

Н. П. Семенюк, Н. Б. Жукова

**УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ВОЛНООБРАЗНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ
ПРИ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: compos@inmech.kiev.ua*

Abstract. A problem on deformation of longitudinally corrugated long non-closed cylindrical shells under the external pressure is considered. The solution is based on relationships of a cubic variant of the Timoshenko model nonlinear theory of shells. The necessity to use the refined equations in the study of post-critical behaviour of shells is shown.

Key words: longitudinally corrugated long non-closed cylindrical shell, Timoshenko – Mindlin model nonlinear theory of shells, stability and post-critical behaviour.

Введение.

Исследованию устойчивости продольно гофрированных цилиндрических оболочек при осевом сжатии посвящены работы [2, 8, 11 – 13]. При нагружении внешним давлением особенности выпучивания поперечно гофрированных цилиндрических оболочек изучены в статьях [17, 18]. Частично устойчивость гофрированных оболочек при комбинации указанных выше нагрузок рассматривалась в [12 – 18], где отмечено, что установленные в упомянутых работах варианты гофрирования, позволяющие значительно повысить критические значения нагрузок, существенно снижают свою эффективность при добавлении к основным действующим нагрузкам таких, которые приводят к возникновению напряжений, направленных по нормали к направлению гофрирования. Такое свойство оболочек с волнообразной поверхностью ограничивает возможности более широкого их использования, кроме конструкций силфонов и им подобных. Из результатов [8] следует, что продольно гофрированные цилиндрические оболочки могут иметь не меньшие значения критических значений внешнего давления, чем круговые, если поперечное сечение составлено из сопряженных дуг окружностей. Это подтверждено в работе [9], где рассмотрены устойчивость и закритическое поведение гофрированных арок. Так как нелинейные уравнения равновесия арок с единичной шириной совпадают с соответствующими уравнениями бесконечных оболочек с произвольной цилиндрической поверхностью, то полученные в [9] результаты применимы к оболочкам с поперечным сечением, аналогичным форме арок. Однако, как известно [7, 10], при расчете деформирования оболочек в закритической стадии может проявиться существенная погрешность из-за неточности используемых зависимостей нелинейной теории.

Учитывая вышеизложенное, ниже предложено решение нелинейной задачи о деформировании продольно гофрированных длинных цилиндрических незамкнутых оболочек (панелей) при внешнем давлении. Решение базируется на более точных уравнениях нелинейной теории.

1. Основные соотношения кубического варианта нелинейной теории оболочек Тимошенко – Миндлина.

У оболочки бесконечной длины с произвольной цилиндрической поверхностью приведения при постоянных по длине механических характеристиках и нагрузке каждое поперечное сечение находится в одинаковых условиях, вследствие чего напря-

жения и перемещения не зависят от координаты x , совпадающей с образующей рассматриваемой поверхности. Полагаем, что кривая, образующаяся при пересечении плоскостью, нормальной к образующей поверхности приведения, может быть задана в полярной системе координат радиусом R и углом φ . При заданной функции $R(\varphi) = R_0 \rho(\varphi)$ необходимые геометрические характеристики кривой – параметр Ламе A_2 и кривизна $1/R_2$ – определяются по известным формулам дифференциальной геометрии. Так как рассматриваем плоскую деформацию цилиндра, то компонентами вектора перемещения являются проекции на оси y и z , соответственно, v и w . Согласно кинематической гипотезе Тимошенко зависимость этих перемещений от координаты z предполагаем линейной

$$v(z) = v + z\psi; \quad w(z) = w + z\chi, \quad (1)$$

где v и w – перемещения координатной поверхности; ψ и $1 + \chi$ – косинусы касательных к направлениям координатных линий в деформированном состоянии [5].

Подставив представления (1) в выражения компонентов деформаций через перемещения нелинейной теории упругости [5], получим нелинейные по координате z формулы о приближенном представлении распределения перемещений по толщине оболочки [2, 5]. Отметим, что выражения для деформации элемента осевой линии ε_{22} , деформации удлинения нормального элемента ε_{33} , деформации сдвига ε_{23} и приращения кривизны κ_{22} , используемые ниже, принимают такой вид [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2^2 + \theta_2^2); \quad \varepsilon_{23} = \psi + \theta_2(1 + \chi) + \psi \varepsilon_2; \\ \varepsilon_{33} &= \chi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \psi^2); \quad \kappa_{22} = \kappa_2(1 + \varepsilon_2) + \theta_2 \kappa_{23} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left(\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{w}{R_2}; \quad \theta_2 = \frac{1}{A_2} \frac{dw}{d\varphi} + \frac{v}{R_2}; \right. \\ \left. \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{\chi}{R_2} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_2; \quad \kappa_{23} = \frac{1}{A_2} \frac{d\chi}{d\varphi} + \frac{\psi}{R_2} + \frac{\theta_2}{R_2} \right). \quad (3)$$

Традиционное в теории оболочек пренебрежение деформацией ε_{33} и переменностью перемещения w по толщине не приводит к существенной погрешности основных расчетных величин при безмоментном состоянии и при прогибах, не превышающих толщину оболочки.

При исследовании устойчивости и начального закритического поведения цилиндрических оболочек [7, 10] показано, что для длинных оболочек из традиционных композиционных материалов при $\varepsilon_{33} = 0$ не следует принимать функцию χ равной нулю. Если принять $\varepsilon_{33} = 0$, то изменение прогибов по толщине определяется значением χ , являющемся решением уравнения

$$\chi + \frac{1}{2}(\chi^2 + \psi^2) = 0. \quad (4)$$

Находим

$$\chi = -1 + \sqrt{1 - \psi^2}. \quad (5)$$

Подстановка (5) в выражения деформаций (2) дает

$$\varepsilon_{23} = \psi(1 + \varepsilon_2) + \theta_2 \sqrt{1 - \psi^2};$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \left(1 + \varepsilon_2 - \frac{\theta_2 \psi}{\sqrt{1 - \psi^2}} \right) + \frac{1}{R_2} \left(\varepsilon_2 + 1 - \sqrt{1 - \psi^2} \right) (1 + \varepsilon_2) + \frac{\theta_2}{R_2} (\psi + \theta_2), \quad (6)$$

при тех же значениях (3) функций ε_2 и θ_2 и, следовательно, деформации ε_{22} . Это точные выражения деформации ε_{23} и кривизны κ_{22} в рамках гипотез Тимошенко.

