

А. З. Галишин, Ю. Н. Шевченко

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОУПРУГО-
ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ
ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

Abstract. A technique is developed for determination of axisymmetric thermoelastoplastic state of thin shells with allowance for the stress deviator third invariant. The technique is based on relationships of the theory of thin shells with taking into account of transverse shear and torsion. As the constitutive equations, the relations of the theory of thermoelasticity are used, which link the stress tensor components in the Eulerian system of coordinates with components of the linear part of finite strain tensor. The nonlinear scalar functions from the constitutive equations are determined from the basic experiments on the proportional loading the tube samples under different values of temperature and angle of stress state kind. The solving the boundary problem is reduced to the numerical integration of the system of ordinary differential equations by the procedure of Godunov discrete orthogonalization. As an example, the thermoelastoplastic stress-strain state of a goffered shell is considered.

Key words: thermoelastoplastic state, thin shell, stress state kind, shell of revolution.

Введение.

Определению упругопластического напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек вращения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений при изотермическом нагружении посвящены работы [2, 3]. В этих работах в рамках гипотез Кирхгофа – Лява [2] и прямолинейного элемента [3] изложены методики решения осесимметричной задачи пластичности для тонких оболочек, основанные на определяющих уравнениях работ [5, 6]. Эти уравнения устанавливают зависимость между компонентами тензора напряжений в системе координат Эйлера с компонентами линейной части тензора конечных деформаций. Выбранные меры напряжений и деформаций согласованы в энергетическом смысле. В данных уравнениях используется нелинейная зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций и нелинейная зависимость между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. Эти зависимости определяются из опытов при пропорциональном нагружении трубчатых образцов при различных углах вида напряженного состояния, который зависит от третьего инварианта девиатора напряжений. В работе [7] физические уравнения [5, 6] модернизированы для случая неизотермического нагружения, на основе которых в работе [1] в рамках гипотез Кирхгофа – Лява при отсутствии кручения решена осесимметричная задача термопластичности для тонких оболочек с учетом зависимости свойств материала от температуры. В отличие от [1] в настоящей работе разработана методика решения аналогичной задачи, но на основе кинематической модели прямолинейного элемента, учитывающей деформации поперечного сдвига и кручения.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим тонкую оболочку вращения, составленную из последовательно соединенных звеньев с различной формой меридиана. Положение произвольной точки оболочки определим в системе криволинейных ортогональных координат s, φ, ζ , где s ($s_0 \leq s \leq s_n$) – длина дуги срединного меридиана; φ – окружная координата; ζ – расстояние точки от срединной поверхности. Рассмотрим оболочки, для которых можно пренебречь величинами ζk_s и ζk_φ по сравнению с единицей, где k_s и k_φ – главные кривизны срединной поверхности оболочки. Также используем традиционное в теории оболочек допущение, что нормальным напряжением $\sigma_{\zeta\zeta}$ можно пренебречь по сравнению с другими нормальными напряжениями

$$\sigma_{\zeta\zeta} = 0. \quad (1.1)$$

Пусть первоначально оболочка находится в естественном недеформированном состоянии при температуре $T = T_0$, а затем подвергается неравномерному нагреву и действию нагрузок, вызывающих осесимметричное НДС и кручение. Предполагаем, что под действием этих нагрузок в оболочке возникают значительные пластические деформации, процесс разгрузки не сопровождается появлением вторичных пластических деформаций, а деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с мгновенными упругопластическими. Задачу решаем в геометрически линейной, квазистатической постановке. Процесс нагружения разобьем на ряд малых этапов так, чтобы наилучшим образом описать историю его протекания, а на каждом этапе нагружения задачу термопластичности решаем методом последовательных приближений.

§2. Геометрические и статические уравнения.

Для решения задачи используем кинематическое соотношение модели прямолинейного элемента. Геометрические соотношения имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= u' + k_s w; \\ \varepsilon_\varphi &= \rho u + k_\varphi w; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\kappa_s = \psi'_s; \quad \kappa_\varphi = \rho \psi_s; \quad \Omega = v' - \rho v;$$

$$\tau = \psi'_\varphi - \rho \psi_\varphi; \quad \rho = \frac{\cos \theta}{r},$$

где

$$\psi_s = \mathcal{G}_s + \gamma_s, \quad (s, \varphi),$$

$$\mathcal{G}_s = k_s u - w'; \quad \mathcal{G}_\varphi = k_\varphi v; \quad (2.2)$$

$$k_s = \theta'; \quad k_\varphi = \frac{\sin \theta}{r}; \quad (\dots)' = \frac{d(\dots)}{ds}.$$

