

Е. И. Беспалова, Г. П. Урсова

**АНАЛИЗ НИЗШИХ ЧАСТОТ КОНСОЛЬНОГО АНИЗОТРОПНОГО
ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА В ТРЁХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ; ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail: metod@inmech.kiev.ua*

Abstract. An approach is developed to calculate the lower frequencies of an elastic parallelepiped within the 3D statement with allowance for material anisotropy. This approach is based on combination of the inverse method and Kantorovich-Vlasov method. A comparison with results obtained by the method of finite elements and the Ritz method certified of legitimacy of the technique proposed. An effect of properties of anisotropic materials on the lower frequencies of the consol parallelepiped is analyzed. It is shown that for this type of boundary conditions the change of frequencies of parallelepiped corresponds to the change of predominate stiffness characteristics.

Key words: elastic parallelepiped, consol fixing, different types of anisotropy, 3D statement, natural frequencies, generalized Kantorovich-Vlasov method.

Введение.

Консольно закрепленные упругие элементы разнообразной формы и структуры широко распространены в различных областях техники и строительства. Ими моделируются, в частности, крылья летательных аппаратов и лопасти газотурбинных двигателей в машиностроении; отдельные части перекрытий зданий, балконные балки и многоэтажные сооружения в строительстве; элементы сканирующих электронных микроскопов в наноэлектромеханических системах. Ведь не зря консольное закрепление считается шедевром искусства техники. Анализ колебаний таких элементов является весьма важным первоначальным этапом их динамического расчета, позволяющим предотвратить возможные аварийные ситуации в реальных режимах работы конструкций.

К настоящему времени исследование динамических характеристик консольно закрепленных упругих элементов наиболее полно проведено для балок и тонких пластин как простой структуры, так и с учетом отдельных усложняющих факторов. Так, например, влияние на колебания слоистости балок рассмотрено в [9]; зависимость низших частот пластин от упругих свойств композитных материалов представлено в [20], а учет дискретных включений типа сосредоточенных масс – в [8]. Анализ проведен в рамках балочных моделей, классической модели Кирхгофа – Лява и сдвиговых моделей первого и высших порядков.

В пространственной постановке колебания консольных тел изучено, в основном, для толстых плит разной формы, в частности: плит в виде равнобедренного треугольника; прямоугольного параллелепипеда; призмы, скошенная грань которой противоположна закрепленной, и др. [18, 19, 21, 22]. В зависимости от их геометрических па-

раметров оценивается эффект применения трехмерной постановки теории упругости по сравнению с различными двумерными постановками теории пластин [18]. Основное внимание при этом уделено учету различных граничных условий на боковых гранях, а анализ частот ограничивается, как правило, случаем изотропного материала [19]. В отдельных работах рассмотрены свободные колебания толстых плит из анизотропных материалов. Так, в [3] представлен расчет низших частот квадратной плиты разной толщины для некоторых типов анизотропии материала. Рассмотрены комбинации условий закрепления боковых граней, не включающие консольный случай.

Для решения соответствующих двумерных и трехмерных задач на собственные значения в большинстве публикаций использованы вариационно-разностные методы, методы конечных элементов, дискретно-континуальные подходы и различные варианты метода Рунге [3, 12, 14, 17 – 19, 21]. В работе [19] для изотропного параллелепипеда проведено детальное сопоставление частот, полученных методом Рунге при выборе различных систем базисных функций: алгебраических полиномов, полиномов Чебышева, тригонометрических функций и др. Особо отмечено перспективность В-сплайн аппроксимации для получения высокой точности результатов. Метод сплайн – коллокации использован в [11] при исследовании осесимметричных свободных колебаний сплошных цилиндров с жесткими и «скользящими» торцами, а в [13] – при решении задачи статики для толстой плиты в трехмерной постановке с теми же граничными условиями. Метод конечных интегральных преобразований применен в [15] для определения напряженно-деформированного состояния тонких консольных ортотропных пластин при произвольной нагрузке. В отдельных работах к решению двумерных задач применен метод суперпозиции [10]. Решение трехмерных задач на собственные значения для изотропного параллелепипеда основано на использовании обобщенного метода Канторовича – Власова [6]. Этот же метод применён для исследования кручения прямоугольной призмы из анизотропного материала [5], для решения задачи Ляме о сжатии упругого параллелепипеда [7], а также для решения двумерных стационарных задач теории пологих оболочек [4].

