

Л. П. Хорошун, Е. Н. Шикла

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A theory of long-time damageability is constructed for the fibrous composites with a physically nonlinear matrix. A process of damage of the matrix is modeled by formation in the matrix the stochastically arranged micropores. Criterion of damage of the unit volume of matrix is characterized by the long-term strength of the unit volume, which is determined by dependence of a brittle fracture time on a degree of closeness of equivalent stress to its limit value. This value characterizes the short-time strength by the Huber-Mises criterion that is assumed to be a random function of coordinates. For any moment, the equation of damageability (porosity) balance of physically nonlinear matrix is formulated. The algorithms are built for evaluation of dependence of the matrix microdamage on time, the microstresses on time, and the corresponding curves are proposed. An effect of nonlinearity of the matrix on the curves of macrodeformation and damage of composite is studied.

Key words: fibrous composite, physical nonlinearity, stochastic structure, long-term damageability, effective characteristics, equation of porosity balance.

Введение.

Внезапное разрушение элементов конструкций может быть вызвано длительным воздействием нагрузок, меньших предельных. В этом случае разрушение может быть обусловлено появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих к образованию магистральных трещин. Микроповреждения материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые ведут к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам.

Как следует из наблюдений за поведением сооружений и конструкций, а также экспериментальных исследований, повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте поврежденности во времени после приложения нагрузки. Структурная теория кратковременной микроповреждаемости однородных и композитных материалов предложена в [8, 10]. В основу теории положены уравнения механики микронеоднородных тел стохастической структуры и моделирование рассеянных микроповреждений системой квазисферических микропор [3]. Длительная повреждаемость представляет собой процесс накопления во времени рассеянных микроповреждений в виде микропор и микротрещин. Прочность материала является микронеоднородной, т.е. предел мгновенной прочности и кривые длительной прочности микрообъема материала являются случайными функциями координат, описываемыми определенными плотностями или функциями распределения. В макрообразце под действием постоянных напряжений часть микрообъемов, предел прочности которых ниже эквивалентного напряжения, разрушится, т.е. на их месте образуются микротрещины или микропустоты. В тех микрообъемах, где напряжения меньше пределов прочности, но близки к ним, разрушение происходит через некоторый промежуток времени, который зависит от степени близости напряжения к пределу микропрочности. В [9] на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред построена теория длительной повреждаемости однородного, зернистого, слоистого и волокнистого материалов.

При значительных нагрузках многие материалы деформируются по физически нелинейному закону. Такая нелинейность деформирования характерна для металлов, а также полимерных материалов при высоких температурах. В связи с этим обобщение теории длительной повреждаемости волокнистых композитных материалов [11 – 14], построенной на основе моделей и методов механики стохастически неоднородных сред, на случай волокнистых материалов с физически нелинейной матрицей является актуальным [6, 7, 15 – 24]. Процесс повреждаемости матрицы волокнистого композитного материала моделируется разрушением в ней рассеянных микрообъемов материала и образованием на их месте стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема матрицы характеризуется ее длительной прочностью, описываемой дробно-степенной или экспоненциально-степенной функцией долговечности, определяемой зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, характеризующему кратковременную прочность по критерию Губера – Мизеса. Предел кратковременной прочности матрицы принимается случайной функцией координат, одноточечное распределение которой описывается степенной функцией распределения на некотором отрезке или распределением Вейбулла. Эффективные свойства и напряженно-деформированное состояние волокнистого композита с системой стохастически расположенных микроповреждений в матрице определяются на основе стохастических уравнений упругости волокнистых сред с пористой матрицей. Исходя из свойств функций распределения и условия эргодичности случайного поля кратковременной микропрочности, а также зависимости времени хрупкого разрушения микрообъема от его напряженного состояния и кратковременной микропрочности, сформулированы для заданных макродеформаций и произвольного момента времени уравнения баланса поврежденности (пористости) матрицы волокнистого материала. Зависимости макронапряжения – макродеформации для волокнистого композитного материала с пористой матрицей и уравнения баланса пористости матрицы описывают совместные процессы деформирования и длительной повреждаемости волокнистого композита с учетом их взаимодействия. На основе метода итераций построены алгоритмы вычисления зависимостей микроповрежденности матрицы волокнистого материала от времени, макронапряжений от времени, а также соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности на деформирование и микроповреждаемость волокнистого материала, а также получены соответствующие кривые.