Так как величина ψ ассоциируется с одним из направляющих косинусов касательной к деформированному нормальному элементу, то очевидно, что $|\psi| \leq 1$. Если $\psi^2 = 0$, то $\chi = 0$. Если же $\psi^2 \rightarrow 1$, то $1 + \chi \rightarrow 0$, но равенство $\psi^2 = 1$ физически невозможно. Следовательно, вместо (5) можно использовать разложение в степенной ряд Тейлора

$$\chi = -\frac{1}{2}\psi^2 - \frac{1}{8}\psi^4 - \dots \quad (7)$$

Ограничившись в этом ряду только первым членом, получим соотношения кубического варианта нелинейной теории Тимошенко – Миндлина, предложенного и применявшегося в [10]. Вместо (2) в этом случае имеем

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_2^2 + \theta_2^2); \quad \varepsilon_{23} = \psi \left(1 + \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\psi\theta_2 \right) + \theta_2; \quad (8)$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} (1 + \varepsilon_2 - \theta_2\psi) + \frac{1}{R_2} \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) (1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{R_2} \theta_2 (\psi + \theta_2).$$

Соотношения упругости для случая симметричного строения оболочки по толщине имеют такой вид:

$$T_{22} = C_{22}\varepsilon_{22}; \quad M_{22} = D_{22}\kappa_{22}; \quad T_{23} = C_{44}\varepsilon_{23}. \quad (9)$$

Нелинейные уравнения равновесия получим, воспользовавшись принципом возможных перемещений. В рассматриваемом случае представим его в виде уравнения

$$\int_0^{\varphi_N} (T_{22}\delta\varepsilon_{22} + M_{22}\delta\kappa_{22} + T_{23}\delta\varepsilon_{23}) A_2 d\varphi - q \int_0^{\varphi_N} [(1 + \varepsilon_2)\delta w - \theta_2\delta v] A_2 d\varphi = 0, \quad (10)$$

записанного для криволинейного стержня единичной ширины, на который действует давление интенсивностью q . Давление направлено к центру кривизны как исходной, так и деформированной поверхности. Если в (10) подставить выражения вариаций деформации (8), то принцип возможных перемещений принимает вид

$$\left(T_{22}^* \delta v + T_{23}^* \delta w + M_{22}^* \delta \psi \right) \Big|_0^{\varphi_N} - \int_0^{\varphi_N} \left[\left(\frac{dT_{22}^*}{d\varphi} - \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* \right) \delta v + \right. \\ \left. + \left(\frac{dT_{22}^*}{d\varphi} - \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* \right) \delta w + \left(\frac{dM_{22}^*}{d\varphi} - \frac{A_2}{R_2} \bar{T}_{23} \right) \delta \psi \right] d\varphi - \\ - q \int_0^{\varphi_N} [(1 + \varepsilon_2)\delta w - \theta_2\delta v] A_2 d\varphi = 0, \quad (11)$$

где T_{22}^* , T_{23}^* , M_{22}^* – проекции усилий и моментов, действующие на элемент деформированного стержня, на направления осей до деформации

$$\begin{aligned} T_{22}^* &= \left(T_{22} + \frac{1}{R_2} M_{22} \right) (1 + \varepsilon_2) + T_{23} \psi + \frac{1}{R_2} M_{22} \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{R_2}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \right); \\ T_{23}^* &= T_{23} \left(1 - \frac{1}{2} \psi^2 \right) + \left(T_{22} + \frac{1}{R_2} M_{22} \right) \theta_2 + \frac{1}{R_2} M_{22} \left(\psi + \theta_2 - \frac{R_2}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \psi \right); \\ M_{22}^* &= M_{22} (1 + \varepsilon_2 - \psi \theta_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Присутствующая при $\delta\psi$ величина \bar{T}_{23} отличается от T_{23}^* (проекция на различные оси [6]).

С принятой точностью имеем равенство

$$\bar{T}_{23} = T_{23} (1 + \varepsilon_2 - \psi \theta_2) + \frac{1}{R_2} M_{22} \left(\psi + \theta_2 + \varepsilon_2 \psi - \frac{R_2}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \theta_2 \right). \quad (13)$$

Из представленного таким образом принципа возможных перемещений получаем три уравнения равновесия

$$\frac{dT_{22}^*}{d\varphi} - \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* - A_2 q \theta_2 = 0; \quad \frac{dT_{23}^*}{d\varphi} + \frac{A_2}{R_2} T_{23}^* + A_2 q (1 + \varepsilon_2) = 0; \quad \frac{dM_{22}^*}{d\varphi} - A_2 \bar{T}_{23} = 0, \quad (14)$$

и граничные условия относительно усилий T_{22}^* , T_{23}^* и момента M_{22}^* .

Совокупность соотношений (14) с учетом выражений ε_2 и θ_2 через перемещения (3), (12) и уравнения (13) с граничными условиями при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_N$ относительно трех разрешающих функций достаточна для исследования напряженно-деформированного состояния замкнутых или открытых длинных цилиндрических оболочек с произвольной формой поперечного сечения на траектории нагружения при малых и немалых перемещениях и углах поворота.

Заметим, что применение таких уравнений к исследованию начального закритического поведения круговых цилиндрических оболочек в [7, 10] позволило получить значение коэффициента закритического поведения b [10], совпадающее с точным его значением [19] без учета деформаций поперечного сдвига, и изучить влияние на него поперечной податливости материала.

В случае малых углов поворота уравнения существенно упрощаются, так как поправкой, вносимой учетом нелинейных слагаемых в выражения деформаций поперечного сдвига ε_{23} и кривизны κ_{22} , предполагается возможным пренебречь. При линейных выражениях ε_{23} и κ_{22} имеем

$$T_{22}^* = T_{23} + \frac{1}{R_2} M_{22}; \quad T_{23}^* = T_{23} + \left(T_{22} + \frac{1}{R_2} M_{22} \right) \theta_2; \quad M_{22}^* = M_{22}. \quad (15)$$

Усилие T_{22}^* является суммой двух слагаемых, так как кривизна κ_{22} в линейном случае имеет вид

$$\kappa_{22} = \frac{1}{A_2} \frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{1}{R_2} \varepsilon_2. \quad (16)$$

Заметим, что наличие ε_2/R_2 малосущественно для коротких и средней длины оболочек, но весьма существенно для длинных [4].

2. Разрешающая система уравнений.

