

И. Ф. Киричок

**ВЫНУЖДЕННЫЕ МОНОГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ  
И ВИБРОРАЗОГРЕВ ВЯЗКОУПРУГИХ ГИБКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК  
С ПЬЕЗОСЛОЯМИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев; e-mail: TEPM @ inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The coupled problem on forced axially symmetric vibrations and dissipative heating of the viscoelastic circular flexibility rigidly clamped and hingedly fixed plate with piezoactive sensors and actuators. Different aspects of mechanical and electric excitation of vibrations as well as the possibility of mechanically induced vibrations suppression by means of the voltage application at the piezolayers are studied. The features of effect of the geometric nonlinearity on the frequency dependence flexure, dissipative heating and electrical index sensor is also electromechanical monoharmonic loading.

**Key words:** forced vibrations, piezoactuator, sensor, dissipative heating, temperature, active damping, geometrical nonlinearity

**Введение.**

Тонкостенные пластинки из вязкоупругих и композитных материалов в качестве конструктивных элементов находят широкое применение в современной технике. В процессе эксплуатации они подвергаются воздействию высокого уровня нестационарных, в частности, гармонических во времени нагрузок или работают в резонансном режиме нагружения, когда амплитуды прогибов могут достигать толщины пластинки. Из-за гистерезисных потерь в материале возникает диссипативный разогрев пластинки. Колебания с большими амплитудами и разогрев могут привести к потере функциональной способности элемента из-за высокого уровня напряжений, температуры саморазогрева и др. В связи с этим возникает задача об исследовании высокоамплитудных режимов колебаний гибких пластинок и способах их гашения. В последние годы, наряду с пассивными способами демпфирования [14 – 16], используют методы активного гашения колебаний [12, 27, 28]. Суть последнего состоит в том, что в конструктивные элементы вводят пьезоэлектрические компоненты, выполняющих роль или датчиков (сенсоров) измерения кинематических параметров, или возбудителей (актуаторов) механических колебаний [12, 24, 25, 28].

Проблемы активного контроля колебаний тонкостенных пластинчатых и оболочечных элементов конструкций с помощью пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов в изотермической постановке задачи обсуждаются в ряде статей [24, 25 и др.] и обобщены в монографиях [26, 27]. На эффективность гашения механических колебаний тонкостенных пластинок влияют такие факторы, как учет вязкоупругих электро-механических свойств материалов пассивной (без пьезоэффекта) и пьезоактивной составляющих системы, геометрические размеры объекта, механические граничные условия, вибрационный разогрев, возникающий вследствие внутренней диссипации энергии. Исследованию этих вопросов посвящены работы [6, 7, 10 и др.]. Термомеханомеханические теории слоистых тонкостенных элементов из вязкоупругих пассивных и пьезоактивных составляющих, учитывающие физическую и геометрическую нелинейности, представлены в [8, 9, 11 – 13, 18, 19, 28 и др.]. На основании этих тео-

рий развиты математические модели стационарных колебаний и диссипативного разогрева вязкоупругих гибких пластинок с распределенными актуаторами или сенсорами и решены некоторые задачи методом Бубнова – Галеркина в статьях [8, 13, 18 – 21, 23 и др.]. При этом в аналитических решениях конкретных задач толщина пьезоактивных слоев и их вязкоупругие свойства не учитывались.

В данной статье с использованием численных методов в геометрически нелинейной постановке решена задача о вынужденных околорезонансных колебаниях и диссипативном разогреве гибких круглых пластинок с внешними пьезоэлектрическими слоями, выполняющими роль сенсора или актуатора, при осесимметричном моногармоническом нагружении. Учитывается толщина пьезослоев в жесткостных характеристиках, вязкоупругие свойства пьезоактивного и пассивного материалов, геометрическая нелинейность в квадратичном приближении.

### 1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим трехслойную гибкую круглую пластинку радиуса  $R$ , средний слой которой толщины  $h_0$  изготовлен из пассивного изотропного материала, а внешние слои одинаковой толщины  $h_1$  – из трансверсально-изотропного пьезоэлектрического материала. Слои жестко скреплены между собой. Материалы слоев – вязкоупругие, свойства которых не зависят от температуры. Пластинка отнесена к полярной системе координат  $r, \theta, z$  с началом отсчета нормальной координаты  $z = 0$  в центре срединной плоскости пассивного слоя. Примем, что пьезоэлектрические слои имеют одинаковые свойства, но противоположные направления поляризации по толщине. При этом верхний ( $z \geq h_0/2$ ) и нижний ( $z \leq -h_0/2$ ) слои характеризуются значениями пьезомодуля  $d_{31}$  и  $-d_{31}$ , соответственно. Внешние плоскости пьезослоев и контактирующие с пассивным слоем их внутренние плоскости электродированы. Внутренние электроды поддерживаются при нулевом потенциале  $\varphi(\pm h_0/2) = 0$ . Электродированные внешние плоскости разделены кольцевым разрезом бесконечно малой ширины и радиуса  $r = r_0 \leq R$ .

Пластинка нагружена осесимметричным моногармоническим во времени  $t$  нормальным поверхностным давлением  $q_z = q'_z(r) \cos \omega t$  с круговой частотой  $\omega$ , близкой к резонансной. Пьезоэлектрические слои радиуса  $r = r_0$  выполняют роль или актуатора, или сенсора. Если пьезослой является актуатором, то к их внешним электродам радиуса  $r = r_0$  подводится разность электрических потенциалов  $\varphi_1(h_0/2 + h_1) - \varphi_1(-h_0/2 - h_1) = \text{Re}(2V_A e^{i\omega t})$  с частотой механической нагрузки, действие которой подавляется или усиливается в зависимости от амплитуды и фазы электрического возбуждения. Электроды в области  $r > r_0$  закорочены ( $V_A = 0$ ). Если пьезослой выполняет роль сенсора, предполагаем, что его электроды разомкнуты, так что на внешних электродированных поверхностях  $s_{\pm}$  выполняется условие [12, 21]

$$\iint_{s_{\pm}} D_z r dr d\theta = 0, \quad (1)$$

где  $D_z$  – нормальная составляющая электрической индукции.

