И. Л. И в а н о в, В. И. С л ы н ь к о

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Институт механики им. С.П. Тимошенко, Киев 03057
ул. Нестерова 3, Украина.
e-mail: center@inmech.kiev.ua

Abstract. A Lyapunov stability problem is considered for the linear impulse system with time delay. It is assumed that the time intervals between impulse action are constant and equal to the delay time. A criterion of stability in the non-critical case is obtained with use of methods from the spectral theory of operators. An example of mechanical application is considered. At that, the obtained criterions are used and the areas of instability in a space of some parameters are built by the numerical methods. To reveal the role of delay in this system, a comparison of findings with analogical results for corresponding system without the delay is carried out.

Key words: asymptotic stability and instability, impulsive delay system, spectral theory of operators, pendulum, stability criterion.

Введение.

В теории управления актуальными являются задачи, в которых необходимо импульсным воздействием стабилизировать механическую систему, на которую влияют силы, порождённые самой системой, но зависящие от её фазовых переменных, вычисленных не в данный момент времени, а в некотором прошлом. Примерами таких задач являются те, в которых исследуемая система содержит незакрепленные структурные части, которые могут колебаться, осуществляя, таким образом, влияние на саму систему. В некоторых из этих задач такими структурными частями могут быть жидкости. Примером несколько иного характера является задача, в которой необходимо стабилизировать механическую систему, пребывающую во влияющем на неё магнитном поле, порождённом самой системой (например, фазовыми скоростями), и которое по причинам сложности электрической цепи претерпело запаздывание. Запаздывающие силы во всех рассмотренных примерах можно понимать как действие некоторого поля ускорений.

Описанная проблематика в линейной постановке приводит к математическим задачам, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием и импульсным воздействием. Разработанные подходы к исследованию устойчивости таких уравнений основаны на методах, применяемых и к системам с импульсным воздействием, и к системам с запаздыванием. Наряду с методом Ляпунова–Разумихина, который широко используется при анализе таких задач, здесь также возможен подход, связанный с привлечением методов спектральной теории операторов, приложения которой в теории устойчивости систем в банаховом пространстве активно разрабатываются [5, 8, 12, 13, 18]. Эти методы являются обобщениями известных подходов, полученных отдельно для уравнений с импульсным воздействием и уравнений с запаздыванием [2, 9, 10, 11, 15, 16, 19].

В данной работе рассмотрена задача поиска необходимых и достаточных условий экспоненциальной устойчивости линейного автономного уравнения с запаздыванием и импульсным воздействием в случае, когда величина запаздывания совпадает с величиной интервалов, через которые происходит импульсное воздействие, а также об устойчивости связанной успокоителями системы из двух маятников, которые поддаются импульсному воздействию, пребывают в запаздывающем поле ускорений и колеблются в горизонтальной плоскости.

§1. Спектральный критерий устойчивости.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\theta),\ \ t \neq k\theta;\ \ x(t^{+}) = Cx(t),\ \ t = k\theta; \tag{1.1}$$

$$x(t) = f(t),\ t \in \overline{\Omega}, \tag{1.2}$$

где $\Omega = (0,\,\theta)$, $A,\,B,\,C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in C^1(\mathbb{E},\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{E} = \bigcup\limits_{n\geq 0}\big(n\theta,(n+1)\theta\big)$.

Определение. *Оператор* $T : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$, *определяемый равенством*

$$T\ \varphi(t) = e^{At}C\ \varphi(\theta) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B\ \varphi(s)ds$$

будем называть оператором монодромии системы (1.1).

Исследованию качественного поведения системы (1.1) посвящён следующий результат.

Теорема. *Пусть* $\lambda_i \in \mathbb{C}$ *(* $i \in I \subset \mathbb{N}$ *) – решения уравнения*

$$\det(Ce^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta} - \lambda E) = 0. \tag{1.3}$$

Тогда: 1) если $\max|\lambda_i| < 1$*, то система (1.1) асимптотически устойчива; 2) если* $\max|\lambda_i| > 1$*, то система (1.1) неустойчива.*

Доказательство. Сделаем переход от задачи (1.1), (1.2) к эквивалентной ей задаче для функциональной последовательности $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, $\varphi_k : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$:

$$\dot{\varphi}_{k+1}(t) = A\varphi_{k+1}(t) + B\varphi_k(t),\ \ t \in \overline{\Omega};\ \ \ \varphi_{k+1}(0) = C\varphi_k(\theta),\ \ A,B,C \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ k \in \mathbb{N}_0 \tag{1.4}$$

$$\varphi_0(t) = f(t),\ \ \ t \in \overline{\Omega}. \tag{1.5}$$

Из первого уравнения следует, что

$$\varphi_{k+1}(t) = e^{At}\varphi_{k+1}(0) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B\varphi_k(s)ds,$$

но $\varphi_{k+1}(0) = C\varphi_k(\theta)$, поэтому имеем

$$\varphi_{k+1}(t) = e^{At}C\varphi_k(\theta) + \int\limits_0^t e^{A(t-s)}B\varphi_k(s)ds,\ \text{т.е.}\ \varphi_{k+1} = T\varphi_k.$$

С помощью оператора монодромии можно явно выразить решение задачи (1.4) – (1.5) для функциональной последовательности $\{\varphi_k\}$: $\varphi_k = T^k\varphi_0$.

