

Г.Р. Гулгазарян¹, Р.Г. Гулгазарян², А.А. Хачанян³

КОЛЕБАНИЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ
С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

^{1,3} Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна,
ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения. 706700

² ЕрФИ им Братьев Алиханянов ул. Братьев Алиханянов 2, 0036, Ереван, Армения
e-mail: ¹ghulgr@yahoo.com; ²ghulr@yahoo.com

Abstract. The natural vibrations are considered for a thin elastic orthotropic non-closed cylindrical shell with one free end and three rigidly restrained ends. To find the natural frequencies of different types of vibrations, the dispersion equations are obtained. An asymptotic relation between the dispersion equations of the problem in hand and the corresponding equations for an orthotropic rectangular plate is established. Also, an asymptotic relation between the dispersion equations of the problem in hand and the corresponding equations for a semi-infinite non-closed orthotropic cylindrical shell with one free end and two rigidly restrained generatrices is established. As an example, the non-closed orthotropic and isotropic shells of different length are considered. The approximate values are obtained for the dimensionless natural frequency and attenuation characteristics of modes.

Key words: natural vibrations, thin elastic orthotropic non-closed cylindrical shell, natural frequencies, attenuation characteristics of modes.

Введение.

Исследования колебаний пластин и оболочек занимают важное место в динамике деформируемого твердого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами машиностроения, строительства, приборостроения и т.д. Известно, что у свободного края ортотропной полубесконечной пластинки, независимо существуют планарные и изгибные волны [2, 20]. При искривлении пластинки два указанных типа движения оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у кромки волн (преимущественно тангенциальных и изгибных). У свободного торца тонкой упругой цилиндрической оболочки происходит трансформация одного типа волнового движения в другой [16]. При этой трансформации волн, с учетом геометрических и механических параметров оболочки, возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний конечных и бесконечных цилиндрических оболочек со свободным краем [6, 17 – 19]. Для тонких цилиндрических оболочек со свободным краем первые частоты распределены очень густо [6, 10], поэтому численный расчет не всегда эффективен. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий с численными расчетами.

Ниже рассматриваемая задача не допускает разделения переменных, что еще более усложняет расчеты. Такие задачи обычно решаются методом понижения размерности на основе интегральных или коллокационных подходов типа Канторовича – Власова в сочетании с численными методами решения одномерных задач [3 – 5, 7 – 9, 11, 13 – 14]. В [3, 4, 13] метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравне-

ниям Канторовича – Власова обобщен и применен для решения стационарных задач теории пологих оболочек и многомерных задач теплопереноса. Применение методов полных систем для решения задач статики и свободных колебаний неоднородных анизотропных тел в вариационной постановке изложено в [4].

В работах [7 – 9, 14 и др.] использованы сплайн-функции и дискретные ряды Фурье для численного исследования напряженно деформированных состояний пластин и оболочек. В частности, применяя сплайн-функции, исследованы свободные колебания полых прямоугольных в плане нетонких оболочек переменной толщины [7], а в [4] на основе дискретных рядов Фурье разработана методика для численного решения краевых задач упругих тел сложной геометрии и структуры.

Ниже в рамках классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, получены точные дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных типов колебаний незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. На примерах ортотропных и изотропных цилиндрических оболочек с разными длинами исследованы собственные колебания и получены значения для безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Также, показана асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной цилиндрической оболочки (пластины-полосы) со свободным торцом и двумя жестко защемленными краями. Для проверки достоверности полученных результатов выведены дисперсионные уравнения и исследованы планарные и изгибные собственные колебания для вышеуказанных задач. Численно подтверждено наличие соответствующей асимптотической связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач, что подтверждает достоверность полученных результатов.

В данной работе для вычисления собственных частот и соответствующих собственных форм применен обобщенный метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова, развитый в [3, 4, 13]. В качестве базисных функций использованы собственные функции задачи (балочные функции)

$$w^{IV} = \theta^4 w, \quad w|_{\beta=0,s} = w'|_{\beta=0,s} = 0, \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad (1)$$

где s – длина направляющей окружности средней поверхности цилиндрической оболочки открытого профиля, а для пластинки – ее ширина. Задача в случае (1) – самосопряженная и имеет положительный простой дискретный спектр с предельной точкой на бесконечности. Собственным значениям θ_m^4 , $m = 1, +\infty$, задачи (1) соответствуют собственные функции

$$w_m(\theta_m \beta) = \sin \frac{\theta_m s}{2} (ch \theta_m \beta - \cos \theta_m \beta) - \cos \frac{\theta_m s}{2} (sh \theta_m \beta - \sin \theta_m \beta), \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (2)$$

которые образуют ортогональный базис в соответствующем гильбертовом пространстве $L_2[0, s]$ [6, с. 84]. Заметим, что θ_m , $m = \overline{1, +\infty}$, определяются из уравнения

$$ch \theta s \cos \theta s = 1. \quad (3)$$

Введем обозначения

$$k = \frac{\pi}{s}; \quad \theta_m = k m \mu_m, \quad m \in N; \quad \beta_m = \int_0^s w_m''^2(\theta_m \beta) d\beta / \int_0^s w_m'^2(\theta_m \beta) d\beta. \quad (4)$$

Тогда имеем равенства

$$\int_0^s w_m'^2(\theta_m \beta) d\beta = \frac{s}{2} (1 + \cos \theta_m s) - \frac{\sin \theta_m s}{\theta_m}; \quad \int_0^s w_m''^2(\theta_m \beta) d\beta = \frac{s}{2} (1 - \cos \theta_m s);$$

$$\int_0^s w_n'''(\theta_n \beta) w_m'(\theta_m \beta) d\beta = - \int_0^s w_n''(\theta_n \beta) w_m''(\theta_m \beta) d\beta = \begin{cases} - \int_0^s w_m''^2(\theta_m \beta) d\beta, & n = m; \\ 0, & n \neq m; \end{cases} \quad (5)$$

$$\theta_m s = \pi m \mu_m = \frac{\pi}{2} (2m + 1) + \alpha(m), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) = 0; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_m = 1; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = 1. \quad (6)$$

Используя полученные ниже дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений, можно, меняя геометрию оболочек и механические свойства материала, управлять спектром, смещая начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса [15].

§1. Колебания тонкой упругой ортотропной незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями.

1.1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим собственные колебания круговой ортотропной тонкой упругой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. Предполагаем, что образующие ортогональны краям оболочки. На срединной поверхности оболочки вводим криволинейные координаты (α, β) ,

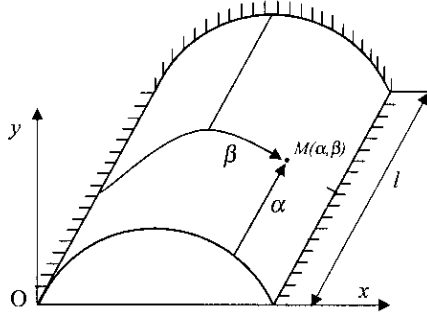


Рис. 1

где $\alpha (0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta (0 \leq \beta \leq s)$, которые являются, соответственно, длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности (рис. 1); l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей окружности.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используем уравнения, которые соответствуют

классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных координатах α, β [1]

$$\begin{aligned} & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1; \\ & -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \right. \\ & \left. + B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2; \quad (1.1) \\ & \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + \right. \\ & \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3. \end{aligned}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора смещений, соответственно, в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности оболочки; R – радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2 / 12$ (h – толщина оболочки); $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω –

угловая частота собственных колебаний; ρ – плотность материала; B_{ij} – коэффициенты упругости.