В равенствах (2.1), (2.2) обозначено: $\varepsilon_s, \varepsilon_\varphi$ – компоненты деформации срединной поверхности в направлениях s и φ ; κ_s, κ_φ – параметры, характеризующие изменение кривизны срединной поверхности в тех же направлениях; Ω, τ – параметры, характеризующие изменение угла между осями s и φ ; u, v – перемещения точек срединной поверхности в направлениях s и φ ; w – прогиб; ψ_s и ψ_φ – полные углы пово-

рота прямолинейного элемента; $\vartheta_s, \vartheta_\varphi$ – углы поворота нормали к срединной поверхности; γ_s и γ_φ – углы поворота, обусловленные поперечными сдвигами; r – радиус параллельного круга срединной поверхности; $(\pi - \theta)$ – угол между нормалью к этой поверхности и осью вращения z ; символ (s, φ) означает круговую перестановку индексов s и φ .

Компоненты деформации в произвольной точке оболочки связаны с параметрами деформации ее срединной поверхности соотношениями

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ss} &= \varepsilon_s + \zeta \kappa_s; \quad 2\varepsilon_{s\varphi} = \Omega + \zeta \tau; \\ 2\varepsilon_{s\zeta} &= \gamma_s \quad (s, \varphi).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Статические уравнения, описывающие равновесие элемента оболочки при осесимметричном нагружении и кручении, имеют вид [3]

$$\begin{aligned}(rN_s)' - r\rho N_\varphi + rk_s Q_s + rq_s &= 0; \\ (rN_{\varphi s})' + r\rho N_{\varphi s} + rk_\varphi Q_\varphi + rq_\varphi &= 0; \\ (rM_s)' - r\rho M_\varphi - rQ_s + rm_s &= 0; \\ (rM_{\varphi s})' + r\rho M_{\varphi s} - rQ_\varphi + rm_\varphi &= 0; \\ (rQ_s)' - rk_s N_s - rk_\varphi N_\varphi + rq_\zeta &= 0,\end{aligned}\quad (2.4)$$

где N_s, Q_s, M_s – нормальное, перерезывающее усилия и изгибающий момент, действующие в сечении $s = \text{const}$; $N_\varphi, Q_\varphi, M_\varphi$ – аналогичные усилия и момент, действующие в сечении $\varphi = \text{const}$; $N_{\varphi s}, M_{\varphi s}$ – сдвигающее усилие и крутящий момент, действующие в этих сечениях; q_s, q_φ, q_ζ – приведенные к срединной поверхности распределенные нагрузки; m_s, m_φ – обусловленные этими нагрузками распределенные моменты.

§3. Определяющие уравнения.

В качестве уравнений состояния примем уравнения работы [7], предназначенные для описания неизотермических процессов нагружения с учетом зависимости свойств материала от температуры. Эти уравнения устанавливают связь между компонентами тензора напряжений σ_{ij} в эйлеровой системе координат и компонентами линейной части тензора конечных деформаций ε_{ij} . В соответствии с допущением (1.1) уравнения [7] представим в виде закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_{ss} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \sigma_{ss}^D; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2G}{1-\nu} (\nu \varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \sigma_{\varphi\varphi}^D;\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\sigma_{s\varphi} = 2G\varepsilon_{s\varphi} - \sigma_{s\varphi}^D; \quad \sigma_{s\zeta} = 2G\varepsilon_{s\zeta} - \sigma_{s\zeta}^D; \quad \sigma_{\varphi\zeta} = 2G\varepsilon_{\varphi\zeta} - \sigma_{\varphi\zeta}^D,$$

где σ_{ij}^D – дополнительные напряжения, которые определяются по результатам расчета НДС в предыдущем приближении, т. е.

$$\sigma_{ss}^D = \frac{2G}{1-\nu} \left[e_{ss}^p + \nu e_{\varphi\varphi}^p + (1+\nu)(\varepsilon_T + \varepsilon_0^p) \right]; \quad (3.2)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^D = \frac{2G}{1-\nu} \left[\nu e_{ss}^p + e_{\varphi\varphi}^p + (1+\nu)(\varepsilon_T + \varepsilon_0^p) \right]; \quad \sigma_{s\varphi}^D = 2Ge_{s\varphi}^p;$$

$$\sigma_{s\zeta}^D = 2Ge_{s\zeta}^p; \quad \sigma_{\varphi\zeta}^D = 2Ge_{\varphi\zeta}^p.$$

Деформацию $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ определяем на основе допущения (1.1) из уравнения [7] для напряжения $\sigma_{\zeta\zeta}$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{1}{1-\nu} \left[\nu(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) + (1-2\nu)(e_{ss}^p + e_{\varphi\varphi}^p) - (1+\nu)(\varepsilon_T + \varepsilon_0^p) \right]. \quad (3.3)$$

В равенствах (3.1) – (3.3) обозначено: $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$ – тепловая деформация; G , ν , α_T – модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного теплового расширения, зависящие от температуры; e_0^p – пластическая составляющая средней деформации $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\zeta\zeta})$; e_{ij}^p – компоненты девиатора пластических деформаций. Приведенные уравнения описывают деформирование элемента тела по траекториям малой кривизны и по форме отличаются от известных уравнений [4] наличием слагаемого ε_0^p .