Для исследования устойчивости решений (1.4) будем искать спектральный радиус оператора монодромии T . Можно показать, что оператор T переводит ограниченное множество из пространства $C(\overline{\Omega})$ во множество с равномерно ограниченной производной, из чего следует его равностепенная непрерывность. Согласно теореме Арцела [1], полученное множество является предкомпактным в $C(\overline{\Omega})$. Таким образом, оператор T переводит ограниченное множество в предкомпактное, а это значит, что он вполне непрерывный. О таких операторах известно [7], что их непрерывный и остаточный спектры либо пусты, либо в объединении дают одноточечное множество $\{0\}$.

Таким образом, спектр оператора T (за исключением, возможно, нуля) содержит лишь точки дискретного спектра. Это множество является множеством тех λ, при которых имеет нетривиальные решения следующее однородное уравнение относительно φ:

$$(T-\lambda E)\varphi = 0. \tag{1.6}$$

Получим интегро-функциональное уравнение

$$e^{At}C\varphi(\theta)+\int_0^t e^{A(t-s)}B\varphi(s)ds-\lambda\varphi(t)=0. \tag{1.7}$$

После дифференцирования получим (возможность такого дифференцирования следует из того, что все решения (1.7) имеют производные любого порядка)

$$Ae^{At}C\varphi(\theta)+B\varphi(t)+A\int_0^t e^{A(t-s)}B\varphi(s)ds-\lambda\dot{\varphi}(t)=0. \tag{1.8}$$

Но в силу (1.7) имеем

$$\int_0^t e^{A(t-s)}B\varphi(s)ds=\lambda\varphi(t)-e^{At}C\varphi(\theta),$$

поэтому, заменив с помощью этого равенства интегральный член в (1.8), получим

$$Ae^{At}C\varphi(\theta)+B\varphi(t)+A(\lambda\varphi(t)-e^{At}C\varphi(\theta))-\lambda\dot{\varphi}(t)=0$$

или

$$\dot{\varphi}(t)=\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\varphi(t) \tag{1.9}$$

после деления на λ. Возможность выполнения такого деления следует из того, что принадлежность $\lambda=0$ спектру не влияет на спектральный радиус. Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$\varphi(t)=e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)(t-\theta)}\varphi(\theta). \tag{1.10}$$

Поскольку уравнение (1.9) получено путём дифференцирования (1.7), то множество его решений шире, чем у уравнения (1.7). Чтобы выделить из этого множества семейство решений (1.7), подставим (1.10) в (1.7)

$$e^{At}C\varphi(\theta)+\int_0^t e^{A(t-s)}Be^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)(s-\theta)}ds\varphi\,(\theta)-\lambda e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)(t-\theta)}\varphi\,(\theta)=0. \tag{1.11}$$

Умножив слева на e^{-At} (с ненулевым определителем) и заменив интегральный член согласно равенству

$$\int_0^t e^{-As}Be^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)s}ds=\lambda(e^{-At}e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)t}-E), \tag{1.12}$$

получим равенства

$$C\varphi(\theta)+\lambda(e^{-At}e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)t}-E)e^{-\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}\varphi(\theta)-\lambda e^{-At}e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)(t-\theta)}\varphi(\theta)=0;$$

$$C\varphi(\theta)-\lambda e^{-\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}\varphi(\theta)=0;\quad (C-\lambda e^{-\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta})\,\varphi(\theta)=0. \tag{1.13}$$

Для того, чтобы (1.13) имело ненулевое решение (относительно $\varphi(\theta)$), необходимым и достаточным является выполнение условия $\det(C-\lambda e^{-\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta})=0$, или, равносильно, равенства (1.3).

Это условие можно интерпретировать как обобщённое (трансцендентное) характеристическое уравнение. Решив это уравнение, можно получить исчёрпывающую информацию о спектральном радиусе оператора монодромии, поскольку этот радиус равен максимуму среди модулей решений этого уравнения [6]. Таким образом, из того, что это уравнение имеет корни, превышающие по модулю единицу, можно заключить, что линейная система (1.1) неустойчива. Если же все корни рассматриваемого уравнения принадлежат открытому единичному кругу комплексной плоскости, то система (1.1) асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Отметим, что полученный результат обобщает (при этом, согласованно) известный результат для линейных систем с запаздыванием с постоянными коэффициентами, но без импульсного воздействия [13], который может быть получен теми же методами спектральной теории операторов.