§1. Рассмотрим нелинейное деформирование однонаправленного волокнистого материала с трансверсально-изотропными волокнами и изотропной матрицей, обусловленное физически нелинейным деформированием матрицы и накоплением в ней микроповреждений. Физически нелинейное деформирование волокнистого композита описывается зависимостью объемного модуля K_2 и модуля сдвига μ_2 его матрицы от деформаций. Поскольку в процессе нагружения в матрице происходят микроповреждения, ее повреждаемость будем моделировать образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности матрицы. Для элементарного макрообъема волокнистого материала имеют место зависимости между макронапряжениями $\langle \sigma_{ij} \rangle$ и макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= (\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*) \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (\lambda_{12}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \sigma_{33} \rangle &= \lambda_{13}^* \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \lambda_{33}^* \langle \varepsilon_{33} \rangle; \quad \langle \sigma_{i3} \rangle = 2\lambda_{44}^* \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* — эффективные модули упругости композита, являющиеся функциями макродеформаций $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ вследствие физической нелинейности и микроповреждаемости матрицы.

Трансверсально-изотропные волокна считаем направленными по нормали к плоскости изотропии x_1x_2 . Обозначим модули упругости волокон λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 , объемный модуль и модуль сдвига материала каркаса матрицы K_2 , μ_2 , ее пористость

p_2 , а объемные содержания волокон и пористой матрицы, соответственно, c_1 и c_2 . Тогда определение эффективных модулей упругости физически нелинейного волокнистого композита с пористой матрицей сводится к следующему алгоритму. Эффективные модули упругости композита в λ_{11}^* , λ_{12}^* , λ_{13}^* , λ_{33}^* , λ_{44}^* определяются [1, 7] через соответствующие модули волокон λ_{11}^1 , λ_{12}^1 , λ_{13}^1 , λ_{33}^1 , λ_{44}^1 и пористой матрицы λ_{2p} , μ_{2p} ($\lambda_{2p} = K_{2p} - 2/3 \mu_{2p}$) формулами

$$\begin{aligned}\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* &= c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p})^2}{2c_1\mu_{2p} + c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + \frac{2mn}{n+2m}}; \\ \lambda_{13}^* &= c_1\lambda_{13}^1 + c_2\lambda_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{33}^* &= c_1\lambda_{33}^1 + c_2(\lambda_{2p} + 2\mu_{2p}) - \frac{2c_1 c_2 (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2}{2c_1(\lambda_{2p} + \mu_{2p}) + c_2(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2m}; \\ \lambda_{44}^* &= c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p} - \frac{c_1 c_2 (\lambda_{44}^1 - \mu_{2p})^2}{c_1\mu_{2p} + c_2\lambda_{44}^1 + s}\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$(2m = c_1(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1) + 2c_2\mu_{2p}; \quad 2n = c_1(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) + 2c_2(\lambda_{2p} + \mu_{2p}); \quad s = c_1\lambda_{44}^1 + c_2\mu_{2p}), \quad (1.3)$$

если жесткость матрицы больше жесткости волокон, и

$$2m = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2\mu_{2p}} \right)^{-1}; \quad 2n = \left(\frac{c_1}{\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1} + \frac{c_2}{2(\lambda_{2p} + \mu_{2p})} \right)^{-1}; \quad s = \left(\frac{c_1}{\lambda_{44}^1} + \frac{c_2}{\mu_{2p}} \right)^{-1}, \quad (1.4)$$

если жесткость волокон больше жесткости матрицы).

Эффективные модули пористой матрицы K_{2p} , λ_{2p} , μ_{2p} согласно [4] определяются формулами

$$\begin{aligned}K_{2p} &= K_{2p}(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle) = \frac{4K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)(1-p_2)^2}{3K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)p_2 + 4\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)(1-p_2)}; \quad \lambda_{2p} = K_{2p} - \frac{2}{3}\mu_{2p}; \\ \mu_{2p} &= \mu_{2p}(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle) = \frac{[9K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle) + 8\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)]\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)(1-p_2)^2}{3K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)(3-p_2) + 4\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle)(2+p_2)},\end{aligned}\quad (1.5)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^{12} \rangle$ — средние деформации по неповрежденной части матрицы. Поскольку они выражаются через упругие модули матрицы K_2 , μ_2 , которые в свою очередь являются функциями средних по неповрежденной части матрицы деформаций, для их определения используется следующий итерационный алгоритм. В $(n+1)$ -ом приближении они связаны с соответствующими величинами в n -ом приближении зависимостями

$$\langle \varepsilon_{kg}^{12} \rangle^{(n+1)} = \frac{1}{(1-p_2)} \times \left\{ \frac{\mu_{2p}(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})}{\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})} \langle \varepsilon_{kg}^2 \rangle + \frac{1}{3} \left[\frac{K_{2p}(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})}{K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})} - \frac{\mu_{2p}(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})}{\mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(n)})} \right] \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle \delta_{kg} \right\}. \quad (1.6)$$

