**Л.В.Мольченко[1], И.И.Лоос[2]**

# НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКОЙ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ТОКА И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИЛЫ

*Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко;*
*пр. Глушкова, 4-е, 03127, Киев, Украина;*
*e-mail:[1]Mol_lv@univ.kiev.ua, [2]Loiri@ univ.kiev.ua*

**Abstract.** A nonlinear problem of magnetoelasticity is considered in the axisymmetric statement for an orthotropic spherical shell with orthotropic conductivity. A system of nonlinear differential equations is obtained, which describes the stress-strain state of flexible orthotropic spherical shelss in mechanical and magnetic fields. A numerical example is given, where the analysis of stress state of orthotropic shell is carried out in dependence with the external current and mechanical force.

**Key words:** magnetoelasticity, orthotropic spherical shell, mechanical and magnetic fields.

**Введение.**

Развитие современной техники, эксплуатация которой связана с нагружением элементов конструкций в условиях взаимодействия разных физических факторов, обусловливает необходимость создания теории сопряженных полей упругих тел и разработки методов исследования их напряженности и деформативности. На основе этой теории могут быть решены важные для технического применения задачи движения электропроводных тел (пластин, оболочек) в магнитном поле. Имеющиеся числовые результаты представлены в работах [8, 11].

В данной работе представлены основные уравнения, предложена методика их решения, дан анализ взаимодействия механической и электромагнитной нагрузок на усеченную ортотропную гибкую сферическую оболочку, находящуюся в магнитном поле (осесимметричная постановка). При построении геометрически нелинейных уравнений рассматриваемой оболочки учитывается также ортотропная электропроводность.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим гибкую ортотропную сферическую оболочку постоянной толщины в лагранжевых переменных, что позволяет учитывать нелинейность в соотношениях для деформаций и кривизн. При этом метрика оболочки практически остается недеформированной, так как радиус кривизны и параметры Ламе соответствуют недеформированному состоянию оболочки. Пренебрегаем влиянием процессов поляризации и намагничивания, а также температурными напряжениями. Примем, что к оболочке подводится переменный электрический ток. Упругие свойства материала оболочки являются ортотропными, главные направления упругости совпадают с направлениями соответствующих координатных линий. Электромагнитные свойства материала характеризуются тензорами электрической проводимости $\sigma_{ij}$, магнитной проницаемости $\mu_{ij}$ и диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$. При этом, согласно [7] и следуя работам [2, 3, 6], для рассматриваемого класса проводящих ортотропных тел с ромбической кристаллической структурой принимаем, что тензоры $\sigma_{ij}$ , $\mu_{ij}$ , $\varepsilon_{ij}$ имеют диагональный вид.

Координатную поверхность в недеформированном состоянии отнесем к криволинейной ортогональной системе координат $s$ и $\theta$ , где $s$ – длина дуги меридиана; $\theta$ – центральный угол. Координатные линии $s=\mathrm{const}$ и $\theta=\mathrm{const}$ являются линиями главных кривизн координатной поверхности.

Учитывая диагональный вид тензоров $\sigma_{ij}$ , $\mu_{ij}$ , $\varepsilon_{ij}$ и согласно работам [5, 9 – 11], учитывая геометрию оболочки, приходим к тому, что полная система уравнений осесимметричных ортотропных оболочек вращения в геометрически нелинейной постановке состоит из:

уравнений магнитоупругости –

$$\frac{\partial\left(rN_s\right)}{\partial s}-\cos\varphi\ N_\theta+\frac{r}{R_s}Q_s+r\left(P_s+\rho F_s^{\wedge}\right)=r\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial\left(rQ_s\right)}{\partial s}-r\left(\frac{N_s}{R_s}-\frac{\sin\varphi}{r}N_\theta\right)+r\left(P_\gamma+\rho F_\gamma^{\wedge}\right)=r\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\tag{1}$$

$$\frac{\partial\left(rM_s\right)}{\partial s}-\cos\varphi\ M_\theta-rQ_s-r\left(N_s-\frac{\sin\varphi}{r}M_\theta\right)\vartheta_s=0;$$

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial s}=-\frac{\partial B_\gamma}{\partial t}-\frac{\cos\varphi}{r}E_\theta;\quad \frac{\partial B_\gamma}{\partial s}=-\sigma_2\mu\left[E_\theta+0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)-\frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma\right]-\frac{B_s^+-B_s^-}{h};$$

