

Л. П. Хорошун, О. И. Левчук

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ
В ОКРЕСТНОСТИ ТРЕЩИНЫ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ
ЛИНЕЙНО-УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. A plane problem is considered on the stress distribution in the neighborhood of a crack, when the linearly strengthening bodies are tensioned and the parameter of strengthening is small. The problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations by the Fourier integral transform method. Basing on the numerical solution of the system for the cases of plane strain and plane stress states, the zones of plastic strains, stress and strain distributions, and displacements of the crack sides are studied.

Key words: crack, discretization of nonlinear problem, plasticity zone, distribution of stresses, strains and displacements, strengthening material.

Введение.

Упрощенные подходы к установлению критериев развития трещины, сложившиеся в механике разрушения в связи с определенными трудностями постановочного и вычислительного характера [3 – 6, 9 – 13, 17 – 19, 21] требуют оценки их адекватности реальным процессам в вершине трещины и точному решению задачи в строгой постановке. Анализ корректности энергетических критериев Гриффитса и J-интеграла приведен в работе [15], где отмечено нарушение строгости в их обосновании. Отсутствует также строгость в построении критерия разрушения в виде предельного значения коэффициента интенсивности напряжений, принимаемого в линейной механике разрушения. Во-первых, в реальных диаграммах деформирования материалов напряжения ограничены, поэтому напряжения в вершине трещины не могут быть бесконечными, т.е. коэффициент интенсивности напряжений в действительности не существует. Во-вторых, в линейной механике разрушения коэффициент интенсивности напряжений определяется как множитель при размерной корневой особенности в асимптотическом решении, что приводит к зависимости трещиностойкости от длины трещины. Очевидно, что это противоречит решению линейной задачи для бесконечного тела, которое в безразмерных координатах, отнесенных к длине трещины, является одним и тем же для произвольной длины трещины. Этот парадокс обусловлен выделением размерной корневой особенности, так как стремление к нулю размерной величины не имеет смысла. Смысл имеет только безразмерная корневая особенность, что ведет к зависимости коэффициента интенсивности напряжений только от нагрузки для бесконечного однородного линейно-упругого тела с трещиной.

Устранение парадоксов, связанных с бесконечными напряжениями в вершине трещины, возможно лишь на основании реальных диаграмм деформирования материалов, содержащих ограниченные напряжения. В этом случае в окрестности трещины формируются зоны нелинейных или пластических деформаций, называемых также зонами предразрушения, где напряжения ограничены. Точное решение нелинейной задачи можно построить только численными методами с предварительной дискретизацией исходных континуальных уравнений [14].

Следует отметить, что в некоторых работах [7, 8] предпринимаются попытки построить приближенные аналитические решения задачи о трещине с зоной предразрушения. Однако они не могут быть признаны обоснованными и достоверными, так как здесь зоны предразрушения не определяются, а задаются в виде трещин – разрезов с неопределенной длиной и наклоном, к берегам которых приложена простая нагрузка, соответствующая пределу текучести или неизвестная. В действительности же [14] в зонах предразрушения имеет место неоднородное сложное напряженное состояние, а отношение поперечных размеров зон предразрушения к продольным имеют порядок от 0,7 – 0,8 для плоского деформированного состояния и 0,8 – 1,0 для плоского напряженного состояния. При этом они полностью определяются из решения нелинейной задачи, в то время как в работах [1, 2, 16] для определения длины и наклона трещины-разреза формулируются дополнительные необоснованные условия. Кроме того, вместо естественного общепринятого задания однородных нагрузок на бесконечности, приводящих к ограниченным напряжениям в зоне предразрушения, в работах [1, 2] задаются сингулярные составляющие асимптотического приближения линейно-упругой задачи, что полностью лишено физического смысла. Очевидно, что построенные таким образом приближенные решения, не имеют отношения к реальной задаче.

В настоящей работе рассмотрена плоская задача о растяжении тела с трещиной для линейно-упрочняющегося материала с постоянным коэффициентом Пуассона. На основе интегральных преобразований Фурье задача сведена к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Проведено численное решение системы в случае плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Исследованы зоны пластических деформаций, распределение напряжений и деформаций, а также перемещения берегов трещины.

§1. Основные уравнения и соотношения.