Величину ε_0^p определяем на основе нелинейной зависимости

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0 - \varepsilon_T, T, \omega_\sigma), \quad (3.4)$$

где $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi})$ – среднее напряжение; ω_σ – угол вида напряженного состояния

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[-\frac{3\sqrt{3} J_3(D_\sigma)}{2 S^3} \right]. \quad (3.5)$$

Здесь $J_3(D_\sigma) = \det(s_{ij})$ – третий инвариант девиатора напряжений D_σ ; s_{ij} – компоненты девиатора напряжений; S – интенсивность касательных напряжений

$$S = \left\{ \frac{1}{3} (\sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}^2) + \sigma_{s\varphi}^2 + \sigma_{s\zeta}^2 + \sigma_{\varphi\zeta}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

При записи определяющих уравнений (3.1) принято, что полные компоненты девиатора деформаций состоят из упругих $e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G}$ и пластических e_{ij}^p составляющих.

Пластические составляющие определяем из условия соосности направляющего тензора напряжений и направляющего тензора скорости пластических деформаций

$\frac{s_{ij}}{S} = \frac{de_{ij}^p}{d\Gamma^p}$, где $d\Gamma^p$ – дифференциал интенсивности пластических деформаций сдвига. Полные компоненты девиатора пластических деформаций и полное значение интенсивности пластических деформаций сдвига определяются как суммы приращений соответствующих величин за все этапы нагружения, т. е.

$$e_{ij}^p = \sum_k \Delta_k e_{ij}^p; \quad \Delta_k e_{ij}^p = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle \Delta_k \Gamma^p; \quad (3.7)$$

$$\Gamma^p = \sum_k \Delta_k \Gamma^p, \quad (3.8)$$

где угловые скобки означают осреднение за k -й этап нагружения.

Приращение интенсивности пластических деформаций сдвига $\Delta_k \Gamma^p$ определяем на основе нелинейной зависимости

$$S = F_2(\Gamma, T, \omega_\sigma). \quad (3.9)$$

Предполагаем, что при деформировании элемента тела по траекториям малой кривизны интенсивность деформаций сдвига Γ состоит из упругой Γ^e и пластической Γ^p составляющих, т. е.

$$\Gamma = \Gamma^e + \Gamma^p = \frac{S}{2G} + \Gamma^p. \quad (3.10)$$

Скалярные функции F_1 и F_2 определяем из опытов на пропорциональное нагружение образцов при различных фиксированных температурах T и углах вида напряженного состояния ω_σ . При фиксированном значении температуры эти функции представляют собой диаграммы деформирования, полученные при различных фиксированных значениях угла ω_σ . При фиксированном значении угла ω_σ эти функции представляют собой мгновенные термомеханические поверхности [4], построенные в соответствующих координатах. В работах [5 – 7] функции F_1 и F_2 определены при различных температурах в опытах на нагружение трубчатых образцов с различным сочетанием растягивающей силы и внутреннего давления для значений $\omega_\sigma = 0^0; 30^0; 60^0$. Расчетным путем проверено, что при построения диаграмм деформирования для конкретных значений T и ω_σ , отличных от базовых, эти функции допускают линейную интерполяцию. Тогда величины ε_0^p и $\Delta\Gamma_p$ можно определить из соответствующих диаграмм деформирования по формулам

$$\varepsilon_0^p = |\varepsilon_0 - \varepsilon_T| - \frac{F_1}{K}, \quad \Delta\Gamma^p = \frac{S - F_2}{2G}, \quad (3.11)$$

где $K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}$ – модуль объемного расширения.

Переходя в равенствах (3.1) к усилиям и моментам, приходим к следующим физическим уравнениям:

$$\begin{pmatrix} \vec{X}_s \\ \vec{X}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ [K]^T & [D] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\varepsilon}_s \\ \vec{\varepsilon}_\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{X}_s^d \\ \vec{X}_\varphi^d \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

$$\vec{Q} = [L]\vec{\gamma} - \vec{Q}^D,$$

где

$$\vec{X}_s = \{N_s, N_{s\varphi}, M_s, M_{s\varphi}\}^T; \quad \vec{\varepsilon}_s = \{\varepsilon_s, \omega_s, \kappa_s, \tau_s\}^T, \quad (s, \varphi); \quad (3.13)$$

$$\vec{Q} = \{Q_s, Q_\varphi\}^T; \quad \vec{\gamma} = \{\gamma_s, \gamma_\varphi\}^T,$$

$$\vec{X}_s^D = \{N_s^D, N_{s\varphi}^D, M_s^D, M_{s\varphi}^D\}^T, \quad (s, \varphi); \quad \vec{Q}^D = \{Q_s^D, \sigma_\varphi^D\}^T.$$