В данной работе представлен анализ собственных частот консольного параллелепипеда для разных типов анизотропии материала и относительных геометрических размеров. Решение соответствующих задач базируется на рациональном сочетании метода обратной итерации и обобщенного метода Канторовича – Власова.

§ 1. Постановка задачи и методика решения.

Упругое тело в форме прямоугольного параллелепипеда, отнесённое к декартовой системе координат x, y, z , занимает область $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, c]\}$. В соответствии с условиями консольного закрепления грань $x = 0$ принимаем жестко заземленной, все остальные – свободны от каких либо воздействий. В общем случае на ограничивающих плоскостях могут быть приняты различные физически непротиворечивые граничные условия.

Задачу о свободных колебаниях такого параллелепипеда формулируем на основе вариационного принципа Релея, согласно которому имеем

$$\delta \mathcal{E}(\bar{U}, \lambda) = \delta (\Pi(\bar{U}) - \lambda K(\bar{U})) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $\Pi(\bar{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{U})^T CD\bar{U} d\hat{\omega}$ и $K(\bar{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{U}^T \rho \bar{U} d\hat{\omega}$ – потенциальная и кинетическая энергии тела; λ – множитель Лагранжа, имеющий смысл квадрата искомой собственной частоты, т.е.

$$\lambda = \omega^2 = \frac{\Pi}{K} = \frac{\int_{\Omega} (D\bar{U})^T CD\bar{U} d\hat{\omega}}{\int_{\Omega} \bar{U}^T \rho \bar{U} d\hat{\omega}} \quad (\text{отношение Релея}); \quad (1.2)$$

$\bar{U} = \{u_p(x, y, z)\}_{p=x, y, z}$ – вектор перемещений точек тела; D – матричный дифференциальный оператор вида

$$D = \begin{pmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial / \partial z \\ 0 & \partial / \partial z & \partial / \partial y \\ \partial / \partial z & 0 & \partial / \partial x \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \end{pmatrix};$$

$C = \{c_{ij}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$) – матрица упругих постоянных обобщенного закона Гука $\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}$ для анизотропного материала ($\bar{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ и $\bar{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\}$ – векторы напряжений и деформаций, составленные из компонент соответствующих тензоров с учетом их симметрии); $\rho = \rho(x, y, z)$ – функция распределения масс; $\hat{\omega}$ – элемент объема Ω (индексы 1, 2, 3 соответствуют координатным направлениям x, y, z ; все векторы являются вектор-столбцами).

Методика определения неизвестного числового параметра λ и соответствующего ему состояния \bar{U} (1.1) основана, как и в [6], на рациональном сочетании метода последовательных приближений в варианте обратной итерации [1] и обобщенного метода Канторовича – Власова (ОКМ) [4, 5]. Реализацию методики осуществляем следующим образом.

Вначале на основе метода последовательных приближений задачу (1.1) сводим к последовательности вариационных задач, не содержащих неизвестного множителя λ . Для этого вводим последовательность вектор-функций \bar{V}^n путем замены $\bar{U} = \bar{V}^n$ и $\lambda \bar{U} = \bar{V}^{n-1}$, в результате чего исходную задачу сводим к последовательности вариационных задач для функционалов вида

$$\mathcal{E}(\bar{U}, \lambda) \rightarrow \mathcal{E}_n(\bar{V}^n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{V}^n)^T CD\bar{V}^n d\hat{\omega} - \frac{1}{2} \tau \int_{\Omega} (\bar{V}^n)^T \rho \bar{V}^n d\hat{\omega} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{V}^n)^T \rho \bar{V}^{n-1} d\hat{\omega}, \quad (1.3)$$

а множитель λ определяется как предел следующей числовой последовательности;

$$\lambda_n = \frac{\Pi_n}{K_n} = \frac{\int_{\Omega} \left((D\bar{V}^n)^T CD\bar{V}^n - \tau (\bar{V}^n)^T \rho \bar{V}^n \right) d\hat{\omega}}{\int_{\Omega} (\bar{V}^n)^T \rho \bar{V}^n d\hat{\omega}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

При этом учитываем сдвиг спектра собственных значений на величину τ ($\lambda \rightarrow \lambda + \tau$).