В результате механического деформирования пластинки на разомкнутых электродах сенсора возникает разность электрических потенциалов комплексной амплитуды  $V_s = V'_s + iV''_s$ , которую необходимо определить или измерить прибором.

Примем, что контур пластинки свободен в радиальном направлении и шарнирно или жестко закреплен в поперечном направлении. Кроме того, на граничных поверхностях пластинки выполняются условия конвективного теплообмена с внешней средой температуры  $T_s$ .

Двумерную модель трехслойной пластинки строим в предположении о справедливости по всему пакету слоев гипотез Кирхгофа – Лява для механических переменных. Относительно электрических полевых величин принимаем, что тангенциальными составляющими векторов индукции  $D_r, D_\theta$  и напряженности  $E_r, E_\theta$  электрического поля в плоскости каждого пьезослоя можно пренебречь по сравнению с нормальными составляющими  $D_z, E_z$ . Тогда из уравнений электростатики для индукции  $\partial D_z / \partial z = 0$  следует, что  $D_z = C = \text{const}$  является постоянной по толщине пьезослоя [8, 9]. Температуру диссипативного разогрева принимаем постоянной по толщине пакета слоев пластинки. Предполагаем, что деформации малы, но прогибы пластинки таковы, что в кинематических соотношениях необходимо учитывать квадраты углов поворота. При этом уравнения движения также являются нелинейными.

На основании принятых гипотез трехмерные соотношения вязкоупругой поляризованной вдоль оси  $z$  пьезокерамики [8, 9] для пьезослоя имеют вид

$$\sigma_r = c_{11}^E * e_r + c_{12}^E * e_\theta - b_{31} * E_z; \quad \sigma_\theta = c_{12}^E * e_r + c_{11}^E * e_\theta - b_{31} * E_z; \quad (2)$$

$$D_z = b_{31} * (e_r + e_\theta) + b_{33} * E_z; \quad E_z = -\partial\varphi / \partial z \quad (3)$$

$$(c_{11}^E = 1 / [s_{11}^E (-\nu_E^2)]; \quad c_{12}^E = \nu_E c_{11}^E; \quad \nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E;$$

$$b_{31} = d_{31} / [s_{11}^E (1 - \nu_E)]; \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T (1 - k_p^2); \quad k_p^2 = 2d_{31}^2 / [\varepsilon_{33}^T s_{11}^E (1 - \nu_E)]);$$

$s_{11}^{E*}, s_{12}^{E*}, d_{31}^*, \varepsilon_{33}^{T*}$  – соответственно, изотермические податливости, пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость материала пьезоактивных слоев. Символ \* обозначает интегральный оператор линейной вязкоупругости [5], который для гармонических процессов деформирования вязкоупругих материалов сводится к операции умножения комплексных величин [8]

$$D * f = (D' + iD'')(f' + if''). \quad (4)$$

Для изотропного материала пассивного слоя справедливы зависимости (2), в которых  $c_{11}^E, c_{12}^E, b_{31}$  необходимо заменить, соответственно, на

$$c_{11} = E / (1 - \nu^2); \quad c_{12} = \nu c_{11}; \quad b_{31} = 0, \quad (5)$$

где  $E$  – вязкоупругий модуль Юнга,  $\nu = \text{const}$  – коэффициент Пуассона.

Параметры деформации в соотношениях (2), (3) через тангенциальные  $u$  и нормальные  $w$  перемещения выражаются такими зависимостями:

$$e_r = \varepsilon_r + z\kappa_r; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta; \quad (6)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_r^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \kappa_r = \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r}; \quad \kappa_\theta = \frac{\mathcal{G}_r}{r}; \quad \mathcal{G}_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad (7)$$

где  $\mathcal{G}_r$  – угол поворота.

Комбинируя соотношения (2), (3) с учетом того, что  $D_z = C$  является постоянной величиной, определяем

$$\sigma_r = \left( c_{11}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) e_r + \left( c_{12}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) e_\theta - \frac{b_{31}}{b_{33}} C; \quad \sigma_\theta = \left( c_{12}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) e_r + \left( c_{11}^E + \frac{b_{31}^2}{b_{33}} \right) e_\theta - \frac{b_{31}}{b_{33}} C. \quad (8)$$

Из электростатических зависимостей (3), (6) получим распределение электрического потенциала по толщине, например, верхнего пьезослоя в виде

$$\varphi = -\frac{C}{b_{33}}z + \frac{b_{31}}{b_{33}}\left(ez + \frac{1}{2}\kappa z^2\right) + C_1 \quad (e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta; \kappa = \kappa_r + \kappa_\theta; C_1 = \text{const}). \quad (9)$$

Для верхнего пьезослоя – актуатора, к которому подводится амплитудная разность потенциалов  $\varphi(h_0/2 + h_1) - \varphi(h_0/2) = V_a$ , на основании соотношений (3), (6), (9) имеем

$$C = D_z = -b_{33}\frac{V_a}{h_1} + b_{31}(e + h_*\kappa); \quad E_z = -\frac{V_a}{h_1} + \frac{b_{31}}{b_{33}}(h_* - z)\kappa \left(h_* = \frac{h_0 + h_1}{2}\right). \quad (10)$$

Для нижнего пьезослоя необходимо в (10) коэффициент  $b_{31}$  заменить на  $-b_{31}$ .