Средние по матрице деформации $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ определяются через макродеформации $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ по формулам

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{i1}^* - \lambda_{i2}^* - \lambda_{i1}^1 + \lambda_{i2}^1}{c_2(2\mu_{2p} - \lambda_{i1}^1 + \lambda_{i2}^1)} \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \\ &- \frac{1}{\Delta_2} \{[(\lambda_{i1}^* - \lambda_{i1}^1)a_1 - (\lambda_{i2}^* - \lambda_{i2}^1)a_2 - (\lambda_{i3}^* - \lambda_{i3}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\ &+ [(\lambda_{i3}^* - \lambda_{i3}^1)(a_1 - a_2) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_3] \langle \varepsilon_{33} \rangle\} \delta_{ij}; \\ \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle &= -\frac{1}{\Delta_2^{(n)}} \{[(\lambda_{i3}^* - \lambda_{i3}^1)a_4 - (\lambda_{i1}^* + \lambda_{i2}^* - \lambda_{i1}^1 - \lambda_{i2}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle + \\ &+ [(\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_4 - 2(\lambda_{i3}^* - \lambda_{i3}^1)a_3] \langle \varepsilon_{rr} \rangle\}; \\ \langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle &= \frac{\lambda_{44}^* - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \quad (i, j, r = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (\Delta_2 = c_2(\lambda_{i1}^1 - \lambda_{i2}^1 - 2\mu_{2p})) &[(\lambda_{i1}^1 + \lambda_{i2}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}) - 2(\lambda_{i3}^1 - \lambda_{2p})^2]; \\ a_1 &= (\lambda_{i3}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{i2}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\ a_2 &= (\lambda_{i3}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{i1}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}); \\ a_3 &= (\lambda_{i3}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{i1}^1 - \lambda_{i2}^1 - 2\mu_{2p}); \\ a_4 &= (\lambda_{i1}^1 + \lambda_{i2}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{i1}^1 - \lambda_{i2}^1 - 2\mu_{2p}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

а эффективные коэффициенты пористой матрицы $K_{2p}, \lambda_{2p}, \mu_{2p}$ определяются формулами (1.5).

Нулевое приближение соответствует случаю физически линейной матрицы, т.е.

$$K_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(0)}) = K_2(0); \quad \mu_2(\langle \varepsilon_{lm}^{12} \rangle^{(0)}) = \mu_2(0). \quad (1.9)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала матрицы примем критерий прочности Губера – Мизеса

$$I_{\langle \sigma \rangle}^{12} = k_2, \quad (1.10)$$

где $I_{\langle \sigma \rangle}^{12} = (\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle' \langle \sigma_{ij}^{12} \rangle')^{1/2}$ – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle'$ по неповрежденной части материала матрицы; k_2 – предел микропрочности матрицы, являющийся случайной функцией координат, причем средние по

неповрежденной части материала матрицы напряжения $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$ связаны со средними в матрице напряжениями $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ зависимостями [4]

$$\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle = \frac{1}{1-p_2} \langle \sigma_{ij}^2 \rangle. \quad (1.11)$$

Если инвариант $I_{\langle \sigma \rangle}^{12}$ для некоторого микрообъема матрицы не достигает соответствующего предельного значения k_2 , то, согласно критерию длительной прочности, разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени τ_k^2 , длительность которого зависит от степени близости $I_{\langle \sigma \rangle}^{12}$ к предельному значению k_2 . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k^2 = \varphi_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{12}, k_2), \quad (1.12)$$

причем $\varphi_2(k_2, k_2) = 0$, $\varphi_2(0, k_2) = \infty$, согласно (1.10).

Простейшим заданием одноточечной функции распределения $F_2(k_2)$ предела микропрочности k_2 неповрежденной части материала матрицы является степенной закон на некотором отрезке

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{20}; \\ \left(\frac{k_2 - k_{20}}{k_{21} - k_{20}} \right)^{n_2}, & k_{20} \leq k_2 \leq k_{21}; \\ 1, & k_2 > k_{21}, \end{cases} \quad (1.13)$$

а также распределение Вейбулла

$$F_2(k_2) = \begin{cases} 0, & k_2 < k_{20}; \\ 1 - \exp[-m_2(k_2 - k_{20})^{n_2}], & k_2 \geq k_{20}, \end{cases} \quad (1.14)$$

где k_2 — минимальное значение предела микропрочности матрицы; k_{21} , m_2 , n_2 — детерминированные постоянные, описывающие конкретный характер функции распределения, которые определяются путем аппроксимации экспериментальных кривых по разбросу микропрочности или диаграмм деформирования.