В качестве начального приближения \bar{V}^0 может быть принята любая вектор-функция общего вида.

Для определения стационарных точек функционала (1.3) на некотором фиксированном шаге приближения $n - fixed$ используем методику, подробно изложенную в [5] на основе обобщенного метода Канторовича – Власова. По этому методу искомым вектор перемещений $\bar{V}^n = \{v_1^n, v_2^n, v_3^n\}$ функционала (1.3) приближенно заменяется вектором $\bar{F}_M^n = \{f_{1M}^n, f_{2M}^n, f_{3M}^n\}$ согласно представлению

$$\begin{aligned} v_1^n(x, y, z) &\approx f_{1M}^n(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{1i}^n(x) Y_{1i}^n(y) Z_{1i}^n(z); \\ v_2^n(x, y, z) &\approx f_{2M}^n(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{2i}^n(x) Y_{2i}^n(y) Z_{2i}^n(z); \\ v_3^n(x, y, z) &\approx f_{3M}^n(x, y, z) = \sum_{i=1}^M X_{3i}^n(x) Y_{3i}^n(y) Z_{3i}^n(z). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь функции $X_{1i}^n(x)$, $X_{2i}^n(x)$, $X_{3i}^n(x)$, $Y_{1i}^n(y)$, $Y_{2i}^n(y)$, $Y_{3i}^n(y)$, $Z_{1i}^n(z)$, $Z_{2i}^n(z)$, $Z_{3i}^n(z)$ ($i = \overline{1, M}$) зависят от разных переменных области Ω и являются неизвестными; M – количество членов аппроксимирующего выражения.

Для удобства изложения представим эти функции как компоненты следующих векторов:

$$\bar{X}^n = \{X_{pi}^n(x)\}_{p=1,2,3; i=1, M} = \{X_{11}^n(x) \dots X_{21}^n(x) \dots X_{31}^n(x) \dots X_{3M}^n(x)\}; \quad (1.6)$$

$$\bar{Y}^n = \{Y_{pi}^n(y)\}_{p=1,2,3; i=1, M} = \{Y_{11}^n(y) \dots Y_{21}^n(y) \dots Y_{31}^n(y) \dots Y_{3M}^n(y)\}; \quad (1.7)$$

$$\bar{Z}^n = \{Z_{pi}^n(z)\}_{p=1,2,3; i=1, M} = \{Z_{11}^n(z) \dots Z_{21}^n(z) \dots Z_{31}^n(z) \dots Z_{3M}^n(z)\}. \quad (1.8)$$

Эти векторы, как и в [4 – 7], будем называть аргументными вектор-функциями, поскольку каждый из них составлен из функций только одного аргумента x , y или z . Для их определения используется стандартная техника вариационного исчисления. Так, согласно аппроксимации $\bar{F}_M^n = \{f_{1M}^n, f_{2M}^n, f_{3M}^n\}$ (1.5) функционал (1.3) приближенно заменяется следующим функционалом:

$$\mathcal{E}_n(\bar{V}^n) \cong \mathcal{E}_{nM}(\bar{F}_M^n) = \mathcal{E}_{nM}(\bar{X}^n, \bar{Y}^n, \bar{Z}^n) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D\bar{F}_M^n)^T CD\bar{F}_M^n d\hat{\omega} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{F}_M^n)^T \rho \bar{F}_M^{n-1} d\hat{\omega}.$$

Условие стационарности этого функционала записывается в известном виде

$$\delta \mathcal{E}_{nM}(\bar{X}^n, \bar{Y}^n, \bar{Z}^n) = \delta_{\bar{X}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta \bar{X}^n + \delta_{\bar{Y}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta \bar{Y}^n + \delta_{\bar{Z}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta \bar{Z}^n = 0, \quad (1.9)$$