Граничные условия имеют вид [1]

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \right|_{\alpha=0} = 0;$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0} = 0; \quad (1.2)$$

$$u_1|_{\alpha=l} = 0; \quad u_2|_{\alpha=l} = 0; \quad u_3|_{\alpha=l} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=l} = 0; \quad (1.3)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = 0; \quad u_2|_{\beta=0,s} = 0; \quad u_3|_{\beta=0,s} = 0; \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \right|_{\beta=0,s} = 0, \quad (1.4)$$

где соотношения (1.2) являются условиями свободного края при $\alpha = 0$, а соотношения (1.3) и (1.4) – условиями жесткого защемлениями при $\alpha = l$, $\beta = 0$, $\beta = s$, соответственно.

Можно доказать, что задаче (1.1) – (1.4) соответствует самосопряженный и неотрицательно определенный оператор, который имеет неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ [6, с. 362]. Этот факт позволяет задачу (1.1) – (1.4) свести к обобщенной задаче на собственные значения [12, с. 92] с применением обобщенного метода сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича – Власова.

1.2. Вывод и анализ характеристических уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, соответственно. Пусть $R^{-1} = kr_0/2$, где $k = \pi/s$, а r_0 – безразмерный параметр.

Решение системы (1.1) представим в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta), w_m(\theta_m \beta)\} \exp(k\chi\alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (1.5)$$

Здесь $w_m(\theta_m \beta)$ определяется по формуле (2); u_m, v_m – неопределенные коэффициенты, χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.4) выполняются автоматически. Подставим (1.5) в (1.1). Полученные первое и третье уравнения умножаем на $w''_m(\theta_m \beta)$, а второе – на $w'_m(\theta_m \beta)$. Затем все три уравнения интегрируем в пределах от 0 до s . Из первых двух полученных уравнений имеем

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) u_m = \frac{r_0 \chi}{2} \left\{ a_m - a^2 m_*^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} l_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} d_m \right\}; \quad (1.6)$$

$$(c_m + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m d_m) v_{cm} = \frac{r_0 m \mu_m}{2} \{ b_m - a^2 g_m l_m \}, \quad (1.7)$$

а из третьего уравнения, учитывая соотношения (1.6) и (1.7), получаем характеристическое уравнение

$$R_{mm} c_m + \frac{r_0^2}{4} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ c_m + m_*^2 b_m - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_m + a^2 \left[R_{mm} g_m d_m - m_*^2 b_m \left(\frac{2(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2(1 + \beta_m^2)}{\beta_m^2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m \left(b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 \right) + a^4 m_*^2 g_m l_m \left(\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - \frac{m_*^2}{\beta_m^2} \right) \right\} = 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$\left(a_m = \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_2^2; b_m = B_1 \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2; B_1 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}; \right.$$

$$c_m = \chi^4 - B_2 m_*^2 \chi^2 + \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_1^2 + \eta_2^2 \right) m_*^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta_1^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_2^2 \right);$$

$$d_m = \frac{4B_{66}}{B_{11}} \chi^2 - m_*^2; \quad (1.9)$$

$$B_2 = \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}}; l_m = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 - m_*^2;$$

$$g_m = \frac{B_{22}}{B_{66}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2; a^2 = \mu^4 k^2;$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66}) m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_3^2;$$

$$m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m; \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66} k^2}, i = \overline{1, 3}.$$

Пусть $\chi_j, j = \overline{1, 4}$ – попарно различные нули уравнения (1.8) с неположительными действительными частями; тогда $\chi_5 = -\chi_1, \chi_6 = -\chi_2, \chi_7 = -\chi_3, \chi_8 = -\chi_4$ – также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}), j = \overline{1, 8}$ – нетривиальные решения вида (1.5) системы (1.1) при $\chi = \chi_j, j = \overline{1, 8}$, соответственно. Решение задачи (1.1) – (1.4) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 w_j u_i^{(j)}, i = \overline{1, 3}. \quad (1.10)$$

Подставим (1.10) в граничные условия (1.2), (1.3). В полученных уравнениях, выражения, которые содержат $w_m(\theta_m \beta)$, умножаем на $w_m''(\theta_m \beta)$, а остальные уравнения – на $w_m'(\theta_m \beta)$. Интегрируя все полученные уравнения в пределах от 0 до s , получаем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1, 8}; \quad (1.11)$$

$$M_{1j}^{(m)} = \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}} d_m^{(j)} (m_*^2 - \eta_1^2) -$$

$$\begin{aligned}
& -a^2 m_*^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} l_m^{(j)} \left(\chi_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_1^2 \right); \\
M_{2j}^{(m)} = & \chi_j \left\{ a_m^{(j)} + b_m^{(j)} + a^2 \left[4c_m^{(j)} - l_m^{(j)} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} m_*^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) \right] + \right. \\
& \left. + a^2 \frac{r_0^2}{4} \left(4b_m^{(j)} + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} - 4a^2 \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi_j^2 g_m^{(j)} \right) \right\}; \quad (1.12) \\
M_{3j}^{(m)} = & \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \frac{B_{12}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right]; \\
M_{4j}^{(m)} = & \chi_j \left\{ \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 \right) c_m^{(j)} + \right. \\
& \left. + \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 \chi_j^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^2 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{22}} m_*^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} m_*^2 b_m^{(j)} \right] \right\}; \\
M_{5j}^{(m)} = & \chi_j \left(a_m^{(j)} - a^2 m_*^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11} B_{66}} l_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} \right) \exp(z_j); \\
M_{6j}^{(m)} = & \left(b_m^{(j)} - a^2 g_m^{(j)} l_m^{(j)} \right) \exp(z_j); \quad M_{7j}^{(m)} = \left(c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)} \right) \exp(z_j); \\
M_{8j}^{(m)} = & \chi_j \left(c_m^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)} \right) \exp(z_j); \quad z_j = k \chi_j l, \quad j = \overline{1, 8}.
\end{aligned}$$

Верхний индекс j в скобках означает, что соответствующая функция принята с учетом $\chi = \chi_j$. Чтобы система (1.11) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (1.13)$$

Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два корня уравнения (1.8) становятся близкими друг к другу. Это усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Множитель в левой части равенства (1.13), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения

$$x_j = \chi_j / m_*, \quad j = \overline{1, 8}; \quad \eta_{im} = \eta_i / m_*, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \varepsilon_m = r_0 / (2m_*);$$

$$[z_i z_j] = km_* l (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j); \quad [z_i z_j z_k] = km_* l ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k);$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = km_* l ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4);$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4; \\ \sigma_2 &= \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4; \\ \sigma_3 &= \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4;\end{aligned}\quad (1.14)$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4; \quad \bar{\sigma}_k = \sigma_k(x_1, x_2, x_3, 0); \quad \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(x_1, x_2, 0, 0), \quad k = \overline{1, 4}.$$

При этом $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$. Пусть f_n , $n = \overline{1, 6}$ – симметрический многочлен n -й степени от переменных x_1, x_2, x_3, x_4 . Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_n = f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4); \quad \bar{f}_n = f_n(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0); \quad \bar{\bar{f}}_n = f_n(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), \quad n = \overline{1, 6}; \quad (1.15)$$

$$f_1 = \sigma_1, \quad f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2; \quad f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3; \quad f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4;$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3; \quad \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3 \quad (1.16)$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (1.13), получаем

$$\text{Det} \left\| M_{ij}^{(m)} \right\|_{i,j=1}^8 = m_*^{34} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8, \quad (1.17)$$

где элементы m_{ij} приведены в Приложении (§6), а

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4). \quad (1.18)$$

Уравнение (1.13) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (1.19)$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3 , заключаем, что уравнение (1.19) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (1.8) – характеристическое уравнение системы (1.1), уравнение (1.19) – дисперсионное уравнение задачи (1.1) – (1.4).