Случайное поле предела микропрочности матрицы k_2 является статистически однородным для реальных материалов. При этом его масштаб корреляции, а также размеры единичных микроповреждений и расстояния между ними принимаем пренебрежимо малыми по сравнению с макрообъемом материала. Тогда случайное поле k_2 и распределение микронапряжений в материале матрицы при однородном нагружении удовлетворяют свойству эргодичности, а функция распределения $F_2(k_2)$ определяет относительное содержание материала неразрушенной части матрицы, в котором предел прочности меньше соответствующего значения k_2 . Поэтому при ненулевых напряжениях $\langle \sigma_{ij}^{12} \rangle$ функция $F_2(I_{\langle \sigma \rangle}^{12})$ согласно (1.10), (1.13), (1.14) определяет относительное содержание разрушенных микрообъемов скелета матрицы. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, обозначая начальную пористость матрицы p_{20} , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов матрицы или ее пористости [8]

$$p_2 = p_{20} + (1 - p_{20})F_2(I_{\langle\sigma\rangle}^{12}), \quad (1.15)$$

где согласно (1.11)

$$I_{\langle\sigma\rangle}^{12} = \frac{1}{1 - p_2} I_{\langle\sigma\rangle}^2 \left(I_{\langle\sigma\rangle}^2 = (\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle')^{1/2} \right), \quad (1.16)$$

причем средние в матрице напряжения $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ связаны со средними в ней деформациями $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ зависимостями

$$\langle \sigma_{ij}^2 \rangle = \lambda_{2p} \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle \delta_{ij} + 2\mu_{2p} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle, \quad (1.17)$$

а средние в матрице деформации $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle$ согласно (1.7) связаны с макродеформациями $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ зависимостями

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle &= A_0 \langle \varepsilon_{ij} \rangle - \frac{1}{\Delta_2} (A_1 \langle \varepsilon_{rr} \rangle + A_2 \langle \varepsilon_{33} \rangle) \delta_{ij}; \\ \langle \varepsilon_{33}^2 \rangle &= -\frac{1}{\Delta_2} (A_3 \langle \varepsilon_{rr} \rangle + A_4 \langle \varepsilon_{33} \rangle); \quad \langle \varepsilon_{i3}^2 \rangle = \frac{\lambda_{44}^* - \lambda_{44}^1}{c_2(\mu_{2p} - \lambda_{44}^1)} \langle \varepsilon_{i3} \rangle \\ &(i, j, r = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$(\Delta_2 = c_2(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p})[(\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p}) - 2(\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2]);$$

$$A_0 = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1}{c_2(2\mu_{2p} - \lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1)}; \quad A_1 = (\lambda_{11}^* - \lambda_{11}^1)a_1 - (\lambda_{12}^* - \lambda_{12}^1)a_2 - (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3;$$

$$A_2 = (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)(a_1 - a_2) - (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_3;$$

$$A_3 = (\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_4 - (\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^* - \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1)a_3; \quad A_4 = (\lambda_{33}^* - \lambda_{33}^1)a_4 - 2(\lambda_{13}^* - \lambda_{13}^1)a_3;$$

$$a_1 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{12}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p});$$

$$a_2 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})^2 - (\lambda_{11}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{33}^1 - \lambda_{2p} - 2\mu_{2p});$$

$$a_3 = (\lambda_{13}^1 - \lambda_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}); \quad a_4 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 - 2\lambda_{2p} - 2\mu_{2p})(\lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 - 2\mu_{2p}), \quad (1.19)$$

а эффективные модули пористой матрицы λ_{2p} , μ_{2p} определяются формулами (1.5)).

Если напряжения в матрице $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle$ действуют в течение некоторого времени t , то, согласно критерию длительной прочности (1.12), за это время в матрице разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности k_2 , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k^2 = \varphi_2(I_{\langle\sigma\rangle}^{12}, k_2), \quad (1.20)$$

где инвариант $I_{\langle\sigma\rangle}^{12}$ определяется выражением (1.16).

Время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения $I_{<\sigma>}^{12} > 0$. В этом случае функцию долговечности матрицы $\varphi_2(I_{<\sigma>}^{12}, k_2)$ можно представить, например, дробно-степенной зависимостью

$$\varphi_2(I_{<\sigma>}^{12}, k_2) = \tau_{02} \left(\frac{k_2 - I_{<\sigma>}^{12}}{I_{<\sigma>}^{12} - \gamma_2 k_2} \right)^{n_{12}} \quad (\gamma_2 k_2 \leq I_{<\sigma>}^{12} \leq k_2, \gamma_2 < 1), \quad (1.21)$$

где некоторое характерное время τ_{02} , показатель n_{12} и коэффициент γ_2 определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности матрицы.