где $\delta_{\bar{X}^n} \mathcal{E}_{nM}$, $\delta_{\bar{Y}^n} \mathcal{E}_{nM}$, $\delta_{\bar{Z}^n} \mathcal{E}_{nM}$ – частные вариации функционала \mathcal{E}_{nM} по компонентам векторов \bar{X}^n , \bar{Y}^n , \bar{Z}^n , соответственно. В силу независимости векторов \bar{X}^n , \bar{Y}^n , \bar{Z}^n условие (1.9) эквивалентно системе следующих условий:

$$\delta_{\bar{X}^n} \mathcal{E}_{nM} = \sum_{k=1}^M (\delta_{X_{1k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta X_{1k}^n + \delta_{X_{2k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta X_{2k}^n + \delta_{X_{3k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta X_{3k}^n) = 0; \quad (1.10)$$

$$\delta_{\bar{Y}^n} \mathcal{E}_{nM} = \sum_{k=1}^M (\delta_{Y_{1k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Y_{1k}^n + \delta_{Y_{2k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Y_{2k}^n + \delta_{Y_{3k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Y_{3k}^n) = 0; \quad (1.11)$$

$$\delta_{\bar{Z}^n} \mathcal{E}_{nM} = \sum_{k=1}^M (\delta_{Z_{1k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Z_{1k}^n + \delta_{Z_{2k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Z_{2k}^n + \delta_{Z_{3k}^n} \mathcal{E}_{nM} \delta Z_{3k}^n) = 0. \quad (1.12)$$

При переходе к уравнениям Эйлера – Лагранжа каждое из условий (1.10) – (1.12) порождает одномерную задачу относительно варьируемой аргументной вектор-функции. При этом аргументные функции других переменных, не варьируемые в данном условии, фигурируют в этой одномерной задаче как параметры-функционалы. Техника получения этих одномерных задач описана в [5]. Так, условию (1.10) эквивалентна одномерная задача по переменной x относительно функций \bar{X}^n , а функции \bar{Y}^n и \bar{Z}^n входят в нее в виде определенных интегралов. Из условия (1.11) получаем одномерную задачу по переменной y относительно функций \bar{Y}^n , а функции \bar{X}^n и \bar{Z}^n содержатся в ней как определенные интегралы. Одномерная задача по переменной z относительно вектор-функции \bar{Z}^n получается из условия (1.12) и содержит функции \bar{X}^n и \bar{Y}^n в интегральном виде. Таким образом, система условий (1.10) – (1.12) приводит к системе трех одномерных краевых задач относительно трех аргументных вектор-функций разных переменных, которую можно представить в таком виде:

$$(L_x^n - \tau T_x^n) \bar{X}^n - T_x^n \bar{X}^{n-1} = 0, \quad x \in (0, a); \quad R_{\mp x}^n \bar{X}^n = 0, \quad x = 0, a; \quad (1.13)$$

$$(L_y^n - \tau T_y^n) \bar{Y}^n - T_y^n \bar{Y}^{n-1} = 0, \quad y \in (0, b); \quad R_{\mp y}^n \bar{Y}^{(n)} = 0, \quad y = 0, b; \quad (1.14)$$

$$(L_z^n - \tau T_z^n) \bar{Z}^n - T_z^n \bar{Z}^{n-1} = 0, \quad z \in (0, c); \quad R_{\mp z}^n \bar{Z}^n = 0, \quad z = 0, c. \quad (1.15)$$

Здесь $L_x^n = \{l_{sp}^n\}_{s,p=1,2,3}$ – блочная матрица, каждый блок которой $l_{sp}^n = \{l_{ik}^{sp}\}_{i,k=1,\overline{M}}$ – матричный дифференциальный оператор второго порядка по переменной x вида

$$l_{ik}^{sp} = A_{2ik}^{sp} \frac{d^2}{dx^2} + A_{1ik}^{sp} \frac{d}{dx} + A_{0ik}^{sp}; \quad (1.16)$$

$T_x^n = \{t_{ik}^{ss}\}_{s=1,2,3, i,k=1,\overline{M}}$ – блочно-диагональная матрица.

