

А. Я. Григоренко<sup>1</sup>, И. А. Лоза<sup>2</sup>

**НЕОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ В СЛОИСТЫХ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРАХ  
С ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИМИ РАДИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ СЛОЯМИ**

<sup>1</sup>*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru;*

<sup>2</sup>*Национальный транспортный университет,  
ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@mail.ru*

**Abstract.** The problem is considered on propagation of non-symmetric waves in layered hollow cylinders with piezoceramic radially polarized layers. To solve the problem, the effective numerical-analytical method is proposed. The initially three-dimensional problem of electroelasticity in partial derivatives is reduced to the boundary value problem for ordinary differential equations by means of representation of components of elasticity tensor, vectors of displacements, electric induction and electrostatic potential by the combination of the standing waves in the circumferential direction and the running waves in the axial direction. The problem is solved by the stable method of discrete orthogonalization with combination with the step-by-step search method. The results of numerical analysis of dispersion relationships are shown in the wide range of change of the layered cylinders geometrical characteristics.

**Key words:** three-dimensional problem of electroelasticity, layered hollow cylinders, piezoceramic radially polarized layers, standing waves, running waves, method of discrete orthogonalization.

**Введение.**

Пьезокерамические волноводы в виде кругового цилиндра находят широкое применение в акустоэлектронике, что свидетельствует об актуальности исследования волновых процессов, происходящих в пьезокерамических телах. Вопросам распространения акустоэлектрических волн в однородных цилиндрических волноводах посвящено значительное количество работ. Осесимметричная задача для сплошного и полого волноводов исследована в [2, 4, 10, 17], а неосесимметричная – [3, 5, 6, 8, 9, 18]. Для слоистых цилиндров, кроме удовлетворения решений на ограничивающих тело поверхностях, необходимо также удовлетворять условиям сопряжения, что приводит к повышению порядка систем уравнений. Работа [7] посвящена исследованию волновых процессов в слоистых структурах. Для решения этих задач использован метод, основанный на разложении искомым функций в степенные ряды. Однако сложности в его реализации не позволили получить подробную количественную информацию. Некоторые аспекты нестационарного электромеханического поведения пьезокерамических тел исследованы на основании численного подхода в [14 – 16]. Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей статье, предложен эффективный численно-аналитический подход, применявшийся при решении аналогичных задач для упругих тел [1, 11 – 13].

**1. Постановка задачи. Основные уравнения для слоистых полых цилиндров.**

Рассмотрим полый слоистый цилиндр с неизменяемыми слоями, которые могут быть пьезокерамическими либо металлическими. Вдоль оси цилиндра распространяется неосесимметричная акустоэлектрическая волна. Полная система уравнений, описывающих данную задачу, состоит из:

1) уравнений неосесимметричных движений  $i$ -го слоя в цилиндрической системе координат  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^i}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^i}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2};\end{aligned}\quad (1)$$

2) уравнений электростатики для  $i$ -го слоя:

$$\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} = 0; \quad E_r^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial r}; \quad E_\theta^i = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \theta}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \varphi^i}{\partial z}; \quad (2)$$

3) соотношений Коши для  $i$ -го слоя:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{r\theta}^i = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{u_\theta^i}{r}; \\ 2\varepsilon_{rz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial r} + \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad 2\varepsilon_{\theta z}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (3)$$

В равенствах (1) – (3) принято:  $\sigma_{jk}^i$  – компоненты тензора напряжений;  $\rho^i$  – плотность материала;  $u_j^i$  – компоненты вектора перемещений;  $D_j^i$  – компоненты вектора электрической индукции;  $E_j^i$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $\varphi^i$  – электростатический потенциал;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для  $i$ -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \quad \sigma_{\theta\theta}^i = c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{13}^i E_r^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2c_{66}^i \varepsilon_{\theta z}^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{15}^i E_z^i; \\ \sigma_{r\theta}^i &= 2c_{55}^i \varepsilon_{r\theta}^i - e_{15}^i E_\theta^i; \quad D_r^i = e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{13}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \\ D_\theta^i &= 2e_{15}^i \varepsilon_{\theta z}^i + \varepsilon_{11}^i E_\theta^i; \quad D_z^i = 2e_{15}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{11}^i E_z^i,\end{aligned}\quad (4)$$