Для решения задачи воспользуемся соотношениями и уравнениями в безразмерном виде. С этой целью введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{vR_0}{t^2}; \quad \bar{w} = \frac{w}{t}; \quad h = \frac{t}{R_0}; \quad t_{22} = \frac{T_{22}}{C_{22}} \frac{R_0^2}{t^2}; \quad t_{23} = \frac{T_{23}}{C_{22}} \frac{R^2}{t^2}; \quad m_{22} = \frac{M_{22}R_0^2}{C_{22}t^3}; \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \varepsilon_{22} \frac{R_0^2}{t^2}; \\ \bar{\varepsilon}_{23} = \varepsilon_{23} \frac{R_0}{t}; \quad \kappa_{22} = \frac{R_0^2}{t} \kappa_{22}; \quad \alpha_{44} = \frac{D_{22}}{C_{22}t^2}; \quad \alpha_{77} = \frac{C_{44}R_0}{C_{22}t}; \quad m_q = \frac{qR_0^3}{C_{22}t^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражения деформаций через перемещения принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 + \frac{1}{2}(h^2\varepsilon_2 + \theta_2^2); \quad \varepsilon_{23} = \psi \left[1 + h^2 \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\psi\theta_2 \right) \right] + \theta_2; \\ \kappa_{22} = \frac{1}{a_2} \frac{d\psi}{d\varphi} \left[1 + h^2 (\varepsilon_2 - \psi\theta_2) \right] + h_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\psi^2 \right) (1 + h^2\varepsilon_2) + h_2\theta_2(\psi + \theta_2); \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{a_2} \frac{dv}{d\varphi} - \frac{\rho_2}{h} w; \quad \theta_2 = \frac{1}{a_2} \frac{dw}{d\varphi} + h_2 v \quad \left(a_2 = \frac{A_2}{R_0}, \quad \rho_2 = \frac{R_0}{R_2}, \quad h_2 = \frac{t}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем также соотношения упругости

$$t_{22} = \varepsilon_{22}; \quad t_{23} = \alpha_{77}\varepsilon_{23}; \quad m_{22} = \alpha_{44}\kappa_{22} \quad (19)$$

и уравнения равновесия

$$\frac{dt_{22}^*}{d\varphi} - a_2\rho_2t_{13}^* - ha_2m_q\theta_2 = 0; \quad \frac{dt_{23}^*}{d\varphi} + a_2\rho_2t_{22}^* + a_2m_q(1 + h^2\varepsilon_2)_2 = 0; \quad \frac{dm_{22}^*}{d\varphi} - \bar{t}_{13} = 0. \quad (20)$$

В приведенных соотношениях опущена черта над безразмерными величинами, так как размерные – ниже не используются.

Введем разрешающие функции:

$$y_1 = t_{22}^*; \quad y_2 = t_{23}^*; \quad y_3 = m_{22}^*; \quad y_4 = v; \quad y_5 = w; \quad y_6 = \psi. \quad (21)$$

Запишем выражения для функций y_1, y_2, y_3 , используя зависимости (12). Для сокращения записи введем обозначения

$$\begin{aligned} q_1 = h^2\psi; \quad q_2 = -\frac{1}{2}h^2\psi^2; \quad P_1 = h^2(\varepsilon_2 - \psi\theta_2^2); \\ P_2 = h^2 \left(\frac{1}{a_2} \frac{d\psi}{d\varphi} + 2h_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}h_2\psi^2 \right); \quad P_3 = h_2(\psi + \theta_2) - h^2\psi\kappa_2; \\ P_4 = h_2(\psi + \theta_2) + h^2(h_2\psi\varepsilon_2 - \theta_2\kappa_2) = P_3 + h^2[h_2\psi\varepsilon_2 + (\psi - \theta_2)\kappa_2]; \\ \kappa_2 = \frac{1}{a_2} \frac{d\psi}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (22)$$

С учетом этих обозначений получим равенства

$$\begin{aligned} y_1 = t_{22}(1 + h^2\varepsilon_2) + h\psi t_{23} + (h^2 + P_2)m_{22}; \\ y_2 = ht_{22}\theta_2 + t_{23}(1 + q_2) + h(h_2\theta_2 + P_3)m_{22}; \quad y_3 = m_{22}(1 + P_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Необходимо также иметь выражение

$$\bar{t}_{23} = y_2 + t_{23}(P_1 - q_2) - h(t_{22} + h_2 m_{22})\theta_2 + h^3 m_{22} [h_2 \psi \varepsilon_2 + (\psi - \theta_2) \kappa_2]. \quad (24)$$

Соотношения упругости запишем в таком виде:

$$\begin{aligned} t_{22} - \varepsilon_2 - \frac{1}{2}(h^2 \varepsilon_2^2 + \theta_2^2) = 0; \quad \frac{t_{23}}{\alpha_{22}} - \psi - \theta_2 - h^2 \psi \left(\varepsilon_2 - \frac{1}{2} \psi \theta_2 \right) = 0; \\ \frac{m_{22}}{\alpha_{44}} - \kappa_2 (1 + h^2 \varepsilon_2 - h^2 \psi \theta_2) - h_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{1}{2} \psi^2 \right) (1 + h^2 \varepsilon_2) - h_2 \theta_2 (\psi + \theta_2) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Полагаем, что функции (21) и нагрузка m_q могут быть заданы в параметрической форме

$$y_i = y_i(\lambda); \quad m_q = m_q(\lambda), \quad (26)$$

где λ – параметр, который удовлетворяет условию [3]

$$\sum_i^6 \left(\frac{dy_i}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dm_q}{d\lambda} \right)^2 = 1. \quad (27)$$

Заданный в таком виде, он определяет длину кривой, описываемой в 7-ми мерном пространстве уравнениями (26). Продифференцируем по этому параметру соотношения (23) и (25). Получим

$$a_{ij} \dot{x}_j = \omega_i \dot{y}_i + b_i \dot{y}_6 \quad (i, j = 1, \dots, 6), \quad (28)$$

где обозначено: $t_{22} = x_1$, $t_{23} = x_2$, $m_{22} = x_3$, $\varepsilon_2 = x_4$, $\theta_2 = x_5$, $\kappa_2 = x_6$; точка над функциями обозначает производную по λ , коэффициенты a_{ij} определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{11} = 1 + h^2 \varepsilon_2; \quad a_{12} = h\psi; \quad a_{13} = h_2 + P_2; \quad a_{14} = h^2 (t_{22} + h_2 m_{22}); \quad a_{16} = h^2 m_{22}; \\ a_{21} = h\theta_2; \quad a_{22} = 1 + q_2; \quad a_{23} = h(h_2 \theta_2 + P_3); \quad a_{25} = h^2 (t_{22} + 2h_2 m_{22}); \quad a_{26} = -h^3 \psi m_{22}; \\ a_{33} = 1 + P_1; \quad a_{34} = h^2 m_{22}; \quad a_{35} = -h^2 \psi m_{22}; \quad a_{41} = 1; \quad a_{44} = -(1 + h^2 \varepsilon_2); \quad a_{45} = -\theta_2; \\ a_{52} = 1 / \alpha_{77}; \quad a_{54} = -h^2 \psi; \quad a_{55} = -(1 - h^2 \psi^2 / 2); \\ a_{63} = 1 / \alpha_{44}; \quad a_{64} = -(h_2 + P_2); \quad a_{65} = -(h_2 \theta_2 + P_3); \quad a_{66} = 1 + P_1; \\ b_1 = -h(h h_2 m_{22} + t_{23}); \quad b_2 = h^2 \psi t_{23} - h(h_2 - h^2 \kappa_2) m_{22}; \\ b_3 = h^2 m_{22} \theta_2; \quad b_4 = 0; \quad b_5 = 1 + h^2 (\varepsilon_2 - \psi \theta_2); \quad b_6 = P_4; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1; \quad \omega_4 = \omega_5 = \omega_6 = 0.$$