Если пьезослой выполняет роль сенсора с неизвестной амплитудной разностью потенциалов  $V_s = \varphi(h_0/2 + h_1) - \varphi(h_0/2)$  на электродах, то из (9) следует, что

$$C = -b_{33}\frac{V_s}{h_1} + b_{31}(e + h_*\kappa). \quad (11)$$

Удовлетворяя (11) электростатическому условию (1), для кругового сенсора радиуса  $r = r_0$  получим выражение для потенциала  $V_s$  в виде

$$\frac{V_s}{h_1} = \frac{2b_{31}}{r_0^2 b_{33}} \int_0^{r_0} (e + h_*\kappa) r dr. \quad (12)$$

Подстановка выражения (12) в соотношение (11) приводит к интегро-дифференциальному выражению для постоянной  $C$  в зависимостях (8). Это усложняет построение для сенсора соотношений между усилиями, моментами и деформациями. Поэтому, следуя [21], при выводе указанных соотношений принимаем условие

$$D_z = C \equiv 0. \quad (13)$$

Вводя вместо напряжений (8) в слоях статически эквивалентные им усилия  $N_r, N_\theta$  и моменты  $M_r, M_\theta$  по пакету слоев с учетом (5), (11) или (13), имеем

$$\begin{aligned} N_r &= C_{11} * \varepsilon_r + C_{12} * \varepsilon_\theta; \quad N_\theta = C_{12} * \varepsilon_r + C_{11} * \varepsilon_\theta; \\ M_r &= D_{11} * \kappa_r + D_{12} * \kappa_\theta + M_E; \quad M_\theta = D_{12} * \kappa_r + D_{11} * \kappa_\theta + M_E; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} (C_{11} &= (c_{11} + 2c_{11}^E \delta)h_0; \quad C_{12} = (\nu c_{11} + 2\nu_E c_{11}^E \delta)h_0; \\ D_{11} &= \frac{h_0^3}{12}(c_{11} + 2c_{11}^E \delta_0^3 + 2\gamma_{33} \delta^3); \quad D_{12} = \frac{h_0^3}{12}(\nu c_{11} + 2\nu_E c_{11}^E \delta_0^3 + 2\gamma_{33} \delta^3); \end{aligned} \quad (15)$$

$$M_E = (h_0 + h_1)V_a; \quad \delta_0^3 = 4\delta^3 + 6\delta^2 + 3\delta; \quad \delta = h_1/h_0; \quad \gamma_{33} = b_{31}^2/b_{33}$$

– для пьезослоев-актуаторов;

$$\begin{aligned} C_{11} &= (c_{11} + 2c_{11}^E \delta + 2\gamma_{33} \delta)h_0; \quad C_{12} = (\nu c_{11} + 2\nu_E c_{11}^E \delta + 2\gamma_{33} \delta)h_0; \quad M_E = 0; \\ D_{11} &= \frac{h_0^3}{12}[c_{11} + 2(c_{11}^E + \gamma_{33})\delta^3]; \quad D_{12} = \frac{h_0^3}{12}[\nu c_{11} + 2(\nu_E c_{11}^E + \gamma_{33})\delta^3] \end{aligned} \quad (16)$$

– для сенсоров).

Уравнения осесимметричных колебаний рассматриваемой пластинки в силу принятых гипотез имеют вид [4]

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(N_r - N_\theta) &= \rho_h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\bar{Q}_r + q_z &= \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\theta) - \bar{Q}_r - N_r \mathcal{G}_r &= 0,\end{aligned}\quad (17)$$

где  $\rho_h = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1$ ,  $\bar{Q}_r = Q - N_r \mathcal{G}_r$ ;  $Q_r$  – перерезывающее усилие;  $\rho_1, \rho_0$  – удельные плотности пьезоактивного и пассивного материалов.

Уравнения колебаний (17) необходимо дополнить механическими граничными условиями. Учитывая, что для круглой сплошной пластинки точка  $r = 0$  является особой, при численном решении задачи рассмотрена пластинка с отверстием в центре достаточно малого радиуса  $r = \varepsilon$ , на контуре которого заданы условия регулярности и симметрии [4], так что

$$N_r = 0; \quad \bar{Q}_r = 0; \quad \mathcal{G}_r = 0 \quad \text{при} \quad r = \varepsilon. \quad (18)$$

На внешнем контуре пластинки граничные условия таковы:

$$N_r = 0, \quad M_r = 0, \quad w_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (19)$$

при шарнирном закреплении;

$$N_r = 0, \quad \mathcal{G}_r = 0, \quad w_r = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (20)$$

при жестком защемлении.

Усредненное за цикл колебаний и по всей толщине пакета слоев пластинки уравнение энергии, описывающее осесимметричное распределение температуры диссипативного разогрева, имеет вид

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\alpha_n}{\lambda h} (T - T_s) + \frac{1}{\lambda h} \hat{W}, \quad (21)$$

где  $h = 2h_1 + h_0$ ;  $\alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ ;  $\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты теплообмена на плоскостях  $\gamma = \mp(h_3/2 + h_1)$ ;  $\lambda$  – усредненный коэффициент теплопроводности;  $a$  – коэффициент температуропроводности;  $T_s$  – температура внешней среды;  $\hat{W}$  – усредненная за период колебаний и по толщине пластинки скорость диссипации [8].

Начальное и граничные тепловые условия записываются так:

$$T = T_0 (t = 0); \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0 (r = \varepsilon); \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha_R (T - T_s) (r = R), \quad (22)$$

где  $\alpha_R$  – коэффициент теплообмена на контуре;  $T_0$  – начальная температура.

