ijmn}^{**[r]} = \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^{**} \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right), r \in \{1, 2\}; \right. \quad (8.11)$$

$I_{pqmn}$  – единичный тензор).

Средние по скелету  $r$ -го компонента напряжения  $\bar{\sigma}_{ij}^r$ ,  $r \in \{1, 2\}$ , связаны со средними напряжениями  $\langle \sigma_{ij}^r \rangle$  поврежденного  $r$ -го компонента зависимостями

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \langle \sigma_{ij}^r \rangle / (1 - p_r); \quad r \in \{1, 2\}. \quad (8.12)$$

Тогда на основе (8.10) – (8.12) получим выражения средних по скелету  $r$ -го компонента напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  через макродеформации

$$\bar{\sigma}_{ij}^r = \frac{1}{1 - p_r} \lambda_{ijpq}^{[r]} \left( I_{pqmn} + c_r \left( \langle \lambda_{pqkl} \rangle - \lambda_{pqkl}^* \right) \left( \lambda_{klmn}^{[3-r]} - \lambda_{klmn}^{[r]} \right)^{-1} \right) \langle \varepsilon_{mn} \rangle. \quad (8.13)$$

В случае ортотропных компонентов будем исходить из обобщенного критерия Губера – Мизеса, который для скелета  $r$ -го компонента имеет вид (6.21), (6.22). При  $a_{ir} = 0$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  или  $i \in \{1, \dots, 9\}$ , из (6.21), (6.22) следует критерий Губера – Мизеса (7.19).

Согласно (8.13) напряжения в материале скелета  $\bar{\sigma}_{ij}^r$  можно выразить через макродеформации  $\langle \varepsilon_{mn} \rangle$ , тогда получим выражение предельной поверхности для пористого композитного материала в пространстве макродеформаций, которое имеет вид (6.24)

$$\begin{aligned} I_{\sigma}^r = \frac{1}{1 - p_{0r}} \left\{ \frac{1}{6} \left[ \left( \left( \lambda_{11}^{**[r]} - \lambda_{22}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left( \lambda_{12}^{**[r]} - \lambda_{22}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{22} \rangle + \left( \lambda_{13}^{**[r]} - \lambda_{23}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \left( \lambda_{12}^{**[r]} - \lambda_{13}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left( \lambda_{22}^{**[r]} - \lambda_{23}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{22} \rangle + \left( \lambda_{23}^{**[r]} - \lambda_{33}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( \left( \lambda_{13}^{**[r]} - \lambda_{11}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{11} \rangle + \left( \lambda_{23}^{**[r]} - \lambda_{12}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{22} \rangle + \left( \lambda_{33}^{**[r]} - \lambda_{13}^{**[r]} \right) \langle \varepsilon_{33} \rangle \right)^2 \right] + \quad (8.14) \\ \left. + \left( \lambda_{44}^{**[r]} \langle \varepsilon_{23} \rangle \right)^2 + \left( \lambda_{55}^{**[r]} \langle \varepsilon_{13} \rangle \right)^2 + \left( \lambda_{66}^{**[r]} \langle \varepsilon_{12} \rangle \right)^2 \right\}, \quad r \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Одноточечную функцию распределения  $F(k_r)$  параметра  $k_r$  можно описывать распределением Вейбулла (7.20). Если до начала деформирования композита начальная микроповрежденность  $r$ -го компонента характеризуется пористостью  $p_{0r}$ . Тогда функция распределения  $F(k_r)$ , согласно свойству эргодичности, определяет относительное содержание материала неразрушенной части  $r$ -го компонента, где предел микропрочности меньше соответствующего значения  $k_r$ . Поэтому если в неразру-

шенной части  $r$ -го компонента напряжения равны  $\overline{\sigma}_{ij}^r$ , то функция  $F(I_\sigma^r)$  определяет, согласно (7.20), (8.14), относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета  $r$ -го компонента. Тогда можно записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости [81, 82]

$$p_r = p_{0r} + (1 - p_{0r})F(I_\sigma^r); \quad r \in \{1, 2\}. \quad (8.15)$$

Подставляя (7.20), (8.14) в (8.15), получаем систему уравнений для определения пористости компонентов  $p_r$  как функций макродеформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , т.е.

$$p_r = p_r(\langle \varepsilon_{kl} \rangle) \quad (r \in \{1, 2\}). \quad (8.16)$$

На основе этих соотношений можно записать алгоритм последовательных приближений для определения текущей пористости материала  $r$ -го компонента, а зависимости (5.1) – (5.14), (7.1) – (7.14), (8.1) – (8.9) дают возможность определить эффективные деформативные характеристики композитного материала с пористыми ортотропными компонентами, где включения являются разориентированными трехосными эллипсоидами.

Имея вычисленные значения модулей упругости и коэффициентов термических напряжений поврежденных компонентов композитного материала, в целом можно решить трансцендентные уравнения относительно  $p_1$ ,  $p_2$ , которые описываются соотношениями (5.1) – (5.14), (7.1) – (7.14), (8.1) – (8.9), (7.19), (8.14), (8.15). Итерационная схема является аналогичной случаю, представленному в §6.

**8.1. Равномерная разориентация в пространстве.** Рассмотрим случай равномерной разориентации включений в матрице и найдем осредненные модули  $\lambda_{ij}^{**}$  в соответствии со схемой Фойхта. Положив в уравнении (8.5)  $f(\theta, \varphi, \psi) = 1$ , видно, что задача сводится к усреднению суммы произведений направляющих косинусов. После подстановки (8.3) в (8.5) и учитывая (8.2), получим

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{**} = \lambda_{22}^{**} = \lambda_{33}^{**} &= \frac{1}{5}(\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^* + \lambda_{33}^*) + \frac{2}{5}(\lambda_{12}^* + \lambda_{13}^* + \lambda_{23}^* + 2\lambda_{44}^* + 2\lambda_{55}^* + 2\lambda_{66}^*); \\ \lambda_{12}^{**} = \lambda_{13}^{**} = \lambda_{23}^{**} &= \frac{1}{15}(\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^* + \lambda_{33}^*) + \frac{4}{15}(\lambda_{12}^* + \lambda_{13}^* + \lambda_{23}^*) - \frac{2}{15}(\lambda_{44}^* + \lambda_{55}^* + \lambda_{66}^*); \\ \lambda_{44}^{**} = \lambda_{55}^{**} = \lambda_{66}^{**} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{**} - \lambda_{12}^{**}). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Таким образом, из полученных формул видно, что такой композит в макрообъеме представляет собой изотропную среду.