Отсутствующие среди приведенных в (29) коэффициенты $a_{ij} = 0$. Матрица $[a_{ij}]$ – неособенная. Решение системы (28) представим в виде

$$\dot{x}_i = b_{ij} (\omega_j \dot{y}_j) + b_{ij} b_j \dot{x}_6 \quad \left([b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1} \right). \quad (30)$$

В выражениях (30) при заданном i производится суммирование по j . Первые три уравнения системы (30) – выражения производных \dot{t}_{22} , \dot{t}_{23} , \dot{m}_{22} через производные разрешающих функций; 4, 5, 6-е уравнения являются аналогичными выражениями производных $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\kappa}_2$. Если учесть, что

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1}{a_2} \frac{d\dot{v}}{d\varphi} - \frac{\rho_2}{h} \dot{w}; \quad \dot{\theta}_2 = \frac{1}{a_2} \frac{d\dot{w}}{d\varphi} + h_2 \dot{v}; \quad \dot{\kappa}_2 = \frac{1}{a_2} \frac{d\dot{\psi}}{d\varphi}, \quad (31)$$

то последние три выражения можно представить в виде дифференциальных уравнений (здесь также производится суммирование по j)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} \frac{dy_4}{d\varphi} &= \frac{\rho_2}{h} \dot{y}_5 + b_{4j}(\omega_j \dot{y}_j) + b_{4j} b_j \dot{x}_6; & \frac{1}{a_2} \frac{dy_5}{d\varphi} &= -h_2 \dot{y}_4 + b_{3j}(\omega_j \dot{y}_j) + b_{5j} b_j \dot{x}_6; \\ \frac{1}{a_2} \frac{dy_6}{d\varphi} &= b_{6j}(\omega_j \dot{y}_j) + b_{6j} b_j \dot{x}_6. \end{aligned} \quad (32)$$

Продифференцировав по параметру λ уравнения равновесия (20), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{y}_1}{d\varphi} &= a_2 \rho_2 \dot{y}_2 + h a_2 \dot{m}_q \theta_2 + h a_2 m_q \dot{\theta}_2; \\ \frac{d\dot{y}_2}{d\varphi} &= -a_2 \rho_2 \dot{y}_1 - a_2 \dot{m}_q (1 + h^2 \varepsilon_2) - a_2 m_q h^2 \dot{\varepsilon}_2; & \frac{d\dot{y}_3}{d\varphi} &= \frac{a_2}{h} \dot{t}_{23}. \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение для \dot{t}_{23} получим, продифференцировав по параметру λ соотношение (24). Не приводя его в развернутой записи, заметим только, что оно будет содержать производные от \dot{t}_{22} , \dot{t}_{21} , \dot{m}_{22} , $\dot{\varepsilon}_2$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\kappa}_2$. Подставив их значения из (30) в выражение \dot{t}_{23} , а также $\dot{\theta}_2$ – в первое и $\dot{\varepsilon}_2$ – во второе уравнение системы (33), получим три линейных дифференциальных уравнения, разрешенных относительно первых производных по φ от функций \dot{y}_1 , \dot{y}_2 , \dot{y}_3 . Полная система дифференциальных уравнений состоит из трех уравнений (33) и трех уравнений (32). К этим уравнениям необходимо присоединить граничные условия при $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_N$. Формулируем их относительно функций (\dot{y}_1, \dot{y}_4) , (\dot{y}_2, \dot{y}_5) , (\dot{y}_3, \dot{y}_6) , взятых по одной из каждой пары.

Система уравнений (32), (33) совпадает с уравнениями для приращений метода последовательных нагружений [3]. Домножим каждое из этих уравнений на $d\lambda$ и заменим дифференциалы функций конечными приращениями. Однако приращение нагрузки запишем в виде $\Delta m_q = \dot{m}_q \Delta\lambda$. Задавая приращение $\Delta\lambda$, на каждом шаге нагружения находим неизвестный коэффициент \dot{m}_q .

Процедура решения задачи методом последовательных нагружений с неизвестной скоростью нагружения изложена в [9, 14]. Ниже используем разработанную численную методику для исследования нелинейного деформирования сжимаемых поверхностным давлением гофрированных цилиндрических панелей (арок), изготовленных из волокнистых композитов. Однако предварительно получим аналитическое решение задачи об устойчивости при внешнем давлении цилиндрических панелей из материалов с пониженной сдвиговой жесткостью. Аналогичная задача в классической постановке решена в [16, 20].

3. Устойчивость незамкнутой круговой цилиндрической оболочки.

Из нелинейных уравнений (20) при безмоментном докритическом состоянии выводится система уравнений нейтрального равновесия в таком виде [10]

$$\frac{dt_{22}^{(1)}}{d\varphi} + h \frac{dm_{22}^{(1)}}{d\varphi} - t_{23}^{(1)} - h^2 m_q \frac{d\varepsilon_2^{(1)}}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dt_{23}^{(1)}}{d\varphi} + t_{22}^{(1)} + h m_{22}^{(1)} - h^2 m_q \frac{d\theta_2^{(1)}}{d\varphi} = 0;$$

$$\frac{dm_{22}^{(1)}}{d\varphi} - \frac{1}{h}t_{23}^{(1)} = 0. \quad (34)$$

Если в первом уравнении этой системы учесть соотношение между изгибающим моментом m_{22} и перерезывающей силой в виде третьего уравнения, а также, что $t_{22}^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)}$, то получим

$$\frac{d\varepsilon_2^{(1)}}{d\varphi} = 0. \quad (35)$$

Так как на концах арки $w = 0$, то $\varepsilon_2^{(1)} = 0$, следовательно, $t_{22}^{(1)} = 0$.