Отметим, что ниже (в §4) исследованы асимптотики дисперсионного уравнения (1.19) при $R^{-1} \rightarrow 0$ (предельный переход к пластинке) и при $l \rightarrow \infty$ (предельный переход к полубесконечной цилиндрической оболочке). Для проверки достоверности полученных в §4 асимптотических связей ниже (§2, 3) исследованы планарные и изгибные собственные колебания ортотропной прямоугольной пластинки с одним свободным и тремя жестко защемленными сторонами и полубесконечной пластинки-полосы со свободным торцом и жестко защемленными краями.

§2. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластинки с одной свободной и тремя жестко защемленными сторонами.

Пусть ортотропная прямоугольная пластинка отнесена к триортогональной системе

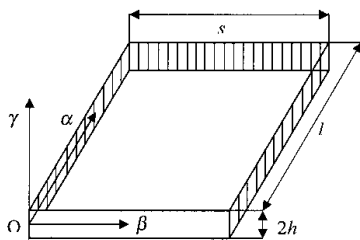


Рис. 2

прямолинейных координат (α, β, γ) с началом в свободной торцевой плоскости так, что координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления упругости материала пластинки совпадают с координатными линиями (рис. 2). Пусть s, l являются шириной и длиной пластинки, соответственно. При условиях свободного колебания рассмотрен вопрос существования планарных колебаний прямоугольной пла-

стинки со свободной и тремя жестко защемленными сторонами. В качестве исходных уравнений примем уравнения малых планарных колебаний, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [1]

$$\begin{aligned} -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} &= \lambda u_1; \\ -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} &= \lambda u_2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq l$) и β ($0 < \beta < s$) – ортогональные координаты точки срединной плоскости; u_1, u_2 – проекции вектора смещений, соответственно, в направлениях α, β ; B_{ik} , $i, k = 1, 2, 6$, – коэффициенты упругости; $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний; ρ – плотность материала.

Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0} = 0; \quad (2.2)$$

$$u_1|_{\alpha=l} = u_2|_{\alpha=l} = 0; \quad (2.3)$$

$$u_1|_{\beta=0,s} = u_2|_{\beta=0,s} = 0, \quad (2.4)$$

где соотношения (2.2) выражают условия свободного края при $\alpha = 0$, а условия (2.3), (2.4) являются условиями жесткого защемления при $\alpha = l, \beta = 0, \beta = s$, соответственно.

Решение системы (2.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2) = \{u_m w_m(\theta_m \beta), v_m w'_m(\theta_m \beta)\} \exp(k \chi \alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (2.5)$$

где u_m, v_m, χ – неизвестные постоянные, а $w_m(\theta_m \beta)$ и k определены в (2) и (4). При этом условия (1.4) выполняются автоматически. Подставим (2.5) в (2.1).

Первое уравнение полученной системы умножаем на $w''_m(\theta_m \beta)$, а второе на $w'_m(\theta_m \beta)$. Интегрируя оба уравнения в пределах от 0 до s , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (B_{11} \chi^2 - B_{66} m^2 \mu_m^2 \beta_m + B_{66} \eta^2) u_m - (B_{12} + B_{66}) \chi m \mu_m \beta_m v_m &= 0; \\ (B_{12} + B_{66}) \chi m \mu_m u_m + (B_{66} \chi^2 - B_{22} m^2 \mu_m^2 \beta_m + B_{66} \eta^2) v_m &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\eta^2 = \lambda / (k^2 B_{66})$, а μ_m и β_m определены в (4).

Приравняв определитель системы (2.6) к нулю, получаем характеристическое уравнение системы уравнений (2.1)

$$c_m = y^4 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 2 B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} y^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 - (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0; \quad (2.7)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m_*}, \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m. \quad (2.8)$$

Пусть y_1 и y_2 – различные корни уравнения (2.7) с неположительными действительными частями, тогда $-y_1$ и $-y_2$ также различные корни уравнения (2.7). Представим решение задачи (2.1) – (2.4) в виде

$$\begin{aligned}
u_1 &= w_m(\theta_m \beta) \left(\sum_{j=1}^2 w_j u_m^{(j)} \exp(\kappa \chi_j \alpha) - \sum_{j=1}^2 w_{2+j} u_m^{(j)} \exp(-\kappa \chi_j \alpha) \right); \\
u_2 &= w'_m(\theta_m \beta) \left(\sum_{j=1}^2 w_j v_m^{(j)} \exp(\kappa \chi_j \alpha) + \sum_{j=1}^2 w_{2+j} v_m^{(j)} \exp(-\kappa \chi_j \alpha) \right);
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$u_m^{(j)} = \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y_j, \quad v_m^{(j)} = \left(y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \right) m \mu_m, \quad \chi_j = m_* y_j, \quad m = \overline{1, +\infty}. \tag{2.10}$$

Подставим (2.9) в граничные условия (2.2), (2.3). Первое и второе из полученных уравнений умножаем на $w_m''(\theta_m \beta)$ и $w'_m(\theta_m \beta)$, соответственно. Интегрируя все полученные уравнения в пределах от 0 до s , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} w_{2+j} &= 0, \quad i = 1, 2; \\
\sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j + (-1)^i \sum_{j=1}^2 R_{ij}^{(m)} \exp(-z_j) w_{2+j} &= 0, \quad i = 5, 6;
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{1j}^{(m)} &= y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2); \quad R_{2j}^{(m)} = y_j \left(y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right); \\
R_{5j}^{(m)} &= y_j; \quad R_{6j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2), \quad z_j = km_* y_j l, \quad j = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Приравнявая определитель системы (2.11) к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
P(\eta_m) &= -(y_2 - y_1)^2 K_{2m}(\eta_m) Q_{2m}(\eta_m) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + 4y_1 y_2 R(\eta_m) \exp(z_1 + z_2) + \\
&+ (y_2 + y_1)^2 K_{3m}(\eta_m) Q_{3m}(\eta_m) (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) = 0;
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$K_{im}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right) + (-1)^{i-1} \eta_m^2 y_1 y_2;$$

$$Q_{im}(\eta_m) = \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) + (-1)^i y_1 y_2, \quad i = 2, 3; \tag{2.14}$$

$$R(\eta_m) = 2 \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \frac{B_{11} + B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 \right).$$

Заметим, что $P(\eta_m)$ из (2.13) можно привести к виду

$$P(\eta_m) = -(y_2 - y_1)^2 \bar{P}(\eta_m); \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}(\eta_m) &= K_{2m}(\eta_m) Q_{2m}(\eta_m) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) - \\
&- \frac{4B_{11} m_{12} (m_{11} m_{21} + m_{22} m_{61} y_1)}{B_{12} + B_{66}} \exp(z_1 + z_2) + \\
&+ \frac{B_{11} (m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12}) (y_1 m_{12} + m_{61})}{B_{12} + B_{66}} (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) + \frac{4B_{11} m_{11} m_{21} m_{61} y_1}{B_{12} + B_{66}} [z_1 z_2]^2 +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2B_{11}[y_1 m_{61}(m_{11} m_{22} + m_{21} m_{12}) + m_{11} m_{21}(y_1 m_{12} + m_{61})]}{B_{12} + B_{66}} (\exp(z_2) - \exp(z_1)) [z_1 z_2]; \quad (2.16)$$

$$m_{11} = R_{11}^{(m)}; \quad m_{21} = R_{21}^{(m)}; \quad m_{61} = R_{61}^{(m)}; \quad m_{22} = y_1 y_2 + \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - B_{12} B_{66}}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2;$$

$$m_{12} = y_1 + y_2; \quad [z_1 z_2] = km_* l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1).$$

Учитывая (2.15), можно утверждать, что дисперсионное уравнение (2.13) эквивалентно дисперсионному уравнению

$$\bar{P}(\eta_m) = 0. \quad (2.17)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионного уравнения (2.17) более эффективно, когда значения корней уравнения (2.7) близки друг к другу.