Запишем связь между девиаторами напряжений σ'_{ij} и деформаций ε'_{ij} для изотропного материала в виде

$$\sigma'_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\varepsilon'_{ij}, \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{1/2} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

при постоянном коэффициенте Пуассона ν . Тогда зависимости между напряжениями и деформациями можно представить так:

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon) \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Модуль сдвига $\mu(J)$ для диаграммы деформирования с линейным законом упрочнения определяется выражением

$$\mu(J) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\mu_0, \mu', k = \sigma_0 \sqrt{2/3}$ – постоянные (σ_0 – предел текучести материала). При $\mu' = 0$ из (1.2), (1.3) следует диаграмма идеального упруго-пластического деформирования материала.

Вводя замену

$$\sigma_{ij} = \bar{\mu} \hat{\sigma}_{ij}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (1.4)$$

из (1.2) получаем выражения для модифицированных напряжений $\hat{\sigma}_{ij}$

$$\hat{\sigma}_{ij} = 2\mu_0 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right) \quad (i, j, r = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

При подстановке (1.4) в уравнение равновесия

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (1.6)$$

где F_i – объемные силы, уравнения равновесия относительно модифицированных напряжений будут иметь вид

$$\hat{\sigma}_{ij,j} + \hat{f}_i = 0; \quad \hat{f}_i = \frac{1}{\bar{\mu}} (\hat{\sigma}_{ij} \bar{\mu}_{,j} + F_i). \quad (1.7)$$

Для формулировки плоской задачи в напряжениях, полагая, соответственно, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, находим из (1.1), (1.5) выражения инварианта J_ε в случае плоского деформированного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} J_{\hat{\sigma}}, \quad J_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(1-\nu + \nu^2) (\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2) - (1+2\nu - 2\nu^2) \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} + 3\hat{\sigma}_{12}^2 \right]^{1/2} \quad (1.8)$$

и плоского напряженного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\mu_0} J_{\hat{\sigma}}; \quad J_{\hat{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{\sigma}_{11}^2 + \hat{\sigma}_{22}^2 - \hat{\sigma}_{11} \hat{\sigma}_{22} + 3\hat{\sigma}_{12}^2)^{1/2}. \quad (1.9)$$

При этом безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$, согласно (1.3), (1.4), (1.8), (1.9), определяется формулой

$$\bar{\mu}(J_{\hat{\sigma}}) = \begin{cases} 1, & J_{\hat{\sigma}} < k; \\ \bar{\mu}' + (1 - \bar{\mu}') \frac{k}{J_{\hat{\sigma}}}, & J_{\hat{\sigma}} \geq k; \end{cases} \quad \left(\bar{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0} \right). \quad (1.10)$$

Из соотношений (1.5) следуют выражения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu_0} (\hat{\sigma}_{ij} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{rr} \delta_{ij}) \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.11)$$

где $\hat{\nu} = \nu$ для плоского деформированного состояния и $\hat{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$ для плоского напряженного состояния.

Подставляя (1.11) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad (1.12)$$

приходим к уравнению совместности относительно модифицированных напряжений

$$\left[(1-\hat{\nu}) \hat{\sigma}_{11} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{22} \right]_{,22} + \left[(1-\hat{\nu}) \hat{\sigma}_{22} - \hat{\nu} \hat{\sigma}_{11} \right]_{,11} = 2\hat{\sigma}_{12,12}. \quad (1.13)$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (1.7), (1.13) определяется через функцию напряжений

$$\hat{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}; \quad \hat{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}; \quad \hat{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (1.14)$$

которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,ijj} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.15)$$

Частное решение неоднородных уравнений (1.7), (1.13), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [20], представляется через интегралы по области D тела

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^* + \hat{\sigma}_{22}^* &= -\frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{11}^* - \hat{\sigma}_{22}^* &= \frac{1-2\hat{\nu}}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) e_{ij} (x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\ \hat{\sigma}_{12}^* &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij} (x_i - \xi_i) \hat{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \hat{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий, которым должно удовлетворять общее решение $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}^0 + \hat{\sigma}_{ij}^*$, состоящее из суммы (1.14) и (1.16). В результате приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений $\hat{\sigma}_{11}^*$, $\hat{\sigma}_{22}^*$, $\hat{\sigma}_{12}^*$.

§2. Плоская задача о растяжении тела с трещиной.