Здесь обозначено: $[C]$, $[K]$, $[D]$, $[L]$ – матрицы жесткостных характеристик, полученные в результате интегрирования равенств (3.1) по толщине оболочки; $N_s^D, \dots, Q_\varphi^D$ – дополнительные усилия и моменты.

§4. Разрешающая система уравнений.

Геометрические (2.1) – (2.3), статические (2.4) и физические (3.12), (3.13) соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений для определения НДС в каждом приближении произвольного этапа нагружения. Используя эти соотношения, сведем задачу термопластичности к решению системы дифференциальных уравнений

$$\vec{Y}' = [P]\vec{Y} + \vec{f} \quad (4.1)$$

относительно вектора \vec{Y} разрешающих функций, в которых формулируются граничные условия на торцах оболочки

$$\vec{Y} = \left\{ \vec{N}, \vec{u} \right\}^T; \quad \vec{N} = r \{N_s, N_{\varphi s}, M_s, M_{\varphi s}, Q_s\}^T; \quad \vec{u} = \{u, v, \psi_s, \psi_\varphi, w\}^T. \quad (4.2)$$

Граничные условия при $s = s_0$ и $s = s_n$ примем в виде

$$[G]\vec{Y} = \vec{g}, \quad (i = 0, n). \quad (4.3)$$

Выше в (4.1) обозначено: $[P]$ и \vec{f} – матрица системы уравнений и вектор свободных членов; $[G]$ и \vec{g}_i – заданные матрицы и векторы граничных условий.

На каждом этапе нагружения задачу термопластичности решаем методом последовательных приближений, в каждом из которых уточняем значения дополнительных напряжений σ_{ij}^D . В каждом приближении краевую задачу (4.1) – (4.3) решаем путем сведения ее к ряду задач Коши, для интегрирования которых применяем метод Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией по Годунову.

§5. Алгоритм решения задачи термопластичности.

Пусть из $(k-1)$ -го этапа нагружения известны значения величин $\sigma_{ij}^{(k-1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k-1)}$, $\sigma_{ij}^{D(k-1)}$, $\Gamma^{P(k-1)}$, $\varepsilon_0^{P(k-1)}$ ($i, j = s, \varphi, \zeta$). В первом приближении k -го этапа нагружения решаем краевую задачу (4.1) – (4.3) с известными величинами $\sigma_{ij}^{D(k-1)}$, в резуль-

тате чего определяем вектор разрешающих функций $\vec{Y}^{k,1}$ в первом приближении. По вычисленным разрешающим функциям в каждой точке оболочки находим значения деформаций $\varepsilon_{ss}^{k,1}$, $\varepsilon_{s\varphi}^{k,1}$, $\varepsilon_{s\zeta}^{k,1}$, (s, φ) (2.3). Затем определяем деформацию $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{k,1}$ (3.3), причем деформации ε_{ss} , $\varepsilon_{s\varphi}$ и ε_T соответствуют первому приближению текущего этапа, а величины e_{ss}^p , $e_{\varphi\varphi}^p$, ε_0^p – к последнему приближению предыдущего этапа. Далее определяем среднюю деформацию $\varepsilon_0^{k,1} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ss}^{k,1} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{k,1} + \varepsilon_{\zeta\zeta}^{k,1})$, компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{k,1}$ (3.1), среднее напряжение $\sigma_0^{k,1} = \frac{1}{3}(\sigma_{ss}^{k,1} + \sigma_{\varphi\varphi}^{k,1})$, компоненты девиатора напряжений $s_{ij}^{k,1}$ и интенсивность касательных напряжений $S^{k,1}$ (3.6).