выражений для деформаций –

$$\varepsilon_s=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{w}{R_s}+\frac{1}{2}\vartheta_s^2;\quad \varepsilon_\theta=\frac{\cos\varphi}{r}u+\frac{\sin\varphi}{r}w;\quad \chi_s=\frac{\partial\vartheta_s}{\partial s};\ \chi_\theta=\frac{\cos\varphi}{r}\vartheta_s-\frac{\sin\varphi}{2r}\vartheta_s^2;\tag{2}$$

соотношений упругости –

$$N_s=\frac{e_sh}{1-\nu_s\nu_\theta}\left(\varepsilon_s+\nu_\theta\varepsilon_\theta\right);\quad N_\theta=\frac{e_\theta h}{1-\nu_s\nu_\theta}\left(\varepsilon_\theta+\nu_s\varepsilon_s\right);\tag{3}$$

$$M_s=\frac{e_sh^3}{12(1-\nu_s\nu_\theta)}\left(\chi_s+\nu_\theta\chi_\theta\right);M_\theta=\frac{e_\theta h^3}{12(1-\nu_s\nu_\theta)}\left(\chi_\theta+\nu_s\chi_s\right)$$

$$(\nu_s=\nu_{\theta s},\ \nu_\theta=\nu_{s\theta},\ e_s\nu_\theta=e_\theta\nu_s)$$

Компоненты силы Лоренца имеют вид –

$$\rho F_s^{\wedge}=hJ_{\theta CT}B_\gamma+\sigma_1h\left[E_\theta B_\gamma-\frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma^2+0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)B_\gamma\right];$$

$$\rho F_\gamma^{\wedge}=-0,5hJ_{\theta CT}\left(B_s^++B_s^-\right)-\sigma_2h\left[0,5E_\theta\left(B_s^++B_s^-\right)+\right.\tag{4}$$

$$\left.+0,25\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)^2+\frac{1}{12}\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+-B_s^-\right)^2-0,5\frac{\partial u}{\partial t}\left(B_s^++B_s^-\right)B_\gamma\right].$$

В равенствах (1) – (4) принято: $N_s, N_\theta$ – нормальные усилия; $Q_s, Q_\theta$ – поперечные усилия; $M_s, M_\theta$ – изгибающие моменты; $u, w$ – компоненты перемещений; $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$, $\chi_s, \chi_\theta$ – компоненты тензора деформаций; $\vartheta_s$ – угол поворота нормали; $e_s, e_\theta$ – модули Юнга; $\nu_s$, $\nu_\theta$ – коэффициенты Пуассона; $E_\theta$ – компоненты напряженности электрического поля; $B_\gamma$ – нормальная составляющая магнитной индукции; $B_s^+$, $B_s^-$ – известные составляющие магнитной индукции на поверхностях оболочки; $J_{\theta CT}$ – составляющая плотности электрического тока от внешнего источника; $h$ – толщина оболочки. Также учтено, что $r = R_\theta \sin\varphi$; $dr/ds = \cos\varphi$, где $\varphi$ – угол нормали к срединной поверхности оболочки; $r(s)$ – радиус параллельного круга оболочки.

Для построения разрешающей системы дифференциальных уравнений гибкой ортотропной сферической оболочки в качестве разрешающих функций выбираем $u,\ w,\ \vartheta_s,\ N_s,\ Q_s,\ M_s,\ B_\gamma,\ E_\theta$.

Исходя из геометрии сферической оболочки, полагаем: $R_s = R_\theta = R$, где $R$ – радиус оболочки; $r = R\sin\varphi$; $\sin\varphi = s/R$; $\cos\varphi = \cos s/R$.

В этом случае разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений магнитоупругости в нормальном виде принимает вид [5, 8]:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{(1-\nu_s\nu_\theta)}{e_s h}N_s - \frac{\vartheta_\theta \operatorname{ctg}\varphi}{R}u - \frac{(\nu_\theta - 1)}{R}w - 0,5\vartheta_s^2;\quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\vartheta_s + \frac{u}{R};$$

$$\frac{\partial \vartheta_s}{\partial s} = \frac{12(1-\nu_s\nu_\theta)}{e_s h^3}M_s - \frac{\nu_\theta}{R}\left(\operatorname{ctg}\varphi\vartheta_s - 0,5\vartheta_s^2\right);$$

$$\frac{\partial N_s}{\partial s} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R}(\nu_\theta - 1)N_s + \frac{Q_s}{R} - P_s - hJ_{\theta CT}B_\gamma -$$