где  $c_{jk}^i$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{jk}^i$  – компоненты тензора пьезомодулей;  $\varepsilon_{jk}^i$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Материальные соотношения для  $i$ -го изотропного слоя:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i;\end{aligned}$$

$$\sigma_{zz}^i = \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta} + \frac{(1-\nu^i) E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \quad (5)$$

$$\sigma_{r\theta}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{r\theta}^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i; \quad \sigma_{\theta z}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{\theta z}^i.$$

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при  $r = R_0 \pm h$ ) – следующие: 1) поверхности свободны от внешних усилий ( $\sigma_{rr}^i = \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{rz}^i = 0$ ) и покрыты электродами, которые закорочены ( $\varphi = 0$ ); 2) на поверхностях контакта  $r = r_i$  имеют место условия совместной работы  $i$ -го и  $(i+1)$ -го слоев без скольжения и отрыва и непрерывности электрического поля

$$(\sigma_{rr}^i = \sigma_{rr}^{i+1}; \quad \sigma_{r\theta}^i = \sigma_{r\theta}^{i+1}; \quad \sigma_{rz}^i = \sigma_{rz}^{i+1};$$

$$\varphi^i = \varphi^{i+1}; \quad u_r^i = u_r^{i+1}; \quad u_\theta^i = u_\theta^{i+1}; \quad u_z^i = u_z^{i+1}; \quad D_r^i = D_r^{i+1}). \quad (6)$$

В дальнейшем верхний индекс  $i$  будем опускать. Выбираем в качестве основных неизвестных функции, через которые формулируются условия контакта смежных слоев и условия на ограничивающих тело поверхностях. Разрешающая система уравнений для данного класса задач принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left( \frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\Delta_3}{\Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{r \Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\Delta_6}{r^2 \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \left( \frac{\Delta_6}{r^2 \Delta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\theta + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} \frac{\partial D_r}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left( \frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right) \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial z} - \left( \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_1}{r \Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_2}{r \Delta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{r\theta} + \frac{e_{31}}{r c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta; \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} + \frac{e_{31}}{c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\Delta_7}{c_{55}} \varphi - \frac{1}{r} D_r, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены обозначения:  $\Delta = c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2$ ;  $\Delta_1 = c_{33} e_{13} - c_{13} e_{33}$ ;  $\Delta_2 = c_{13} \varepsilon_{33} + e_{13} e_{33}$ ;  $\Delta_3 = (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{11}) \Delta$ ;  $\Delta_4 = (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{12}) \Delta$ ;  $\Delta_5 = c_{12} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2$ ;  $\Delta_6 = c_{11} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2$ ;  $\Delta_7 = c_{55} e_{11} + e_{15}^2$ .

## 2. Методика решения краевых неосесимметричных задач.

Для решения данной задачи предложен эффективный численно-аналитический подход. Представим компоненты тензоров напряжения и векторов смещения, электрической индукции и электростатического потенциала в виде стоячих волн в окружном направлении и бегущих волн в осевом направлении. В результате исходную трехмерную задачу теории электроупругости, описываемую уравнениями в частных производных, сводим к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях. Полученную задачу решаем с использованием устойчивого численного метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Используем метод разделения переменных, а также замкнутость цилиндрического тела в направлении окружной координаты. Тогда разрешающие функции представляем в виде стоячих волн в окружном направлении и бегущих в осевом направлении

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta, z, t) &= \sigma_{rr}(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta, z, t) = \sigma_{r\theta}(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \\ \sigma_{rz}(r, \theta, z, t) &= \sigma_{rz}(r) \sin m\theta \sin(kz - \omega t); \quad \varphi(r, \theta, z, t) = h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \\ u_r(r, \theta, z, t) &= hu_1(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t); \quad u_\theta(r, \theta, z, t) = hu_2(r) \sin m\theta \cos(kz - \omega t); \quad (8) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= hu_3(r) \cos m\theta \sin(kz - \omega t); \quad D_r(r, \theta, z, t) = D_r(r) \cos m\theta \cos(kz - \omega t).\end{aligned}$$