## 2. Методика решения задачи.

Для решения задачи о вынужденных колебаниях гибкой пластинки уравнения движения (17) и кинематические соотношения (7) представим относительно искомых величин  $u, w, \mathcal{G}_r, N_r, \bar{Q}_r, M_r$  в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \varepsilon_r - \frac{1}{2} \mathcal{G}_r^2; & \frac{\partial w}{\partial r} &= -\mathcal{G}_r; & \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r} &= -\kappa_r; \\ \frac{\partial N_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} N_r + \frac{1}{r} N_\theta + \rho_h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; & \frac{\partial \bar{Q}_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \bar{Q}_r + \rho_h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q_z; \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} &= -\frac{1}{r} M_r + \frac{1}{r} M_\theta + \bar{Q}_r + N_r \mathcal{G}_r.\end{aligned}\quad (23)$$

При этом из определяющих уравнений (14) определяем

$$\varepsilon_r = J_c * N_r - \nu_c * \frac{u}{r}; \quad \kappa_r = J_D * M_r + \nu_D * \frac{\vartheta_r}{r} - J_D * M_E; \quad (24)$$

$$N_\theta = \nu_c * N_r + B_{22} * \frac{u}{r}; \quad M_\theta = -\nu_D * M_r + D_{22} * \frac{\vartheta_r}{r} + (1 + \nu_D) * M_E$$

$$\left( J_c = 1 / C_{11}; \quad J_D = 1 / D_{11}; \quad \nu_c = C_{12} / C_{11}; \quad \nu_D = -D_{12} / D_{11}; \right. \quad (25)$$

$$\left. B_{22} = C_{11}(1 - \nu_c^2); \quad D_{22} = D_{11}(1 - \nu_D^2) \right).$$

При моногармоническом нагружении вида

$$q_z = q'_z \cos \omega t - q''_z \sin \omega t \quad (q''_z = 0) \quad (26)$$

строим приближенное решение нелинейных уравнений (23) в виде гармонического ряда по времени [8]. Ограничимся построением решения в одномодовом приближении для переменных  $A = \{w, \vartheta_r, \bar{Q}_r, M_r, M_\theta, \kappa_r\}$ , характеризующих изгиб пластинки, и с удержанием вторых гармоник для переменных  $B = \{u, N_r, \varepsilon_r, N_\theta\}$  плоского деформирования пластинки, так что

$$A = A' \cos \omega t - A'' \sin \omega t; \quad B = B^0 + \sum_{k=1}^2 (B^k \cos k\omega t - B''^k \sin k\omega t). \quad (27)$$

Подставляя выражения (26), (27) в разрешающие уравнения (23) с граничными условиями (18) – (20) и затем приравнивая коэффициенты при  $\cos k\omega t$  и  $\sin k\omega t$  ( $k = 0, 1, 2$ ), после некоторых преобразований получим приведенную в [22, ф-ла (16)] систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно искомым амплитудных величин. Линеаризуя полученную систему методом квазилинеризации [4, 9], приходим к последовательности решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_m^{k+1}}{dx} = a_{mn}(x, y_l^k) y_n^{k+1} + f_m(x, y_l^k, q'_z) \quad (28)$$

с такими согласно (18) – (20) граничными условиями:

$$y_m^{k+1}(0) = 0, \quad y_m^{k+1}(1) = 0 \quad (29)$$

$$\left( \{y_1, y_2, \dots, y_{18}\} = \{u, u', u'', u', u'', w', w'', \vartheta_r', \vartheta_r'', N_r, N_r', N_r'', N_r', N_r'', \bar{Q}_r', \bar{Q}_r'', M_r', M_r''\} \right)$$

– искомые функции;  $f_m$  – известные величины правых частей и  $a_{mn}$  – ненулевые коэффициенты, которые из-за громоздкости не приводятся;  $x = (r - \varepsilon) / L$  – безразмерная радиальная координата ( $L = R - \varepsilon$ ).

Отметим, что переменные  $\kappa_r', \kappa_r'', M_\theta', M_\theta'', \varepsilon_r', \varepsilon_r'', N_\theta', N_\theta''$  ( $k = 1, 2$ ) определяем согласно процедуре (4) из зависимостей (24), справедливых для каждой гармоники [8]. При этом для величин (с индексом 1 над ними) комплексные электромеханические модули в коэффициентах (25) вычисляем на частоте  $\omega$ , а с индексом 2 – на частоте  $2\omega$ .

Величины  $\varepsilon_r^0, N_\theta^0$  определяются соотношениями (24), в которых знак \* опускается, а действительные коэффициенты (25) соответствуют равновесным значениям вязкоупругих модулей, не зависящих от частоты.

В терминах искоемых неизвестных задачи диссипативная функция  $\hat{W}$  в уравнении энергии (21) для гибкой круглой пластинки с пьезоэлектрическими актуаторами определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega} \hat{W} = & \sum_{k=1}^2 (N_r'' \varepsilon_r' - N_r' \varepsilon_r'' + N_\theta'' \varepsilon_\theta' - N_\theta' \varepsilon_\theta'') + M_r'' \kappa_r' - M_r' \kappa_r'' + M_\theta'' \kappa_\theta' - M_\theta' \kappa_\theta'' + \\ & + (h_0 + h_1) [(b_{31}'' \kappa_r' + b_{31}' \kappa_r'') V_A' - (b_{31}' \kappa_r' - b_{31}'' \kappa_r'') V_A''] + 2b_{33}'' (V_A'^2 + V_A''^2) / h_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь индекс 1 над величинами, характеризующими изгиб, опущен.

Линеаризованные уравнения (28), (29) на каждом приближении интегрируем методом дискретной ортогонализации [3, 4] с использованием типовой программы [4].

При этом на первом шаге ( $k=0$ ), полагая  $y_l^0 = 0$ , решаем геометрически линейную задачу. Численная сходимость реализуется через 2–3 приближения. Затем вычисляем диссипативную функцию (30) и решаем нестационарную задачу теплопроводности (21), (22) методом конечных разностей с использованием явной схемы. При решении задачи (21), (22) используем безразмерные (пространственную  $x = (r - \varepsilon) / L$  и временную  $\tau = at / L^2$ ) координаты.

При активном демпфировании вынужденных колебаний гибких пластинок с использованием сенсоров и актуаторов необходимо исследовать влияние учета геометрической нелинейности на динамические характеристики пластинки и электрические показатели сенсора  $V_s$  и актуатора  $V_a$ , а также определить амплитуду и фазу потенциала  $V_a$ , который необходимо подвести к электродам актуатора для гашения таких колебаний.