Подставляя (1.21) в (1.20), приходим к неравенству

$$k_2 \leq I_{\bar{\sigma}}^{12} \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_{12}}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_{12}}} \quad (\bar{t}_2 = t/\tau_{02}). \quad (1.22)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_2(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F_2[I_{<\sigma>}^{12} \psi_2(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi_2(\bar{t}_2) = \frac{1 + \bar{t}_2^{1/n_{12}}}{1 + \gamma_2 \bar{t}_2^{1/n_{12}}} \quad (1.23)$$

определяет в момент времени \bar{t}_2 относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы. Тогда с учетом (1.11) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для матрицы при длительной повреждаемости можно представить в виде

$$p_2 = p_{02} + (1 - p_{02}) F_2 \left[\frac{I_{<\sigma>}^{12} \psi_2(\bar{t}_2)}{1 - p_2} \right], \quad (1.24)$$

где пористость матрицы p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{<\sigma>}^{12}$ определяется выражениями (1.17) – (1.19).

Если время τ_k^2 хрупкого разрушения матрицы имеет конечное значение для произвольных $I_{<\sigma>}^{12}$, что может наблюдаться при высоких температурах, то функцию долговечности можно представить экспоненциально-степенной зависимостью

$$\varphi_2(I_{<\sigma>}^{12}, k_2) = \tau_{02} \left\{ \exp m_{12} \left[\left(k_2 / I_{<\sigma>}^{12} \right)^{n_{12}} - 1 \right] - 1 \right\}^{n_{22}}, \quad (1.25)$$

имеющей достаточное число постоянных τ_{02} , m_{12} , n_{12} , n_{22} для аппроксимации экспериментальных кривых. Подставляя (1.25) в (1.20), приходим к неравенству

$$k_2 \leq I_{\bar{\sigma}}^{12} \left[1 + \frac{1}{m_{12}} \ln \left(1 + \bar{t}_2^{1/n_{22}} \right) \right]^{1/n_{12}} \quad \left(\bar{t}_2 = \frac{t}{\tau_{02}} \right). \quad (1.26)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности $F_2(k_2)$, приходим к выводу, что функция $F_2[I_{<\sigma>}^{12} \psi_2(\bar{t}_2)]$, где

$$\psi_2(\bar{t}_2) = \left[1 + \frac{1}{m_{12}} \ln \left(1 + \bar{t}_2^{1/n_{22}} \right) \right]^{1/n_{12}}, \quad (1.27)$$

определяет в момент времени \bar{t}_2 относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала матрицы. Тогда с учетом (1.1) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для матрицы при длительной повреждаемости можно представить в виде (1.24), где пористость матрицы p_2 является функцией безразмерного времени \bar{t}_2 , а инвариант $I_{<\sigma>}^2$ определяется выражениями (1.17) – (1.19).

Уравнения баланса пористости (1.24) с учетом (1.17) – (1.19), (1.23) (или (1.27)) в начальный момент $\bar{t}_2 = 0$ определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала матрицы. С ростом времени уравнения (1.24), (1.17) – (1.19), (1.23), (или (1.27)) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени.

Уравнения (1.1), (1.2) – (1.9), (1.24), (1.17) – (1.19), (1.13) (или (1.14)), (1.23) (или (1.27)) образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы статистически однородного физически нелинейного деформирования и длительной повреждаемости волокнистого материала. Физическая нелинейность его матрицы влияет на образование в ней пористости при деформировании, а изменение пористости матрицы в процессе деформирования влияет на кривую деформирования композита. Поэтому результирующая диаграмма деформирования волокнистого материала обусловлена физической нелинейностью материала его матрицы и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости в ней при физически нелинейном деформировании.

Решение задачи о совместном физически нелинейном деформировании и длительной повреждаемости волокнистого материала при заданных макродеформациях сводится к совместному решению задачи об эффективных модулях упругости волокнистого композита с пористой матрицей, зависящий от макродеформаций, согласно итерационному алгоритму (1.2) – (1.9), и определению ее пористости из уравнения (1.24), (1.17) – (1.19), (1.13) (или (1.14)), (1.23) (или (1.27)), что осуществляется также определенным итерационным методом. Представим уравнение (1.24) для n -го шага итерационного процесса (1.2) – (1.9) в виде

$$f_2^{(n)} = p_2 - p_{20} - (1 - p_{20}) F_2 \left[\frac{I_{<\sigma>}^{2(n)}}{1 - p_2} \psi_2(\bar{t}_2) \right]. \quad (1.28)$$

Тогда определение корня p_2 уравнения (1.28) на m -ом шаге некоторого итерационного процесса можно представить формулой