Заметим, что если y_1 и y_2 корни уравнения (2.7) с отрицательными действительными частями, то при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнения (2.13) и (2.17) распадаются на совокупность уравнений

$$K_{2m}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0; \quad (2.18)$$

$$Q_{2m}(\eta_m) = \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) + y_1 y_2 = 0. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.18) является уравнением Рэля для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы, когда боковые края жестко защемлены [18]). Отметим, что аналогичное уравнение как (2.19) имеет место и в случае, когда прямоугольная пластинка защемлена при $\alpha = l$, а две противоположные стороны шарнирно закреплены [18].

§3. Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободной и тремя жестко защемленными сторонами.

Пусть имеем ортотропную прямоугольную пластинку и h, s, l – толщина, ширина и длина пластинки, соответственно (рис. 2). При условиях свободного колебания рассмотрим вопрос существования изгибных колебаний прямоугольной пластинки со свободной и тремя жестко защемленными сторонами. В качестве исходного уравнения примем уравнение малых изгибных колебаний, которое соответствует классической теории ортотропных пластин [1]

$$\mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3, \quad (3.1)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq l$) и β ($0 \leq \beta \leq s$) – ортогональные координаты точки срединной плоскости пластинки; u_3 – нормальная компонента вектора перемещения точки срединной плоскости; B_{ik} , $i, k = 1, 2, 6$ – коэффициенты упругости; $\mu^4 = h^2 / 12$ (h – толщина пластинки); $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний; ρ – плотность материала.

Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right|_{\alpha=0} = 0; \quad (3.2)$$

$$u_3|_{\alpha=l} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=l} = 0; \quad (3.3)$$

$$u_3|_{\beta=0,s} = \frac{\partial u_3}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} = 0, \quad (3.4)$$

где соотношения (3.2) выражают условия свободного края при $\alpha = 0$, а условия (3.3), (3.4) являются условиями жесткого защемления при $\alpha = l, \beta = 0, \beta = s$, соответственно.

Решения уравнения (3.1) определяем в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \beta) \exp(k \chi \alpha); \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.5)$$

где $w_m(\theta_m \beta)$ определено в (2). При этом условия (3.4) выполняются автоматически.

Подставим (3.5) в (3.1). Полученное уравнение, умножая на $w_m''(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получаем характеристическое уравнение

$$R_{mm} = m_*^2 a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} y^2 + \frac{1}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0; \quad (3.6)$$

$$y = \frac{\chi}{m_*}; \quad \eta^2 = \frac{\lambda}{k^2 B_{66}}, \quad \eta_m = \frac{\eta}{m_*}; \quad a^2 = \mu^4 k^2; \quad k = \frac{\pi}{s}; \quad m_*^2 = m^2 \mu_m^2 \beta_m, \quad (3.7)$$

где μ_m и β_m определены в (4).

Пусть y_3 и y_4 различные корни уравнения (3.6) с неположительными действительными частями. Тогда $-y_3$ и $-y_4$ – также различные корни уравнения (3.6). Решение задачи (3.1) – (3.4) определяем в виде

$$u_3 = w_m(\theta_m \beta) \left(\sum_{j=3}^4 w_j \exp(\kappa \chi_j \alpha) + \sum_{j=3}^4 w_{2+j} \exp(-\kappa \chi_j \alpha) \right), \quad \chi_j = m_* y_j, \quad j = 3, 4. \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в граничные условия (3.2), (3.3). Умножая все полученные уравнения на $w_m''(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} w_j + \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} w_{2+j} &= 0, \quad i = 3, 4; \\ \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j + (-1)^{i-1} \sum_{j=3}^4 R_{ij}^{(m)} \exp(-z_j) w_{2+j} &= 0, \quad i = 7, 8; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$R_{3j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}; \quad R_{4j}^{(m)} = \left(y_j^2 - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \right) y_j;$$

$$R_{7j}^{(m)} = 1; \quad R_{8j}^{(m)} = y_j; \quad z_j = k m_* y_j l, \quad j = 3, 4. \quad (3.10)$$

Приравнивая определитель системы (3.9) к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} B(\eta_m) = -(y_4 - y_3)^2 K_1(\eta_m)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 4y_3 y_4 S_m(\eta_m) \exp(z_3 + z_4) + \\ + (y_3 + y_4)^2 K_{4m}(\eta_m)(\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) = 0; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$K_{im}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + (-1)^{i-1} 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2, \quad i = 1, 4;$$

$$S_m(\eta_m) = 2 \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \frac{1}{\beta_m^2} - \frac{B_{12}^2 + 4B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \frac{\eta_m^2}{a^2 m_*^2} \right). \quad (3.12)$$

Заметим, что $B(\eta_m)$ из (3.11) можно привести к виду

$$B(\eta_m) = -(y_4 - y_3)^2 \bar{B}(\eta_m); \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{B}(\eta_m) = & K_{1m}(\eta_m)(1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 4(y_3^2 + y_3 y_4) \left(y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) \exp(z_3 + z_4) - \\ & - \left[R_{33}(y_3^2 + y_3 y_4) + R_{43} \left(y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) \right] (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - \\ & - 4y_3 \left[R_{33}R_{43} + \left(y_3 y_4 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \right) \left(y_3^2 - \frac{B_{12} + 2B_{66}}{B_{11}} \right) \right] (\exp(z_4) - \exp(z_3)) [z_3 z_4] - \\ & - 4y_3^2 R_{33}R_{43} [z_3 z_4]^2; \quad [z_3 z_4] = km_* l (\exp(z_3) - \exp(z_4)) / (z_3 - z_4). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Учитывая (3.13), можно утверждать, что дисперсионное уравнение (3.11) эквивалентно дисперсионному уравнению

$$\bar{B}(\eta_m) = 0. \quad (3.15)$$

Численный анализ показывает, что применение дисперсионного уравнения (3.15) более эффективно, когда значения корней уравнения (3.6) близки друг к другу.

Заметим, что если y_3 и y_4 – корни уравнения (3.6) с отрицательными действительными частями, то при $m_* l \rightarrow \infty$ уравнения (3.11) и (3.15) преобразуются к уравнению

$$K_{1m}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 = 0, \quad (3.16)$$

которое является дисперсионным уравнением изгибного колебания для полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом, когда край $\beta = 0$ и $\beta = s$ жестко защемлены.

§4. Асимптотики дисперсионного уравнения для цилиндрической оболочки.

4.1. Асимптотика дисперсионного уравнения (1.19) при $R^{-1} \rightarrow 0$. Используя предыдущие формулы, предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m = \eta / m_*$. Тогда при $R^{-1} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow 0$) уравнение (1.8) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = \chi^4 - B_2 \chi^2 m_*^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \chi^2 + (m_*^2 - \eta^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} m_*^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta^2 \right) = 0; \quad (4.1)$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} \chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})m_*^2}{B_{22}} \chi^2 + \frac{m_*^4}{\beta_m^2} \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta^2 = 0. \quad (4.2)$$

Предельный переход $r_0 \rightarrow 0$ здесь понимается в том смысле, что фиксируя радиус R и b – расстояние между граничными образующими цилиндрической оболочки, совершается переход к цилиндрической оболочке радиуса R' кратному $R : R' = nR$, и к пределу $r_0' = r_0 / n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Уравнения (4.1), (4.2) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины, соответственно, когда одна сторона свободна, а три стороны жестко защемлены. Корни χ / m_* уравнений (4.1) и (4.2) с положительными действительными частями, как в §2 и §3, обозначаются через y_1, y_2 и y_3, y_4 , соответственно. Аналогичным образом [18] доказываем, что при

$$\varepsilon_m \ll 1; \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j, \quad (4.3)$$

корни $(\chi / m_*)^2$ уравнения (1.8) можно представить в виде

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon_m^2 + \beta_i^{(m)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (4.4)$$