Соответствующим образом записываем матричный оператор граничных условий, где « \leftarrow » относится к условиям при $x = 0$, знак « \rightarrow » – при $x = a$;

$$R_{\mp x}^n = \left\{ r_{\mp ik}^{sp} = r_{\mp 1ik}^{sp} \frac{d}{dx} + r_{\mp 0ik}^{sp} \right\}.$$

Выражения для коэффициентов операторов (1.16) для случая прямолинейной анизотропии общего вида приведены в [5].

Элементы блочно-диагональной матрицы $T_x^n = \{t_{ik}^{ss}\}_{s=1,2,3, i,k=1,\overline{M}}$ имеют вид

$$t_{ik}^{11} = \int_0^b \int_0^c \rho Y_{1i} Y_{1k} Z_{1i} Z_{1k} dy dz; \quad t_{ik}^{22} = \int_0^b \int_0^c \rho Y_{2i} Y_{2k} Z_{2i} Z_{2k} dy dz; \quad t_{ik}^{33} = \int_0^b \int_0^c \rho Y_{3i} Y_{3k} Z_{3i} Z_{3k} dy dz.$$

Аналогичный вид имеют элементы матриц T_y^n и T_z^n .

Для решения системы одномерных задач (1.13) – (1.15) на каждом шаге метода последовательных приближений (параметр n) может быть использована следующая итерационная схема (параметр m):

$$\left(L_x^{n,m-1} - \tau T_x^{n,m-1}\right) \bar{X}^{n,m} - T_x^{n,m-1} \bar{X}^{n-1,m-1} = 0 \quad x \in (0, a); \quad R_{\mp x}^{n,m-1} \bar{X}^{n,m} = 0 \quad x = 0, a; \quad (1.17)$$

$$\left(L_y^{n,m-1} - \tau T_y^{n,m-1}\right) \bar{Y}^{n,m} - T_y^{n,m-1} \bar{Y}^{n-1,m-1} = 0 \quad y \in (0, b); \quad R_{\mp y}^{n,m-1} \bar{Y}^{n,m} = 0 \quad y = 0, b; \quad (1.18)$$

$$\left(L_z^{n,m} - \tau T_z^{n,m}\right) \bar{Z}^{n,m} - T_z^{n,m} \bar{Z}^{n-1,m-1} = 0 \quad z \in (0, c); \quad R_{\mp z}^{n,m} \bar{Z}^{n,m} = 0 \quad z = 0, c \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (1.19)$$

Индекс $(m-1)$ при операторах $L_x^{n,m-1}$, $T_x^{n,m-1}$, $R_{\mp x}^{n,m-1}$ означает, что функции Y и Z для вычисления входящих туда коэффициентов используем с предыдущего $(m-1)$ -го шага приближения. Эти индексы имеют аналогичный смысл в остальных операторах системы (1.17) – (1.19).

Таким образом, так же, как и при решении аналогичной задачи для изотропного параллелепипеда [6], для определения частотного параметра λ и соответствующей ему вектор-функции \bar{U} можно построить единый итерационный процесс (параметр $j = 1, 2, \dots$). Этот процесс объединяет последовательные приближения по методу обратной итерации (параметр n) и решение вариационной задачи (1.17) – (1.19) (параметр m)

$$\left(L_x^{j-1} - \tau T_x^{j-1}\right) \bar{X}^j - T_x^{j-1} \bar{X}^{j-1} = 0 \quad x \in (0, a); \quad R_{\mp x}^{j-1} \bar{X}^j = 0 \quad x = 0, a; \quad (1.20)$$

$$\left(L_y^{j-1} - \tau T_y^{j-1}\right) \bar{Y}^j - T_y^{j-1} \bar{Y}^{j-1} = 0 \quad y \in (0, b); \quad R_{\mp y}^{j-1} \bar{Y}^j = 0 \quad y = 0, b; \quad (1.21)$$

$$\left(L_z^j - \tau T_z^j\right) \bar{Z}^j - T_z^j \bar{Z}^{j-1} = 0 \quad z \in (0, c); \quad R_{\mp z}^j \bar{Z}^j = 0 \quad z = 0, c. \quad (1.22)$$

Заметим, что любые линейно независимые по i функции могут быть выбраны для начального приближения X_{pi}^0 , Y_{pi}^0 , Z_{pi}^0 ($p = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, M}$). Решение отдельной одномерной краевой задачи проводим численно методом ортогональной прогонки.