Действительно, согласно [13], критерием устойчивости уравнения (1.1) при $C=0$ является условие $\operatorname{Re}\mu_i<0$, где μ_i – решения характеристического уравнения

$$\det(\mu E-A-Be^{-\theta\mu})=0\,. \tag{1.14}$$

Пусть $\operatorname{Ln} z$ – главное значение логарифма числа z . Выполним преобразование вида $\mu=\frac{1}{\theta}\left(\operatorname{Ln}\lambda+2\pi ki\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$. Получим совокупность уравнений

$$\det\left(\left(\operatorname{Ln}\lambda+2\pi ki\right)E-\theta\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)\right)=0,\quad k\in\mathbb{Z}\,. \tag{1.15}$$

Учитывая равенство $\lambda=e^{\mu\theta}$, покажем, что (1.14) и (1.15) равносильны. Действительно, если μ – решение (1.14), то при k таком, что $\operatorname{Im}\mu\in\left[\frac{2k-1}{\theta}\pi,\ \frac{2k+1}{\theta}\pi\right]$, уравнение (1.15) будет удовлетворено при $\lambda=e^{\mu\theta}$. Кроме того, если при некотором k совокупность (1.15) обладает решением λ , то ему соответствует решение $\mu=\frac{1}{\theta}\left(\operatorname{Ln}\lambda+2\pi ki\right)$ уравнения (1.14).

Совокупность условий (1.15) эквивалентна включению $\left\{\operatorname{Ln}\lambda+2\pi ki\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\subset$ $\subset\sigma\left(\theta\left(A+\frac{B}{\lambda}\right)\right)$. Согласно теореме Данфорда [7], данное включение равносильно требованию $\{\lambda\}\subset\sigma e^{\theta(A+B/\lambda)}$, которое сводится к уравнению (1.3) при $C=0$.

Согласно выполненному преобразованию, условием устойчивости будет условие $\max|\lambda_i|<1$. Это означает, что спектральный критерий устойчивости из [13] следует из доказанной выше теоремы.

Чтобы оценить эффективность полученного условия, построим и исследуем один механический пример.

§2. Постановка механической задачи.

Рассмотрим схему, изображённую на рис. 1 (ср. с [17]), где представлены схемы маятников.

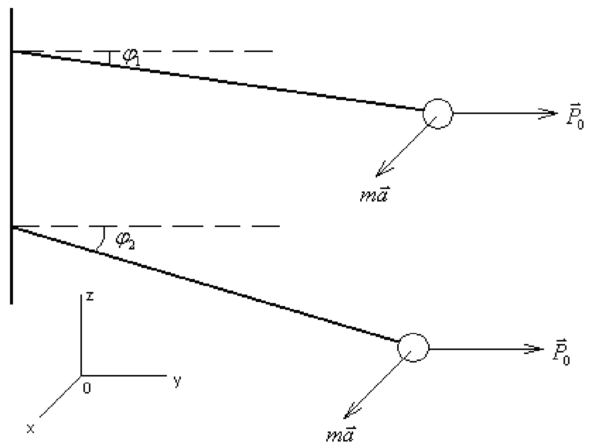

Рис. 1

На вертикальной оси в двух точках подвешено по математическому маятнику. Эти маятники могут колебаться каждый в своей горизонтальной плоскости. Длина звена каждого из маятников равна l, масса прикреплённого тела (сосредоточенной массы на конце звена маятника) – m. Маятникам свойственно шарнирное трение, пропорциональное угловой скорости с коэффициентом μ_0. Кроме того, маятники соединены успокоителем с коэффициентом трения μ. Начиная с момента времени $t = 0$ с постоянным периодом θ на прикреплённые тела маятников действует импульсная сила величиной P_0 в направлении оси Oy. Движение маятников осуществляется в переменном поле ускорений $\vec{a}$, направленном в положительном направлении оси Ox. Величина этого поля равна $a(\dot{\varphi}_1(t-\theta)+\dot{\varphi}_2(t-\theta))$, где $a \neq 0$ – параметр (отрицательное значение параметра соответствует противоположному направлению поля).

Лагранжиан данной системы имеет вид

$$L = T - \Pi = T = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \qquad (2.1)$$

где учтено отсутствие потенциальных силовых полей. Запишем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_\nu}\right) = -Q_\nu, \quad \nu = 1, 2, \qquad (2.2)$$

или, учитывая (2.1), имеем

$$-ml^2\ddot{\varphi}_\nu = -Q_\nu, \quad \nu = 1, 2. \qquad (2.3)$$

Непотенциальные силы Q_ν (действующие на ν-тую точку) представим в виде суммы четырёх сил с помощью равенства

$$Q_\nu = \sum_{i=1}^{4} Q_{\nu i}, \quad \nu = 1, 2, \qquad (2.4)$$

где $Q_{\nu 1}$ – действие шарнирного трения; $Q_{\nu 2}$ – действие успокоителя; $Q_{\nu 3}$ – действие силового поля; $Q_{\nu 4}$ – импульсное воздействие. Связь между обобщёнными силами и силами, записанными в декартовых координатах, выражается формулой

$$Q_\nu = F_x \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} + F_y \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu}, \quad \nu = 1,\, 2\,, \tag{2.5}$$

где учтено плоское движение маятников (а значит и плоский характер действия на них всех сил).