Используя разложение (8), систему (7), граничные и смежные условия, получаем краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{R}}{dr} = A(x, \Omega)\mathbf{R}; \quad B(-1) = 0; \quad B(1) = 0; \quad \mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_\theta, u_z, D_r\}, \quad (9)$$

где  $A = \|a_{lm}\|$  ( $l, m = 1, 2, \dots, 8$ ), а ненулевые элементы матрицы  $A$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \tilde{x} \left( \frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right); \quad a_{12} = m\tilde{x}; \quad a_{13} = k; \quad a_{15} = - \left( \frac{\tilde{x}^2 \Delta_3}{\Delta} + \Omega^2 \right); \quad a_{16} = \frac{m\tilde{x}^2 \Delta_3}{\Delta}; \quad a_{17} = \frac{k\tilde{x} \Delta_4}{\Delta}; \\ a_{18} &= - \frac{\tilde{x} \Delta_1}{\Delta}; \quad a_{21} = - \frac{m\tilde{x} \Delta_2}{\Delta}; \quad a_{22} = -2\tilde{x}; \quad a_{25} = - \frac{m\tilde{x}^2 \Delta_6}{\Delta}; \quad a_{26} = \frac{m^2 \tilde{x}^2 \Delta_6}{\Delta} + k^2 c_{66} - \Omega^2; \\ a_{27} &= m k \tilde{x} \left( \frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right); \quad a_{28} = \frac{m\tilde{x} \Delta_1}{\Delta}; \quad a_{31} = - \frac{k \Delta_2}{\Delta}; \quad a_{33} = -\tilde{x}; \quad a_{35} = - \frac{k\tilde{x} \Delta_5}{\Delta}; \\ a_{36} &= m k \tilde{x} \left( \frac{\Delta_5}{\Delta} + c_{66} \right); \quad a_{37} = m^2 \tilde{x}^2 c_{66} + \frac{k^2 \Delta_6}{\Delta} - \Omega^2; \quad a_{38} = \frac{k \Delta_1}{\Delta}; \quad a_{41} = \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta}; \quad a_{45} = \frac{\tilde{x} \Delta_1}{\Delta}; \\ a_{46} &= - \frac{m\tilde{x} \Delta_1}{\Delta}; \quad a_{47} = - \frac{k \Delta_1}{\Delta}; \quad a_{48} = - \frac{\tilde{c}_{33}}{\Delta}; \quad a_{51} = \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta}; \quad a_{55} = - \frac{\tilde{x} \Delta_2}{\Delta}; \quad a_{56} = \frac{m\tilde{x} \Delta_2}{\Delta}; \quad a_{57} = \frac{k \Delta_2}{\Delta}; \\ a_{58} &= \frac{\tilde{e}_{33}}{\Delta}; \quad a_{62} = \frac{1}{c_{55}}; \quad a_{64} = - \frac{m\tilde{x} e_{15}}{c_{55}}; \quad a_{65} = -m\tilde{x}; \quad a_{66} = \tilde{x}; \quad a_{73} = \frac{1}{\tilde{c}_{55}}; \quad a_{74} = - \frac{k\tilde{e}_{51}}{\tilde{c}_{55}}; \quad a_{75} = -k;\end{aligned}$$

$$a_{82} = \frac{m\tilde{x}\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}; a_{83} = \frac{k\tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{55}}; a_{84} = -\left(m^2\tilde{x}^2 + k^2\right)\frac{\Delta_7}{\tilde{c}_{55}}; a_{88} = -\tilde{x},$$