$$-\sigma_1 h\left[E_\theta B_\gamma - \frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma^2 + 0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)B_\gamma\right] + \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi\ e_\theta h}{R^2}\left(\operatorname{ctg}\varphi\ u + w\right);$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial s} = -\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R}Q_s + \frac{1}{R}(1+\nu_\theta)N_s + \frac{e_\theta h \operatorname{ctg}\varphi}{R^2}\left(\operatorname{ctg}\varphi\ u + w\right) -$$

$$-P_\gamma + 0,5hJ_{\theta CT}\left(B_s^+ + B_s^-\right) - \sigma_2 h\left[0,5E_\theta\left(B_s^+ + B_s^-\right) + 0,25\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)^2 - 0,5\frac{\partial u}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right)B_\gamma\right]; \qquad (5)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial s} = \frac{\operatorname{ctg}}{R}(\nu_\theta - 1)M_s + \frac{e_\theta h^3 \operatorname{ctg}\varphi}{12R^2}\left(\operatorname{ctg}\varphi\ \vartheta_s - 0,5\vartheta_s^2\right) +$$

$$+ Q_s + N_s\vartheta_s - \frac{\nu_\theta}{R}M_s\vartheta_s - \frac{e_\theta h^3}{12R^2}\operatorname{ctg}\varphi\ \vartheta_s^2;$$

$$\frac{\partial B_\gamma}{\partial s} = -\sigma_2\mu\left[E_\theta + 0,5\frac{\partial w}{\partial t}\left(B_s^+ + B_s^-\right) - \frac{\partial u}{\partial t}B_\gamma\right] - \frac{B_s^+ - B_s^-}{h};\quad \frac{\partial E_\theta}{\partial s} = -\frac{\partial B_\gamma}{\partial t} - \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{R}E_\theta.$$

Краевые условия для электромагнитных параметров представлены через компоненты электрического поля или через комбинацию компонент магнитного и электрического полей. При этом начальные условия задаем в классическом виде.

Приведенная система дифференциальных уравнений магнитоупругости соответствует геометрически нелинейной в квадратичном приближении теории тонких ортотропных сферических оболочек постоянной жесткости с учетом ортотропной электропроводности. Составляющие силы Лоренца (4) учитывают скорость деформирования оболочки, внешнее магнитное поле, величину и напряженность тока проводимости относительно внешнего магнитного поля. Учет нелинейности в уравнениях движения вызывает нелинейность в пондеромоторных силах.

**2. Методика решения нелинейных задач.**

Решение задачи магнитоупругости для гибкой ортотропной сферической оболочки постоянной толщины состоит в последовательном использовании метода квазилинеаризации и метода дискретной ортогонализации [4, 5, 8].

Для разделения переменных по временной координате применяем неявную схему Ньюмарка интегрирования уравнений магнитоупругости [12].

Следующий этап решения нелинейной краевой задачи магнитоупругости основан на применении метода квазилинеаризации [1], с помощью которого нелинейная краевая задача сведена к последовательности линейных краевых задач на каждом временном шаге. Далее каждую из линейных краевых задач последовательности на соответствующем временном интервале решаем численно с помощью устойчивого метода дискретной ортогонализации.

**3.Числовой пример. Анализ результатов.**

Результаты исследования напряженно-деформированного состояния представим для металлической (бороалюминий) усеченной ортотропной сферической оболочки радиуса $R = 0{,}5$м, постоянной толщины $h = 5\cdot 10^{-2}$ м. Оболочка находится под воздействием нормальной составляющей механической нагрузки $P_\gamma = P_0 \sin\omega t$ ($\omega$ – круговая частота) и круговой составляющей внешнего электрического тока $J_{\theta CT} = J_0 \sin\omega t$.

На контуре оболочки заданы такие граничные условия:

$$u = w = M_s = 0\,;\ B_\gamma = 0{,}1\sin\omega t \quad \text{при} \quad s = s_0\,;$$

$$u = Q_s = M_s = 0\,;\ B_\gamma = 0{,}1\sin\omega t \quad \text{при} \quad s = s_N\,.$$

Параметры оболочки и материала приняты следующие:

$$s_0 = 0{,}4\,\text{м};\ s_N = 0{,}78\,\text{м};\ h = 5\cdot 10^{-2}\,\text{м};\ \mu = 1{,}256\cdot 10^{-6}\,\text{Гн/м};\ e_s = 22{,}9\cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2;$$

$$e_\theta = 10{,}7\cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2;\ \nu_s = 0{,}262;\ \nu_\theta = 0{,}32;\ \rho = 2600\,\text{кг/м}^3;\ \omega = 314{,}16\,c^{-1};$$

$$\sigma_1 = 0{,}454\cdot 10^8\,(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1};\ \sigma_2 = 0{,}454\cdot 10^8\,(\text{Ом}\cdot\text{м})^{-1};\ B_s^{\pm} = 0{,}5T\,.$$

Решение задачи получено на интервале времени $t = 1\cdot 10^{-2}$ с, шаг интегрирования по времени $\Delta t = 1\cdot 10^{-3}\,c$.