Определим обобщённую силу $Q_{\nu 1}$

$$Q_{\nu 1} = F_{\nu 1x} \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} + F_{\nu 1y} \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} = -\frac{\mu_0}{l^2}\left(\dot{x}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} + \dot{y}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} \right) = -\frac{\mu_0}{l^2}\left(\frac{d}{dt}(l\sin\varphi_\nu)\frac{\partial(l\sin\varphi_\nu)}{\partial\varphi_\nu} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}(l\cos\varphi_\nu)\frac{\partial(l\cos\varphi_\nu)}{\partial\varphi_\nu}\right) = -\mu_0\dot{\varphi}_\nu. \tag{2.6}$$

Аналогично можно показать, что

$$Q_{\nu 2} = (-1)^{\nu+1}\mu(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1). \tag{2.7}$$

Вычислим обобщенную силу, порождённую запаздывающим полем ускорений,

$$\begin{aligned} Q_{\nu 3} &= F_{\nu 3x} \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} + F_{\nu 3y} \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} = F_{\nu 3x} \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} = F_{\nu 3x} l \cos\varphi_\nu = \\ &= ma(\dot{\varphi}_1(t-\theta) + \dot{\varphi}_2(t-\theta)) l \cos\varphi_\nu\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Определим обобщённую силу, отвечающую за импульсное воздействие

$$\begin{aligned} Q_{\nu 4} &= F_{\nu 4x} \frac{\partial x_\nu}{\partial \varphi_\nu} + F_{\nu 4y} \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} = F_{\nu 4y} \frac{\partial y_\nu}{\partial \varphi_\nu} = -F_{\nu 4y} l \sin\varphi_\nu = -\sum_{j=0}^{\infty} P_0 \delta(t - j\theta) l \sin\varphi_\nu = \\ &= -P_0 l \sin\varphi_\nu \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\theta), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где учтено, что импульсная сила действует периодически с периодом θ, начиная с момента времени $t = \theta$.

Подставив (2.4) в (2.3) с учётом вычислений правой части (2.4), представленных в (2.6) – (2.9), получим

$$ml^2\ddot{\varphi}_\nu + \mu_0\dot{\varphi}_\nu + (-1)^\nu \mu(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - mal(\dot{\varphi}_1(t-\theta) + \dot{\varphi}_2(t-\theta))\cos\varphi_\nu +$$

$$+ P_0 l \sin\varphi_\nu \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\theta) = 0, \quad \nu = 1,\, 2.$$

Подставляя значения индекса ν и деля на ml^2 , получим систему двух уравнений

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\mu_0}{ml^2}\dot{\varphi}_1 + \frac{\mu}{ml^2}(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - \frac{a}{l}(\dot{\varphi}_1(t-\theta) + \dot{\varphi}_2(t-\theta))\cos\varphi_1 + \frac{P_0}{ml}\sin\varphi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\theta) = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{\mu_0}{ml^2}\dot{\varphi}_2 + \frac{\mu}{ml^2}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - \frac{a}{l}(\dot{\varphi}_1(t-\theta) + \dot{\varphi}_2(t-\theta))\cos\varphi_2 + \frac{P_0}{ml}\sin\varphi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\theta) = 0.$$

Линеаризуем эту систему в окрестности решения $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и приведём подобные при первых производных

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\mu_0 + \mu}{ml^2}\dot{\varphi}_1 - \frac{\mu}{ml^2}\dot{\varphi}_2 - \frac{a}{l}\dot{\varphi}_1(t-\theta) - \frac{a}{l}\dot{\varphi}_2(t-\theta) + \frac{P_0}{ml}\varphi_1 \sum_{j=0}^{\infty} \delta(t - j\theta) = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_2-\frac{\mu}{ml^2}\dot{\varphi}_1+\frac{\mu_0+\mu}{ml^2}\dot{\varphi}_2-\frac{a}{l}\dot{\varphi}_1(t-\theta)-\frac{a}{l}\dot{\varphi}_2(t-\theta)+\frac{P_0}{ml}\varphi_2\sum_{j=0}^{\infty}\delta(t-j\theta)=0. \quad (2.10)$$

Обозначим $x_1=\varphi_1$, $x_2=\dot{\varphi}_1$, $x_3=\varphi_2$, $x_4=\dot{\varphi}_2$, а также $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$. Результаты монографии [3] дают возможность подать систему (2.10) в виде

$$\begin{gathered}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\theta),\ t\neq k\theta,\ k\in\mathbb{N}_0;\\ x(t^+)=Cx(t),\ t=k\theta, k\in\mathbb{N}_0,\end{gathered} \quad (2.11)$$

где введены такие обозначения:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\mu_0+\mu}{ml^2} & 0 & \frac{\mu}{ml^2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{\mu}{ml^2} & 0 & -\frac{\mu_0+\mu}{ml^2}\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{a}{l} & 0 & \frac{a}{l}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{a}{l} & 0 & \frac{a}{l}\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{P_0}{ml} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{P_0}{ml} & 1\end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

§3. Условия устойчивости механической системы.