Аналогичным образом можно вычислить усредненную матрицу упругих податливостей  $\langle S_{ij}^* \rangle$ , что будет соответствовать усреднению по Рейсу:

$$\begin{aligned} S_{11}^{**} = S_{22}^{**} = S_{33}^{**} &= \frac{1}{5}(S_{11}^* + S_{22}^* + S_{33}^*) + \frac{2}{5}(S_{12}^* + S_{13}^* + S_{23}^* + 2S_{44}^* + 2S_{55}^* + 2S_{66}^*); \\ S_{12}^{**} = S_{13}^{**} = S_{23}^{**} &= \frac{1}{15}(S_{11}^* + S_{22}^* + S_{33}^*) + \frac{4}{15}(S_{12}^* + S_{13}^* + S_{23}^*) - \frac{2}{15}(S_{44}^* + S_{55}^* + S_{66}^*); \\ S_{44}^{**} = S_{55}^{**} = S_{66}^{**} &= \frac{1}{2}(S_{11}^{**} - S_{12}^{**}). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Здесь  $\lambda_{ijkl}^*$  и  $S_{ijkl}^*$  связаны соотношением  $S_{ijkl}^* = \lambda_{ijkl}^{*-1}$ .

**8.2. Равномерное и непрерывное распределение включений в интервале**  $0 \leq \theta < \theta^*$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Рассмотрим случай, когда включения равномерно и непрерывно распределены в указанном интервале, где  $\theta^*$  – максимальный угол отклонения от оси  $x_3'$ . В этом случае функция распределения  $f(\theta, \varphi, \psi)$  будет иметь вид

$$f(\theta, \varphi, \psi) = ah_{\theta^*}(\theta). \quad (8.19)$$

Здесь  $h_{\theta^*}(\theta)$  – индикаторная функция угла  $\theta$

$$h_{\theta^*}(\theta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \theta^*; \\ 0, & \theta^* \leq \theta \leq \pi, \end{cases} \quad (8.20)$$

а множитель  $a$  находится из условия нормировки

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi, \psi) \sin \theta d\theta d\varphi d\psi = 1. \quad (8.21)$$

Подставляя (8.19), (8.20) into (8.21), получим

$$a = \frac{2}{1 - \cos \theta^*}. \quad (8.22)$$

Учитывая соотношения (8.19), получаем

$$f(\theta, \varphi, \psi) = \frac{2}{1 - \cos \theta^*} h_{\theta^*}(\theta). \quad (8.23)$$

Зная функцию распределения  $f(\theta, \varphi, \psi)$ , из уравнения (8.5) можно получить усредненные постоянные  $\lambda_{ij}^{**}$ . Приведем выражения для средних модулей упругости

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{**} = \lambda_{22}^{**} &= 3a_1 (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + 3a_2 \lambda_{33}^* + 2a_3 (\lambda_{23}^* + \lambda_{13}^* + 2\lambda_{44}^* + 2\lambda_{55}^*) + 2a_1 (\lambda_{12}^* + 2\lambda_{66}^*); \\ \lambda_{33}^{**} &= 3a_2 (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + a_4 \lambda_{33}^* + 2a_5 (\lambda_{23}^* + \lambda_{13}^* + 2\lambda_{44}^* + 2\lambda_{55}^*) + 2a_2 (\lambda_{12}^* + 2\lambda_{66}^*); \\ \lambda_{23}^{**} = \lambda_{13}^{**} &= a_3 (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + a_5 \lambda_{33}^* + 2(a_6 + a_2) (\lambda_{13}^* + \lambda_{23}^*) + \\ &+ 2(a_3 + a_5) \lambda_{12}^* - 2a_2 (\lambda_{44}^* + \lambda_{55}^*) - 2a_7 \lambda_{66}^*; \\ \lambda_{44}^{**} = \lambda_{55}^{**} &= a_3 (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + a_5 \lambda_{33}^* - a_5 (\lambda_{13}^* + \lambda_{23}^*) - a_2 \lambda_{12}^* + \\ &+ (2a_6 + 2a_2 - a_5) (\lambda_{44}^* + \lambda_{55}^*) + (2a_3 + a_2) \lambda_{66}^*; \quad \lambda_{66}^{**} = \frac{1}{2} (\lambda_{11}^{**} - \lambda_{12}^{**}). \end{aligned} \quad (8.24)$$

Здесь  $a_i$   $i, \in \{1, \dots, 10\}$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{960} (64 + 19 \cos \theta^* + 19 \cos^2 \theta^* + 9 \cos^3 \theta^* + 9 \cos^4 \theta^*); \\ a_2 &= \frac{1}{120} (8 - 7 \cos \theta^* - 7 \cos^2 \theta^* + 3 \cos^3 \theta^* + 3 \cos^4 \theta^*); \\ a_3 &= \frac{1}{240} (16 + \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* - 9 \cos^3 \theta^* - 9 \cos^4 \theta^*); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{5} (1 + \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* + \cos^3 \theta^* + \cos^4 \theta^*); \\
a_5 &= \frac{1}{30} (2 + 2 \cos \theta^* + 2 \cos^2 \theta^* - 3 \cos^3 \theta^* - 3 \cos^4 \theta^*); \\
a_6 &= \frac{1}{120} (8 + 8 \cos \theta^* + 8 \cos^2 \theta^* + 3 \cos^3 \theta^* + 3 \cos^4 \theta^*); \\
a_7 &= \frac{1}{480} (32 + 47 \cos \theta^* + 47 \cos^2 \theta^* - 3 \cos^3 \theta^* - 3 \cos^4 \theta^*).
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Таким образом, из полученных соотношений видно, что такой композит является трансверсально-изотропным. Следует отметить, что при  $\theta^* = \pi/2$  приходим к случаю, когда включения равномерно разориентированы. Действительно, тогда имеем

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = a_7 = \frac{1}{15}; \quad a_4 = \frac{1}{5}, \tag{8.26}$$

и уравнения (8.24) сводятся к (8.18).

**8.3. Равномерная разориентация включений в плоскости  $x'_1 x'_2$ .** Положив в выражениях (8.25)  $\theta^* = 0$ , приходим к случаю, когда эллипсоиды равномерно разориентированы в плоскости  $x'_1 x'_2$ , тогда как ориентация вдоль оси  $x'_3$  сохраняется. В этом случае имеем

$$a_1 = \frac{1}{8}; \quad a_2 = a_3 = a_5 = 0; \quad a_4 = 1; \quad a_6 = a_7 = \frac{1}{4}. \tag{8.27}$$

Тогда выражения (8.24) с учетом (8.27) примут вид

$$\begin{aligned}
\lambda_{11}^{**} = \lambda_{22}^{**} &= \frac{3}{8} (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + \frac{1}{4} \lambda_{12}^* + \frac{1}{2} \lambda_{66}^*, \quad \lambda_{33}^{**} = \lambda_{33}^*; \\
\lambda_{13}^{**} = \lambda_{23}^{**} &= \frac{1}{2} (\lambda_{13}^* + \lambda_{23}^*); \quad \lambda_{12}^{**} = \frac{1}{8} (\lambda_{11}^* + \lambda_{22}^*) + \frac{3}{4} \lambda_{12}^* - \frac{1}{2} \lambda_{66}^*; \\
\lambda_{44}^{**} = \lambda_{55}^{**} &= \frac{1}{2} (\lambda_{44}^* + \lambda_{55}^*); \quad \lambda_{66}^{**} = \frac{1}{2} (\lambda_{11}^{**} - \lambda_{12}^{**}).
\end{aligned} \tag{8.28}$$