Оставшиеся два уравнения

$$\frac{d^2 m_{22}^{(1)}}{d\varphi^2} + m_{22}^{(1)} - m_q \left(\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + w_1 \right) = 0; \quad \frac{d^2 m_{22}^{(1)}}{d\varphi^2} - \frac{1}{h}t_{23}^{(1)} = 0, \quad (36)$$

запишем в перемещениях

$$\alpha_{44} \left(\frac{d^3 \psi_1}{d\varphi^3} + \frac{d\psi_1}{d\varphi} \right) - m_q \left(\frac{d^2 w_1}{d\varphi^2} + w_1 \right) = 0; \quad \alpha_{44} \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} - \frac{1}{h} \alpha_{77} \left(\psi + \frac{dw}{d\varphi} + hv \right) = 0. \quad (37)$$

Решение для этих уравнений определим в виде

$$v = Be^{k\varphi}; \quad w = Ce^{k\varphi}; \quad \psi = De^{k\varphi}. \quad (38)$$

Из условия нерастяжимости осевой линии $\varepsilon_2^{(1)} = 0$ при $k \neq 0$ имеем

$$B = \frac{1}{kh}C. \quad (39)$$

Первое уравнение системы (37) при $k^2 + 1 \neq 0$ позволяет получить зависимость между коэффициентами D и C в виде

$$D = \frac{m_q}{k\alpha_{44}}C. \quad (40)$$

С использованием (39) и (40) из второго уравнения (37) получаем характеристическое уравнение

$$k^2 (hm_q - \alpha_{77}) = \alpha_{77} \left(1 + \frac{m_q}{\alpha_{24}} \right), \quad (41)$$

откуда следует равенство

$$k^2 = -\frac{\alpha_{77}}{\alpha_{77} - hm_q} \left(1 + \frac{m_q}{\alpha_{44}} \right). \quad (42)$$

Если оболочка теряет устойчивость, то $hm_q \leq \alpha_{77}$. Равенство (42) имеет место при разрушении материала вследствие внутренней неустойчивости. Корни этого уравнения:

$$k_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{\alpha_{77}}{\alpha_{77} - hm_q} \left(1 + \frac{m_q}{\alpha_{44}} \right)} = \pm ik. \quad (43)$$

В этом случае решение для w имеет вид

$$w = C_1 \sin k\varphi + C_2 \cos k\varphi. \quad (44)$$

Так как $w=0$ при $\varphi=0$, то $C_2=0$. При $\varphi=\varphi_N$ будем иметь

$$C_1 \sin k\varphi_N = 0. \quad (45)$$

С учетом того, что $\int_0^{\varphi_N} w d\varphi = 0$ [16], наименьший корень уравнения (45) будет

$$k = \frac{2\pi}{\varphi_N}. \quad (46)$$

Из формулы (42) следует, что

$$m_q = [\alpha_{77}(k^2 - 1)] / [(\alpha_{77} / \alpha + hk^2)]. \quad (47)$$

С учетом значения k (46) получим

$$m_q = \alpha_{44} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p \quad \left(p = \left[1 + 4h \frac{\pi^2 \alpha_{44}}{\varphi_N^2 \alpha_{77}} \right]^{-1} \right). \quad (48)$$

При $\varphi_N = \pi$ критическая нагрузка для панели совпадает с критической нагрузкой для замкнутой оболочки [15]. Такое же совпадение имеет место в классическом решении [16].

Формула (48) будет использована для оценки значений критических нагрузок, получаемых численным методом.

4. Числовые результаты и их анализ.

Рассмотрим устойчивость и закритическое поведение двух типов гофрированных оболочек. Для *первого типа* (CC) характерно то, что направляющая цилиндрической поверхности представляет собой волнообразную кривую, состоящую из дуг окружностей положительной и отрицательной кривизн. Сопряжение дуг выполнено так, что угол наклона касательной к кривой изменяется без скачков. Процедура вычисления параметров A_2 и R_2 волнообразной кривой такого вида изложена в [9].

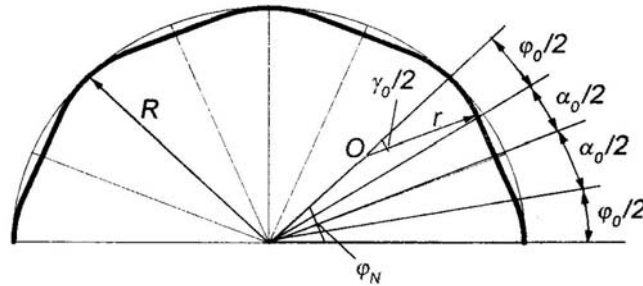


Рис. 1

Второй тип гофрирования (CS) отличается от первого тем, что участок направляющей с вогнутой окружностью заменяется отрезком прямой. На рис. 1 показан вид поперечного сечения второго типа при $N=4$, где N – количество волн, которые укладываются в пределах дуги, определяемой центральным углом φ_N . Это значит, что часть кривой $\rho(\varphi)$, заданной при $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, где $\varphi_1 = \varphi_N / N$ периодически повторяется N раз. Полагаем, что угол φ_1 разбит на три части так, что $\varphi_1 = \varphi_0 / 2 + \alpha_0 + \varphi / 2$. На участке $(0, \varphi_0 / 2)$ функция $\rho(\varphi) = \omega_1 \cos \varphi + E_2(\varphi)$, где $\omega_1 = \cos \varphi_0 / 2 - p \cos \gamma_0 / 2$; $E_2 = \sqrt{p^2 - \omega_1^2 \sin^2 \varphi}$; $p = r / R_0$; r – радиус малой окружности, для которой центральный угол равен γ_0 .

При $\varphi_0/2 \leq \varphi \leq \varphi_0/2 + \alpha_0$, вводя замену $\varphi_1 = \varphi - \varphi_0/2 - \alpha_0/2$, отрезок прямой можно задать уравнением $\rho(\varphi_1) = (\cos \alpha_0/2) / \cos \varphi$.

В этом случае имеем $\rho_2 = 0$; $a_2 = (\cos \alpha_0/2) / \cos^2 \varphi$.

Для соблюдения непрерывности производной $\rho'(\varphi)$ в этом варианте необходимо, чтобы $\gamma_0 = \varphi_0 + \alpha_0$. При проведении расчетов обратим внимание, во-первых, на различие в критических нагрузках и характере закритического поведения однотипных оболочек, устанавливаемое с помощью кубического варианта нелинейной теории модели Тимошенко и известного простейшего квадратичного. Второй не менее важный вопрос, который можно выяснить с помощью разработанного алгоритма, заключается в том, как зависит от пониженной сдвиговой жесткости материала характер закритического поведения рассматриваемых оболочек. Ранее в [1] проведено исследование начального закритического поведения замкнутых круговых цилиндрических оболочек из композитов. Гофрированные оболочки могут иметь различные геометрические параметры, которых значительно больше, чем у круговых. Некоторые особенности докритического и закритического деформирования оболочек в зависимости от формы их поперечного сечения рассмотрим на примерах расчета указанных выше двух типов.