Рассмотрим случай гармонического нагружения пластинки поверхностным давлением постоянной амплитуды  $q_0' = q_0$ . Тогда, если пьезоэлектрические слои являются актуатором, его компенсирующий показатель  $V_a$  определяется зависимостью [13]

$$V_a = k_A(x_0) q_0, \quad (31)$$

где  $k_A$  – коэффициент управления;  $x_0 = (r_0 - \varepsilon) / R$  – безразмерный радиус кругового актуатора.

Коэффициент  $k_A$  вычисляется на основании решения линейной задачи по формуле

$$k_A = |w_{p \max}| / |w_{E \max}|. \quad (32)$$

Здесь  $|w_{p \max}|$  – значение максимальной амплитуды изгибных колебаний пластинки на частоте линейного резонанса при механической нагрузке  $q_0 = 1$  Па ( $V_a = 0$ ), а  $|w_{E \max}|$  – аналогичная величина при подводе к внешним электродам актуатора электрического потенциала  $\pm V_a = 1B$  ( $q_0 = 0$ ).

Для компенсации действия моногармонической нагрузки противофазность электрического нагружения учитываем по закону  $V_a \cos(\omega t + \pi) = -V_a \cos \omega t$ . Если пьезослои выполняют роль сенсора радиуса  $r_0$ , то электрический потенциал  $V_s$  на разомкнутых электродах определяем соотношением (12).

Для расчета компенсирующего показателя актуатора  $V_a$  по известному значению потенциала сенсора  $V_s$  используем наиболее характерную для модальной формы демпфирования колебаний зависимость обратной связи [12]

$$V_a = G_{as} V_s, \quad (33)$$

в которой  $G_{as}$  – коэффициент обратной связи.

Коэффициент  $G_{as}$  определяем на основании решения линейной задачи по формуле [21]

$$G_{as} = |V_a^1| / |V_s^1|. \quad (34)$$

Здесь  $V_a^1$  и  $V_s^1$ , соответственно, вычисленные на линейном резонансе показатели актуатора по формуле (30) и сенсора по формуле (12) при механическом нагружении единичной амплитуды  $q_0 = 1$  Па.

### 3. Результаты расчетов и их анализ.

Численные расчеты проведено для круглой составной пластинки, пассивный слой которой изготовлен из полиметилметакрилата [17] с такими физическими параметрами:

$$E = E' + i E''; \quad E' = E^0 \cdot (k\omega)^p; \quad E'' = E' b \cdot (k\omega)^q \quad (k = 1, 2); \quad E^0 = 0,308 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;$$

$$b = 0,16; \quad q = -0,145; \quad p = 0,076; \quad \nu = 0,35; \quad \rho_0 = 2,77 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 0,45 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}.$$

Пьезоэлектрические слои выполнены из вязкоупругой пьезокерамики ЦТСтБ-2 [1] с такими изотермическими физико-механическими характеристиками:

$$d_{11}^{*k} = (12,5 - 0,02i) \cdot 10^{-12} [\text{м}^2/\text{Н}]; \quad d_{31}^{*k} = (-1,6 + 0,0064i) \cdot 10^{-10} [\text{Кл/м}];$$

$$\varepsilon_{33}^{*k} = (21 - 0,735i) \cdot 10^2 \varepsilon_0; \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} [\text{Ф/м}]; \quad \nu_E' = 0,37; \quad \nu_E'' = 0;$$

$$\rho_1 = 7520 \text{ кг/м}^3; \quad \lambda = 0,47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}; \quad T_0 = T_s = 20^\circ\text{C}.$$

Геометрические параметры пластинки таковы:  $R = 0,2$  м,  $\varepsilon = 10^{-4}$  м,  $h_0 = 0,01$  м,  $h_1 = 0,1 \cdot 10^{-3}$  м. Коэффициенты теплообмена:  $\alpha_n = \alpha_R = 15 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$ .

В связи с тем, что в рассматриваемой пластинке реализуются (в силу конструктивной симметрии и способа нагружения) преимущественно изгибные колебания, ниже расчеты проведено для частот нагружения, близких к первой резонансной частоте изгибной моды колебаний.

На рис. 1 в зависимости от величины безразмерного радиуса  $x_0$  пьезоактивной области показаны кривые изменения отнесенных к толщине пьезоактивного слоя эталонных показателей сенсора

$\tilde{V}_s = |V_s^1| / h_1 \cdot 10^{-4} \text{ В/м}$  (штриховые линии), актуатора  $\tilde{V}_a = |V_a^1| / h_1 \cdot 10^{-5} \text{ В/м}$  (сплошные линии) и коэффициента обратной связи  $G_{as}$  (штрихпунктирные линии), рассчитанные, соответственно, по формулам (12), (30), (33) при действии на пластинку механического нагружения единичной амплитуды  $q_0 = 1$  Па. Расчеты проведены на резонансных частотах  $\omega_p$  для шарнирного (кривые  $a$ ,  $\omega_p = 520 \text{ с}^{-1}$ ) и жесткого (кривые  $b$ ,  $\omega_p = 1080 \text{ с}^{-1}$ ) закреплений пластинки.