Отметим также, что эти формулы можно получить непосредственно из выражения (8.5), учитывая, что функция распределения включений, разориентированных в плоскости  $x'_1 x'_2$ , имеет вид

$$f(\theta, \varphi, \psi) = 4\pi \delta(\theta) \frac{\delta(\psi)}{\sin(\theta)}. \tag{8.29}$$

**8.4. Равномерное и непрерывное распределение включений в интервале  $0 \leq \theta < \theta^*$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и  $\psi = 0$ .** Рассмотрим случай, когда включения равномерно и непрерывно распределены в интервале  $0 \leq \theta < \theta^*$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  и  $\psi = 0$ . Тогда функция распределения  $f(\theta, \varphi, \psi)$  будет иметь вид

$$f(\theta, \varphi, \psi) = b h_{\theta^*}(\theta) \delta(\psi), \tag{8.30}$$

где  $h_{\theta^*}(\theta)$  – индикаторная функция угла  $\theta$ , задаваемая соотношением (8.20);  $\delta(\psi)$  –  $\delta$ -функция, а множитель  $b$  определяется из условия нормировки (8.21)

$$b = 4\pi/(1 - \cos \theta^*). \quad (8.31)$$

Тогда функция распределения (8.30) с учетом (8.31) примет вид

$$f(\theta, \varphi, \psi) = \frac{4\pi}{1 - \cos \theta^*} h_{\theta^*}(\theta) \delta(\psi). \quad (8.32)$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем полученные выражения средних модулей упругости для данного случая

$$\begin{aligned} \lambda_{11}^{**} = \lambda_{22}^{**} &= 3a_1\lambda_{11}^* + 3a_2\lambda_{22}^* + 3a_4\lambda_{33}^* + 6a_5(\lambda_{23}^* + 2\lambda_{44}^*) + 2a_3(\lambda_{13}^* + 2\lambda_{55}^*) + 2a_1(\lambda_{12}^* + 2\lambda_{66}^*); \\ \lambda_{33}^{**} &= 8a_4\lambda_{22}^* + 8a_2\lambda_{33}^* + 16a_5(\lambda_{23}^* + 2\lambda_{44}^*); \\ \lambda_{23}^{**} = \lambda_{13}^{**} &= 4a_5(\lambda_{22}^* + \lambda_{33}^*) + 4(a_2 + a_4)\lambda_{23}^* + 4a_1\lambda_{13}^* + 4a_3\lambda_{12}^* - 4a_5\lambda_{44}^*; \\ \lambda_{12}^{**} &= a_1\lambda_{11}^* + a_2\lambda_{22}^* + a_4\lambda_{33}^* + 2a_5\lambda_{23}^* + 6a_3\lambda_{13}^* + 6a_1\lambda_{12}^* + 4a_5\lambda_{44}^* - 4a_3\lambda_{55}^* - 4a_1\lambda_{66}^*; \\ \lambda_{44}^{**} = \lambda_{55}^{**} &= 4a_5(\lambda_{22}^* + \lambda_{33}^* - 2\lambda_{23}^*) + 4(a_2 + a_4 - 2a_5)\lambda_{44}^* + 4a_1\lambda_{55}^* + 4a_3\lambda_{66}^*; \\ \lambda_{66}^{**} &= \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{**} - \lambda_{12}^{**}); \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{24}(1 + \cos \theta^* + \cos^2 \theta^*); \quad a_3 = \frac{1}{24}(2 - \cos \theta^* - \cos^2 \theta^*); \\ a_2 &= \frac{1}{40}(1 + \cos \theta^* + \cos^2 \theta^* + \cos^3 \theta^* + \cos^4 \theta^*); \\ a_4 &= \frac{1}{120}(8 - 7 \cos \theta^* - 7 \cos^2 \theta^* + 3 \cos^3 \theta^* + 3 \cos^4 \theta^*); \\ a_5 &= \frac{1}{120}(2 + 2 \cos \theta^* + 2 \cos^2 \theta^* - 3 \cos^3 \theta^* - 3 \cos^4 \theta^*). \end{aligned} \quad (8.34)$$

Принимая в выражениях (8.34)  $\theta^* = 0$ , получим случай, когда эллипсоиды равномерно разориентированы в плоскости  $x'_1 x'_2$ , а ориентация вдоль оси  $x'_3$  сохраняется. В этом случае имеем

$$a_1 = a_2 = 1/8; \quad a_3 = a_4 = a_5 = 0. \quad (8.35)$$

Тогда уравнения (8.33) с учетом (8.35) сводятся к (8.28). Также следует отметить, что аналогичным образом можно определять и усредненный тензор упругих податливостей  $S_{ij}^{**}$ , что соответствует усреднению по Рейссу.

**8.5. Анализ диаграмм макродеформирования.** На основании полученных зависимостей численно исследованы диаграммы макродеформирования композитного материала на основе изотропной матрицы с ортотропными эллипсоидальными волокнами, при микроразрушениях в компонентах при заданных упругих характеристиках, объемных содержаниях компонентов, геометрических параметрах структуры и ориентации включений.

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в матрице композитного материала. Построим диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0. \quad (8.36)$$

В качестве включений и матрицы приняты, соответственно, топаз и эпоксидная смола с характеристиками неповрежденной части, представленными в (6.34), и объёмной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в матрице

$$c_1 = 0,4, \quad p_{02} = 0,2, \quad \bar{t}_2 = 1, \quad \bar{t}_3 = 4, \quad (8.37)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности связующего  $F(k_2)$ , представленными в (7.25).

На рис. 8.3 – 8.4 показаны кривые зависимостей макронапряжений  $\langle \sigma_{11} \rangle$  (в ГПа) от макродеформаций  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  для различных значений параметров функции разброса микропрочности и различных способов ориентации волокон в матрице, определенные на основе приближения Фойхта (рис. 8.3) и Рейсса (рис. 8.4). Сплошной линией обозначены кривые, учитывающие разброс микропрочности с параметрами  $\alpha_2 = 2$ ,  $m_2 = 10^3$ , пунктирной линией – с параметрами  $\alpha_2 = 2$ ,  $m_2 = 2 \cdot 10^4$ . Рассмотрены случаи равномерной разориентации включений в пространстве (UD), равномерного и непрерывного распределения включений внутри интервала  $0 \leq \theta < \theta^*$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ , для угла  $\theta^* = 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$  и равномерной разориентации включений в плоскости  $x_1' x_2'$  (PD).