Определим условия устойчивости системы (2.11), воспользовавшись (1.13). Для этого необходимо найти левую часть равенства (1.13), произведя, в частности, вычисление матричной экспоненты $e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}$.

Следует заметить, что два нулевые собственные значения матрицы

$$\frac{1}{\lambda}B+A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\mu_0+\mu}{ml^2}-\frac{a}{\lambda l} & 0 & \frac{\mu}{ml^2}-\frac{a}{\lambda l}\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{\mu}{ml^2}-\frac{a}{\lambda l} & 0 & -\frac{\mu_0+\mu}{ml^2}-\frac{a}{\lambda l}\end{pmatrix} \quad (3.1)$$

соответствуют жордановому блоку её нормальной формы. Во избежание рассмотрения тривиальных случаев, требующих, тем не менее, специальных оговорок, допустим, что все иные собственные значения этой матрицы отличны от нуля и не равны между собой. Таким образом, согласно интерполяционной формуле Лагранжа — Сильвестра [4], выражение $e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}$ можно подать в виде

$$e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}=\begin{pmatrix}1 & \frac{-\kappa_1+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{ch}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{sh}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2} & 0 & \frac{\kappa_2+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{sh}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{ch}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2}\\ 0 & e^{\kappa_1\theta}\operatorname{ch}\kappa_2\theta & 0 & e^{\kappa_1\theta}\operatorname{sh}\kappa_2\theta\\ 0 & \frac{\kappa_2+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{sh}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{ch}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2} & 1 & \frac{-\kappa_1+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{ch}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{sh}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2}\\ 0 & e^{\kappa_1\theta}\operatorname{sh}\kappa_2\theta & 0 & e^{\kappa_1\theta}\operatorname{ch}\kappa_2\theta\end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где введены обозначения

$$\kappa_1=-\frac{\mu_0+\mu}{ml^2}+\frac{a}{\lambda l};\quad \kappa_2=\frac{\mu}{ml^2}+\frac{a}{\lambda l}. \quad (3.3)$$

С целью упростить последующее изложение снова введём обозначения

$$v_1=\frac{-\kappa_1+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{ch}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{sh}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2};\quad v_2=\frac{\kappa_2+e^{\kappa_1\theta}(\kappa_1\operatorname{sh}\kappa_2\theta-\kappa_2\operatorname{ch}\kappa_2\theta)}{\kappa_1^2-\kappa_2^2};$$

$$v_3=e^{\kappa_1\theta}\operatorname{ch}\kappa_2\theta;\quad v_4=e^{\kappa_1\theta}\operatorname{sh}\kappa_2\theta. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$Ce^{(\frac{1}{\lambda}B+A)\theta}=\begin{pmatrix}1 & v_1 & 0 & v_2\\ -\frac{P_0}{ml} & v_3-\frac{P_0}{ml}v_1 & 0 & v_4-\frac{P_0}{ml}v_2\\ 0 & v_2 & 1 & v_1\\ 0 & v_4-\frac{P_0}{ml}v_2 & -\frac{P_0}{ml} & v_3-\frac{P_0}{ml}v_1\end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

то определитель левой части (1.13) примет вид

$$\det(Ce^{(\frac{1}{\lambda}B+A)\theta}-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & v_1 & 0 & v_2\\ -\frac{P_0}{ml} & v_3-\frac{P_0}{ml}v_1-\lambda & 0 & v_4-\frac{P_0}{ml}v_2\\ 0 & v_2 & 1-\lambda & v_1\\ 0 & v_4-\frac{P_0}{ml}v_2 & -\frac{P_0}{ml} & v_3-\frac{P_0}{ml}v_1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\lambda^2+\left(\frac{P_0}{ml}v_1-v_3-1\right)\lambda+v_3\right)^2-\left(\left(v_4-\frac{P_0}{ml}v_2\right)\lambda-v_4\right)^2.$$

Таким образом, получено уравнение

$$\lambda^4+2\left(\frac{P_0}{ml}v_1-v_3-1\right)\lambda^3+\left[\left(\frac{P_0}{ml}\right)^2(v_1^2-v_2^2)-2\frac{P_0}{ml}(v_1v_3-v_2v_4)-\right.$$

$$\left.-2\frac{P_0}{ml}v_1+4v_3+v_3^2-v_4^2+1\right]\lambda^2+2\left(\frac{P_0}{ml}(v_1v_3-v_2v_4)-v_3^2+v_4^2-v_3\right)\lambda+v_3^2-v_4^2=0. \tag{3.6}$$