Рассмотрим плоскую задачу о распределении напряжений в бесконечном двумерном теле, ослабленном внутренней трещиной ($-c \leq x \leq c$, $y = 0$), при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной нагрузке p_0 , действующей вдоль оси y . Вследствие симметрии распределения напряжений относительно осей x и y достаточно ограничиться первым квадрантом D_1 области тела D , учитывая при этом влияние остальных квадрантов D_2 , D_3 , D_4 при построении частного решения (1.16). В результате приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \hat{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \hat{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \left(\hat{f}_i = \hat{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}}; i, j = 1, 2 \right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned}
P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\
P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right); \\
Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\
S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right); \\
\alpha_1 &= x - \xi, \alpha_2 = x + \xi, \alpha_3 = y - \eta, \alpha_4 = y + \eta, \beta_1 = \alpha_1^2 + \alpha_3^2, \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2; \\
\beta_3 &= \alpha_2^2 + \alpha_4^2, \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2, \gamma_1 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2, \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2, \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2, \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Нагрузку p_0 принимаем меньшей предела текучести k , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (1.4), (1.10), выполняются граничные условия $\hat{\sigma}_{22}|_{\infty} = p_0$, $\hat{\sigma}_{11}|_{\infty} = \hat{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$. На оси $y = 0$ граничные условия формулируются в виде $\hat{\sigma}_{22}(x, 0) = 0$ для $|x| \leq c$, $u_2(x, 0) = 0$ для $|x| \geq c$, $\hat{\sigma}_{12}(x, 0) = 0$ для $L_r(i, j, k, n) = \sum_{p, q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1}$, где $u_2(x, 0)$ – перемещение вдоль оси y .

На основе интегральных преобразований Фурье [9] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{11}(x, y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) (1 - \xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\
\hat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) (1 + \xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\
\hat{\sigma}_{12}(x, y) &= \hat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \xi e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где функция $\tilde{p}(\xi)$ определяется из дуальных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, 0), \quad 0 \leq x \leq c; \\ \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi &= 0; \quad x \geq c, \end{aligned} \quad (2.4)$$

при этом перемещение берега трещины определяется формулой

$$u_2(x, 0) = \frac{2(1-\hat{\nu})}{\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi; \quad 0 \leq x \leq c. \quad (2.5)$$

Таким образом, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.1) – (2.4) относительно модифицированных напряжений $\hat{\sigma}_{11}$, $\hat{\sigma}_{22}$, $\hat{\sigma}_{12}$.

Численное решение системы (2.1) – (2.4) связано с необходимостью определения функции $\tilde{p}(\xi)$ в пространстве изображений в области $0 \leq \xi < \infty$, что существенно усложняет задачу. В связи с этим, учитывая соотношение

$$\tilde{u}_2(\xi, 0) = \frac{1-\hat{\nu}}{\mu_0} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi}, \quad (2.6)$$

преобразуем уравнения (2.3) к виду

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}(x, y) &= \hat{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] u_2(\eta, 0) d\eta; \\ \hat{\sigma}_{22}(x, y) &= p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] u_2(\eta, 0) d\eta; \\ \hat{\sigma}_{12}(x, y) &= \hat{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_0^c R_3(x, y, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где функция $u_2(\eta, 0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$p_0 + \hat{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1-\hat{\nu})} \int_0^c R(x, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c, \quad (2.8)$$

а ядра определяются формулами

$$\begin{aligned} R(x, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right); \quad R_1(x, y, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{x+\eta}{(x+\eta)^2 + y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2 + y^2} \right]; \\ R_2(x, y, \eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}; \\ R_3(x, y, \eta) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x+\eta)^2 - y^2}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{k}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^* = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^*}{k}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{k}, \quad \bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1-\nu)kc}, \quad (2.10)$$

то соотношения (2.7) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - cy \int_0^c R_3(x, y, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функция $\bar{u}(\eta, 0)$, как следует из (2.8), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \quad 0 \leq x \leq c. \quad (2.12)$$

При этом частное решение, согласно (2.1), определяется интегралами

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) &= \int_{D_1} [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) &= \int_{D_1} S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \left(\bar{f}_i = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\bar{\mu}_j}{\bar{\mu}}, \quad i, j = 1, 2 \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

а безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$, согласно (1.10), можно представить в виде

$$\bar{\mu}(J_{\bar{\sigma}}) = \begin{cases} 1, & J_{\bar{\sigma}} < 1; \\ \bar{\mu}' + (1 - \bar{\mu}') \frac{1}{J_{\bar{\sigma}}}, & J_{\bar{\sigma}} \geq 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

где инвариант $J_{\bar{\sigma}}$ определяется выражениями

$$J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(1 - \nu + \nu^2) (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2) - (1 + 2\nu - 2\nu^2) \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2 \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

для плоского деформированного состояния и

$$J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2)^{1/2} \quad (2.16)$$

для плоского напряженного состояния.