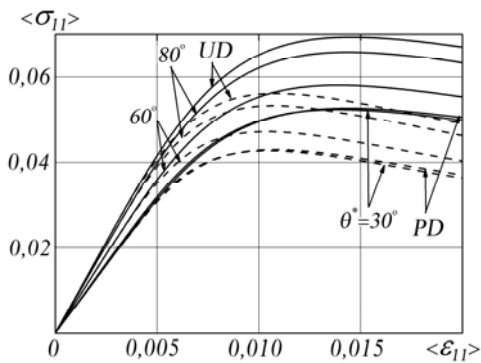


Рис. 8.3

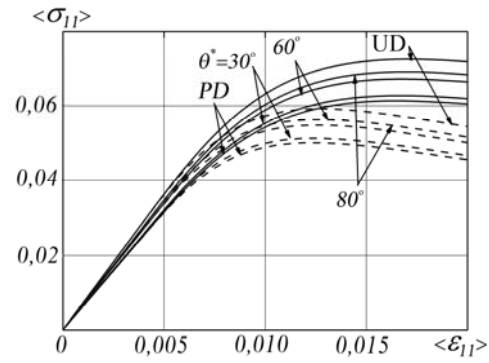


Рис. 8.4

Рассмотрим случай, когда накопление повреждений происходит в волокне рассматриваемого композитного материала. Построим диаграмму макродеформирования и исследуем поведение композита с изотропными прочностными свойствами для одноосного растяжения

$$\langle \varepsilon_{33} \rangle \neq 0, \quad (8.38)$$

при объёмной концентрации и форме включений, начальном содержании пор в волокне

$$c_1 = 0,6; \quad p_{01} = 0,2; \quad \bar{t}_2 = 2; \quad \bar{t}_3 = 8, \quad (8.39)$$

а также при заданных параметрах функции распределения прочности угольного волокна  $F(k_1)$

$$\alpha_1 = 6; \quad m_1 = 10^4; \quad 5 \times 10^4; \quad k_{01} = 0,3 \text{ ГПа}. \quad (8.40)$$

На рис. 8.5 – 8.6 показаны кривые зависимостей  $\langle \sigma_{33} \rangle$  (в ГПа) от  $\langle \varepsilon_{33} \rangle$  для различных значений параметров функции разброса микропрочности и различных способов ориентации волокон в матрице, определенные на основе приближения Фойхта (рис. 8.5) и Рейсса (рис. 8.6). Рассмотрены случаи равномерной разориентации включений в пространстве (UD), равномерного и непрерывного распределения включений

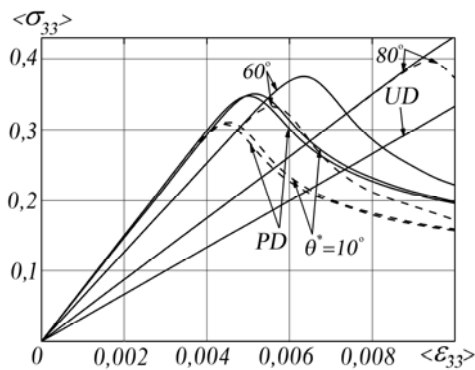


Рис. 8.5

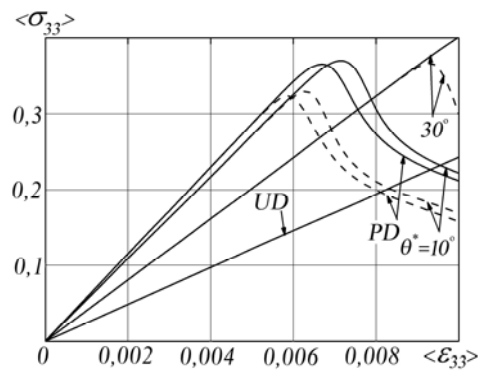


Рис. 8.6

внутри интервалов  $0 \leq \theta < \theta^*$ ;  $0 < \varphi < 2\pi$ ;  $0 \leq \psi < 2\pi$ , для углов  $\theta^* = 10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 80^\circ$  и равномерной разориентации включений в плоскости  $x'_1 x'_2$  (PD).

Из графиков видно, что ориентация включений может существенно влиять на кривые макродеформирования. Максимальное разрушение в волокне происходит, когда макродеформации направлены вдоль волокна. При разориентации включений в пространстве (UD) и равномерном, непрерывном распределениях включений внутри интервалов  $0 \leq \theta < \theta^*$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$  для угла  $\theta^* = 60^\circ$  и больше волокно практически не разрушается при данном способе нагружения. Из графиков также следует, что результаты, полученные на основании схемы Фойхта, превышают значения тех же результатов, полученных в результате усреднения по Рейссу.

На основе приведенных на рис. 8.3 – 8.6 диаграмм получено, что характер зависимостей кривых макродеформирования существенно зависит от наличия разброса прочности в микрообъемах связующего композита и от параметров функции распределения прочности как при микроразрушениях в матрице  $F(k_2)$ , так и в волокнах  $F(k_1)$ . При наличии разброса прочности кривые макродеформирования имеют более сглаженный вид в области начала микроразрушений, что и наблюдается в реальных материалах, а характер кривых становится сложнее. С увеличением значения параметров  $m_1, m_2$  уменьшается макронапряжение, соответствующее фиксированному значению макродеформации.

Следует отметить, что расхождения между результатами, вычисленными разными способами не значительны, поэтому можно сделать вывод о правомерности использования предложенной модели. В каждом конкретном случае, исходя из физических соображений, можно выбирать ту или иную схему. Так, в случае жесткой матрицы или длинных жестких волокон (каркас) целесообразно применять приближение Фойхта, в случае мягкой матрицы – приближение Рейсса. В некоторых случаях можно использовать приближение Хилла [50], являющееся средним арифметическим значений, найденных усреднением по Фойхту и по Рейссу.

### Выводы.

Предложена теория прогнозирования эффективных деформативных свойств пористых анизотропных материалов и композитов стохастической структуры с пористыми анизотропными компонентами при микроразрушениях в компонентах, что приводит к нелинейным зависимостям между макронапряжениями и макродеформациями:

построены модели линейного деформирования пористых анизотропных материалов и композитов с пористыми анизотропными компонентами различной структуры и связанного деформирования и повреждаемости пористых анизотропных материалов и композитов с пористыми анизотропными компонентами различной структуры;

исследованы закономерности линейного деформирования пористых анизотропных материалов и композитов с пористыми анизотропными компонентами различной структуры в зависимости от физико-механических параметров и пористости компонентов и геометрических параметров структуры;



построены модели связанных процессов деформирования и кратковременной повреждаемости пористых трансверсально-изотропных и ортотропных материалов и композитов различной структуры с пористыми трансверсально-изотропными и ортотропными компонентами;

сформулированы и решены задачи о связанном деформировании и кратковременной повреждаемости пористых трансверсально-изотропных ортотропных материалов и композитов различной структуры с пористыми трансверсально-изотропными и ортотропными компонентами при микроразрушениях в их компонентах (как в матрице, так и во включениях) с учетом характера распределения прочности в микрообъемах компонентов;

исследованы закономерности связанных процессов деформирования и микроразрушений анизотропных материалов и композитов с анизотропными компонентами различной структуры в зависимости от физико-механических свойств и объемного содержания компонентов, геометрических параметров структуры и приложенной нагрузки.