где введены обозначения:  $\Omega = \omega h \sqrt{\rho / \lambda}$ ;  $\tilde{c}_{ij} = c_{ij} / \lambda$ ;  $\tilde{e}_{ij} = e_{ij} / \sqrt{\varepsilon_0 \lambda}$ ;  $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} / \varepsilon_0$ ;  $x = (r - R_0) / h$ ;  $\varepsilon = h / R_0$ ;  $\tilde{x} = \varepsilon / 1 + \varepsilon x$ ;  $h$  – половина толщины цилиндра;  $\rho$  – плотность материала цилиндра;  $R_0$  – радиус срединной поверхности;  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума;  $\lambda = 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

Граничные условия представим в таком виде:

$$B_1 \mathbf{R}(-1) = 0, B_2 \mathbf{R}(1) = 0, \quad (10)$$

где матрицы  $B_1$  и  $B_2$  будут равны и имеют вид

$$B_1 = B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

### 3. Числовые результаты. Анализ.

Ниже приведены результаты численного анализа. На рис. 1 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа  $\zeta = kh / \pi$  (при этом значение  $m = 1$ ,  $\varepsilon = 0,25$ ). Принято, что цилиндр состоит из трех слоев. Толщины внешних слоев равны по  $h/2$ , а толщина внутреннего слоя равна  $h$ . Материал внешних слоев – сталь с характеристиками:  $E = 21 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0,28$ ;  $\rho_m = 7,85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Внутренний слой – пьезокерамика PZT 4 с характеристиками:  $c_{11} = 13,9 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $c_{12} = 7,43 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $c_{13} = 7,78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $c_{33} = 11,5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $c_{55} = 2,56 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $e_{33} = 15,1$  К/м<sup>2</sup>;  $e_{13} = -5,2$  К/м<sup>2</sup>;  $e_{15} = 12,7$  К/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_{11} = 730$ ;  $\varepsilon_{33} = 635$ ;  $\rho_n = 7,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Для кривых введены обозначения, принятые в работе [6]. При  $\varepsilon = 0$  и  $k = 0$  приходим к задаче о колебаниях плоского слоя. Так, для однослойного цилиндра из металла имеем следующие формулы для частот:

$$U(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho_i}} = 0; 2,905; 5,81; \dots; n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho_i}} = 0; 1,606; 3,211; \dots; n = 0, 1, 2, \dots$$

Для однослойного цилиндра из пьезокерамики PZT 4 имеем равенства

$$U(2n) = \pi n \sqrt{\frac{1}{\rho_i} \left( c_{11} + \frac{e_{11}^2}{\varepsilon_{11}} \right)} = 0; 4,325; 8,649; \dots; n = 0, 1, 2, \dots;$$

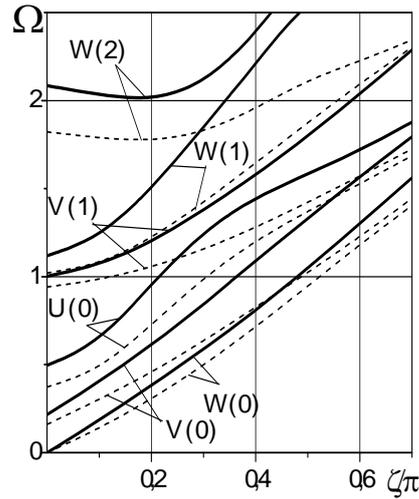


Рис. 1

$$U(2n+1) = 1,995; 6,729; \dots; \quad V(n) = W(n) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\frac{c_{55}}{\rho_f}} = 0; 0,918; 1,835; \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку частота слоистого цилиндра ограничена сверху соответствующей частотой для сплошного металлического цилиндра, а снизу – частотой для сплошного пьезокерамического цилиндра, то для слоистого цилиндра будем использовать аналогичные обозначения. На рис. 1 сплошными линиями изображены ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, пунктирными – для однородного цилиндра такой же геометрии из пьезокерамики PZT 4. Из приведенного рисунка видно, что влияние наличия металлических слоев приводит к «ужесточению» материала, т. е. повышению значения собственных частот. При этом различие в первой собственной частоте для слоистого и однослойного цилиндров незначительно. Для более высоких частот – различие более существенное.