Во всех примерах механические характеристики компонентов волокнистого композита, из которого изготовлены оболочки, предполагаем соответствующими средним значениям для углеродных нанотрубок ($E_a = 1,14$ ТПа; $\nu_a = 0,2$) и эпоксидно-малеиновой композиции ($E = 3,15$ ГПа; $\nu_a = 0,382$). При объемном содержании наполнителя $\xi = 0,7$ жесткость на растяжение оболочки толщиной $t = 0,01$ м в окружном направлении $C_{22} = 0,785$ Мн/м. Безразмерные параметры $\alpha_{22} = 1$; $\alpha_{44} = 0,08333$; $\alpha_{77} = 0,80586$. Коэффициент p , с помощью которого в формуле (48) учитывается снижение критического давления за счет деформаций поперечного сдвига, в данном случае мало отличается от единицы ($p = 0,996$). Для оболочки толщиной $t = 0,1$ м жесткость C_{22} увеличивается на порядок, коэффициент α_{77} уменьшается в таком же отношении, коэффициент α_{44} остается неизменным, а параметр $p = 0,7074$. Для данного композита отношение $E_2 / G_{23} = 120$, в то время как для боропластика $E_2 / G_{23} = 30$, для стеклопластика $E_2 / G_{23} = 10$. Здесь учтено, что направление волокон совпадает с направляющей цилиндрической оболочки.

Из полученных данных следует, что влияние пониженной сдвиговой жесткости на устойчивость конструкций из композитов будет наиболее существенным для нанокомпозитов. На рис. 2 показаны равновесные кривые для оболочек с поперечным сечением вида CS (рис. 1) с $h = 0,01$;

$N = 4$; $\varphi_k = \pi$, вычисленные с использованием упрощенного варианта теории Тимошенко – Миндлина. На оси абсцисс отложены значения отношения w/t , на оси ординат – отношения вычисляемого значения критической нагрузки m_q для рассматриваемой оболочки к критическому значению для тонкого кольца $m_{q,c} = 3\alpha_{44}$. Если использовать аналитическое решение (48), то

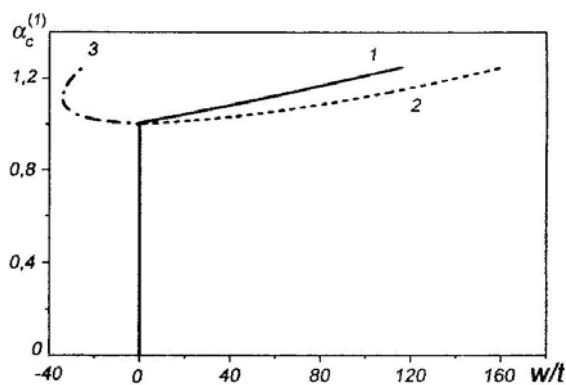


Рис. 2

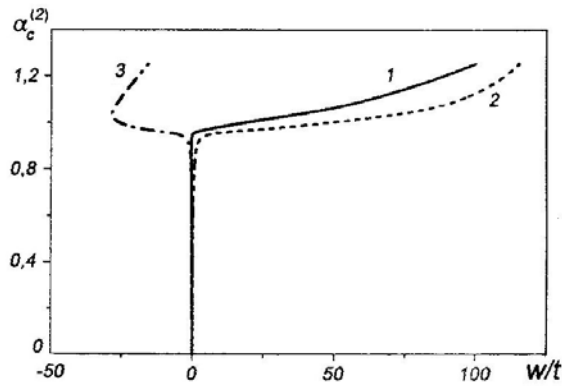


Рис. 3

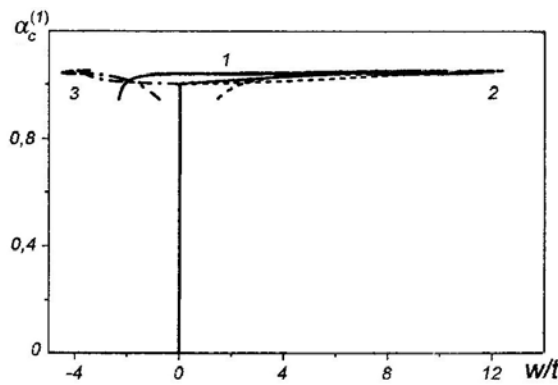


Рис. 4

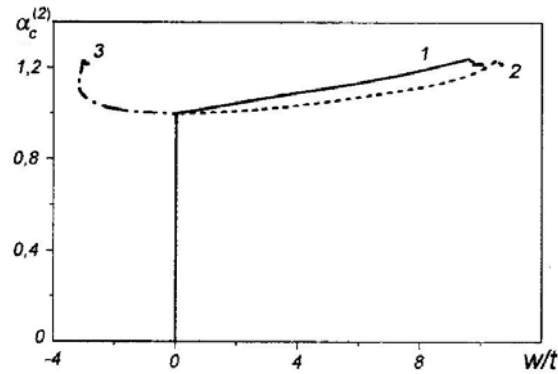


Рис. 5

$$\alpha_c = \frac{m_q}{m_{q,c}} = \frac{1}{3} \left(\frac{4\pi^2}{\varphi_N^2} - 1 \right) p.$$

Отсюда следует, что при $\varphi_N = \pi$ имеем $m_q / m_{q,c} = p$. Расчет согласно методике [9, 14] дает $\alpha_c^{(1)} = 1,096$ при $p = 0,996$. Кривые 1, 2, 3 на рис. 2 описывают характер перемещения w в точках сечения $\varphi = \pi/2$; $\pi/4$; $3\pi/4$. Точка $\alpha_c = 1,0$ в данном случае не является предельной, так как нагрузка на оболочку может превосходить это значение, однако при этом происходит непропорционально большое нарастание прогибов.

На рис. 3 представлены кривые для той же оболочки, но полученные с использованием кубического варианта теории типа Тимошенко – Миндлина. На этих кривых параметр $\alpha_c^{(2)} = 0,963$, но нагрузка может возрастать только до $\alpha_n = 1,1$. По достижению этого значения рост прогибов происходит при уменьшающейся нагрузке.

Равновесные кривые на рис. 4 и 5 построены для оболочек типа CS толщиной $t = 0,1$ м, при $N = 16$, соответственно, по квадратичному и кубическому вариантам теории Тимошенко – Миндлина. Параметр $p = 0,707$, а $\alpha_c^{(1)} = 0,710$ в первом случае и $\alpha_c^{(2)} = 0,709$ – во втором. Однако, как и в первом примере, значение $\alpha_c^{(1)}$ может быть существенно превзойдено при увеличивающихся прогибах до $\alpha_n = 0,870$. Этот характер закритического поведения не подтверждается при уточненном расчете. Закритические участки равновесных кривых 1, 2, 3 на рис. 5 идут почти параллельно оси абсцисс, незначительно искривляясь вверх при больших прогибах. Такое начальное закритическое поведение определяется малым положительным значением коэффициента b , полученным в [10] согласно теории Койтера [19].