Процесс микроразрушений моделируется образованием системы стохастически расположенных пустых квазисферических пор в компонентах композита.

Критерий разрушения в микрообъеме принимается в виде предельного значения интенсивности средних по неразрушенной части компонента касательных напряжений.

Предел прочности является случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается экспоненциально-степенным законом.

Для определения изменяющейся вследствие микроразрушений пористости компонента используется уравнение баланса пористости компонента. Это позволяет описать связанный процесс деформирования и микроразрушений с учетом их взаимодействия, которое приводит к нелинейному закону связи между макронапряжениями и макродеформациями.

Микроразрушения в компонентах композита можно описать зависимостью соответствующих термоупругих характеристик от их пористости, которая, в свою очередь, зависит от деформаций в компонентах, что дает возможность обобщить результаты, полученные для линейного деформирования, на случай микроразрушений.

При решении задач об эффективных деформативных характеристиках композитов использован подход, основанный на методе условных моментов и методе Ньютона – Рафсона.

Построены алгоритмы, позволяющие определить напряженно-деформированное состояние и эффективные деформативные характеристики пористых трансверсально-изотропных и ортотропных материалов и композитов с пористыми трансверсально-изотропными и ортотропными компонентами при произвольном сложном деформированном состоянии, причем в качестве нулевого приближения используется решение соответствующей задачи об эффективных термоупругих постоянных композитов при отсутствии микроразрушений.

Численно исследованы деформирование и кратковременная повреждаемость указанных материалов в зависимости от термоупругих постоянных и объемных содержания компонентов, геометрических параметров структуры, а также от характера распределения прочности в микрообъемах их компонентов.

Выполненный аналитический и численный анализ позволил обнаружить новые закономерности и характерные механические эффекты, среди которых можно выделить следующие.

1. Характер распределения прочности в микрообъемах компонентов и значения параметров функции распределения прочности материала компонентов существенно влияют на эффективные деформативные свойства композита и на характер нелинейности зависимостей между макронапряжениями и макродеформациями.

2. Кривые деформирования однородного материала состоят из двух звеньев: линейного восходящего и нелинейного сначала восходящего, а затем нисходящего, что подтверждается экспериментальными исследованиями [69, 118]. Наличие армирующих элементов в композитных материалах может привести к тому, что второй участок будет также восходящим. Выпуклость восходящего звена экспериментальной кривой можно объяснить реальной неоднородностью напряжений и предела прочности в материале. Учесть

неоднородность напряжений в материале в рамках двухточечного приближения [48 – 50] не представляется возможным.

3. При учете распределения микропрочности в микрообъемах компонентов участок кривой в районе начала микроразрушений является сглаженным, что и наблюдается в реальных материалах. С увеличением параметра  $m_k$  функции распределения прочности  $F(k_k)$  уменьшается напряжение, соответствующее фиксированному значению макродеформации, и характер кривых деформирования приближается к характеру соответствующих кривых, построенных без учета разброса прочности.

4. Установлено, что температурные воздействия могут существенно влиять на кривые макродеформирования.

5. Также установлено, что ориентация включений может существенно влиять на кривые макродеформирования. Максимальное разрушение в волокне происходит, когда макродеформации направлены вдоль волокна. При выборе определенной ориентации включений в каждом конкретном случае нагружения можно добиться того, что волокно практически не будет разрушаться. Расхождения между результатами, вычисленными разными способами (схемы Фойхта и Рейсса) не значительны, поэтому можно сделать вывод о правомерности использования предложенной модели. В каждом конкретном случае, исходя из физических соображений, следует выбирать ту или иную схему.

**РЕЗЮМЕ.** Запропоновано статистичну модель зв'язаного деформування і пошкоджуваності композитів з пористими трансверсально-ізотропними і ортотропними компонентами. Механізм мікропошкоджуваності таких композитів досліджено на основі припущення, що мікроміцність матеріалу є неоднорідною. Одиничне мікропошкодження моделюється утворенням порожньої квазісферичної пори на місці мікрооб'єму, що руйнується за критерієм Губера – Мізеса. Границя мікроміцності приймається випадковою функцією координат, густина односточкового розподілу якої описується розподілом Вейбула. На основі метода умовних моментів, рівнянні балансу пошкоджуваності матеріалу і методі Ньютона – Рафсона побудовано алгоритми обчислення ефективних деформаційних властивостей таких матеріалів в залежності від макродеформацій. Встановлено загальні закономірності впливу пошкоджуваності матеріалу на закон зв'язку макронапружень і макродеформацій. Проаналізовано вплив фізико-механічних характеристик матеріалів, об'ємного вмісту і пористості компонентів, геометричних параметрів структури та характеру розподілу мікроміцності на пошкодженість матеріалу і як наслідок на криві макродеформування.

1. *Аптуков В.Н.* Континуальная модель анизотропной поврежденности // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных материалов АН СССР. Урал. отд. ние. – Свердловск, 1992. – С. 41 – 52.
2. *Аптуков В.Н., Белоусов В.Л.* Модель анизотропной поврежденности тел. Сообщ. 1. Общие соотношения // Пробл. прочности. – 1994. – № 2. – С. 28 – 34.
3. *Афанасьев Н.Н.* Статистическая теория усталостной прочности металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1953. – 128 с.
4. *Болотин В.В.* Стохастические модели разрушения в однонаправленных волокнистых композитах // Механика композитных материалов. – 1981. – № 3 – С. 404 – 420.
5. *Вакуленко А.А., Качанов Л.М.* Континуальная теория среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 4. – С. 159 – 166.
6. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наук. думка, 1985. – 302 с.
7. *Волков С.Д.* Статистическая теория прочности. – М.; Свердловск: Госуд. науч.-техн. изд-во машиностроит. лит-ры, 1960. – 176 с.
8. *Голуб В.П.* Нелинейная механика поврежденности и ее приложения // Трещиностойкость материалов и элементов конструкций. – 15-ое Всесоюзное научное совещание по тепловым напряжениям в элементах конструкций. – Канев. – 1980. – С. 19 – 20.
9. *Голуб В.П.* Нелинейные модели накопления поврежденности в условиях ползучести // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 1992. – № 1. – С. 51 – 58.
10. *Голуб В.П.* Определяющие уравнения в нелинейной механике поврежденности // Прикл. механика. – 1993. – 29, № 10. – С. 37 – 49.