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1)}), \quad (1.29)$$

где A_2 – определенный оператор, действующий на функцию $f_2^{(n)}(p_2)$. Искомый корень определяется как предельное значение

$$p_2 = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} p_2^{(m,n)}. \quad (1.30)$$

§2. В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости волокнистого композитного материала в предположении, что объемные деформации матрицы являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в ее микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr}^2 \rangle = K_2 \langle \varepsilon_{rr}^2 \rangle; \quad \langle \sigma_{ij}^2 \rangle' = 2\mu_2(S_2) \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'. \quad (2.1)$$

Здесь модуль объемного сжатия K_2 не зависит от деформаций, а модуль сдвига $\mu_2(S_2)$ описывается функцией

$$\mu_2(S_2) = \begin{cases} \mu_{20}, & T_2 \leq T_{20}; \\ \mu_2' + \left(1 - \frac{\mu_2'}{\mu_{20}}\right) \frac{T_{20}}{2S_2}, & T_2 \geq T_{20}; \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(S_2 = (\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle' \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; T_2 = (\langle \sigma_{ij}^2 \rangle' \langle \sigma_{ij}^2 \rangle')^{1/2}; T_{20} = \sqrt{2/3} \sigma_{20}), \quad (2.3)$$

где $\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'$, $\langle \sigma_{ij}^2 \rangle'$ – девиаторы, соответственно, тензоров деформаций и напряжений в матрице; σ_{20} – предел пропорциональности на растяжение для нее, который принимаем независимым от координат; μ_{20} , μ_2' – постоянные материала матрицы).

Алгоритм определения корня p_2 уравнения (1.28) будем строить на основе метода секущих. Так как корень p_2 находится в интервале $[p_{20}, 1]$, что следует из неравенств

$$f_2^{(n)}(p_{20}) \leq 0; \quad f_2^{(n)}(1) \geq 0, \quad (2.4)$$

то, согласно методу секущих, нулевое приближение корня $p_2^{(0,n)}$ определяется формулой

$$p_2^{(0,n)} = \frac{a_2^{(0)} f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - b_2^{(0)} f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(0)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(0)})}, \quad (2.5)$$

где $a_2^{(0)} = p_{20}$, $b_2^{(0)} = 1$.

Последующие приближения метода секущих определяются итерационным процессом

$$p_2^{(m,n)} = A_2 f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \equiv \frac{a_2^{(m)} f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - b_2^{(m)} f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}{f_2^{(n)}(b_2^{(m)}) - f_2^{(n)}(a_2^{(m)})}; \quad (2.6)$$

$$a_2^{(m)} = a_2^{(m-1)}; \quad b_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \leq 0,$$

$$a_2^{(m)} = p_2^{(m-1,n)}; \quad b_2^{(m)} = b_2^{(m-1)} \quad \text{при} \quad f_2^{(n)}(a_2^{(m-1)}) f_2^{(n)}(p_2^{(m-1,n)}) \geq 0$$

$$(m = 1, 2, \dots),$$

который продолжается до выполнения условия

$$\left| f_2^{(n)}(p_2^{(m,n)}) \right| < \delta, \quad (2.7)$$

где δ – точность вычисления корня.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и длительной микроповреждаемости волокнистого композита для распределения Вейбулла (1.14) и для дробно-степенной функции долговечности $\psi_2(\bar{t}_2)$, определяемой формулой (1.23). В качестве компонентов приняты, соответственно, эпоксидная матрица, которая имеет диаграмму линейного упрочнения (2.1), (2.2) с постоянными [1, 2]

$$K_2 = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{02} = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu_2' = 0,332 \text{ ГПа}, \quad (2.8)$$

пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение

$$\sigma_{2p} = \sqrt{\frac{3}{2}} k_{20}$$

$$\sigma_{20} = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{2p} = 0,011 \text{ ГПа}, \quad (2.9)$$

а также

$$p_{02} = 0; \quad k_{02} / \mu_2 = 0,01; \quad m_2 = 1000;$$

$$\alpha_2 = 2; \quad \gamma_2 = 0,05; \quad n_{12} = 1, \quad (2.10)$$

и высокомодульные углеродные волокна с характеристиками [2]

$$E_1^1 = 8 \text{ ГПа}; \quad E_3^1 = 226 \text{ ГПа}; \quad \nu_{12}^1 = 0,2; \quad \nu_{13}^1 = 0,3; \quad G_{12}^1 = 60 \text{ ГПа}, \quad (2.11)$$