Затем в каждой точке оболочки определяем значение угла вида напряженного состояния $\omega_\sigma^{k,1}$ (3.5) и значение интенсивности деформаций сдвига $\Gamma^{k,1} = \Gamma_p^{(k-1)} + \frac{S^{k,1}}{2G(T_k)}$. Путем линейной интерполяции по температуре и углу $\omega_\sigma^{k,1}$ поверхности (3.9) определяем значение $S_\sigma^{k,1} = F_2(\Gamma^{k,1}, T_k, \omega_\sigma^{k,1})$ и вычисляется приращение интенсивности пластических деформаций сдвига $\Delta_{k,1}\Gamma^p = \frac{S^{k,1} - S_\sigma^{k,1}}{2G(T_k)}$. Если окажется, что $\Delta_{k,1}\Gamma^p \geq 0$, то это соответствует активному процессу нагружения, а в противном случае – разгрузке, при этом следует положить $\Delta_{k,1}\Gamma^p = 0$. Полученное в первом приближении направление процесса нагружения используется во всех последующих приближениях на этапе. Приращение $\Delta_k\Gamma^p$ определяем как сумма приращений, найденных в каждом приближении, а полное значение интенсивности пластических деформаций определяем в соответствии с (3.8). Далее определяем приращения девиатора пластических деформаций $\Delta_{k,1}e_{ij}^p = \left\langle \frac{s_{ij}^{k,1}}{S^{k,1}} \right\rangle \Delta_{k,1}\Gamma^p$ и полные значения девиатора пластических деформаций $e_{ij}^{p(k,1)}$ (3.7).

В случае активного нагружения на основе заданной зависимости (3.4) путем линейной интерполяции по температуре и углу $\omega_\sigma^{k,1}$ определяем значение функции $F_1^{k,1}$ и находится величина $\varepsilon_0^{p(k,1)} = \left| \varepsilon_0^{k,1} - \varepsilon_T \right| - \frac{F_1^{k,1}}{K(T_k)}$. При разгрузке полагается $\varepsilon_0^{p(k,1)} = \varepsilon_0^{p(k-1)}$. Затем уточняются дополнительные напряжения $\sigma_{ij}^{p(k,1)}$ (2.7) и крайняя задача решается во втором приближении. В результате ее решения определяется вектор разрешающих функций $\vec{Y}^{k,2}$, находятся значения деформаций $\varepsilon_{ss}^{k,2}$, $\varepsilon_{s\varphi}^{k,2}$, $\varepsilon_{s\zeta}^{k,2}$, (s, φ) и деформация $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{k,2}$ и т.д. При этом, в отличие от первого приближения, в равенстве (3.3) деформации ε_{ss} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ относятся ко второму приближению, а величины e_{ss}^p , $e_{\varphi\varphi}^p$, ε_0^p – к первому. Процесс последовательных приближений на k -м этапе заканчивается тогда, когда относительное изменение приращения интенсивности пластических деформаций сдвига $\Delta_k\Gamma^p$ за этап, найденное в двух соседних приближении-

ях, отличается на малую величину δ , определяющую точность решения задачи пластичности.

Следует отметить, что в работе [1] сходимость процесса последовательных приближений проверялась также по согласованию значения σ_0 , найденному по формуле

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{ss} + \sigma_{\varphi\varphi}}{3},$$

со значением, найденным из зависимости (3.4). Там же показано, что

для проведения расчетов достаточно следить лишь за приращением $\Delta_k \Gamma^p$.

Для подтверждения достоверности результатов по описанному алгоритму необходимо сгущать пространственную сетку и разбивку процесса нагружения на этапы.

§6. Пример расчета.

Рассмотрим термоупругопластическое НДС гофрированной оболочки, срединный меридиан которой изображен на рис. 1. Геометрические размеры имеют следующие значения: $R=0,14\text{м}$; $r=0,04\text{м}$; $2L=r\pi$ м; толщина $h=0,004\text{м}$. Оболочка состоит из цилиндрического звена с длиной образующей $2L$ и двух тороидальных звеньев, каждое из которых имеет длину дуги L . Звенья обозначены на рисунке римскими цифрами I – III и плавно соединены между собою без разрыва производной θ' .

Оболочка находится в установившемся температурном поле, которое меняется по толщине по логарифмическому закону

$$T = T_2 + \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r-h/2}{r+h/2}\right)} \ln\left(\frac{r+\zeta}{r+h/2}\right),$$

где $T_1 = 473\text{К}$ – температура на внутренней поверхности; $T_2 = 323\text{К}$ – температура на внешней поверхности; начальная температура $T_0 = 293\text{К}$.

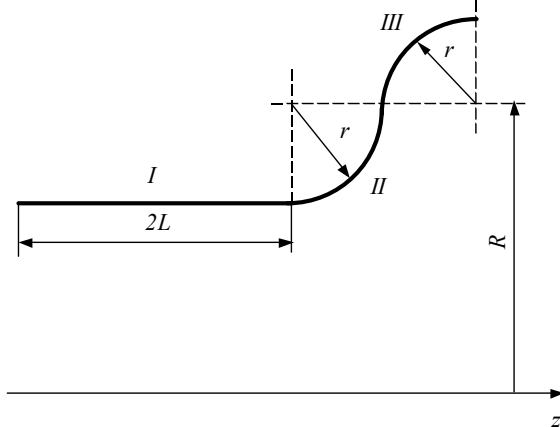


Рис. 1

Оболочка подвержена действию внутреннего давления q_ζ , осевого сжимающего N_s^* и сдвигающего $N_{\phi s}^*$ усилий, меняющихся пропорционально параметру p : $q_\zeta = p$ МПа; $N_s^* = -0,1p$ МПа·м; $N_{\phi s}^* = -0,1p$ МПа·м.