При условии (4.3), учитывая соотношения (1.12), (1.17), (4.4) и тот факт, что

$$M_{3i} / m_*^6 = M_{4i} / m_*^7 = M_{7i} / m_*^4 = M_{8i} / m_*^5 = O(\varepsilon_m^2), \quad i = 1, 2, \quad (4.5)$$

уравнение (1.19) можно привести к виду

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = B_{11} / B_{66} N^2(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) \bar{P}(\eta_m) \bar{B}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad (4.6)$$

где $\bar{P}(\eta_m)$ и $\bar{B}(\eta_m)$ определяются формулами (2.16) и (3.14), соответственно, а

$$K_{3m}(\eta_m) = N_1(\eta) + a^2 m_*^2 N_2(\eta) + a^4 m_*^4 N_3(\eta); \quad N(\eta_m) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2);$$

$$N_1(\eta_m) = \frac{B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} + \frac{B_{12}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{66}B_{22} - B_{66}B_{12})}{B_{11}^3} \eta_m^2;$$

$$N_2(\eta_m) = -\frac{2B_{22}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^3} - \frac{1}{B_{66}B_{11}^3} (B_{11}B_{22}B_{12}^2 - B_{12}^4 + 2B_{11}B_{22}B_{12}B_{66} - \quad (4.7)$$

$$-6B_{12}^3B_{66} - 10B_{12}^2B_{66}^2 - 2B_{22}B_{66}B_{12}^2 - 8B_{12}B_{22}B_{66}^2 - 8B_{12}B_{66}^3 - 4B_{11}B_{22}B_{66}^2 - \\ -4B_{22}B_{66}^3) \eta_m^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})(B_{11} - B_{66})B_{12}}{B_{11}^3} \eta_m^4;$$

$$N_3(\eta_m) = \frac{B_{22}^2(B_{12} + B_{66})}{B_{11}^2B_{66}} \left\{ \frac{(B_{12} + 4B_{66})^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} B_2 + 1 - \right. \\ \left. - \frac{(B_{12} + 4B_{66})(B_{12}B_{22} + B_{12}B_{66} + 3B_{22}B_{66} + 4B_{66}^2 - B_{11}B_{22})}{B_{11}B_{22}^2} \eta_m^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})^2 B_{66}}{B_{11}B_{22}^2} \eta_m^4 \right\}.$$

Из (4.6) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнения (1.13) и (1.19) распадаются на уравнения

$$\bar{P}(\eta_m) = 0; \quad \bar{B}(\eta_m) = 0; \quad K_{3m}(\eta_m) = 0. \quad (4.8)$$

Из них первые два – дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний в аналогичной задаче для ортотропной прямоугольной пластинки со свободным и

тремя жестко защемленными сторонами (см. (2.17) и (3.15)). Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (4.1) и (4.2) с отрицательными действительными частями, соответственно, то при $m_*l \rightarrow \infty$ уравнения (1.19) и (4.6) преобразуются в уравнение

$$\begin{aligned} \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 &= B_{11} / B_{66} N^2(\eta_m) K_{1m}(\eta_m) K_{2m}(\eta_m) K_{3m}^2(\eta_m) Q_{2m}(\eta_m) + \\ &+ O(\varepsilon_m^2) + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и $m_*l \rightarrow \infty$ дисперсионное уравнение (1.19) распадается на уравнения

$$K_{1m}(\eta_m) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 = 0; \quad (4.10)$$

$$K_{2m}(\eta_m) = (1 - \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} - \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0; \quad (4.11)$$

$$K_{3m}(\eta_m) = N_1(\eta_m) + a^2 m_*^2 N_2(\eta_m) + a^4 m_*^4 N_3(\eta_m) = 0; \quad (4.12)$$

$$Q_{2m}(\eta_m) = y_1 y_2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_m^2) = 0. \quad (4.13)$$

Уравнения (4.10) и (4.11) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии жесткого защемления на боковых краях, соответственно (см. (2.18) и (3.16)). Уравнение (4.13) соответствует тому, что другой торец цилиндрической оболочки жестко защемлен. Следовательно, при малых ε_m и больших m_*l приближенные значения корней уравнения (1.19) являются корнями уравнения (4.10) – (4.13) (ср. табл. 1,2,3).

4.2. Асимптотика дисперсионного уравнения (1.19) при $l \rightarrow \infty$. При использовании предыдущих формул полагаем, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (1.8)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (1.19) можно привести к виду

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^8 = \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 \cdot \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=5}^8 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(k \chi_j l)) = 0, \quad (4.14)$$

откуда следует, что при $m_*l \rightarrow \infty$ уравнение (1.19) распадается на уравнения

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = 0; \quad \text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=5}^8 = 0. \quad (4.15)$$

Первое из них, при $m \in N$, определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободного торца полубесконечной ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих. Если $\varepsilon_m \rightarrow 0$, имеем

$$\text{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^4 = N(\eta_m) \left\{ K_{1m}(\eta_m) K_{2m}(\eta_m) K_{3m}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2) \right\}; \quad (4.16)$$

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=5}^8 = B_{11} / B_{66} N(\eta_m) \{K_{3m}(\eta_m) Q_{2m}(\eta_m) + O(\varepsilon_m^2)\}. \quad (4.17)$$

Учитывая формулы (4.14), (4.16) и (4.17), заключаем, что дисперсионное уравнение (1.19) принимает вид (4.9).

§5. Численные исследования.

В табл. 1 приведены значения некоторых корней (η_m) первых двух уравнений из (4.8) для прямоугольной пластинки из стеклопластика с параметрами (вариант I)

$$\rho = 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3; \quad E_1 = 6,37 \cdot 10^{10} \text{ Н/М}^2;$$

$$E_2 = 1,47 \cdot 10^{10}; \quad G = 4,9 \cdot 10^6;$$

$$\nu_1 = 0,26; \quad \nu_2 = 0,06 \quad (5.1)$$

и изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$ (вариант II) при $h = 1/50$; $k = \pi/4$; $l = 15, 5$.

Заметим, что для изотропного материала имеем равенства

$$\frac{B_{12}}{B_{11}} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \nu, \quad \frac{B_{66}}{B_{11}} = \frac{B_{66}}{B_{22}} = \frac{1-\nu}{2}. \quad (5.2)$$

Следовательно, чтобы использовать полученные характеристические и дисперсионные уравнения можно в них формально подставить $B_{11} = B_{22} = 1$; $B_{12} = \nu$; $B_{66} = (1-\nu)/2$.

В качестве характеристики коэффициентов затухания, для планарных и изгибных колебаний, соответственно, приведены следующие величины:

$$k\chi_0 / m_* = \max \{k \text{ Re } y_1, k \text{ Re } y_2\}; \quad k\chi_0 / m_* = \max \{k \text{ Re } y_3, k \text{ Re } y_4\}. \quad (5.3)$$

Численный анализ показывает, что у свободного края прямоугольной пластинки, когда остальные три стороны жестко зашпелены, могут появляться локализованные колебания планарного и изгибного типов.

При $m_* l \rightarrow \infty$ частоты планарного и изгибного локализованного колебания у свободного края прямоугольной пластинки стремятся к частотам планарных и изгибных локализованных колебаний полубесконечной пластинки-полосы, соответственно.

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η / m_* и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0 / m_*$ для ортотропных цилиндрических оболочек открытого профиля из стеклопластика с механическими параметрами (5.1) (вариант I) и изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$ (вариант II) с геометрическими параметрами: $R = 40$; $r_0 = 0,0637$; $k = 0,7851$; $h = 1/50$; $b = 4$ (b – расстояние между граничными образующими); $l = 15$.