Исследовано взаимовлияние механической нагрузки $P_\gamma$ и стороннего электрического тока $J_{\theta CT}$ на напряженно-деформированное состояние ортотропной сферической оболочки при известных значениях магнитной индукции на ее поверхностях.

При исследовании напряженного состояния оболочки рассмотрены следующие варианты изменения механической нагрузки и стороннего тока: 1) $P_\gamma = -1{,}3\cdot 10^2 \sin\omega t$; $J_{\theta\,CT} = 5\cdot 10^{-3}\sin\omega t$; 2) $P_\gamma = -1{,}3\cdot 10^2 \sin\omega t$; $J_{\theta\,CT} = -5\cdot 10^{-3}\sin\omega t$; 3) $P_\gamma = 1{,}3\cdot 10^2 \sin\omega t$; $J_{\theta CT} = 5\cdot 10^{-3}\sin\omega t$.

На рис. 1 приведено распределение прогиба $w(s)$ при $t = 5\cdot 10^{-3}$с для вариантов *1, 2* (вариант *1* – сплошная линия; вариант *2* – пунктирная линия). На оси абсцисс для обозначений 2 – 10 координата $s$ принимает значения, соответственно: $0{,}438$м; $0{,}514$м; $0{,}590$м; $0{,}666$м; $0{,}742$м. Получено, что максимальное значение нелинейного прогиба $(w/h = 3{,}2)$ достигается при $s = 0{,}552$ м для варианта *1*. При изменении направления протекания стороннего тока при том же значении механической нагрузки (вариант 2) максимальное значение прогиба при $s = 0{,}552$м уменьшается $(w/h = 2{,}42)$.