Расчеты проведены для следующего ряда значений параметра $p=0,5; 1,0; 1,2; 1,4; \dots 3,6; 3,8$. Граничные условия при $s=s_0$ заданы в виде: $N_s = N_s^*$, $N_{s\varphi} = N_{s\varphi}^*$, $M_{s\varphi} = Q_s = \psi_s = 0$; при $s=s_n$ задавались условия $Q_s = u = v = \psi_s = \psi_\varphi = 0$. Оболочка изготовлена из стали X18H10T, для которой коэффициент Пуассона и коэффициент линейного теплового расширения приняты: $\nu = 0,27$; $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}$. Значения функций F_1 и F_2 заданы, соответственно, в табл. 1, 2.

Таблица 1

$\varepsilon_0 - \varepsilon_T$	T = 293K			T = 773K		
	$\omega_\sigma = 0^0$	$\omega_\sigma = 30^0$	$\omega_\sigma = 60^0$	$\omega_\sigma = 0^0$	$\omega_\sigma = 30^0$	$\omega_\sigma = 60^0$
0,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0002	88,9	88,9	88,9	71,8	71,8	71,8
0,0006	243,8	207,1	121,4	165,9	131,2	88,1
0,0010	261,9	214,9	133,1	178,5	138,8	99,9
0,0024	295,7	233,4	154,2	205,3	151,4	115,5
0,0030	306,0	240,4	160,7	207,4	154,0	119,4
0,0040	316,6	252,0	169,0	211,4	159,0	123,9
0,0060	336,6	267,0	179,5	215,4	164,0	129,3
0,0080	356,6	282,0	186,2	219,0	169,0	133,0
0,0200	373,0	365,0	188,0	239,8	197,0	154,0
0,0400	411,6	431,6	199,5	274,5	243,7	189,0

Таблица 2

Γ	T = 293			T = 773		
	$\omega_\sigma = 0^0$	$\omega_\sigma = 30^0$	$\omega_\sigma = 60^0$	$\omega_\sigma = 0^0$	$\omega_\sigma = 30^0$	$\omega_\sigma = 60^0$
0,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0002	32,2	32,2	32,2	26,0	26,0	26,0
0,0100	166,6	166,6	166,6	104,3	104,3	104,3
0,0200	188,9	180,0	191,6	128,6	128,6	128,6
0,0400	220,5	204,0	223,0	149,0	137,0	164,6
0,0600	243,0	222,8	247,8	166,0	145,2	187,6
0,0800	261,9	235,3	268,0	178,6	152,6	200,4
0,1000	276,1	246,3	287,9	183,8	156,7	211,9
0,1600	310,0	279,3	325,3	199,4	169,0	231,8
0,2000	332,6	301,3	350,2	209,8	177,2	245,1
0,2500	360,9	328,8	381,4	222,8	187,5	261,7

В расчетах количество точек интегрирования вдоль меридиана каждого звена оболочки принято $K_s^i = 401, 201, 201$, а по толщине – $K_c = 17$. Точность решения задачи термопластичности принята $\delta = 0,001$. Для проверки точности результатов также проведены расчеты с разрежением вдвое пространственной сетки ($K_s^i = 201; 101; 101$, $K_c = 9$). При этом получено, что первый вариант разбивки обеспечивает получение сходящихся результатов: в области максимальных значений деформации отличались не более, чем на 5%. Проведено также два варианта расчета: с учетом и без учета вида напряженного состояния. В последнем случае принято, что $\varepsilon_0^p = 0$ ($\sigma_0 = K\varepsilon_0$), а функция (3.9) определена при чистом растяжении ($\omega_\sigma = 60^0$).

В результате решения задачи установлено, что в исследуемом процессе во всех элементах оболочки реализуется активное нагружение. На поверхностях оболочки имеют место значительные пластические деформации; значение угла ω_σ в различных точках оболочки менялось от 0 до 59^0 . В начале исследуемого процесса нагружения результаты расчетов по двум вариантам практически совпали. При $\Gamma_p \approx 2\%$ различие в значениях пластических деформаций не превышало 7%. Далее это различие увеличивалось и на последнем этапе нагружения составляло 44%.