§3. Дискретизация задачи.

Решить систему интегро-дифференциальных уравнений (2.11) – (2.16) в аналитическом виде не представляется возможным. Для применения численных методов необходимо их преобразовать из континуальной в дискретную форму. Для этого разобьем интервал $(0, c)$ на N частей, представив интеграл в (2.12) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta \quad \left(\sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \quad (3.1)$$

Тогда с учетом (2.9) приведем интегральное уравнение (2.12) относительно $\bar{u}(\eta, 0)$ к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0), \quad (i=1, \dots, N), \quad (3.2)$$

где матрица I_{ik} с безразмерными элементами определяется формулой

$$I_{ik} = -\bar{a}_k \left[\frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \left(\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; i, k = 1, \dots, N \right). \quad (3.3)$$

Аналогично на основе (2.9), (2.11) получим представление решения в произвольной точке x_i, y_j области D_1 , включая границу, через суммы

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N I_{ijk}^{(3)} \bar{u}(x_k, 0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрицы $I_{ijk}^{(1)}, I_{ijk}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} I_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right); \\ I_{ijk}^{(2)} &= r_5^2 \left[\frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ I_{ijk}^{(3)} &= \frac{r_5}{2} \left[\frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \end{aligned}$$

$$r_1 = \bar{x}_i + \bar{x}_k + \bar{a}_k, \quad r_2 = \bar{x}_i + \bar{x}_k - \bar{a}_k, \quad r_3 = \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{a}_k, \quad r_4 = \bar{x}_i - \bar{x}_k - \bar{a}_k, \quad r_5 = \bar{y}_j. \quad (3.5)$$

Частное решение (2.13) представляется через двойные суммы по прямоугольным ячейкам области D_1

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) + Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) - Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_r(x_k, y_n) \bar{a}_k \bar{b}_n \quad (r=1, 2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где введены обозначения:

$$P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = c P_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \quad Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = c Q_r(x_i, y_j; x_k, y_n);$$

$$S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = c S_r(x_i, y_j; x_k, y_n);$$

$$\bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \frac{\bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right]}{\bar{a}_k + \bar{a}_{k+1}} \right\} (r=1,2). \quad (3.7)$$

При этом безразмерные координаты и величины определяются отношениями

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{c}, \quad (3.8)$$

где a_k, b_n – половины размеров прямоугольных ячеек области D_1 с координатами центров x_k, y_n .

Если разбить область D_1 на ячейки с одинаковыми размерами вдоль обеих осей, т.е.

$$a_k = b_n = a = \frac{1}{2N} \quad (k, n = 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

то безразмерные координаты \bar{x}_i, \bar{y}_j в области D_1 могут быть представлены в виде

$$\bar{x}_i = (2i-1)a, \quad \bar{y}_j = (2j-1)a \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Границе $\bar{y} = 0$ соответствует значение индекса $j = 1/2$. Подставляя (3.9), (3.10) в (3.3), (3.5), получим

$$I_{ik} = -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{4(i-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} \right] \quad (i, k = 1, \dots, N); \quad (3.11)$$

$$I_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{2a} \left(\frac{s_1}{s_1^2 + s_5^2} - \frac{s_2}{s_2^2 + s_5^2} + \frac{s_3}{s_3^2 + s_5^2} - \frac{s_4}{s_4^2 + s_5^2} \right);$$

$$I_{ijk}^{(2)} = \frac{s_5^2}{a} \left[\frac{s_1}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right];$$

$$I_{ijk}^{(3)} = \frac{s_5}{2a} \left[\frac{s_1^2 - s_5^2}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2^2 - s_5^2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3^2 - s_5^2}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4^2 - s_5^2}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right];$$

$$s_1 = 2(i+k)-1, \quad s_2 = 2(i+k)-3, \quad s_3 = 2(i-k)+1;$$

$$s_4 = 2(i-k)-1, \quad s_5 = 2j-1 \quad (k = 1, \dots, N). \quad (3.12)$$

Частное решение (3.6) с учетом (3.9), (3.10) принимает вид

$$\bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n) \right] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n) \right] g_r(k, n); \quad (3.13)$$

$$\bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \bar{S}_r(i, j; k, n) g_r(k, n) \quad (r=1,2),$$