где E_1^1 и E_3^1 , ν_{12}^1 и ν_{13}^1 , G_{12}^1 и G_{13}^1 – соответственно, поперечный и продольный модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига волокон, которые связаны с модулями упругости $\lambda_{11}^1, \lambda_{12}^1, \lambda_{13}^1, \lambda_{33}^1, \lambda_{44}^1$ формулами

$$\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1 = E_1^1 E_3^1 \left[E_3^1 \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right) - 2E_1^1 (\nu_{13}^1)^2 \right]^{-1}; \quad \lambda_{11}^1 - \lambda_{12}^1 = 2G_{12}^1;$$

$$\lambda_{13}^1 = \nu_{13}^1 (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1); \quad \lambda_{33}^1 = (\lambda_{11}^1 + \lambda_{12}^1) \frac{E_3^1}{E_1^1} \left(2 - \frac{E_1^1}{2G_{12}^1} \right); \quad \lambda_{44}^1 = G_{13}^1. \quad (2.12)$$

В случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0, \quad (2.13)$$

согласно (1.1), макронапряжение $\langle \sigma_{11} \rangle$ в композите связано с макродеформацией $\langle \varepsilon_{11} \rangle$ соотношением

$$\langle \sigma_{11} \rangle = \frac{\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \left[(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*) \lambda_{33}^* - 2(\lambda_{13}^*)^2 \right] \langle \varepsilon_{11} \rangle. \quad (2.14)$$

При этом в уравнении баланса пористости, которое записывается в виде (1.24), (1.13), (1.17) – (1.19), (1.23), принимается

$$\langle \varepsilon_{22} \rangle = \frac{(\lambda_{13}^*)^2 - \lambda_{12}^* \lambda_{33}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{33} \rangle = \frac{(\lambda_{12}^* - \lambda_{11}^*) \lambda_{13}^*}{\lambda_{11}^* \lambda_{33}^* - (\lambda_{13}^*)^2} \langle \varepsilon_{11} \rangle, \quad (2.15)$$

что эквивалентно выполнению условий (2.13).

На рис. 1 для различных значений объемного содержания волокон c_1 при макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,005$ сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости матрицы p_2 от времени \bar{t}_2 для волокнистого композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей. На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости p_2 от \bar{t}_2 для волокнистого материала с линейной матрицей. Такие же обозначения приняты и на рис. 2.

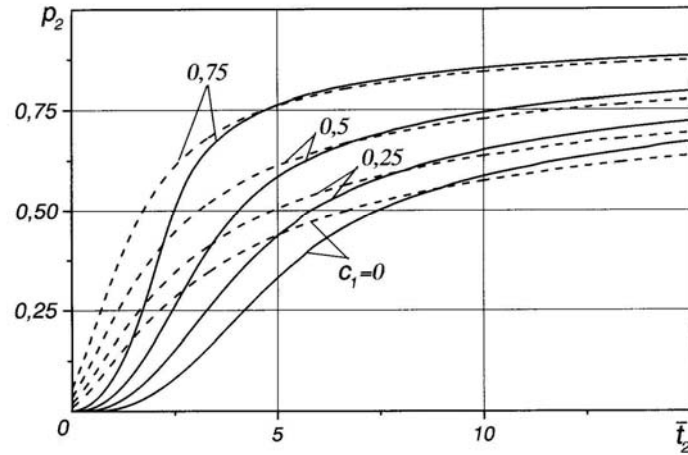


Рис. 1

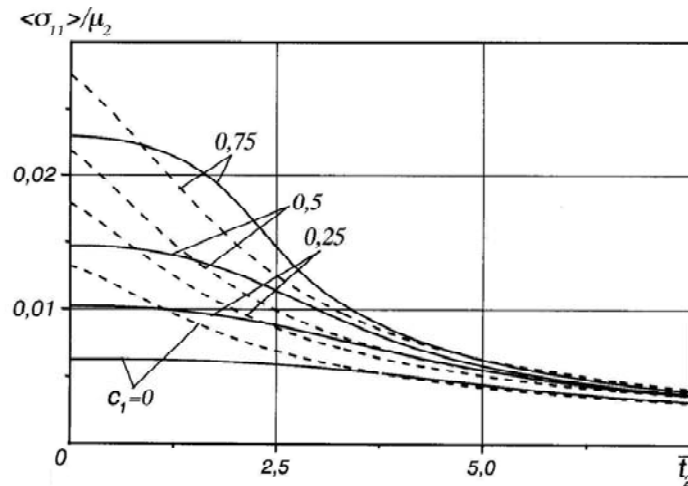


Рис. 2

Как видим, физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние на микроразрушение волокнистого композита. Графики показывают, что для материала с линейно упрочняющейся матрицей микроразрушения начинаются при больших значениях времени \bar{t}_2 , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 пористость композитного материала с линейно упрочняющейся матрицей выше, чем с линейной.