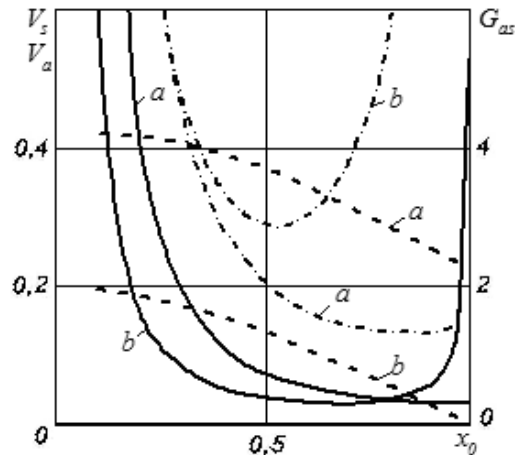


Рис. 1



Из рис. 1 видно, что абсолютная величина потенциала  $V_s^1$  на электродах сенсора уменьшается с увеличением площади сенсора. Влияние условий механического закрепления проявляется лишь в количественном изменении  $V_s^1$  (штриховые линии  $a, б$ ). Если пьезослои выполняют роль актуатора, то эталонный показатель  $V_a^1$  (сплошные линии  $a, б$ ), компенсирующий единичную нагрузку, согласно (30) совпадает с коэффициентом управления  $k_a$ . Он достигает минимальных значений для шарнирно опертой пластинки при  $0,8 \leq x_0 \leq 1,0$  (кривая  $a$ ), а при жестком защемлении – в области  $0,54 \leq x_0 \leq 0,74$  (кривая  $б$ ). Актуатор с такими оптимальными параметрами является наиболее эффективным, так как компенсирует действие механической нагрузки минимальной разностью электрических потенциалов, подведенных в противофазе к его электродам. Расчет компенсационного электрического потенциала  $V_a$  оптимального актуатора производим по формуле (30), если известна амплитуда механического нагружения. Если нагрузка неизвестна, то пьезослой такого актуатора необходимо использовать в качестве сенсора, на его разомкнутых электродах замерить величину потенциала  $V_s$ , согласно (33) вычислить коэффициент  $G_{as}$  и затем по формуле (32) вычислить компенсационный потенциал  $V_a$ , который следует подвести в противофазе к электродам пьезослоев, выполняющих уже роль актуатора.

Ниже графики расчетов для пластинок с пьезосенсором (или актуатором) относительного радиуса  $x_0 = 0,8$  при шарнирном опирании края показаны на рис. 2,  $a$  – рис. 6,  $a$ , а с радиусом  $x_0 = 0,7$  в случае жесткого защемления ее контура – на рис. 2,  $б$  – рис. 6,  $б$ .

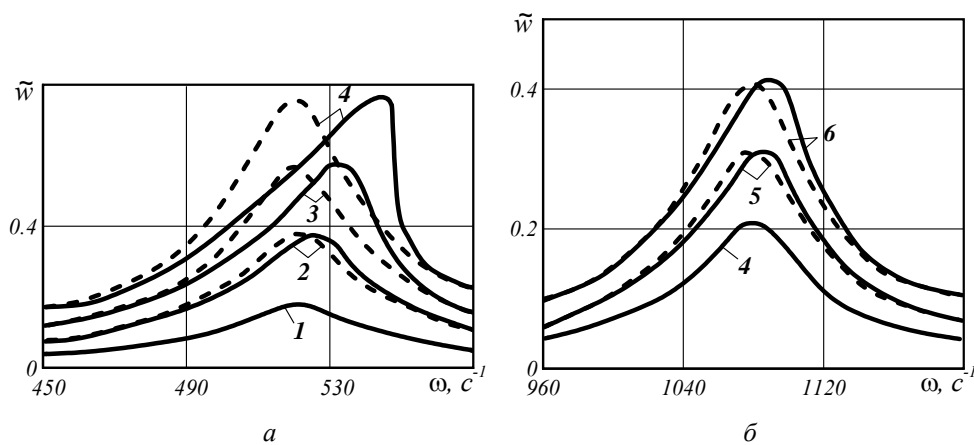


Рис. 2

На рис. 2, 3, 4 для механически нагруженной пластинки с пьезосенсором показаны частотные зависимости отнесенной к толщине пассивного слоя амплитуды максимального прогиба  $\tilde{w} = |w(x=0)|/h_0$ , максимальной температуры диссипативного разогрева  $T_m$  и абсолютной величины электрического потенциала  $|V_s|$  сенсора, соответственно. Кривые 1 – 6 получены для амплитуд:  $q_0 = (0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,3; 0,4) \cdot 10^4$  Па, соответственно. При этом электрическая нагрузка  $V_A = 0$ . Штриховые кривые получены в результате решения линейной задачи, а сплошные – при учете геометрической нелинейности.