11. Грушецкий И.В., Микельсон М.Я., Тамуж В.П. Изменение жесткости однонаправленного волокнистого композита вследствие дробления волокон // *Механика композитных материалов*. – 1982. – № 2. – С. 211 – 216.
12. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. *Механика материалов*. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
13. Давиденков Н.Н. Усталость металлов. – К.: Изд-во АН УССР, 1947. – 241 с.
14. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
15. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 624 с.
16. Козаев В.П. Расчеты на прочность при напряжениях, переменных во времени. – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
17. Кондауров В.И. О моделировании процессов накопления поврежденности и динамическом разрушении твердых тел размерами // *Исследование свойств вещества в экстремальных условиях*. – М., 1990. – С. 145 – 152.
18. Конторова Т.А., Тимошенко О.А. Обобщение статистической теории прочности на случай неоднородного напряженного состояния // *Журн. техн. физики*. – 1949. – 19, № 3. – С. 119 – 121.
19. Конторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов // *Журн. техн. физики*. – 1941. – 11, № 3. – С. 173 – 183.
20. Копьев И.М., Овчинский А.С. Разрушение металлов, армированных волокнами. – М.: Наука, 1977. – 240 с.
21. Креггерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // *Механика композитных материалов*. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
22. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. / – М.: Мир, 1982. – 336 с.
23. Куксенко В.С. Диагностика и прогнозирование разрушения крупномасштабных объектов // *Физика твердого тела*. – 2005. – 47, № 5. – С. 788 – 792.
24. Лурье С.А. Об одной энтропийной модели накопления повреждений в композите // *Механически неоднородных структур: Тез. докл. 3-ей Всесоюз. конф. (Львов, 17 – 19 сент, 1991)*. – Ч. 2. – Львов, 1991. – С. 198.
25. Лурье С.А., Криволицкая И.И., Введенский А.Р. Об одной микромеханической энтропийной модели накопления рассеянных повреждений в композиционных материалах // *Технология. Сер. Конструкции из композиционных материалов*. – 1995. – № 1. – С. 5 – 12.
26. *Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.* / Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванин Г.А. и др. *Механика материалов*. – К.: Наук. думка, 1982. – Т. 1. – 368 с.
27. Назаренко Л.В. Влияние микроразрушений на деформативные свойства анизотропных материалов // *Доп. НАН України*. – 1999. – № 10. – С. 63 – 67.
28. Назаренко Л.В. Деформация трансверсально-изотропных дискретно-волокнистых композитов при микроразрушениях матрицы // *Докл. НАН Украины*. – 2002. – № 11. – С. 49 – 54.
29. Назаренко Л.В. Деформативные свойства и длительная повреждаемость волокнистых ортотропных композитов при дробно-степенной функции длительной микропрочности // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки*. – 2008. – № 2, Ч. 1. – С. 94 – 102.
30. Назаренко Л.В. Долговременная повреждаемость трансверсально-изотропных композитных материалов при дробно-степенной функции долговечности // *Докл. НАН Украины*. – 2008. – № 4. – С. 62 – 67.
31. Назаренко Л.В. Деформативные свойства трансверсально-изотропных композитов с учетом долговременной повреждаемости при экспоненциально-степенной функции микродолговечности // *Докл. НАН Украины*. – 2008. – № 5. – С. 75 – 81.
32. Назаренко Л.В. Деформативные свойства и долговременная повреждаемость композитов с ортотропными включениями при дробно-степенной функции длительной микропрочности // *Докл. НАН Украины*. – 2008. – № 8. – С. 72 – 77.
33. Назаренко Л.В. Деформирование и кратковременная повреждаемость материала армированного бесконечными ортотропными волокнами // *Теорет. и прикл. механика*. – 2008. – 44. – С. 29 – 38.
34. Назаренко Л.В. Долговременная повреждаемость дискретно-волокнистых композитов с ортотропными включениями при экспоненциально-степенной функции длительной микропрочности // *Докл. НАН Украины*. – 2009. – № 1. – С. 63 – 70.
35. Назаренко Л.В., Хорошун Л.П., Мюллер В.Г., Вилле Р. Применение метода условных моментов для исследования деформативных свойств ортотропных волокнистых композитов при микроразрушениях в волокнах // *Механика композит. материалов*. – 2009. – № 1. – С. 17 – 30.

36. Назаренко Л.В. Деформирование волокнистого материала с ортотропными компонентами при микроповреждаемости волокна // Докл. НАН Украины. – 2009. – № 5. – С. 66 – 72.
37. Переверзев Е.С. Модели накопления повреждений в задачах долговечности. – К.: Наук. думка, 1995. – 358 с.
38. Работнов Ю.М. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
39. Ржаницин А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность. – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.
40. Салганик Р.Д. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149 – 158.
41. Седракян Л.Г. К статистической теории прочности. – Ереван: Изд-во АРМ. Ин-та стройматериалов и сооружений, 1958. – 104 с.
42. Серенсен С.В. Усталость материалов и элементов конструкций. Избр. труды: В 3-х т. – К.: Наук. думка, 1985. Т. 2. – 256 с.
43. Снитко Н.К. О теории прочности металлов с учетом структуры // Журнал техн. физики. – 1948. – **18**, № 6. – С. 857–864.
44. Тамуж В.П. Расчет констант материала с повреждениями // Механика полимеров. – 1977. – № 5. – С. 838 – 845.
45. Тамуж В.П. Особенности разрушения гетерогенных материалов / Прочность и разрушение композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1983. – С. 28 – 32.
46. Тамуж В.П., Куженко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
47. Фридман Я.Б. Единая теория прочности металлов. – М.: Оборонгиз, 1952. – 555 с.
48. Хорошун Л.П. Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3 – 17.
49. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100 – 108.
50. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикла Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук.думка, 1993. – 389 с. – (Механика композитов: В 12-ти т.; Т.3).
51. Чечулин Б.Б. К статистической теории хрупкой прочности структуры // Журнал техн. физики. – 1954. – **24**, № 2. – С. 41 – 49.
52. Шевадин Е.М., Разов И.А., Решетникова Р.Е., Серпеников Б.Н. О природе масштабного эффекта при разрушении металлов // Докл. АН СССР. – 1957. – **113**, № 5. – С. 1057 – 1060.
53. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред / – М.: Наука, 1977. – 400 с.
54. Vaaran J., Kärger, L., Wetzel, A. Stiffness and failure behaviour of folded sandwich cores under combined transverse shear and compression: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G // J. Aerospace Eng. – 2008. – **222** (2). – P. 179 – 188.
55. Berger M.-H., Jeulin D. Statistical analysis of the failure stresses of ceramic fibers: Dependence of the Weibull parameters on the gauge length, diameter variation and fluctuation of defect density // J. Material Sci. – 2003. – 38. – P. 2913 – 2923.
56. Berryman James G. Effective Medium Theories for Multicomponent Poroelastic Composites // J. Engineering Mech. – 2006. – **132**, N 5. – P. 519 – 531.
57. Breyse D. Probabilistic Formulation of Damage-Evolution Law of Cementitious Composites // J. Eng. Mech. – 1990. – **116**, N 7. – P. 1489 – 1510.
58. Budiansky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1965. – **13**, N 4. – P. 223 – 227.
59. Camanho P.P., Dávila C.G., Pinho S.T., Iannucci L., Robinson P. Prediction of in situ strengths and matrix cracking in composites under transverse tension and in-plane shear. // Composites. Part A: Applied Science and Manufacturing. – 2006. – **37** (2). – P. 165 – 176.
60. Castaneda P.P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic solids // J. Mech. and Phys. of Solids. – 1991. – **39** (1). – P. 45 – 71.
61. Castaneda P.P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials // J. Mech and Phys. Solids. – 1996. – **44** (6). – P. 827 – 862.
62. Castaneda P.P., Suquet P. Nonlinear composites // Adv. Appl. Mech. – 1998. – **34**. – P. 171 – 302.
63. Chaboche J.L. Phenomenological aspects of continuum damage mechanics // Theor. and Appl. Mech.: Proc. 17<sup>th</sup> Int. Congr., Grenoble, 21 – 27 Aug., 1988. – Amsterdam etc. – 1989. – P. 41 – 56.
64. Chandrakanth S., Pandey P.C. An Isotropic Damage Model for Ductile Material // Eng. Fract. Mater. – 1995. – **50**, N 4. – P. 457 – 465.