На рис. 2 представлена зависимость первых шести частот от волнового числа  $\zeta = kh / \pi$ ; сплошными линиями также обозначены ветви дисперсионных соотношений для слоистого цилиндра, а пунктирной – для однослойного стального цилиндра.

Как видно, в этом случае значения собственных частот для слоистого цилиндра меньше соответствующих частот для стального цилиндра. Следовательно, частота собственных колебаний слоистого цилиндра лежит в некоем «коридоре» между собственной частотой для однослойного цилиндра из пьезокерамики и частотой для однослойного цилиндра из стали. Это иллюстрирует рис. 3. Здесь сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики, штрихпунктирной – для цилиндра из стали. Материал и геометрия цилиндра соответствует данным, принятым ранее.

На рис. 4 представлена также зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения  $m = 2$ . Материал и геометрия цилиндра такие же, как и для рис. 1. Сплошной линией обозна-

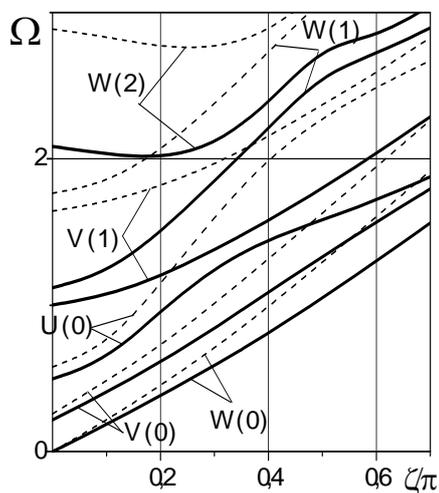


Рис. 2

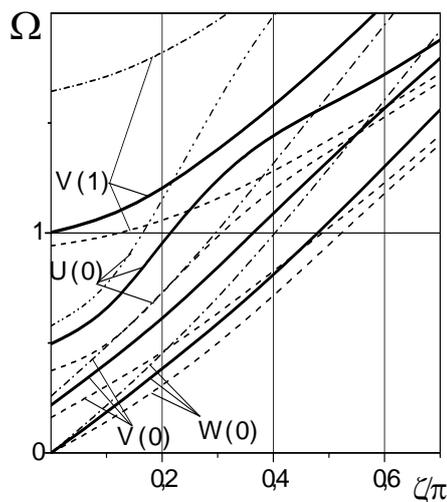


Рис. 3

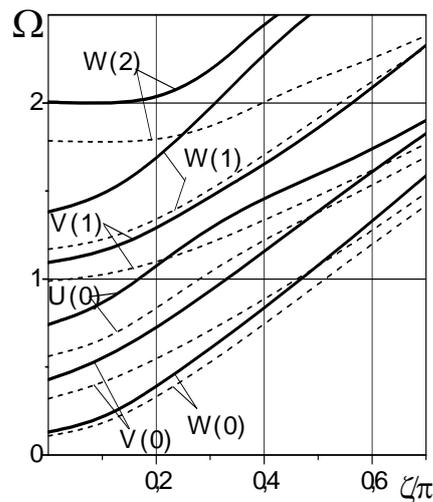


Рис. 4

чены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из пьезокерамики PZT 4. На рис. 5 представлена зависимость первых шести частот от безразмерного волнового числа для значения  $m = 2$ . Материал и геометрия цилиндра такие же, как и для случая, представленного на рис. 2. Сплошной линией обозначены собственные частоты для слоистого цилиндра, пунктирной – для цилиндра из стали.

На рис. 6 выполнено совмещение данных рис. 4 и 5 для первых четырех частот.