Оболочки, поперечное сечение которых состоит из периодически повторяющихся сопряженных дуг окружностей положительной и отрицательной кривизн (тип СС), также исследованы на устойчивость с использованием двух указанных подходов. Равновесные кривые на рис. 6 и 7 получены для оболочки толщиной $t = 0,1$ м при $N = 16$; $R_0 = 1$ м. Для этой оболочки принято: $\alpha_{77} = 0,0161$; $p = 0,325$. В упро-

щенной постановке получено $\alpha_c^{(1)} = 0,251$. При использовании уточненных соотношений вычислено значение $\alpha_c^{(2)} = 0,207$. Характер закритического поведения оболочки, описываемый кривыми 1–3 на рис. 7 отличается существенной нелинейностью в докритическом состоянии, ростом прогибов при постоянной нагрузке, резким снижением нагрузки и сменой направлений перемещений в разных точках периметра поперечного сечения.

С целью выяснения влияния сдвиговой податливости материала на получаемые при использовании обоих подходов критические нагрузки с оценкой характера закритического поведения выполнен расчет такой же оболочки, как в предыдущем примере, но параметр α_{77} принят в 5 раз большим ($\alpha_{77} = 0,0805$). Равновесные кривые обоих подходов приведены на рис. 8 и 9. При заданном значении параметра α_{77} имеем $p = 0,707$. Приближенный подход дает $\alpha_c^{(1)} = 0,547$. Вычисления на основании уточненного варианта дают $\alpha_c^{(2)} = 0,546$, что соответствует предельной нагрузке. При этой нагрузке происходит рост перемещений до величины примерно равной половине толщины, а затем наступает резкое падение нагрузки при изменении направлений и росте перемещений w .

Отметим, что критические нагрузки $\alpha_c^{(1)}$ и $\alpha_c^{(2)}$ в рассматриваемом примере ближе между собой, чем в предыдущем примере. Оценка закритического поведения на основании приближенного подхода оказывается также весьма близка к получаемой при более точном расчете. Большое различие в ходе кривых 1–3 на рис. 7 и 9 после достижения точек $\alpha_c^{(1)}$ и $\alpha_c^{(2)}$ обусловлено изменением сдвиговой жесткости.

Используя только уточненную теорию, рассмотрим пример расчета оболочки типа CS толщиной $t = 0,1$ м при $N = 8$ для двух значений сдвиговой жесткости. Равновесные кривые при $\alpha_{77} = 0,0806$ показаны на рис. 10. Здесь, в отличие от предыдущих примеров, вычисляемая критическая нагрузка отнесена к нагрузке, определяемой по формуле (48). В этом случае имеем $\alpha_c^{(2)} = 0,986$. Кривые имеют начальный участок,