где приняты обозначения:

$$\bar{P}_1(i, j; k, n) = -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_3} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_4} \right);$$

$$\bar{P}_2(i, j; k, n) = -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1} + \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4} \right);$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{Q}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{2\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(-\frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\
\bar{S}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}}{4\pi(1-\hat{\nu})} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_1 = i-k, \quad \bar{\alpha}_2 = i+k-1, \quad \bar{\alpha}_3 = j-n, \quad \bar{\alpha}_4 = j+n-1, \quad \bar{\beta}_1 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_3^2;$$

$$\bar{\beta}_3 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_4^2, \quad \bar{\beta}_4 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_4^2, \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_3^2, \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_4^2, \quad \bar{\gamma}_4 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_4^2;$$

$$g_r(k, n) = \bar{\sigma}_{r1}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_{k+1}, y_n)}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] + \bar{\sigma}_{r2}(x_k, y_n) \left[\frac{\bar{\mu}(x_k, y_{n+1})}{\bar{\mu}(x_k, y_n)} - 1 \right] \quad (r=1, 2). \quad (3.14)$$

Таким образом, при равномерном разбиении области D_1 на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.2), (3.4), (3.13) относительно переменных $\bar{u}(x_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}(x_k, y_n)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$, где коэффициенты определяются формулами (3.11), (3.12), (3.14), а безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$ связан с напряжениями $\bar{\sigma}_{ij}$ зависимостями (2.14) – (2.16). Полученную систему можно упростить, исключив переменные $\bar{u}(x_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(x_k, y_n)$. Для этого представим уравнения (3.2) в виде

$$\bar{u}(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik}^{-1} \left[\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_k, 0) \right] \quad (i=1, \dots, N), \quad (3.15)$$

где I_{ik}^{-1} – матрица, обратная к I_{ik} , и воспользуемся представлением

$$\bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r \left(i, \frac{1}{2}; k, n \right) - \bar{Q}_r \left(i, \frac{1}{2}; k, n \right) \right] \bar{g}_r(k, n), \quad (3.16)$$

вытекающим из (3.13), (3.14). Тогда из (3.4), (3.13), (3.15), (3.16) следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$

$$\bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) = -\bar{p}_0 T_{11}(x_i, y_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n) - E_r(i, j; k, n) \right] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) = \bar{p}_0 \left[1 - T_{22}(x_i, y_j) \right] + \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n) - L_r(i, j; k, n) \right] g_r(k, n);$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) = -\bar{p}_0 T_{12}(x_i, y_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} [\bar{S}_r(i, j; k, n) - M_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) \quad (r=1,2); \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} T_{11}(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}; \quad T_{22}(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}; \quad T_{12}(x_i, y_j) = \sum_{k,n=1}^N I_{ijk}^{(3)} I_{kn}^{-1}; \\ E_r(i, j, k, n) &= \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right]; \\ L_r(i, j, k, n) &= \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right]; \\ M_r(i, j, k, n) &= \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \left[\bar{P}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) - \bar{Q}_r\left(q, \frac{1}{2}; k, n\right) \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в уравнениях (3.17) суммирование распространяется только на область нелинейного деформирования материала, где $g_r(k, n) \neq 0$. При этом слагаемые $-\bar{p}_0 T_{11}(x_i, y_j)$; $\bar{p}_0 [1 - T_{22}(x_i, y_j)]$; $-\bar{p}_0 T_{12}(x_i, y_j)$ представляют собой решение линейной задачи для случая $\bar{\mu} = 1$.

§4. Анализ численных результатов.

В качестве конкретной задачи исследовано напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для линейно-упрочняющегося материала ($\mu' = 0,03$) с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$. Половина длины трещины разбивалась на $N = 200$ одинаковых частей при равномерном разбиении области D_1 с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, равными $2a = 1/N = 0,005$ в безразмерных координатах. Это привело к решению системы 200 линейных уравнений в случае линейной задачи, которое определяется выражением (3.15) при $\bar{\sigma}_{22}^*(x_k, 0) = 0$.