Как известно, краевая задача (8), (9) математически совпадает с задачей о свободных неосесимметричных колебаниях слоистого цилиндра с шарнирным опиранием на торцах. Рассмотрим трехслойный цилиндр со слоями, аналогичными рассмотренному выше цилиндру (с внутренним радиусом  $R_{\text{внутр.}} = 3$ , внешним –  $R_{\text{внешн.}} = 5$  и длиной –  $L = 10$  безразмерных единиц). При таком выборе геометрических характеристик значение  $\varepsilon = h / R_0 = 0,25$  совпадает со значениями, принятыми для расчетов в предыдущей задаче, результаты которых приведены на рис. 1 – 6. Кроме того, необходимо провести аналогичные исследования для значений  $m = 0$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$ , ...

Анализ частотного спектра показывает, что для определения первых пяти собственных частот достаточно четырех первых значений  $m$ :  $m = 0$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$  и

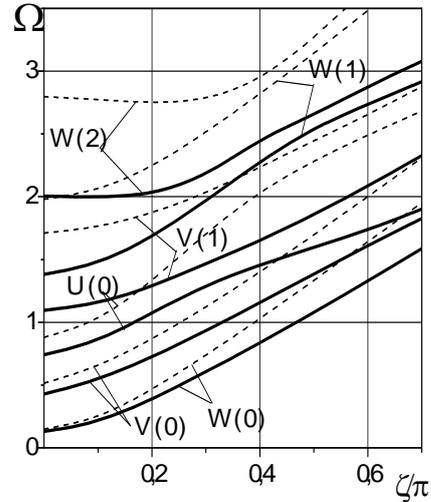


Рис. 5

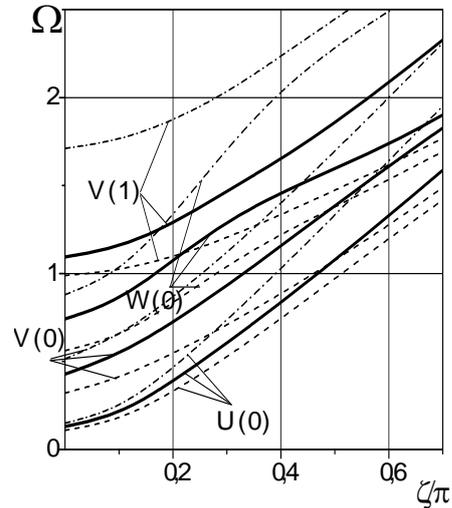


Рис. 6

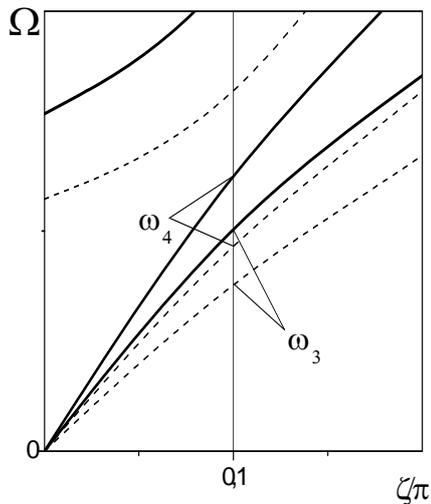


Рис. 7

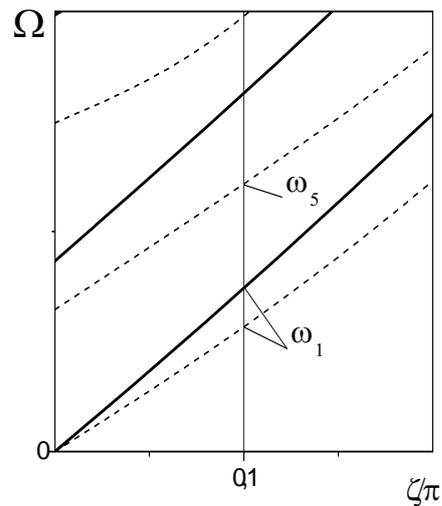


Рис. 8

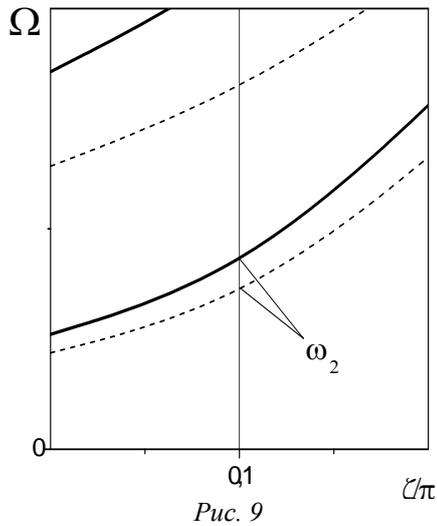


Рис. 9

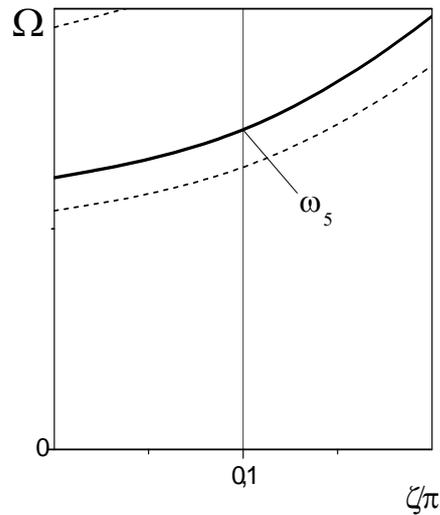


Рис. 10

$m = 3$ . Результаты проведенных исследований представлены на рис. 7 – 10 для соответствующих значений  $m$  (сплошной линией обозначены дисперсионные кривые для неоднородного цилиндра, а пунктирной – для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4).

Видно, что соответствующие частоты будут лежать на пересечении соответствующих дисперсионных ветвей и значений  $\zeta = 0, 1; 0, 2; 0, 3 \dots$ ; следует их лишь расположить в порядке возрастания. В таблице представлены числовые значения первых пяти частот для случая трехслойного цилиндра (Вариант 1) и однородного пьезокерамического цилиндра (Вариант 2). Показано также число полуволн ( $m$ ) в окружном направлении и число полуволн в осевом направлении ( $k$ ), а также – к какой относительной погрешности ( $\Delta$ ) при вычислении собственных частот приведет игнорирование неоднородности.

| № $\omega_i$ | Вариант 1 | $m$ | $k$ | Вариант 2 | $m$ | $k$ | $\Delta, \%$ |