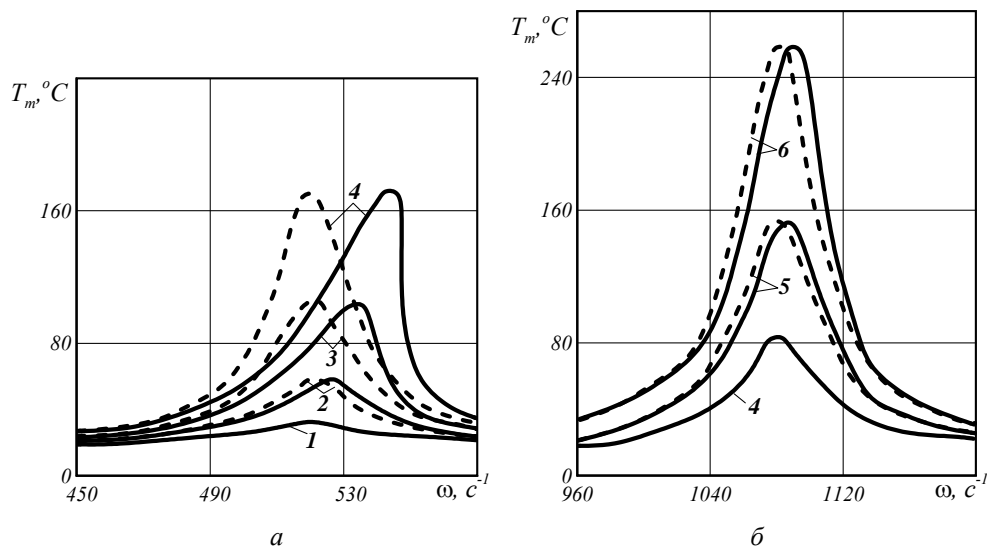


Рис. 3

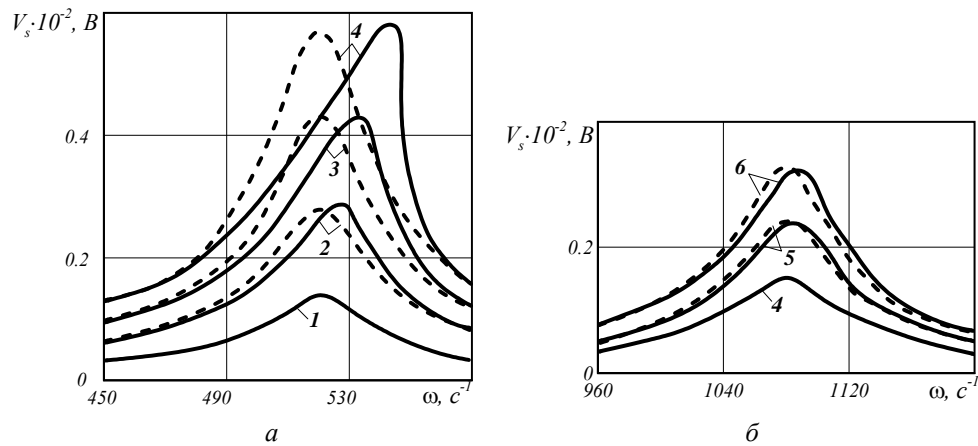


Рис. 4

Из рис. 2 – 4 видно, что влияние учета геометрической нелинейности становится заметным для таких амплитуд возбуждения колебаний, при которых максимальные значения относительных прогибов  $\tilde{w} \geq 0,2$ . Оно сопровождается смещением резонансной частоты в сторону увеличения и формированием частотных характеристик жесткого типа для прогибов, температуры виброзагрева и показателя сенсора. Для жестко заземленной пластинки влияние геометрической нелинейности проявляется при более высоком уровне нагружения, чем при шарнирном опирании ее края. Анализ кривых на рис. 2 – 4 показывает, что величины амплитуд относительных прогибов и показателя сенсора остаются практически равными на линейном и нелинейном резонансах. Это может быть обоснованием, чтобы при неизвестной нагрузке в расчетах коэффициента обратной связи  $G_{as}$  и компенсирующего показателя актуатора  $V_a$  согласно показателя сенсора  $V_s$  ограничиться линейной постановкой задачи

На рис. 5, 6 показаны частотные зависимости максимальных значений амплитуды относительных прогибов  $\tilde{w}$  и установившейся ( $\tau = 0,5$ ) температуры разогрева  $T_m$  пластинки при подводе к электродам актуатора электрического потенциала  $\pm V_a$ , компенсирующего механическую нагрузку  $q_0 = 0,15 \cdot 10^4$  Па при шарнирном опирании

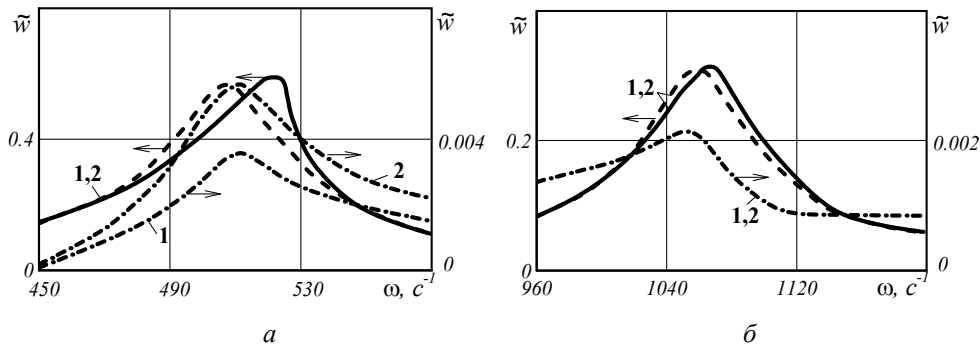


Рис. 5

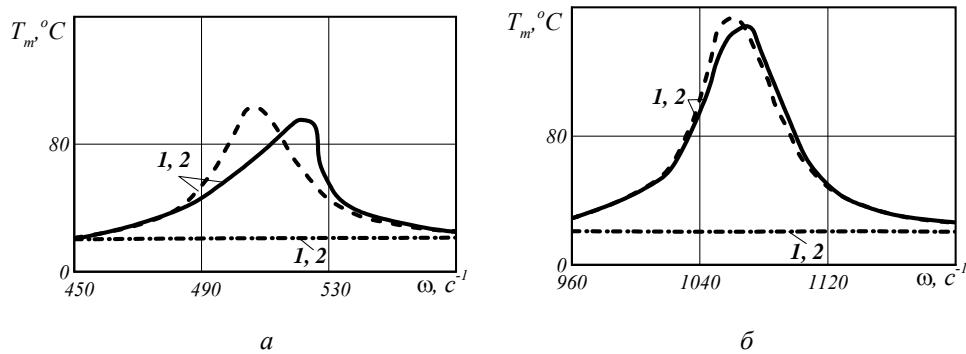


Рис. 6

края и  $q_0 = 0,30 \cdot 10^4$  Па при жестком защемлении. Кривая 1 соответствует значению  $V_a = V_a^q$ , рассчитанном по формуле (30), если пьезослой являются актуатором, а кривые 2 – значению  $V_a = V_a^s$ , рассчитанном по формуле (32), если пьезослой выполняют роль сенсора. При этом штриховые линии рассчитаны согласно решению линейной задачи, а сплошные – при учете геометрической нелинейности. В случае шарнирного опирания пластинки  $V_a^q = 58,2$  В;  $V_a^s = 58,48$  В (рис. 5, а, 6, а), а при жестком защемлении –  $V_a^q = 98,1$  В;  $V_a^s = 97,91$  В (рис. 5, б, 6, б). Штрих-пунктирными кривыми 1 и 2 характеризуются частотные зависимости амплитуды прогибов  $\tilde{w}$  и установившейся температуры диссипативного разогрева  $T_m$  при совместном воздействии на пластинку механической и электрической нагрузок  $q_0 + (-V_a^q)$  и  $q_0 + (-V_a^s)$ , соответственно. Видно, что амплитуда прогибов активно демпфированной пластинки уменьшается более, чем на два порядка по сравнению с не демпфированной, а температура вибро-разогрева равна начальной. Влияние геометрической нелинейности не проявляется. Отметим, что кривые 1, 2 в масштабе рис. 5, 6 практически совпадают ввиду близости числовых значений величин  $V_a^q$  и  $V_a^s$ . Последнее является подтверждением приемлемости основанного на решении линейной задачи расчета компенсирующего показателя актуатора  $V_a$  по формуле (33) с учетом показателя сенсора  $V_s$  при неизвестном значении нагрузки, возбуждающей колебания.