Учитывая замены (3.3) и (3.4), следует заметить, что коэффициентами этого уравнения являются довольно громоздкие выражения, содержащие экспоненциальную зависимость от $1/\lambda$. В связи с этим (предварительно разложив левую часть (3.6) на квадратичные множители и возвращаясь к обозначениям (3.4) и (3.3)) целесообразно положить $1/\lambda=z$, преобразовав таким образом (3.6) к совокупности равенств

$$z^2+(P_0l\frac{e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta}-1}{2\mu+\mu_0}-e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta}-1)z+e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta}=0;$$

$$z^2+\left(P_0l\frac{e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2}-\frac{2a\theta}{l}z}-1}{\mu_0-2amlz}-e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2}-\frac{2a\theta}{l}z}-1\right)z+e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2}-\frac{2a\theta}{l}z}=0. \tag{3.7}$$

Отметим, что при отыскании матричной экспоненты $e^{\left(\frac{1}{\lambda}B+A\right)\theta}$ были сделаны некоторые предположения относительно собственных значений матрицы $\frac{1}{\lambda}B+A$. Но, поскольку экспонента является непрерывной функцией от матрицы, равно как и коэффициенты характеристического полинома, то последний для этих особых собственных значений может быть получен путём предельного перехода из уже вычисленного полинома (здесь следует отметить, что дробь, фигурирующая во втором уравнении в (3.7) является аналитической функцией, поэтому для неё рассматриваемый предел существует).

Аналитическое исследование всех иных решений (3.7) представляется достаточно тонкой задачей, поэтому будем решать её численно. Относительно первого уравнения в (3.7), то условиями пребывания всех его решений вне круга являются условия

$$P_0 > 0,\ 2\frac{(2\mu+\mu_0)}{P_0 l}\operatorname{cth}\frac{2\mu+\mu_0}{2ml^2}\theta > 1. \qquad (3.8)$$

Рассмотрим вопрос о стабилизации механической системы путём управления импульсным воздействием (а именно, его величиной P_0 и интервалами между импульсами θ).

На рис. 2 показана область устойчивости системы (2.11) в пространстве параметров P_0 (горизонтальная ось) и θ (вертикальная ось) при $a=-0,4$, $l=1$, $\mu=1$, $\mu_0=1$, $m=1$. На рис. 3, соответственно, принято $a=0,4$.

Вычисления свидетельствуют (рис. 2, 3), что в целом для стабилизации системы (2.11) следует принять малые (позитивные) значения P_0 и θ, причём при произвольно принятом одном из параметров для достижения устойчивости всегда можно выбрать достаточно малым другой. Предельный переход в случае, когда оба эти параметры малы, но их отношение конечно, даёт аналогичный эффект с колебанием маятников в гравитационном (потенциальном) поле, направленном таким образом, чтобы рассматриваемое положение равновесия оказалось бы нижним. В этом случае при малых a (по отношению к коэффициенту трения μ_0) имеет место устойчивость, поскольку поле ускорений не способно преодолеть силу шарнирного трения, стремясь увеличить полную энергию системы.

Анализ зависимости области устойчивости от параметра a, характеризующего величину отстающего (по отношению к фазовым переменным) поля ускорений, показал, что при $a=0,4$ полученная область будет шире области, соответствующей значению $a=-0,4$. Таким образом, при таких относительно небольших значениях этого

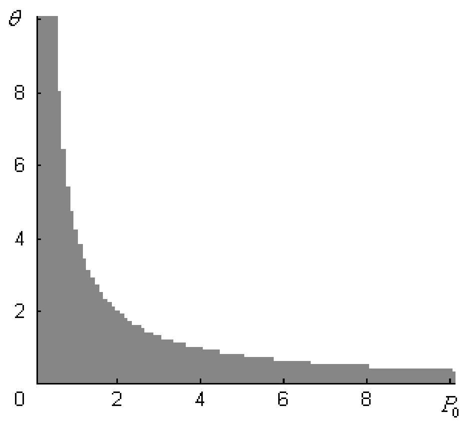

Рис. 2

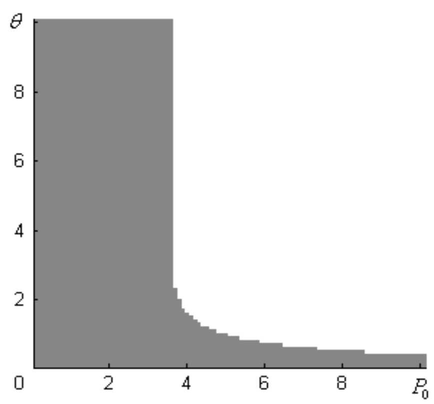

Рис. 3

параметра, направленность поля против вектора суммарной скорости (двух колеблющихся компонент системы) приводит к тому, что работа этого поля идёт на потерю системой своей устойчивости, что в данном случае равносильно неограниченному возрастанию её кинетической энергии. Т.е., в среднем, поле ускорений и суммарный импульс системы оказываются сонаправленными и происходит процесс "раскачивания".