|--------------|-----------|-----|-----|-----------|-----|-----|--------------|
| 1            | 0,1824    | 1   | 1   | 0,1368    | 1   | 1   | 25           |
| 2            | 0,1965    | 2   | 1   | 0,1645    | 2   | 1   | 16,3         |
| 3            | 0,2713    | 0   | 1   | 0,2007    | 0   | 1   | 26           |
| 4            | 0,3332    | 0   | 1   | 0,2487    | 0   | 1   | 25,4         |
| 5            | 0,3467    | 3   | 1   | 0,3023    | 1   | 1   | 12,8         |

Как видно из таблицы, первая собственная частота не является собственной частотой осесимметричных колебаний. Только лишь третья и четвертая собственные частоты являются частотами осесимметричных колебаний. При этом третья частота является частотой продольных колебаний, а четвертая – частотой крутильных колебаний. Собственные частоты, полученные в данной работе для однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4, полностью совпадают с данными, полученными на основании подхода, разработанного в работе [7]. Естественно, что объем работ при этом совершенно разный. Однако, на основании анализа, проведенного в данной работе, кроме значений собственных частот, получена также информация о формах колебаний.

#### 4. Заключение.

Сформулирована и решена задача о распространении неосесимметричных волн в полом слоистом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями. Рассмотрен случай, когда боковые поверхности свободны от механических воздействий и коротко замкнуты. Для решения задачи предложен эффективный численно-аналитический подход. Решена также математически эквивалентная задача – о собственных колебаниях полого слоистого цилиндра с пьезокерамическими и стальными слоями с шарнирным опиранием на торцах. В результате численного анализа установлено следующее:

первая собственная частота соответствует форме колебаний с одной полуволной в осевом и окружном направлениях;

вторая собственная частота – форме колебаний с одной полуволной в осевом и одной волной в окружном направлении;

третья собственная частота соответствует осесимметричной форме с одной полуволной в осевом направлении.