#### Заключение.

Дана приближенная постановка задачи вязкоупругости о вынужденных осесимметричных колебаниях и диссипативном разогреве гибкой круглой пластинки с пьезоактивными слоями, выполняющими роль сенсора или актуатора. С использованием

численных методов исследовано влияние геометрической нелинейности, граничных условий, площади пьезоактивной зоны сенсора и актуатора на частотные зависимости максимальных значений амплитуды прогибов, температуры виброразогрева и показателя сенсора при действии поперечного равномерного моногармонического давления. Показано, что в расчетах электрического потенциала сенсора и компенсирующего показателя актуатора для демпфирования вынужденных колебаний гибкой пластинки можно ограничиться линейной постановкой задачи. Изменение условий закрепления пластинки и геометрических размеров сенсора и актуатора приводит к количественному и качественному перераспределению их электрических показателей. В расчетах показателя актуатора по показателю сенсора при неизвестной нагрузке предпочтительно площадь сенсора выбирать равной площади актуатора.

Р Е З Ю М Е . Розв'язано задачу про вимушені осесиметричні коливання і дисипативний розігрів шарнірно і жорстко закріплених круглих гнучких пластинок з п'єзоактивними шарами, які виконують роль сенсора або актуатора. Розглянуто питання механічного і електричного збуджень коливань, можливість демпфування механічних коливань за допомогою подачі відповідної різниці електричних потенціалів на електроди актуаторів. Досліджено особливості впливу геометричної нелінійності на частотні залежності прогинів, температури вибророзігріву та електричний показник сенсора при електромеханічному гармонічному навантаженні в області основного резонансу згинної моди коливань пластинки.

1. Болкисев А.М., Карлаш В.Л., Шульга Н.А. О зависимости свойств пьезокерамических материалов от температуры // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 7. – С. 70 – 74.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432с.
3. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т. и др. Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек вращения на ЭВМ типа М-220. – К.: Наук. думка, 1971. – 152с.
4. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Розв'язання лінійних і нелінійних задач теорії оболонок на ЕОМ. – К.: Либідь, 1992. – 148с.
5. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280с.
6. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В. Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С.125 – 131.
7. Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Зражевская В.Ф. Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой круглой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С.114 – 123.
8. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222с.
9. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электротермовязкоупругость. Т. 4. – К.: Наук. думка, 1988. – 320с.
10. Карнаухов В.Г., Козлов А.В., Пятецкая Е.В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акуст. вестник. – 2002. – 5, № 4. – С. 15 – 32.
11. Карнаухов В.Г., Козлов В.І, Карнаухова Т.В. Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фіз.-матем. моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вып. 8. – С. 48 – 67.
12. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428с.
13. Киричок І.Ф., П'ятецька О.В., Карнаухов М.В. Згинні коливання та дисипативний розігрів кільцевої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 84 – 92.
14. Матвеев В.В. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264с.
15. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т. / Под. ред. Гузя А.Н. – К.: Наук. думка, 1982 – 368 с.; 1983 – 464 с.; 1983 – 263 с.

16. *Наишф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
17. *Стивенс К.* Поперечные колебания вязкоупругого стержня с начальной кривизной под действием периодической осевой силы // Прикл. механика. Сер. Е. Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. – 1969. – № 4. – С. 168 – 173.
18. *Karnaukhova T.V.* Active Damping of Vibrations of a Plate with Rigid Fixing of Ends // J. Appl. Mech. – 2010. – **46**, №6. – P. 683 – 686.
19. *Karnaukhova T.V., Piatetskaya E.V.* The Basic Relationships of the Theory of Thermoviscoelastic Plates with Distributed Sensors // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 6. – P. 660 – 669.
20. *Kirichok I.F.* Resonance Vibrations and Heating of Electromechanically Loaded Ring Plates with Piezoactuators with Allowance for the Shear Deformation // J. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 215 – 224.
21. *Kirichok I. F.* Axisymmetric Resonance Vibrations and Heating the Shells of Revolution and Their Control by Piezoelectric Sensor and Actuator // J. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 8. – P. 890 – 901.
22. *Kirichok I.F.* Forced Resonance Vibrations and Dissipative Heating of Flexible Circular Plate with Piezoactuators // J. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 583 – 591.
23. *Kirichok I.F., Karnaukhova T.V.* Forced Axisymmetric Vibrations and Heating of Circular Thermoviscoelastic Plate and Their Control by Piezoceramic Sensors and Actuators // J. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 4. – P. 429 – 437.
24. *Blanguernon A., Lene F., Bernadou M.* Active control of a beam using a piezoceramic element // Smart Mater. Struct. – 1999. – **8**. – P 116 – 124.
25. *Brennan M., Elliott S., Pinnington R.* The dynamic coupling between piezoceramic actuators and beam // JASA. – 1997. – **102**, N 4. – P. 1931 – 1942.
26. *Tzou H.S., Anderson G.L.* (Eds.) Intelligent structural Systems. – Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1992. – 453 p.
27. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1993. – 400 p.
28. *Zhuk Ya.A., Guz I.A.* Active Damping the Piezoactive Layers with Allowance for Geometrical Nonlinearities // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 94 – 108.

Поступила 16.12.2010

Утверждена в печать 06.06.2013