Результаты, представленные в табл. 3, соответствуют цилиндрической оболочке открытого профиля из стеклопластика с механическими параметрами (5.1) (вариант I) и изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/3$ (вариант II) с теми же геометрическими параметрами, что в табл. 2, но при $l = 5$. В качестве характеристики коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0 / m_* = \max \{k \text{ Re } x_1, k \text{ Re } x_2, k \text{ Re } x_3, k \text{ Re } x_4\}. \quad (5.4)$$

Таблица 1

Вариант	m	θ_m	$\bar{P}(\eta_m) = 0, l = 15$	$\bar{P}(\eta_m) = 0, l = 5$	$\bar{B}(\eta_m) = 0, l = 15$	$\bar{B}(\eta_m) = 0, l = 5$
			$k\chi_0 / m^* \eta_m$	$k\chi_0 / m^* \eta_m$	$k\chi_0 / m^* \eta_m$	$k\chi_0 / m^* \eta_m$
I	2	1,9627	-0,0409 0,9841			
	3	2,7477	-0,0418 0,9833			
	4	3,5328	-0,0431 0,9823	-0,0163 0,9975		
	5	4,3179	-0,0432 0,9822	-0,0241 0,9945	-0,0057 0,0460	
	13	10,598	-0,0433 0,9821	-0,0430 0,9824	-0,0137 0,1093	
	14	11,383	-0,0433 0,9821	-0,0431 0,9822	-0,0138 0,1122	-0,0024 0,1122
	15	12,169	-0,0433 0,9821	-0,0432 0,9822	-0,0138 0,1252	0,0042 0,1251
	20	16,094	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,1597	-0,0114 0,1597
	100	70,900	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,7928	-0,0138 0,7928
	110	86,750	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,8719	-0,0138 0,8719
	118	93,031	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,9352	-0,0138 0,9352
	119	93,816	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,9482	-0,0138 0,9482
	120	94,601	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,9510	-0,0138 0,9511
	125	98,526	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 0,9957	-0,0138 0,9957
130	102,45	-0,0433 0,9821	-0,0433 0,9821	-0,0138 1,0302	-0,0138 1,0302	
II	1	1,1825	-0,3089 0,9194	-0,2452 0,9500		
	2	1,9627	-0,3089 0,9194	-0,3086 0,9196	-0,0413 0,0169	
	3	2,7477	-0,3089 0,9194	-0,3088 0,9195	-0,0422 0,0298	
	4	3,5328	-0,3089 0,9194	-0,3088 0,9194	-0,0436 0,0326	-0,0143 0,0327
	5	4,3179	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0436 0,0455	-0,0233 0,0456
	13	10,598	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,1082	-0,0434 0,1082
	14	11,383	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,1110	-0,0436 0,1110
	15	12,169	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,1239	-0,0436 0,1239
	20	16,094	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,1580	-0,0437 0,1580
	100	70,900	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,7844	-0,0437 0,7844
	110	86,750	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,8626	-0,0437 0,8626
	118	93,031	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,9253	-0,0437 0,9253
	119	93,816	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,9382	-0,0437 0,9382
	120	94,601	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,9409	-0,0437 0,9409
	125	98,526	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 0,9851	-0,0437 0,9851
	130	102,45	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 1,0192	-0,0437 1,0192
	220	173,11	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 1,7232	-0,0437 1,7232
	240	188,81	-0,3089 0,9194	-0,3089 0,9194	-0,0437 1,8797	-0,0437 1,8797

В табл. 2 и 3 после характеристик собственных частот указан тип колебаний: b – преимущественно изгибный; e – преимущественно планарный, n -новый тип колебаний.

Модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направленной, соответственно. В табл. 2 и 3 случай $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$ соответствует задаче (1.1) – (1.4). Случай $\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$ соответствует задаче (1.1) – (1.4), в которой отсутствует тангенциальная компонента силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, случай $\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$ соответствует преимущественно планарному типу. Вычисления показывают, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободного края цилиндрических оболочек, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами колебаний квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих колебаний квазитангенциального типа. С увеличением m эти колебания становятся колебаниями “рэлеевского” типа.

Из анализа полученных численных результатов следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ собственные колебания (задачи (1.1) – (1.4)) расчлениаются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания, а частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для прямоугольной пластинки.

С увеличением m колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими, а безразмерные характеристики η_m собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея (4.11) (для стеклопластика: $\eta_m^{(2)} \approx 0,9821$, а для изотропного материала: $\eta_m^{(2)} \approx 0,9194$). При $m \rightarrow \infty$ собственные частоты задачи (1.1) – (1.4) стремятся к собственным частотам колебаний локализованных у свободного края полубесконечной цилиндрической оболочки открытого профиля при наличии жесткого защемления на граничных образующих.

В зависимости от параметра $a^2 m_*^2$ появляются не более двух новых типов колебаний, характерных только для цилиндрических оболочек и обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции. Отметим, что число новых типов локализованных колебаний у свободного торца цилиндрической оболочки может сократиться, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала.

При преимущественно тангенциальном типе колебаний цилиндрических оболочек ($\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$), кроме планарного колебания “рэлеевского” типа, могут появиться не более, чем два новых колебания, также обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции. Заметим также, что при отсутствии нормальной компоненты силы инерции, тангенциальные локализованные колебания появляются при более малых значениях θ_m .

При увеличении m собственные частоты и соответствующие коэффициенты затухания задачи (1.1) – (1.4) стремятся к собственным частотам и коэффициентам затухания консольной цилиндрической оболочки открытого профиля с шарнирно закрепленными граничными образующими (см. табл. 1, 2 из [18]).

В таблицах параметры незатухающих колебаний не приведены, а там, где обнаружены частоты затухающих колебаний, ячейки пустуют. Появление локализованных колебаний у свободного торца цилиндрической оболочки и процесс затухания по толщине оболочки зависит от типа колебаний, геометрических и физических параметров. Колебания квазипоперечного типа, в основном, затухают медленнее, чем остальные типы колебаний. Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (4.6) и (4.9) дисперсионного уравнения (1.19) являются хорошим ориентиром для вычисления собственных частот задачи (1.1) – (1.4).

Таблица 2

Вариант	m	θ_m	$K_{3m}(\eta_m) = 0$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$
				$k\chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k\chi_0 / m_* \quad \eta_m$	$k\chi_0 / m_* \quad \eta_m$
I	2	1,96268				-0,0767 0,9582 e
	3	2,74775				-0,0493 0,9776 e
	4	3,53282				-0,0452 0,9807 e
	5	4,31789		-0,0055 0,0460 b	-0,0560 0,0460 b	-0,0442 0,9814 e
	20	8,24324		-0,0135 0,0805 b	-0,0135 0,0805 b	-0,0433 0,9821 e
	100	78,8996		-0,0137 0,7925 b	-0,0138 0,7925 b	-0,0433 0,9821 e
	110	86,7503		-0,0133 0,8716 b	-0,0138 0,8716 b	-0,0433 0,9821 e
	118	93,0308	0,2210	-0,2201 0,2210 n		-0,2201 0,2210 n
				-0,0138 0,9347 b	-0,0138 0,9349 b	-0,0433 0,9821 e
	120	94,6010	0,3441	-0,2121 0,3441 n		-0,2121 0,3441 n
				-0,0138 0,9507 b	-0,0138 0,9507 b	-0,0433 0,9821 e
	125	98,5263	0,5088	-0,1949 0,5088 n		-0,1949 0,5088 n
				-0,0138 0,9953 b	-0,0138 0,9953 b	
			-0,0433 0,9821 e		-0,0433 0,9821 e	
130	102,452	0,6482	-0,1729 0,6482 n		-0,1729 0,6482 n	
			-0,0433 0,9821 e	-0,0138 1,0298 b	-0,0433 0,9821 e	
II	1	1,1825				-0,0545 0,5208 e
	2	1,9627		-0,0435 0,0169 b	-0,0407 0,0169 b	-0,0693 0,9712 e
	3	2,7477		-0,0419 0,0298 b	-0,0418 0,0298 b	-0,3501 0,9056 e
	4	3,5328		-0,0435 0,0326 b	-0,0435 0,0326 b	-0,3632 0,9156 e
	5	4,3179		-0,0436 0,0455 b	-0,0436 0,0455 b	-0,3351 0,9173 e
	20	16,094		-0,0437 0,1579 b	-0,0437 0,1579 b	-0,3088 0,9194 e
	100	70,900		-0,0437 0,7840 b	-0,0437 0,7840 b	-0,3088 0,9194 e
	110	86,750		-0,0437 0,8623 b	-0,0437 0,8623 b	-0,3088 0,9194 e
	118	93,031		-0,0743 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9249 b	-0,0437 0,9249 b	
	120	94,601		-0,1248 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9406 b	-0,0437 0,9405 b	
	125	98,526		-0,2076 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9847 b	-0,0437 0,9847 b	
	130	102,45		-0,2475 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
					-0,0437 1,0188 b	
	220	173,11	0,0266	-0,7540 0,0268 n		-0,7547 0,0268 n
		0,0421	-0,7531 0,0421 n		-0,7547 0,0421 n	
			-0,3089 0,9194 e	-0,0437 1,7232 b	-0,3089 0,9194 e	
240	188,81	0,2535	-0,7227 0,2535 n		-0,7560 0,2535 n	
		0,4063	-0,6903 0,4063 n		-0,7173 0,4063 n	
			-0,3089 0,9194 e	-0,0437 1,8797 b	-0,3089 0,9194 e	