65. *Choy C.L., Leung W.P., Kowk K.W., Lau F.P.* Elastic moduli and thermal conductivity of injection-molded short fiber reinforced thermoplastics // *Polymer Composites*. – 1992. – **13**. – P. 69 – 80.
66. *Christensen R.M.* A critical evaluation for a class of micro-mechanics models // *J. Mech. and Phys. of Solids*. – 1990. – **38**, N 3. – P. 379 – 404.
67. *Curtin W.A.* Theory of mechanical properties of ceramic-matrix composites // *J. Amer. Ceram. Soc.* – 1991. – **74**, N 11. – P. 2837 – 2845.
68. *Curtin W.A.* Tensile Strength of Fiber-Reinforced Composites: III Beyond the Traditional Weibull Model for Fiber Strength // *J. Composite Material*. – 2000. – **34**, N 15. – P. 1302 – 1332.
69. *Cusatis G., Bazant Z., Cedolin L.* Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: I. Theory. // *Int. J. Eng. Mech.* – 2003. – **123** (12). – P. 1439 – 1448.
70. *Desrumaux F., Meraghni F., Benzeggagh L.* Generalised Mori–Tanaka scheme to model anisotropic damage using numerical eshelby tensor // *J. Composite Material*. – 2001. – **35**, N. 7. – P. 603 – 623.
71. *Freudental A.M., Gumbel E. F.* Physical and statistical aspects of fatigue // *Adv. Appl. Mech.* – 1956. – N 4. – P. 117 – 168.
72. *Gudmunson P., Ostlund S.* Numerical verification of elastic constants in micro-cracking composite laminates // *J. Compos. Mater.* – 1992. – **26**, N 17. – P. 2480 – 2492.
73. *Guz A.N.* On One Two-Level Model in the Mesomechanics of Cracked Composites // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 3. – P. 274 – 285.
74. *Hill R.* On a class of constitutive relations for nonlinear infinitesimal elasticity // *J. Mech. and Phys. Solids*. – 1987. – **35**, N 5. – P. 565 – 576.
75. *Kachanov M., Sevostianov I., Shafiro B.* Explicit cross-property correlations for porous materials with anisotropic microstructures // *J. Mech. and Phys. Solids*. – 2001. – **49**. – P. 1 – 25.
76. *Kattan P.I., Voyiadjis G.Z.* Micromechanical modeling of damage in uniaxially loaded unidirectional fiber-reinforced composite laminate // *Int. J. Solids and Struct.* – 1993. – **30**, N 1. – P. 19 – 36.
77. *Khoroshun L.P., Leshchenko P.V. and Nazarenko L.V.* Prediction of the thermoelastic properties of laminar and fibrous composites with orthotropic components // *Int. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 3. – P. 216 – 223.
78. *Khoroshun L.P., Leshchenko P.V. and Nazarenko L.V.* Effective thermoelastic constants of discretely-fibrous composites with anisotropic components // *Int. Appl. Mech.* – 1988. – **24**, N 10. – P. 955 – 961.
79. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Thermoelasticity of orthotropic composites with ellipsoidal inclusions // *Int. Appl. Mech.*, – 1990. – **26**, N 9. – P. 805 – 812.
80. *Khoroshun L.P. and Nazarenko L.V.* Effective Elastic Properties of Composites with Disoriented Anisotropic Ellipsoidal Inclusions // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, N 12. – P. 801 – 808.
81. *Khoroshun L.P.* Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // *Int. App. Mech.* – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
82. *Khoroshun L.P.* Micromechanics of Short-Term Thermal Microdamageability // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 9. – P. 1158 – 1165.
83. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Model of short-term damaging of transversally isotropic materials // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 74 – 83.
84. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Deformation and microdamaging of discretely-fibrous composites with transversally-isotropic components // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, N 6. – P. 696 – 703.
85. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V., Müller W.H., Wille R.* Homogenization of Unidirectional and Arbitrarily Oriented Fiber-Reinforced Materials by the Method of Conditional Moments // *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.* – 2008. – **8**. – P. 10451 – 10452.
86. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Elastic Properties and Long-term Damage of Transversally-isotropic Composites with Stress-rupture Microstrength Described by a Fractional-power Function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 1. – P. 57 – 65.
87. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Long-term Damage of Discrete-fiber-reinforced Composites with Transversally-isotropic Inclusions Stress-rupture Microstrength Described by an Exponential Power Function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 125 – 133.
88. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Coupled processes of deformation and damage of composites with orthotropic inclusions and unbounded rupture-stress function // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 3. – P. 272 – 281.
89. *Khoroshun L.P., Nazarenko L.V.* Deformation and Long-term Damage of Orthotropic Composites with Limited Stress-rupture Microstrength // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 4. – P. 389 – 400.
90. *Kushch V., Sevostianov I.* Effective elastic moduli tensor of particulate composite with transversely isotropic phases // *Int. J. Solid Struct.* – 2004. – **41**. – P. 885 – 906.
91. *Liu P.F., Zheng J.Y.*: Progressive failure analysis of carbon fiber/epoxy composite laminates using continuum damage mechanics // *Mater. Scien. and Eng.: A*. – 2008. – **485**. – P. 711 – 717.