Наличие стальных слоев приводит к значительному увеличению собственных частот. Для рассматриваемых первых пяти частот наибольшее увеличение наблюдается для третьей собственной частоты и приводит к увеличению ее значения на 26%.

**Р Е З Ю М Е .** Розглянуто задачу про поширення неосесиметричних хвиль у шаруватих порожнистих п'єзокерамічних циліндрах з радіально поляризованими шарами. Для розв'язку задачі запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод. Початкова тривимірна задача теорії електропружності в частинних похідних (шляхом представлення компонентів тензора пружності, компонентів векторів переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу комбінацією стоячих хвиль в коловому напрямі та біжучих хвиль в осьовому напрямі) зведена до крайової задачі на власні значення для звичайних диференціальних рівняннях. Отриману задачу розв'язано стійким методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу дисперсійних відношень в широкому діапазоні зміни геометричних характеристик шаруватих циліндрів з п'єзокерамічними шарами.

1. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я.. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: «Академперіодика», 2006. – 472 с.
2. Григоренко А.Я., Лоца И.А., Шульга Н.А. Распространение осесимметричных волн в полом пьезокерамическом цилиндре // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 3. – С. 35 – 39.
3. Григоренко А.Я., Лоца И.А., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных волн в пьезокерамическом полом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 6. – С. 11 – 16.
4. Йвина Н.Ф., Касаткин Б.А. Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе // Дефектоскопия. – 1975. – № 4. – С. 27 – 32.
5. Лоца И.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом цилиндрическом волноводе, поляризованном в окружном направлении // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 12. – С. 19 – 23.
6. Лоца И.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с радиальной поляризацией // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 1. – С. 22 – 27.
7. Лоца И.А., Медведев К.В., Шульга Н.А. Распространение неосесимметричных акустоэлектрических волн в слоистых цилиндрах // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 8. – С. 3 – 6.
8. Лоца И.А., Шульга Н.А. Распространение акустоэлектрических волн в пьезокерамическом полом цилиндре и слое // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – **22**. – С. 86 – 90.
9. Лоца И.А., Шульга Н.А. Кинематический анализ распространения акустоэлектрических волн в полом пьезокерамическом цилиндре с осевой поляризацией // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1988. – **24**, № 1. – С. 115 – 120.
10. Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Лоца И.А. Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 79 – 86.
11. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya., Vlaiikov G.G. Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basic of different models. – Kyiv: “Akademperiodika”, 2009. – 549 p.
12. Grigorenko A. Ya., Efimova T.L. Application of Spline-Approximation for Solving the Problems on Natural Vibrations of Rectangular Shallow Shells with Varying Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 10. – P. 1161 – 1169.
13. Grigorenko A. Ya., Yaremchenko N.P. Stress-Strain State of Shallow Shells with Rectangular Planform and Varying Thickness: Refined Formulation // Int. Appl. Mech. – 2007. – **41**, N 10. – P. 1132 – 1141.
14. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O. Studying the Electroelastic Deformation of Layer under Mechanical Loading by the Method of Characteristics // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 82 – 89.
15. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O. Radial Electromechanical Non-Stationary Vibrations of a hollow Piezoceramic Cylinder under Elastic Excitation // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 230 – 235.
16. Shul'ga N.A., Grigorieva L.O. On Electroelastic Non-Stationary Vibrations of a Piezoceramic Layer // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 3. – P. 373 – 381.
17. Paul H.S. Torsional vibration of circular cylinder of piezoelectric  $\beta$ -quartz // Arch. Mech. Stosow. – 1962. – N 5. – P. 127 – 134.
18. Paul H.S. Vibration of circular cylindrical shells of piezoelectric silver iodide crystals // J. Acoust. Soc. Amer. – 1966. – **40**, N 5. – P. 1077 – 1080.

Поступила 21.07.2010

Утверждена в печать 06.06.2013