Таблица 3

Вариант	m	θ_m	$K_{3m}(\eta_m) = 0$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = 0, \eta_3 = \eta$	$\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_3 = 0$
				$k\chi_0 / m^* \eta_m$	$k\chi_0 / m^* \eta_m$	$k\chi_0 / m^* \eta_m$
I	4	3,53282				-0,0225 0,9953 e
	5	4,31789				-0,0263 0,9935 e
	14	11,3835				-0,0431 0,9822 e
	15	12,1686		-0,0042 0,1251 b	-0,0042 0,1251 b	-0,0432 0,9822 e
	20	16,0939		-0,0114 0,1596 b	-0,0114 0,1596 b	-0,0433 0,9821 e
	100	78,8996		-0,0138 0,7925 b	-0,0138 0,7925 b	-0,0433 0,9821 e
	110	86,7503		-0,0138 0,8716 b	-0,0138 0,8716 b	-0,0433 0,9821 e
	118	93,0308	0,2210	-0,2201 0,2210 n		-0,2201 0,2210 n
				-0,0138 0,9349 b	-0,0138 0,9349 b	-0,0433 0,9821 e
	120	94,6010	0,3441	-0,2121 0,3441 n		-0,2121 0,3441 n
				-0,0138 0,9507 b	-0,0138 0,9507 b	-0,0433 0,9821 e
	125	98,5263	0,5088	-0,1949 0,5088 n		-0,1949 0,5088 n
				-0,0433 0,9821 e		-0,0433 0,9821 e
			-0,0138 0,9953 b	-0,0138 0,9953 b		
130	102,452	0,6482	-0,1729 0,6482 n		-0,1729 0,6482 n	
			-0,0433 0,9821 e	-0,0138 1,0298 b	-0,0433 0,9821 e	
II	2	1,9627				-0,2177 0,8805 e
	3	2,7477				-0,3501 0,9056 e
	4	3,5328		-0,0139 0,0327 b	-0,0139 0,0327 b	-0,3632 0,9156 e
	5	4,3179		-0,0231 0,0456 b	-0,0231 0,0456 b	-0,3351 0,9173 e
	20	16,094		-0,0437 0,1579 b	-0,0437 0,1579 b	-0,3088 0,9194 e
	100	70,900		-0,0437 0,7840 b	-0,0437 0,7840 b	-0,3088 0,9194 e
	110	86,750		-0,0437 0,8623 b	-0,0437 0,8623 b	-0,3088 0,9194 e
	118	93,031		-0,0743 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9249 b	-0,0437 0,9249 b	
	120	94,601		-0,1248 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9406 b	-0,0437 0,9405 b	
	125	98,526		-0,2076 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
				-0,0437 0,9847 b	-0,0437 0,9847 b	
	130	102,45		-0,2475 0,9194 e		-0,3088 0,9194 e
					-0,0437 1,0188 b	
	220	173,11	0,0266	-0,7540 0,0268 n		-0,7547 0,0268 n
			0,0421	-0,7531 0,0421 n		-0,7547 0,0421 n
			-0,3089 0,9194 e	-0,0437 1,7232 b	-0,3088 0,9194 e	
240	188,81	0,2535	-0,7227 0,2535 n		-0,7560 0,2535 n	
		0,4063	-0,6903 0,4063 n		-0,7173 0,4063 n	
			-0,3089 0,9194 e	-0,0437 1,8797 b	-0,3088 0,9194 e	

§6. Приложение.

Ниже приведены аналитические выражения для элементов m_{ij} (1.19):