92. *Lubarda V.A., Krajcinovic D., Mastilovic S.* Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strength // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – **49**, N 5. – P. 681 – 697.
93. *Markov K.Z.* Elementary micromechanics of heterogeneous media. In: Markov, K.Z., Preziosi, L. (Eds.), *Heterogeneous Media: Micromechanics Modeling Methods and Simulations*. Birkhauser, Boston. – 2000. – P. 1 – 162.
94. *Milton G.W., Kohn R.V.* Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites // *J. Mech. and Phys. Solids* – 1988. – **36** (5) . – P. 597 – 629.
95. *Milton G.W.*: *The Theory of Composites*. – Cambridge University Press. – 2002. – 721 p.
96. *Mura T.* *Micromechanics of defects in solids* // Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1987. – 587 p.
97. *Naimark O.B.* Defect-Induced Transitions as Mechanisms of Plasticity and Failure in Multifield Continua / *Advances in Multifield Theories for Continua with Substructure* [Edited by Gianfranco Capriz, Paolo Maria Mariano]. – Basel. – Springer – Verlag – 2004. – P. 75 – 115.
98. *Nazarenko L.V.* Elastic Properties of Materials with Ellipsoidal Porous // *Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, N 1. – P. 46 – 53.
99. *Nazarenko L.V.* Thermoelastic Properties of Orthotropic Porous Materials // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, N 2. – P. 114 – 121.
100. *Nazarenko L.V.* Three-component discretely-fibrous composites under matrix microdamaging // *J. Comp. and Appl. Mech.* – 2005. – **6**, N 2. – P. 285 – 294.
101. *Nazarenko L.V.* Nonlinear deformation of Three-Component Composites // *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.* – 2006. – **6** – P. 405 – 406.
102. *Nazarenko L.V.* Deformation of Orthotropic Composites with unidirectional ellipsoidal inclusions under Matrix Microdamages // *Mathem. Methods and Physicomech. Fields.* – 2008. – **51**, N 1. – P. 121 – 130.
103. *Nazarenko L.V.* Deformation and short-term microdamaging of the material strengthened by infinite orthotropic fibers // *Theor. and Appl. Mech.* – 2008. – **44**. – P. 29 – 38.
104. *Nazarenko L.V.* Deformative Properties of granular-fiber composites under matrix microdamaging // *Appl. Problems of Math. Mech.* – 2008. – **6**. – P. 146 – 153.
105. *Nazarenko L.V., Khoroshun L.P., Müller W.H., Wille R.* Effective Thermoelastic Properties of Discrete-Fiber Reinforced Materials with Transversally-Isotropic Components // *Continuum Mechanics and Thermodynamics.* – 2009. – **20**. – P. 429 – 458.
106. *Nazarenko L.V.* Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages // *J. Math. Scien.* – 2010. – **167**, N 2. – P. 217 – 231.
107. *Nazarenko L.V.* Damageability of Material Reinforced with Unidirectional Orthotropic Fibers for an Exponential-Power Function of Long-term Microstrength // *J. Mathem. Scien.* – 2010. – **168**, N 5. – P. 653 – 664.
108. *Nazarenko L.V., Khoroshun L.P., Müller W.H., Wille R.* Deformation and damaging of Composites with transversally-isotropic components under compressive loading // *PAMM Proc. Appl. Math. Mech.* – 2010. – **10**. – P. 129 – 130.
109. *Nomura S., Ball D.L.* Stiffness reduction due to multiple microcracks in transverse isotropic media // *Eng. Fract. Mech.* – 1994. – **48**, N 5. – P. 649 – 653.
110. *O'Connell R.J., Budiansky B. B.* Seismic velocities in dry and saturated cracked solids // *J. Geophys. Research.* – 1974. – **79**, N 35. – P. 5412 – 5426.
111. *Pijaudier-Cabot G., Bazant Z. P.* Nonlocal damage theory // *J. Eng. Mech.* – 1987. – 113 (10). – P. 1512 – 1533.
112. *Sevostianov I., Kachanov M.* Explicit cross-property correlations for anisotropic two-phase composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2002. – **50**. – P. 253 – 282.
113. *Sevostianov I., Yilmaz N., Kushch V., Levin V.*: Effective elastic properties of matrix composites with transversely-isotropic phases. // *Int. J. Solids and Structures.* – 2005. – **42**. – P. 455 – 476.
114. *Sevostianov I., Kachanov M.* Explicit cross-property correlations for composites with anisotropic inhomogeneities // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2007. – **55**. – P. 2181 – 2205.
115. *Shen Wei.* A constitutive relation of elasto-brittle material with damage and its application // *Acta. Mech. Sin.* – 1991. – **23**, N 3. – P. 374 – 378.
116. *Ramesh T.* Continuum modelling of damage in ceramic matrix composites // *Mech. Mater.* – 1991. – **12**, N 2. – P. 165 – 180.
117. *Tamuzs V., Tarasovs S., Vilks U.* Delamination properties of translaminar-reinforced composites // *Comp. Scien. and Techn.* – 2003. – N 8. – P. 1423 – 1431.
118. *Tan S.C., Nuismer R.J.* A theory for progressive matrix cracking in composite // *J. Compos. Mater.* – 1989. – **23**, N 10. – P. 1029 – 1047.

119. *Torquato S.* Random Heterogeneous materials: Microstructure and Macroscopic properties. – Berlin: Springer-Verlag, 2002. – 705 p.
120. *Walpole L. J.* Elastic behaviour of composite-materials – theoretical foundations // *Advances in Appl. Mech.* – 1981. – **21**. – P. 169 – 242.
121. *Weibull W.A.* A Statistical Theory of the Strength of Materials // *Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.* – 1939. – N 151. – P. 5 – 45.
122. *Willis J.R.* The overall elastic response of composite Materials // *J. Appl. Mech.* – 1983. – **50** (4B): – P. 1202 – 1209.
123. *Willis J.R.* In mechanics of solids. The Rodney Hill 60<sup>th</sup> Anniversary Volume. – Oxford: Pergamon Press, 1982. – P. 653 – 686.
124. *Willis J.R.* Micromechanics and Inhomogeneity. The Toshio Mura Anniversary Volume. – New York: Springer, 1989. – 581 p.
125. *Withers P.J.*: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion in a transversally isotropic medium, and its relevance to composite materials // *Philos. Mag.* – 1989. – A. – **59**. – P. 759 – 781.
126. *Wittel F.K., Kun F., Kröplin B.H., Herrmann, H.J.* A study of transverse ply cracking using a discrete element method // *Comp. Mat. Scien.* – 2003. – **28** (3 – 4). – P. 608 – 619.
127. *Zhou J., Lu Y.* A damage evolution equations of particle-filled composite materials // *Eng. Fract. Mech.* – 1991. – **40**, N 3. – P. 499 – 506.
128. *Zhou J., Li Aili, Yu Fangru* The stress-strain law of elastic body with microcracks // *Acta Mech. Sin.* – 1994. – **26**, N 1. – P. 49 – 59.
129. *Zhu Y.T., Blumenthal W.R., Zhou B.L.*: Characterizing size dependence of ceramic-fiber strength using modified Weibull distribution // *Micromechanics of advanced materials* (Edited by Chu S., Liaw P., Arsenault R.J., Sadananda K., Chen K., Gerberich W.W., Chau C.C., Kung T.M.) TMS. – Warrendale. – 1995. – P. 493 – 497.

Поступила 17.09.2012

Утверждена в печать 22.11.2012