В случае нелинейной задачи заданный шаг равномерного разбиения ставит определенное ограничение на нижнее значение действующей нагрузки \bar{p}_0 с тем, чтобы область нелинейного деформирования содержала достаточное число ячеек разбиения, так как всегда найдется настолько малая нагрузка \bar{p}_0 , что центр первой ячейки в вершине трещины окажется вне области нелинейности. Верхнее значение нагрузки \bar{p}_0 может быть произвольным в интервале $0 < \bar{p}_0 < 1$, необходимо лишь принять достаточное число ячеек, покрывающих область нелинейности.

В рассматриваемой задаче нагрузку задано в интервале $0,3 \leq \bar{p}_0 \leq 0,5$. Для покрытия области нелинейного деформирования принято 30x24 квадратных ячеек. В результате задача сведена к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.17). Нулевым приближением служило решение соответствующей линейной задачи.

| \bar{p}_0 | $\bar{x} \cdot 10^{-2}$ | | | | | | | | | |
|-------------|-------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | $\Delta, \%$ | | | | | | | | | |
| | 95,25 | 95,75 | 96,25 | 96,75 | 97,25 | 97,75 | 98,25 | 98,75 | 99,25 | 99,75 |
| 0,30 | 1,94 | 2,15 | 2,41 | 2,75 | 3,15 | 3,70 | 4,44 | 5,49 | 7,07 | 8,99 |
| 0,35 | 3,35 | 3,66 | 4,03 | 4,52 | 5,1 | 5,84 | 6,84 | 8,16 | 9,99 | 12,16 |
| 0,40 | 4,95 | 5,38 | 5,89 | 6,49 | 7,23 | 8,16 | 9,34 | 10,84 | 12,78 | 14,99 |
| 0,4 | 6,68 | 7,22 | 7,82 | 8,53 | 9,39 | 10,43 | 11,69 | 13,27 | 15,21 | 17,47 |
| 0,5 | 8,08 | 8,66 | 9,32 | 10,12 | 11,00 | 12,10 | 13,42 | 15,04 | 16,87 | 19,19 |

В таблице приведено процентное отклонение перемещений (Δ) берега трещины данного решения от решения для идеального упруго-пластического материала при

плоском напряженном состоянии для различных значений нагрузки \bar{p}_0 . Различие между перемещениями $\bar{u}(\bar{x}, 0)$ при $\bar{\mu} = 0$ и при $\bar{\mu}' = 0,03$ при изменении \bar{x} от нуля до 0,9975 составляет 0,5% в начале интервала и достигает своего максимума в конце интервала. Как видно из таблицы, при значении нагрузки $\bar{p}_0 = 0,5$ отклонение является достаточно большим и составляет 19,19%. В то же время для плоского деформированного состояния отклонение перемещений берега трещины является незначительным и изменяется от 0,15% до 2,6% при нагрузке $\bar{p}_0 = 0,5$.

На рис. 1 сплошными линиями показаны зоны пластических деформаций для плоского напряженного состояния в случае растягивающих нагрузок $\bar{p}_0 = p_0/k$, принимающих значения 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5 при $\bar{\mu}' = 0,03$. Штриховыми линиями обозначены зоны, в которых превзойден предел текучести согласно [18], причем отклонение составляет от 9,8 % при $\bar{p}_0 = 0,3$ до 12,7 % при нагрузке $\bar{p}_0 = 0,5$. Отношение поперечных зон пластичности к продольным составляет 0,8 – 1,0. Для плоского деформированного состояния значения для зон пластических деформаций при $\mu' = 0,03$ отличаются незначительно от значений при $\mu' = 0$ при нагрузке, принимающей значения 0,3 – 0,5.