На рис. 2 для различных значений объемного содержания волокон c_1 при макродеформации $\langle \varepsilon_{11} \rangle = 0,005$ показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu_2$ от времени \bar{t}_2 для волокнистого композитного материала с линейно упрочняющейся и линейной матрицами.

Графики показывают, что для малых значений времени \bar{t}_2 физическая нелинейность деформирования матрицы оказывает существенное влияние также и на напряженное состояние волокнистого композита. При достаточно больших значениях времени \bar{t}_2 влияние нелинейности матрицы на напряженное состояние материала не существенно.

РЕЗЮМЕ. Побудовано теорію довготривалої пошкоджуваності для волокнистих композитів з фізично нелінійною матрицею. Процес пошкоджуваності матриці моделюється утворенням в ній стохастично розташованих мікропор. Критерій руйнування її одиничного мікрооб'єму характеризується його довготривалою міцністю, обумовленою залежністю часу крихкого руйнування від ступеня близькості еквівалентного напруження до його граничного значення, що характеризує короточасну міцність за критерієм Губера – Мізеса, яке приймається випадковою функцією координат. Для довільного моменту часу сформульовано рівняння балансу пошкодженості (пористості) фізично нелінійної матриці. Побудовано алгоритми обчислення залежностей її мікропошкоджуваності від часу, макронапружень від часу, а також відповідні криві. Досліджено вплив нелінійності матриці на криві макродеформування і пошкоджуваності композиту.

1. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Ванін Г.А. и др. Механика материалов. – К.: Наук. думка, 1982. – 368 с. – (Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.; Т.1).
2. Крегерс А.Ф. Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. – С. 433 – 441.
3. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1978. – 294 с.
4. Хорошун Л.П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. – 1976. – **12**, № 12. – С. 35 – 41.
5. Хорошун Л.П. Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100 – 108.
6. Baste S., Audoin B. On internal variables in anisotropic damage // Eur. J. Mech. A. – 1991. – **10**, – N 6. – P. 587 – 606.
7. Chandrakanth S., Pandey P.C. An isotropic damage model for ductile material // Eng. Fract. Mater. – 1995. – **50**, N 4. – P. 457 – 465.
8. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 1. Short-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 1998. – **34**, N 10. – P. 1035 – 1041.
9. Khoroshun L.P. Principles of the Micromechanics of Material Damage. 2. Long-Term Damage // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 2. – P. 127 – 135.
10. Khoroshun L.P. Structural Short-Term Damage Model with a Strain-Based Microfailure Criterion // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 62 – 79.
11. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Fibrous Materials with the Stress-Rupture Microstrength of the Matrix Described by a Fractional-Power Function // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 11. – P. 1196 – 1205.
12. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Coupled Processes of Deformation and Long-Term Damage of Fibrous Materials with the Microdurability of the Matrix Described by an Exponential Power Function // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 1. – P. 37 – 45.
13. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Homogeneous and Composite Materials of Stochastic Structure // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 7-55.
14. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Damage of Linear Elastic Homogeneous and Composite Materials // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 131 – 175.
15. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids / Mura T. – Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1987. – 587 p.
16. Nazarenko L.V. Deformation of composites with arbitrarily oriented orthotropic fibers under matrix microdamages // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – **167**, N 2. – P. 217 – 231.
17. Nazarenko L. Effective Properties of Composite Materials Strengthened by Orthotropic Fibers with Regard for the Physical Non-linearity of the Components // Journal of Mathematical Sciences. – 2013. – **194**, N 3. – P. 309 – 321.
18. Ponte Castaneda P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic solids // Journal Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**, N 1. – P. 45 – 71.
19. Ponte Castaneda P. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials // Journal Mech. Phys. Solids. – 1996. – **44**, N 6. – P. 827 – 862.
20. Ponte Castaneda P., Suquet P. Nonlinear composites // Adv. Appl. Mech. – 1998. – N 34. – P. 171 – 202.
21. Tamuz V. Delaminations properties of translaminar-reinforced composites / Tamuz V., Tarasovs S., Vilks U. // Composites Science and Technology. – 2003. – N 8. – P. 1423 – 1431.
22. Tan S.C. A theory progressive matrix cracking in composite composites / Tan S.C., Nuismer R.J. // Journal of Composite Materials. – 1989. – **23**, N 10. – P. 1029 – 1047.
23. Toi Yutaka Three-dimensional mesomechanical analysis of brittle solids containing microinclusions / Toi Yutaka, Kiyosue Takanori // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. A. – 1995. – **61**, N 582. – P. 447 – 453.
24. Zhou J. The stress-strain law of elastic body with microcracks / Zhou J., Li Aili, Yu Fangru // Acta Mech. Sin. – 1994. – **26**, N 1. – P. 49 – 59.

Поступила 25.05.2010

Утверждена в печать 26.06.2013