Сравним полученный результат для системы с запаздыванием с аналогичным результатом для системы без запаздывания, т.е. для системы, полученной из системы (2.11) путём замены слагаемого $Bx(t-\theta)$ на слагаемое $Bx(t)$

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t),\ t \neq k\theta,\ k \in \mathbb{N}_0, \quad x(t^+) = Cx(t),\ t = k\theta,\ k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.9}$$

где матрицы A, B и C определяются из соотношений (2.12).

Новая система будет иметь характеристическое уравнение $\det(Ce^{(B+A)\theta} - \lambda E) = 0$, которое после вскрытия определителя распадается на множители, напоминающие множители, на которые распалось характеристическое уравнение в случае с запаздыванием

$$z^2 + \left(P_0 l \frac{e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta} - 1}{2\mu + \mu_0} - e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta} - 1 \right) z + e^{\frac{2\mu+\mu_0}{ml^2}\theta} = 0;$$

$$z^2 + \left(P_0 l \frac{e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2} - \frac{2a\theta}{l}} - 1}{\mu_0 - 2aml} - e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2} - \frac{2a\theta}{l}} - 1 \right) z + e^{\frac{\mu_0\theta}{ml^2} - \frac{2a\theta}{l}} = 0, \tag{3.10}$$

где принято $z = 1/\lambda$. Поскольку первые уравнения в (3.10) и в (3.7) совпадают, то условия (3.8) являются необходимыми условиями устойчивости также и системы (3.9). Из второго уравнения, в свою очередь, следуют условия

$$\mu_0 > 2aml, \quad 2\frac{\mu_0 - 2aml}{P_0 l}\operatorname{cth}\left(\frac{\mu_0\theta}{2ml^2} - \frac{a\theta}{l}\right) > 1, \tag{3.11}$$

где учтено, что в силу (3.8) $P_0 > 0$.

Следует отметить, что в этом случае поле ускорений перестаёт отставать во времени от фазовых переменных и при $a < 0$ начинает играть роль шарнирного трения в том смысле, что в системе (2.10) (в которой следует сперва положить $\theta = 0$ в слагаемых, соответствующих полю) оказывается возможным приведение подобных, содержащих обобщённую скорость. Таким образом, в отличие от системы с запаздыванием, отрицательный знак параметра a способствует устойчивости.

Сравним графическое представление полученных аналитических условий для системы (3.9) без запаздывания (рис. 4, 5) с условиями для системы с запаздыванием (рис. 2, 3).

На рис. 4 показана область устойчивости системы (3.9) в пространстве параметров P_0 (горизонтальная ось) и θ (вертикальная ось) при $a = -0{,}4$; $l = 1$; $\mu = 1$; $\mu_0 = 1$; $m = 1$; а на рис. 5 – при $a = 0{,}4$; $l = 1$; $\mu = 1$; $\mu_0 = 1$; $m = 1$.

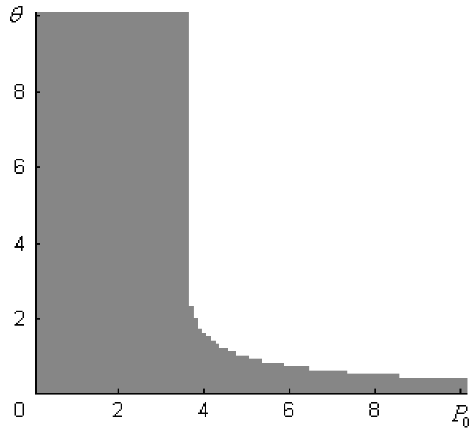

Рис. 4

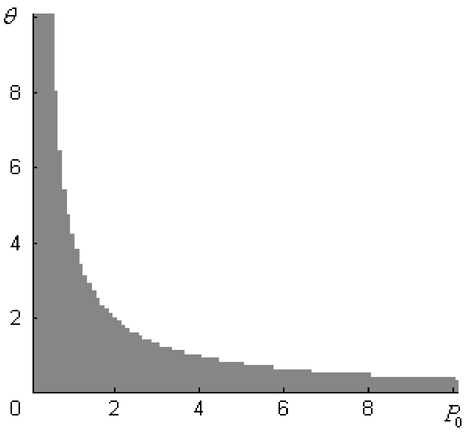

Рис. 5

Здесь можно обнаружить достаточно любопытный факт; что область; изображённая на рис. 2; совпадает с областью; изображённой на рис. 5; а область рис. 3 – с областью на рис. 4. Это сходство является абсолютным совпадением в пределах точности машинных вычислений в том смысле; что соответствующие (конечномерные) матрицы равны. Такое совпадение для размещения по отношению к единице соответствующих спектральных радиусов операторов монодромии; тем не менее; не распространяется на сами спектральные радиусы этих операторов. Здесь обычно имеет место более близкое расположение радиуса к единице у системы с запаздыванием.