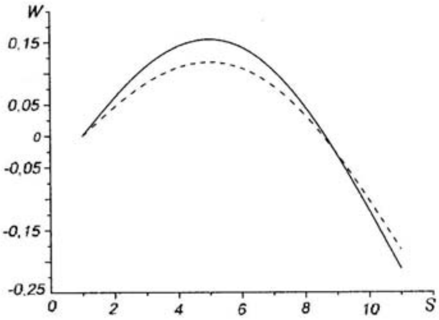


*Рис. 1*

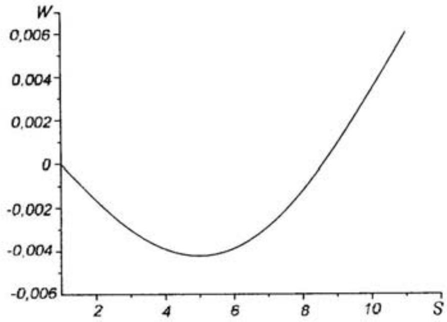


*Рис. 2*

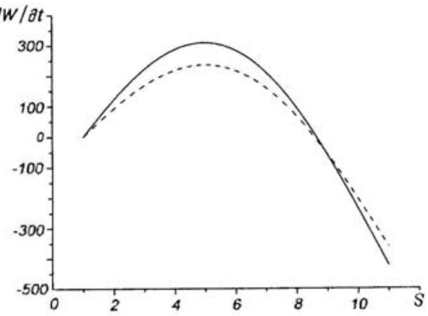


*Рис. 3*

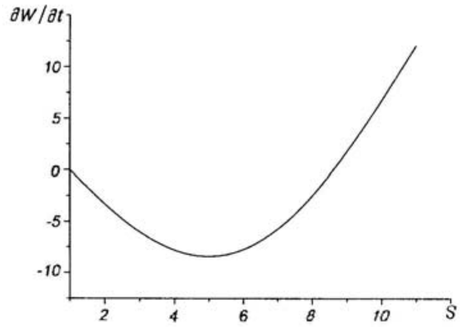


*Рис. 4*

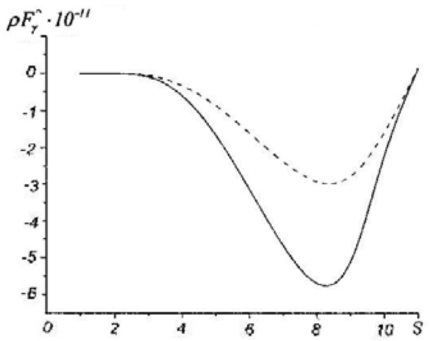


*Рис. 5*

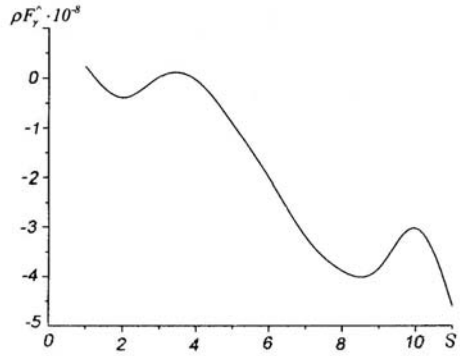


*Рис. 6*

При рассмотрении варианта *3* (рис. 2) прогиб $w(s)$ при том же значении $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с становится чисто линейным $(w/h = 0{,}1)$. Как видно, при изменении направления действия внешних сил существенно изменяется характер напряженно-деформированного состояния сферической оболочки.

На рис. 3, 4 дано распределение $\partial w / \partial t$ вдоль образующей при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с для вариантов *1, 2* и варианта *3,* соответственно. Как видно из рис. 3, 4 изменение производной от прогиба по времени качественно отвечает изменению прогиба на рис. 1, 2.

На рис. 5, 6 показано изменение нормальной составляющей силы Лоренца вдоль $s$ при $t = 5 \cdot 10^{-3}$ с для вариантов *1, 2* и варианта *3,* соответственно.

Таким образом, изменение пондеромоторной силы качественно соответствует распределению прогиба (рис. 1, 2), а форма представления силы Лоренца дает возможность оценивать ее влияние на деформацию оболочки.

**Заключение.**

В данной статье рассмотрена задача магнитоупругости для гибкой ортотропной сферической оболочки с учетом ортотропной электропроводности. Получена разрешающая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние гибкой ортотропной сферической оболочки. Представлены результаты числового примера. Проведен анализ напряженного состояния гибкой ортотропной оболочки, находящейся под действием переменной по времени механической силы и переменного по времени внешнего электрического тока, с учетом механической и электромагнитной ортотропии.

Р Е З Ю М Е **:** Розглянуто нелінійну задачу магнітопружності в осесиметричній постановці для ортотропної сферичної оболонки з ортотропною електропровідністю. Отримано систему нелінійних диференціальних рівнянь, яка описує напружено-деформований стан гнучких ортотропних сферичних оболонок в механічному та магнітному полях. Наведено числовий приклад. Проведено аналіз напруженого стану ортотропної оболонки в залежності від зміни в часі зовнішнього струму та величини механічної сили.

1. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.
2. *Багдасарян Г.У., Даноян З.Н.* Уравнения движения в перемещениях идеально-проводящих упругих анизотропных сред при наличии магнитного поля // Механика: Межвуз. сб. научн. тр. механики деформ. твердого тела. – 1984. – Вып. 3. – С. 32 – 42.
3. *Вольман В.И., Пименов Ю.В.* Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1971. – 487с.
4. *Григоренко Я.М., Мольченко Л.В.* Основы теории пластин и оболочек. – К.: Лыбидь, 1993. – 231 с.
5. *Григоренко Я.М., Мольченко Л.В.* Основы теории пластин и оболочек с элементами магнитоупругости. Учебник. – К.: ИПЦ «Киевский университет», 2010. – 403с.
6. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц. – М.: Мир, 1967. – 385 с.
7. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. – М.: Наука, 1979. – 639с.
8. *Улитко А.Ф., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф.* Магнитоупругость при динамическом нагружении. Учеб. пособие. – К.: Лыбидь, 1994. – 154 с.
9. *Molchenko L.V., Loos I.I.* Effect of Conicity on Axisymmetrical Strain State of Flexible Orthotropic Conical Shell in Non-stationary Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 11. – P. 1261 – 1267.
10. *Molchenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh.* Nonlinear Deformation of Conical Shells in Magnetic Fields // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 3. – P. 221 – 226.
11. *Molchenko L.V., Loos I.I., Indiaminov R.Sh.* Determining the Stress State of Flexible Orthotropic Shell of Revolution in Magnetic Field // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 8. – P. 882 – 891.
12. *Newmark N.M.* A Method of Computation for Structural Dynamics // J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE. – 1959. – **85**, N 7. – P. 67 – 97.

Поступила 23.11.2011 Утверждена в печать 06.06.2013