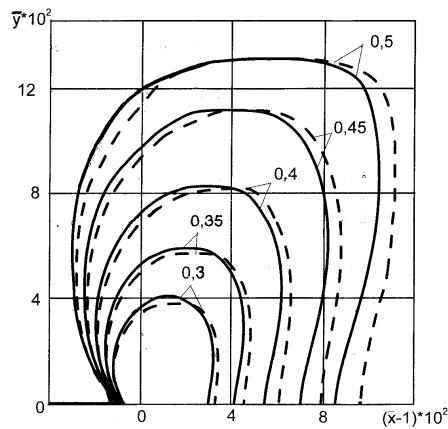


Рис. 1

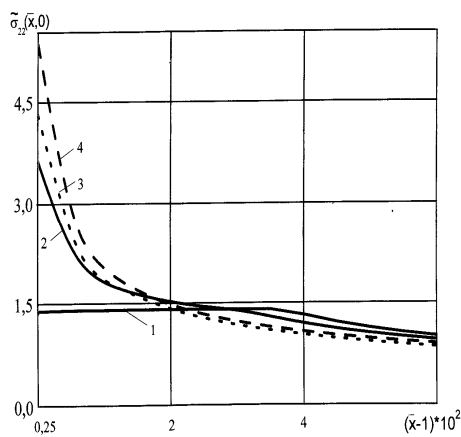


Рис. 2

уменьшаются по сравнению со значением для линейно-упругой задачи на 17%. При удалении от вершины трещины напряжения $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0)$ приближаются к соответствующим значениям напряжений для линейной задачи, равным \bar{p}_0 на бесконечности.

На рис. 3 показаны кривые зависимости нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = (1/k)\sigma_{22}(\bar{x}, 0)$ для плоского деформированного состояния при различных значениях $\bar{\mu}'$ (кривые 1, 2, 3 соответствуют $\bar{\mu}' = 0; 0,03; 0,05$) при нагрузке $\bar{p}_0 = 0,5$. Как видно из приведенных графиков, нормальные напряжения при незначительном увеличении коэффициента линейного упрочнения также имеют ограниченные значения. Так, например, для кривой 1 максимальное его значение равно 3,3.

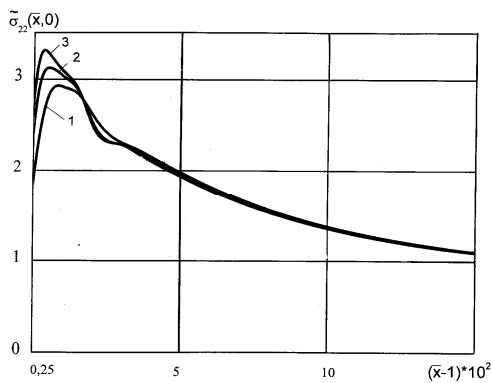


Рис. 3

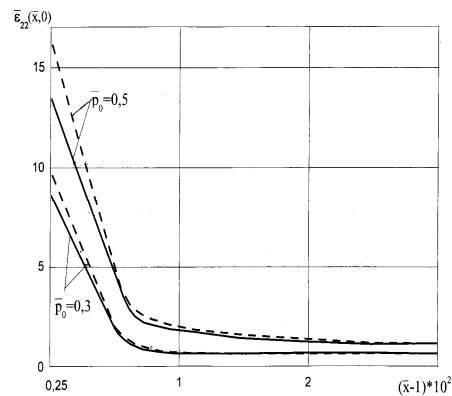


Рис. 4

На рис. 4, 5 сплошными линиями представлены кривые зависимостей от расстояния $\bar{x}-1$ до вершины трещины, соответственно, растягивающих деформаций $\bar{\varepsilon}_{22}(\bar{x}, 0) = \frac{2\bar{\mu}_0}{k} \varepsilon_{22}(\bar{x}, 0)$ и инварианта девиатора деформаций $\bar{J}_\varepsilon(\bar{x}, 0) = \frac{2\bar{\mu}_0}{k} J_\varepsilon(\bar{x}, 0) = J_\sigma(\bar{x}, 0)$ для плоского деформированного состояния при нагрузках $\bar{p}_0 = 0,3$ и $0,5$ и значении параметра $\mu' = 0,03$; штриховыми – при $\mu' = 0$ и тех же значениях нагрузки.

Как видно из приведенных графиков, значения растягивающих деформаций $\bar{\varepsilon}_{22}(\bar{x}, 0)$ и инварианта $\bar{J}_\varepsilon(\bar{x}, 0)$ при $\bar{\mu}' = 0,03$ уменьшаются по сравнению с соответствующими значениями при $\bar{\mu}' = 0$.