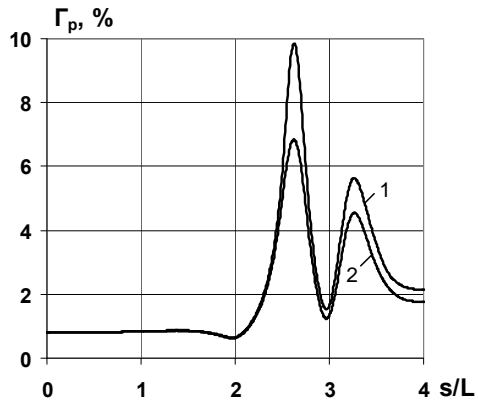


Рис. 2

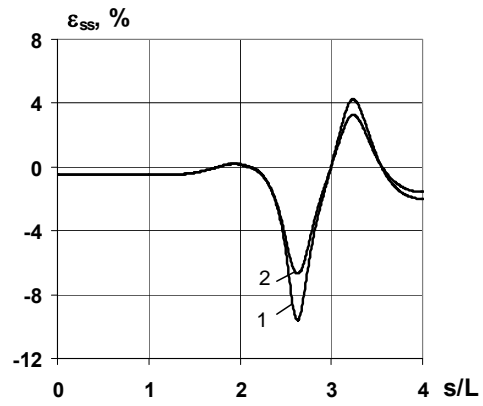


Рис. 3

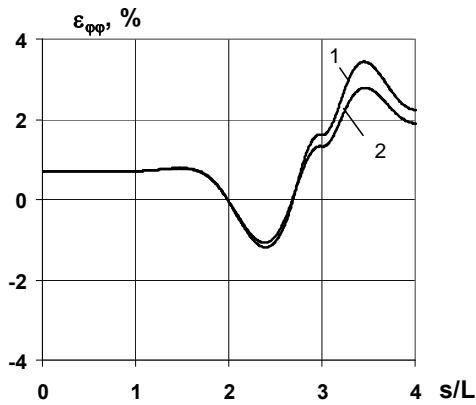


Рис. 4

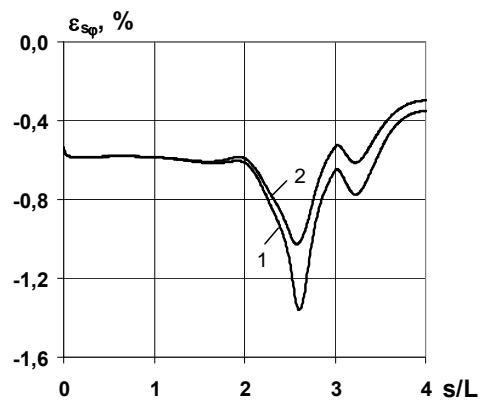


Рис. 5

Некоторые результаты расчетов на наружной поверхности оболочки в конце исследуемого процесса нагружения приведены на рис. 2 – 9, на которых цифрами 1 обозначены результаты, полученные с учетом вида напряженного состояния, а цифрами 2 – без этого учета.