Заметим; что в случае; когда a существенно отклоняется от нуля (в отрицательную сторону); то области устойчивости перестают совпадать друг с другом.

Заключение.

В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости для класса дифференциальных систем с запаздыванием и импульсным воздействием. При их получении использованы методы спектральной теории операторов. Установлено; что обобщённое характеристическое уравнение сводится к квазиполиномиальному виду (аналитические методы некоторых проблем локализации решений таких уравнений детально изложены в [14]). Анализ устойчивости рассматриваемого класса систем с запаздыванием и импульсным воздействием сводится к анализу характеристических уравнений того же типа; что и анализ автономных линейных систем с запаздыванием. При этом; меняется задача о локации решений этих уравнений: критерием устойчивости выступает не условие $\max \operatorname{Re} \lambda_i < 0$; а условие $\min |z_i| > 1$.

Построен пример механической системы со связанными маятниками; для которой определены условия устойчивости с использованием полученного спектрального критерия. При решении квазиполиномов применены численные методы (использовались и сравнивались результаты двух параллельных вычислений). Здесь отметим сходство областей устойчивости для исследуемой механической системы и для аналогичной системы без запаздывания; которое не распространяется на порядок асимптотических оценок. Поэтому представляет определённый интерес дальнейшее исследование этой связи в рамках общей задачи локации решений квазиполиномов.

На основе сформулированных результатов можно получить методы качественного анализа; которые могут иметь как теоретическое; так и прикладное значение. С одной стороны; обобщать можно путём усложнения соотношений между интервалами импульсного воздействия и величиной запаздывания; а с другой – рассматривая нелинейные постановки с привлечением техники усреднений или асимптотического подхода.

Р Е З Ю М Е . На основі спектральної теорії операторів отримано критерій стійкості за Ляпуновим для імпульсної диференціальної системи з запізненням у припущенні рівності інтервалів між імпульсами величині запізнення. Встановлено умови стійкості для механічної системи двох зв’язаних маятників, що знаходяться під впливом періодичної імпульсної дії і поля прискорень; яке залежить від минулого стану системи. Подальше дослідження механічної системи проведено з допомогою чисельних методів. Для системи побудовано область стійкості і зроблено порівняння з областю стійкості для аналогічної системи без запізнення.

1. *Березанский Ю.М.; Ус Г. Ф.; Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – К.: Вища шк.; 1990. – 600 с.
2. *Бойчук А.А.; Перестюк Н.А.; Самойленко А.М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Диференциальные уравнения. – 1991. – **27**; № 9. – С. 1516 – 1521.
3. *Владимиров В.С.* Обобщённые функции. – М.: Наука; 1979. – 318 с.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука; 1966. – 576 с.
5. *Далецкий Ю.Л.; Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука; 1970. – 535 с.
6. *Кирилов А.А.; Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука; 1988. – 397 с.
7. *Люстерник Л.А. Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука; 1965. – 519 с.
8. *Перестюк М.О.; Слюсарчук В.Ю.* Умови існування неколивних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням та імпульсним збуренням у банаховому просторі // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**; N 6. – С. 790 – 798.
9. *Самойленко А.М.; Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк.; 1987. – 282 с.
10. *Самойленко А.М.; Перестюк Н.А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – **13**. – С. 1981 – 1992.
11. *Слынько В.И.* О достаточных условиях практической устойчивости нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. – 2004. – **40**; № 10. – С. 131 – 135.
12. *Слюсарчук В.Ю.* Стійкість розв’язків різницевих рівнянь у банаховому просторі. – Рівне: Вид-во Укр. держ. ун-ту водного господарства та природокористування; 2003. – 366 с.
13. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир; 1984. – 421 с.
14. *Чеботарёв Н.Г.; Мейман Н.Н.* Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова. – М.; Л.: Наука; 1949. – **26**. – 332 с.
15. *Dvirnyi A.I.; Slyn’ko V.I.* Stability of Impulsive Nonholonomic Mechanical Systems // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44;** N 3. – P. 353 – 360.
16. *Filer Z.E.; Muzychenko A.I.* Stability of Linear Mechanical Systems with Aftereffect // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**; N 1. – P. 103 – 112.
17. *Hsu C.S.* Nonlinear behavior of multibody systems under impulsive parametric exitation // Dyn. Multibody Syst. Symp. (Munich; 1977). – Berlin, 1978. – P. 63 – 74.
18. *Ivanov I.L.; Slyn’ko V.I.* Conditions for the stability of an impulsive linear equation with pure delay // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**; N 9. – P. 1417 – 1427.
19. *Martynyuk A.A.; Slyn’ko V.I.* On Stability of Motion with Respect to Two Measures under Uncertainty // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**; N 1. – P. 91 – 100.

Поступила 20.04.2011 Утверждена в печать 06.06.2013