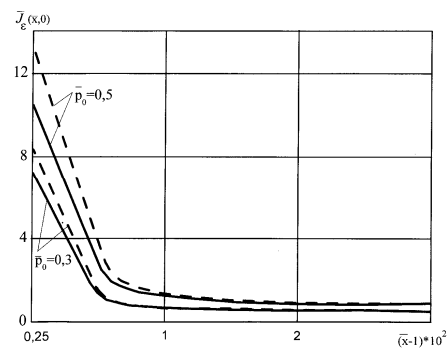


Рис. 5

Заключение.

В данной работе рассмотрена плоская задача о распределении напряжений в окрестности трещины для линейно-упрочняющегося материала при растяжении. На основе численного решения задачи исследовано зоны пластических деформаций, распределение напряжений и деформаций, перемещения берегов трещины.

Установлено, что кривые зависимостей нормальных напряжений от координаты \bar{x} для плоских напряженного и деформированного состояний имеют ограниченного значения.

РЕЗЮМЕ. Дано розв'язок плоскої задачі про розподіл напружень в околі тріщини при розтязті для лінійно-зміцнюваних тіл для малих значень параметра зміцнення. Методом інтегральних перетворень Фур'є задача зведена до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. На основі чисельного розв'язку системи для плоских деформованого і напруженого станів досліджено зони пластичних деформаций, розподіл напружень і деформаций та переміщення берегів тріщини.

1. Каминский А.А., Китнис Л.А., Колмакова В.А. Линия скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1995. – 31, № 6. – С. 86 – 91.
2. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. Моделирование зоны предразрушения у вершины трещины в нелинейно упругом теле // Прикл. механика. – 2011. – 47, № 6. – С. 149 – 159.

3. *Broek D.* Elementary engineering fracture mechanics. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1982. – 540 p.
4. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.* – 1920. – **A 221**. – P. 163 – 198.
5. *Irwin G.P.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // *Appl. Mech.* – 1957. – **24**, N 4. – P. 361 – 364.
6. *Jing P.H., Khraishi T.* Analytical solutions for crack tip plastic zone shape using the von Mises and Tresca yield criteria: Effects of crack mode and stress condition // *J. Mech.* – 2004. – **20**, N 3. – P. 199 – 210.
7. *Kaminsky A.A., Dudic M.V., Kipnis L.A.* Initial Linking of an Interface Crack Between Two Elastic Media Under Tension and Shear // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 6. – P. 635 – 542.
8. *Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Kolmakova V.A.* Model of the Fracture Process Zone at the Tip of a Crack Reaching the Nonsmooth Interface Between Elastic Media // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 10. – P. 1084 – 1092.
9. *Kaminsky A.A., Kipnis L.A., Polishchuk T.V.* Initial Fracture Process Zone at the Corner Point of the Interface Between Elastic Bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 700 – 709.
10. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Modeling a Crack with a Fracture Process Zone in a Nonlinear Elastic Body // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – P. 552 – 562.
11. *Kaminsky A. A., Selivanov M. F., Chernoivan Yu.A.* Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 3. – P. 293 – 302.
12. *Kassir M.K.* Size of thermal plastic zones around external cracks // *Int. J. Fract.* – 1969. – **5**, N 3. – P. 167 – 177.
13. *Kelly P.A., Nowell D.* Three-dimensional cracks with Dugdale-type plastic zones // *Int. J. Fract.* – 2000. – **106**, N4. – P. 291 – 309.
14. *Khoroshun L.P.* Discretization of the plane problem for a cracked body with nonlinear stress – strain diagram under tension // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **46**, N 11. – P. 1238 – 1252.
15. *Khoroshun L.P.* On the correctness of the energy criterion in fracture mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, N 10. – P. 799 – 805.
16. *Kipnis L.A., Polishchuk T.V.* Analysis of the plastic zone at the corner point of interface // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 159 – 168.
17. *Orowan E.O.* Fundamentals of brittle behavior of metals // *Fatigue and Fracture of Metals.* – New York; Wiley, 1950. – P. 139 – 167.
18. *Perez N.* Fracture Mechanics. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 299 p.
19. *Petroski H.J.* Dugdale plastic zone sizes for edge cracks // *Int. J. Fract.* – 1979. – **15**, N 3. – P. 217 – 230.
20. *Sneddon J.N., Berry D.S.* The classical theory of elasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 219 p.
21. *Wang G., Li S.F.* A penny-shaped cohesive crack model for material damage // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2004. – **42**, N 3. – P. 303 – 316.

Поступила 27.04.2011

Утверждена в печать 26.06.2013