$$\begin{aligned}
m_{11} &= Hx_1^4 + d_1x_1^2 + d_2; \quad m_{12} = H\bar{f}_3 + d_1\bar{f}_1; \quad m_{13} = H\bar{f}_2 + d_1; \quad m_{14} = Hf; \\
m_{21} &= Tx_1^5 + d_3x_1^3 + d_4x_1; \quad m_{22} = T\bar{f}_4 + d_3\bar{f}_2 + d_4; \quad m_{23} = T\bar{f}_3 + d_3\bar{f}_1; \quad m_{24} = Tf_2 + d_3; \\
m_{31} &= \delta_m x_1^6 + d_5x_1^4 + d_6x_1^2 + d_7; \quad m_{32} = \delta_m \bar{f}_5 + d_5\bar{f}_3 + d_6\bar{f}_1; \\
m_{33} &= \delta_m \bar{f}_4 + d_5\bar{f}_2 + d_6; \quad m_{34} = \delta_m f_3 + d_5f_1; \\
m_{41} &= \delta_m x_1^7 + d_8x_1^5 + d_9x_1^3 + d_{10}x_1; \quad m_{42} = \delta_m \bar{f}_6 + d_8\bar{f}_4 + d_9\bar{f}_2 + d_{10}; \\
m_{43} &= \delta_m \bar{f}_5 + d_8\bar{f}_3 + d_9\bar{f}_1; \quad m_{44} = \delta_m f_4 + d_8f_2 + d_9; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m^2 \varepsilon_m^2; \\
m_{i5} &= (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1); \quad m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1}[z_1 z_2]); \\
m_{i7} &= (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2}[z_2 z_3] + m_{i1}[z_1 z_2 z_3]); \\
m_{i8} &= (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3}[z_3 z_4] + m_{i2}[z_2 z_3 z_4] + m_{i1}[z_1 z_2 z_3 z_4]), \quad i = \overline{1, 4}; \quad (6.1) \\
n_{51} &= \gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_1; \quad n_{52} = \gamma_1 \bar{f}_2 + \gamma_2; \quad n_{53} = \gamma_1 \bar{f}_1 + \gamma_2 x_1; \quad n_{54} = \gamma_1; \\
n_{61} &= Fx_1^4 + \gamma_3 x_1^2 + \gamma_4; \quad n_{62} = F\bar{f}_3 + \gamma_3 \bar{f}_1; \quad n_{63} = F\bar{f}_2 + \gamma_3; \quad n_{64} = Ff_1; \\
n_{71} &= \delta_m x_1^4 + \gamma_5 x_1^2 + \gamma_6; \quad n_{72} = \delta_m \bar{f}_3 + \gamma_5 \bar{f}_1; \quad n_{73} = \delta_m \bar{f}_2 + \gamma_5; \quad n_{74} = \delta_m f_1; \\
n_{81} &= \delta_m x_1^5 + \gamma_5 x_1^3 + \gamma_5 x_1; \quad n_{82} = \delta_m \bar{f}_4 + \gamma_5 \bar{f}_2 + \gamma_6; \quad n_{83} = \delta_m \bar{f}_3 + \gamma_5 \bar{f}_1; \quad n_{84} = \delta_m f_2 + \gamma_5; \\
m_{i1} &= n_{i1} \exp(z_1); \quad m_{i4} = n_{i4} \exp(z_4) + n_{i3}[z_3 z_4] + n_{i2}[z_2 z_3 z_4] + n_{i1}[z_1 z_2 z_3 z_4]; \\
m_{i2} &= n_{i2} \exp(z_2) + n_{i1}[z_1 z_2]; \quad m_{i3} = n_{i3} \exp(z_3) + n_{i2}[z_2 z_3] + n_{i1}[z_1 z_2 z_3], \quad i = \overline{5, 8}; \\
m_{54+j} &= -n_{5j}; \quad m_{64+j} = n_{6j}; \quad m_{74+j} = n_{7j}; \quad m_{84+j} = -n_{8j}, \quad j = \overline{1, 4}; \\
H &= -a^2 m_*^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}}; \quad T = -\frac{B_{12}}{B_{66}} a^2 m_*^2 \delta_m; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2; \quad F = -a^2 m_*^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{66}}; \\
d_1 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} - \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + 4a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) + \\
&+ \frac{a^2 m_*^2}{B_{11}^2} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66} + B_{12} (B_{12} + 4B_{66}) \eta_{1m}^2); \\
d_2 &= \frac{B_{12}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) (B_{66} \eta_{2m}^2 + a^2 m_*^2 B_{22} (1 - \varepsilon_m^2)); \\
d_3 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \delta_m + a^2 m_*^2 \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} - 3B_1 + 4\eta_{2m}^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) + 4a^4 m_*^4 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2); \\
d_4 &= \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + a^2 m_*^2 \left(\frac{B_{22} (B_{12} + 4B_{66})}{B_{11} B_{66}} - 3 \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 - 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 (1 - \eta_{1m}^2) \right) - \\
&- a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{66}} - 4\eta_{1m}^2 \right); \\
d_5 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_1 - a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \left(B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right); \\
d_6 &= \varepsilon_m^2 \left(a^2 m_*^2 \frac{B_{22} (B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11} B_{22}} (1 - \eta_{1m}^2) - \frac{B_{12}}{B_{11}} B_1 \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{B_{11}B_{22} + B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) + \\
& + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} B_2; \quad d_7 = \frac{B_{12}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \\
& d_8 = \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_1 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} - a^2 m_*^2 \varepsilon_m^2 \left(B_2 + \frac{4B_{66} - 2B_{12}}{B_{11}} - \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \\
d_9 = & \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 - \frac{B_{11}B_{22} + B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 - \frac{B_{12} + 5B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_2 + \\
& \frac{B_{22}}{B_{11}} + \varepsilon_m^2 \left(a^2 m_*^2 \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12}B_{66}}{B_{11}^2} (1 - \eta_{1m}^2) - \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_1 \right); \\
d_{10} = & \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right); \\
\gamma_1 = & \frac{B_{12}}{B_{11}} \delta_m - a^2 m_*^2 \frac{(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}B_{66}}; \\
\gamma_2 = & \frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + a^2 m_*^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} - \varepsilon_m^2 a^2 m_*^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}}; \\
\gamma_3 = & B_1 + a^2 m_*^2 \frac{B_{22}B_{11} + B_{12}B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}B_{66}} - a^2 m_*^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2; \\
\gamma_4 = & -\frac{B_{22}}{B_{11}} (1 + a^2 m_*^2) (1 - \eta_{1m}^2); \quad \gamma_5 = \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 - B_2 - \varepsilon_m^2 a^2 m_*^2 \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} + \frac{4B_{66}}{B_{11}} (1 - \eta_{1m}^2) \right); \\
\gamma_6 = & (1 - \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 + \varepsilon_m^2 a^2 m_*^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \right).
\end{aligned}$$

Заключение.

Таким образом, в данной статье исследован вопрос существования собственных колебаний тонкой упругой ортотропной круговой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободным торцом и тремя жестко защемленными краями. С использованием системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек получены дисперсионные уравнения для нахождения собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Доказана также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля со свободным торцом, при наличии жесткого защемления на граничных образующих. На примерах незамкнутых ортотропных и изотропных цилиндрических оболочек с разными длинами получены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответственных форм колебаний.

РЕЗЮМЕ. Досліджено власні коливання тонкої пружної ортотропної кругової незамкненої циліндричної оболонки (панелі) з вільним торцем і трьома жорстко закріпленими краями. На основі системи рівнянь відповідної класичної теорії ортотропних циліндричних оболонок отримано дисперсійне рівняння для визначення власних частот можливих типів коливань. Встановлено асимптотичний зв'язок між дисперсійними рівняннями задачі, що розглядається і аналогічної задачі для ортотропної прямокутної пластинки. Доведено асимптотичний зв'язок між дисперсійними рівняннями задачі, що розглядається і задачі на власні значення напівнескінченної ортотропної циліндричної оболонки відкритого профілю з вільним торцем, за наявності жорсткого закріплення на граничних твірних. На прикладах незамкнених ортотропних та ізотропних циліндричних оболонок з різними довжинами отримано наближені значення безрозмірної характеристики власної частоти і характеристики затухання відповідних форм коливань.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446с.
2. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 6. – С. 139 – 143.
3. Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича – Власова // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 11. – С. 99 – 111.
4. Беспалова Е.И. Решение задач теории упругости методами полных систем // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1989. – 29, № 9. – С. 1346 – 1353.
5. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строит. промышленность. – 1932. – № 11. – С. 33 – 38; № 12. – С. 21 – 26.
6. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. – М.: Наука, 1979. – 383 с.
7. Григоренко А.Я., Пархоменко А.Ю. Свободные колебания пологих прямоугольных в плане нетонких оболочек переменной толщины // Прикл. механика – 2010. – 46, № 7. – С. 50 – 64.
8. Григоренко А.Я., Григоренко А.Я., Захарийченко Л.И. Исследование влияния геометрических параметров на напряженное состояние цилиндрических оболочек с гофрированным эллиптическим поперечным сечением // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 2. – С. 91 – 98.
9. Григоренко Я.М. Решение краевых задач о напряженном состоянии упругих тел сложной геометрии и структуры с применением дискретных рядов Фурье // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 5. – С. 3 – 51.
10. Гулغازян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 171 – 174.
11. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук – 1933. – № 5. – С. 647 – 653.
12. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 510 с.
13. Прокопов В.Г., Беспалова Е.И., Шеренковский Ю.В. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса // Инж.-физ. журн. – 1982. – 42, № 6. – С. 1007 – 1013.
14. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko N.P. Stress – Strain State of Shallow Shells with Rectangular Plane form and Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2007. – 41, N 10. – P. 1132 – 1141.
15. Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N. Analysis of an Effect of Orthotropy Parameters on Displacements and Stresses in Nonthin Cylindrical Shells with Elliptic Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 6. – P. 654 – 661.
16. Grinchenko V.T. Wave Motion Localization Effects in Elastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, N 9. – P. 988 – 994.
17. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Saakyan R.D. The vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges // J. Appl. Math. and Mech. – 2008. – 72, N 3. – P. 453 – 465.
18. Gulgazaryan G.R. Natural Vibrations of a Cantilever thin Elastic Orthotropic Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, N 5. – P. 534 – 554.
19. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Wilde M.V. Free Localized Vibrations of a Semi-infinite Cylindrical Shell // J. Acoust. Soc. Amer. – 2000. – 107, N 3. – P. 1383 – 1393.
20. Thompson I., Abrahams I.D. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 2002. – 112, N 5. – P. 1756 – 1765.

Поступила 11.10.2010

Утверждена в печать 06.06.2013