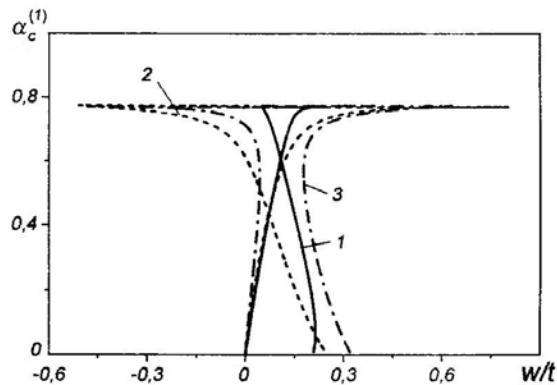


Рис. 6

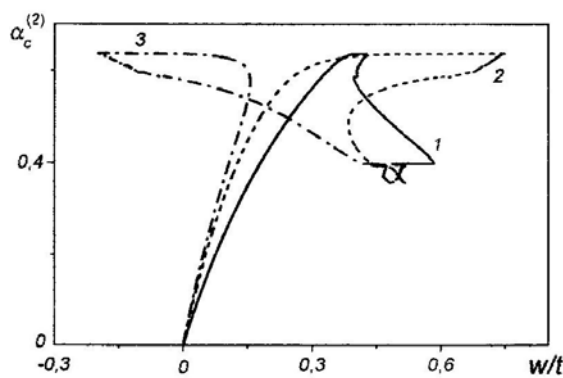


Рис. 7

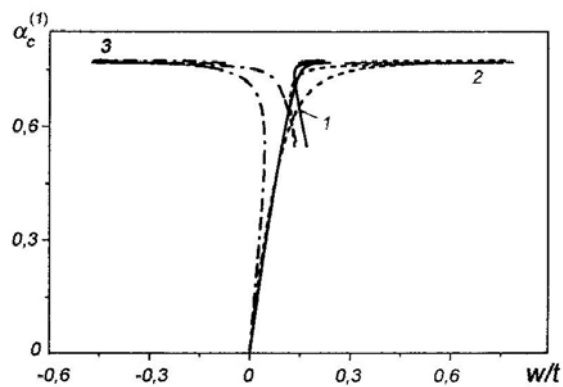


Рис. 8

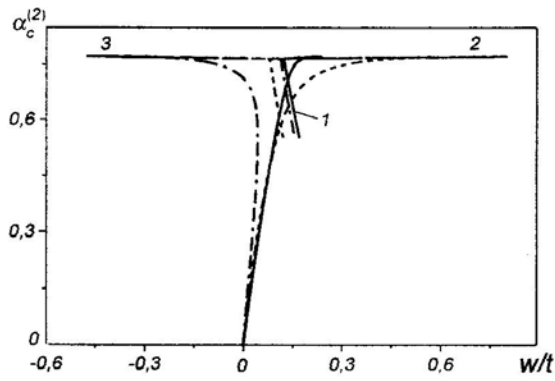


Рис. 9

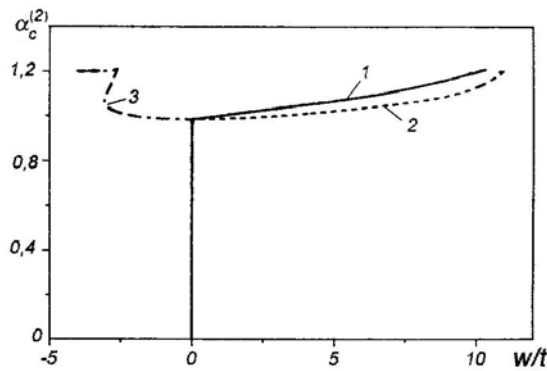


Рис. 10

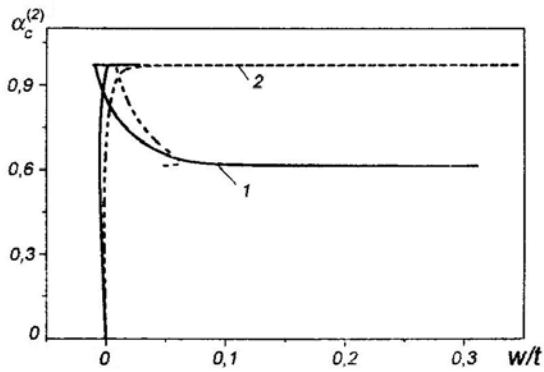


Рис. 11

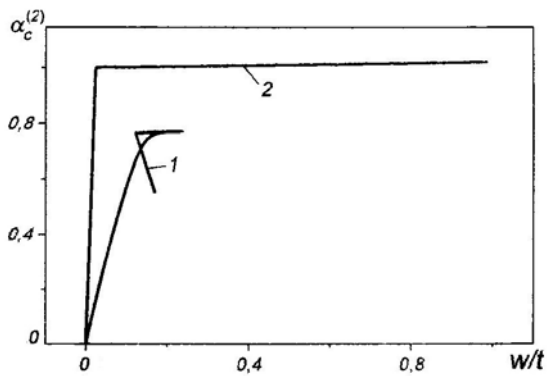


Рис. 12

практически параллельный оси абсцисс, который затем загибается кверху. Такое поведение кривых свидетельствует об устойчивом закритическом поведении оболочки. Полученные при $\alpha_{77} = 0,00806$ равновесные кривые имеют вид, показанный на рис. 11. Для этой оболочки $\alpha_c^{(2)} = 0,973$. В отличие от кривых на рис. 10, приведенные на рис. 11 имеют ниспадающий характер. Снижение параметра α_{77} привело в этом приме-

ре к такому изменению жесткости оболочки в целом, что ее закритическое поведение становится неустойчивым. Параметр $p = 0,707$ – для исходной оболочки и $p = 0,195$ – для оболочки с уменьшенной сдвиговой жесткостью. Поэтому, хотя значения $\alpha_c^{(2)}$ в обоих случаях близки, критические нагрузки отличаются в той же мере, как отличаются приведенные значения параметра p .

С использованием приведенных на рис. 5 и 9 кривых можно сопоставить критические нагрузки и закритическое поведение оболочек, поперечное сечение которых образовано дугами окружностей и отрезками прямых, сопряженных с помощью таких же дуг. На рис. 12 представлены кривые 1 и 2, полученные для оболочек типа CS и CC при $\varphi = \pi/2$, $N = 16$. Критические значения нагрузки для оболочек первого типа (CS) оказываются на 20% выше, чем для оболочек типа CC. Закритическое поведение этих оболочек также существенно различается. В первом варианте прогибы возрастают при постоянной нагрузке, во втором – небольшой участок неизменной нагрузки сменяется резким ее падением при росте прогибов. Этот факт свидетельствует о том, что для оболочек типа CC достижение нагрузкой критического значения определяет исчерпание ее несущей способности, тогда как оболочки типа CS продолжают сохранять равновесие при критическом давлении, независимо от увеличения прогибов.

Выводы.

Полученные результаты позволяют сформулировать для длинных гофрированных цилиндрических оболочек такие выводы:

1) нелинейной теорией Тимошенко – Миндлина в квадратичном варианте можно пользоваться не только для расчета критических нагрузок, но также в ряде случаев и для исследования закритического поведения;

2) пониженная сдвиговая жесткость композитов приводит не только к снижению критических нагрузок, но может также существенно влиять на характер закритического поведения оболочек;

3) из двух рассмотренных типов гофрирования более высокие критические значения давления имеют оболочки, поперечное сечение которых состоит из сопряженных дугами окружностей отрезков прямых.

Если ограничиться длинными круговыми оболочками, то полученные с использованием развитой численной методики результаты согласуются с теми, которые представлены в работах [7, 10].

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про деформування поздовжньо гофрованих довгих незамкнених циліндричних оболонок при зовнішньому тиску. Розв'язок базується на співвідношеннях кубічного варіанту нелінійної теорії оболонок Тимошенко – Миндлина. Показано необхідність використання уточнених рівнянь при дослідженні закритичної поведінки оболонок.

1. Баженов В.А., Семенюк Н.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Ванін Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. Устойчивость оболочек из армированных материалов. – К.: Наук. думка, 1978. – 212 с.
3. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
4. Гуляев В.М., Баженов В.А., Гоцуляк Б.А. Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Вища шк., 1982. – 255 с.
5. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М. – Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
6. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
7. Семенюк Н.П. Уточненный вариант нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и его приложение к расчету начального закритического поведения длинных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 8. – С. 47 – 52.
8. Семенюк Н.П. Устойчивость некруговых цилиндрических оболочек, состоящих из панелей постоянной кривизны, при осевом сжатии // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 6. – С. 115 – 125.
9. Семенюк Н.П. Устойчивость гофрированных арок при внешнем давлении // Прикл. механика. – 2013. – 49, № 2. – С. 90 – 99.
10. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. О точности нелинейных соотношений теории оболочек типа Тимошенко в случае пренебрежения поперечным сжатием // Прикл. механика. – 1990. – 26, № 10. – С. 30 – 36.
11. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б., Несходовская Н.А. Устойчивость ортотропных гофрированных цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Механика композитных материалов. – 2002. – 38, №3. – С. 371 – 386.
12. Семенюк Н.П., Жукова Н.Б., Остапчук В.В. Устойчивость волнообразных некруговых оболочек из композитов при внешнем давлении // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 12. – С. 91 – 102.
13. Семенюк Н.П., Несходовская Н.А. Применение теории типа Тимошенко к исследованию устойчивости гофрированных цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 2002. – 38, № 6. – С. 99 – 107.
14. Семенюк Н.П., Трач В.М., Жукова Н.Б. Об исследовании нелинейного поведения тонких оболочек шаговым методом // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 85 – 93.
15. Гарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.
16. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1955. – 567 с.
17. Babich I.Yu., Zhukova N.B., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Circumferentially Corrugated Cylindrical Shells under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 8. – P. 919 – 928.
18. Babich I.Yu., Zhukova N.B., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Circumferentially Corrugated Shells under Hydrostatic Pressure // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 9. – P. 1001 – 1038.
19. Budiansky B. Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures // Adv. Appl. Mech. – 1974. – 14. – P. 2 – 65.
20. Hurlbrink E. Festigkeitsberechnung von röhrenartigen Körpern, die unter äusserem Drucke stehen // Schiffbau. – 1907/1908. – 9, N 14. – S. 517 – 523.

Поступила 24.12.2010

Утверждена в печать 06.06.2013