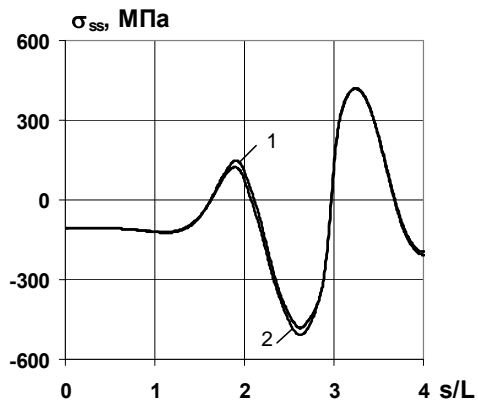


Рис. 6

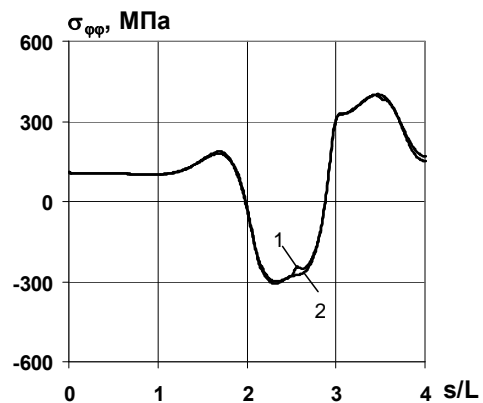


Рис. 7

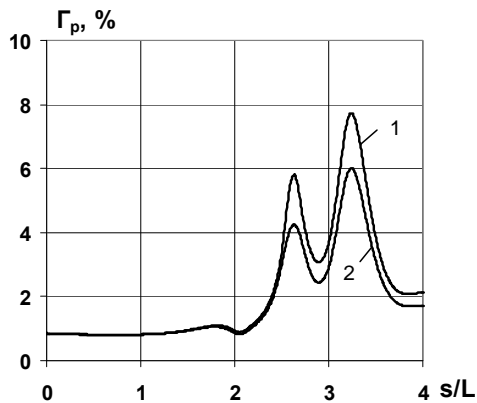


Рис. 8

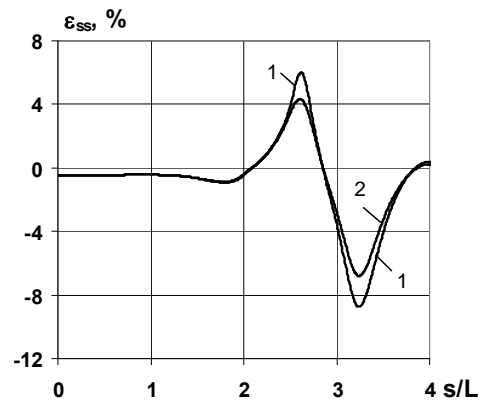


Рис. 9

На рис. 2 показаны графики изменения вдоль меридиана интенсивности пластических деформаций сдвига Γ_p ; на рис. 3 – 5 – графики изменения вдоль меридиана деформаций ε_{ss} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{s\varphi}$.

Из приведенных графиков следует, что в двух вариантах расчета деформации ε_{ss} в области максимальных значений отличаются на 45%; деформации $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – на 25%, а деформации $\varepsilon_{s\varphi}$ – на 33%. Другая картина наблюдается для напряжений σ_{ss} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (рис. 6, 7), которые в двух вариантах расчета незначительно различаются между собой.

Для сравнения с наружной поверхностью на рис. 8, 9 приведено изменение вдоль меридиана интенсивности пластических деформаций сдвига Γ_p и деформаций ε_{ss} на внутренней поверхности оболочки. Видно, что в области максимальных значений эти деформаций несколько меньше, чем на наружной.

Заключение.

По результатам данной статьи можно сделать следующие выводы. Разработана методика решения осесимметричной задачи термопластичности для тонких изотропных оболочек с использованием определяющих уравнений, учитывающих третий инвариант девиатора напряжений. Нелинейные скалярные функции в определяющих уравнениях определяются из базовых экспериментов при пропорциональном нагружении трубчатых образцов при различных температурах и углах вида напряженного состояния. Решение краевой задачи сведено к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В рассмотренном примере показано, что результаты с учетом и без учета вида напряженного состояния хорошо согласуются между собой лишь до значений интенсивности пластических деформаций, равных 2%. С ростом деформаций согласование результатов ухудшается, а их различие достигает 45%.

РЕЗЮМЕ. Розроблено методику визначення осесимметричного термопружнопластичного стану тонких оболонок з урахуванням третього інваріанта девиатора напружень. Методика зоснована на співвідношеннях теорії тонких оболонок з урахуванням деформацій поперечного зсуву й кручення. Як рівняння стану використовуються співвідношення теорії термопластичності, що зв'язують компоненти тензора напружень в системі координат Ейлера з компонентами лінійної частини тензора скінчених деформацій. Нелінійні скалярні функції у визначальних рівняннях визначаються з базових експериментів з пропорційного навантаження трубчастих зразків при різних значеннях температури й кута виду напруженого стану. Розв'язок крайової задачі зводиться до чисельного інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою процедури дискретної ортогоналізації Годунова. Як приклад розглянуто термопружнопластичний напружено-деформований стан гофрованої оболонки.

1. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* Термоупругопластическое деформирование составных оболочек в процессах осесимметричного нагружения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений // Прикл. механика. – 2010. – **46**, №12. – С. 31 – 41.
2. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н.* Уругопластическое деформирование слоистых оболочек в процессах осесимметричного нагружения с учетом третьего инварианта девиатора напряжений // Прикл. механика. – 2010. – **46**, №10. – С. 14 – 24.
3. *Галишин А.З., Шевченко Ю.Н.* Определение осесимметричного упругопластического состояния тонких оболочек с учетом третьего инварианта девиатора напряжений // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 8. – С. 19 – 28.
4. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г.* Термовязкоупруго-пластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 329с.
5. *Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г., Тормахов Н.Н.* О линейной связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций в теориях пластичности упрочняющихся тел // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 3. – С. 60 – 72.
6. *Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г., Тормахов Н.Н.* Об определяющих уравнениях процессов упругопластического деформирования элементов твердого изотропного тела по траекториям малой кривизны, учитывающих вид напряженного состояния // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 6. – С. 43 – 55.
7. *Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н.* Определяющие уравнения термопластичности с учетом третьего инварианта // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 6. – С. 3– 16.

Поступила 24.12.2010

Утверждена в печать 06.06.2013