Для завершения итерационного процесса (1.20) – (1.22) при фиксированном числе членов аппроксимации M используем принцип Рунге. Точность окончательного значения искомой собственной частоты λ достигается с увеличением числа членов M в аппроксимирующем выражении (1.5).

§ 2. Тестовые примеры.

Разработанная методика решения трехмерных задач на собственные значения к настоящему времени не имеет строгого теоретического обоснования с дедуктивной оценкой сходимости и точности решения. В связи с этим ее практическое обоснование применительно к спектральным задачам теории упругости анизотропных тел основано на известных индуктивных приемах прикладной математики.

Как следует из изложенного (§1), для получения решения задачи необходимо выполнение двух условий: 1) сходимость единого итерационного процесса решения системы одномерных задач (1.20) – (1.22) при фиксированном числе членов M аппроксимирующего выражения; 2) сходимость решения (1.5) с увеличением числа аппроксимирующих функций.

Выполнение этих условий оценивается путем сопоставления решений в двух последовательных приближениях.

В качестве критерия достоверности окончательного решения по ОКМ используется сравнение с результатами, полученными другими методами. Тестовые примеры для такого сравнения заимствованы из [3, 16, 19] и выбраны так, чтобы проиллюстрировать особенности рассматриваемого здесь класса задач, в частности, учет анизотропии материала и консольного закрепления параллелепипеда. Так как в статье [3] не приведен расчет собственных частот консольного анизотропного параллелепипеда, досто-

верность решения для этого случая граничных условий проводится для изотропного материала по данным работ [16, 19].

Пример 1. Рассмотрены собственные частоты квадратного в основании прямоугольного параллелепипеда $\Omega \cup \partial\Omega = \{x, y, z : x \in [0, a], y \in [0, a], z \in [0, c]\}$ для некоторых типов анизотропных материалов со следующими упругими характеристиками [3]:

Trigonal materials –

$$[C] = \begin{bmatrix} 86,74 & 6,99 & 11,91 & -17,91 & 0 & 0 \\ & 86,74 & 11,91 & 17,91 & 0 & 0 \\ & & 107,2 & 0 & 0 & 0 \\ & сим & & 57,94 & 0 & 0 \\ & & & & 57,94 & -17,91 \\ & & & & & 39,88 \end{bmatrix} \text{ ГПа}; \quad (2.1)$$

Monoclinic materials –

$$[C] = \begin{bmatrix} 86,74 & -8,25 & 27,15 & -3,66 & 0 & 0 \\ & 129,77 & -7,42 & 5,7 & 0 & 0 \\ & & 102,83 & 9,92 & 0 & 0 \\ & сим & & 38,61 & 0 & 0 \\ & & & & 68,81 & 2,53 \\ & & & & & 29,01 \end{bmatrix} \text{ ГПа}; \quad (2.2)$$

Orthotropic materials –

$$[C] = \begin{bmatrix} 160,0 & 37,3 & 1,72 & 0 & 0 & 0 \\ & 86,87 & 15,72 & 0 & 0 & 0 \\ & & 84,81 & 0 & 0 & 0 \\ & сим & & 25,58 & 0 & 0 \\ & & & & 42,68 & 0 \\ & & & & & 42,06 \end{bmatrix} \text{ ГПа}. \quad (2.3)$$

Анализируем случаи граничных условий, представленных в этой работе: две противоположные боковые грани закреплены, две остальные – свободны (обозначение CFCF по работе [3])

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad \sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } y = 0, a; \quad (2.4)$$

опирание типа Навье по всем боковым граням (обозначение SSSS по работе [19])

$$u_2 = u_3 = 0, \quad \sigma_{11} = 0 \text{ при } x = 0, a; \quad u_1 = u_3 = 0, \quad \sigma_{22} = 0 \text{ при } y = 0, a. \quad (2.5)$$

Плоскости $z = 0, c$ принимаем свободными от нагружения, т.е.

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } z = 0, c.$$

Вычислительные аспекты ОКМ – выполнение условий 1), 2) и сравнение с результатами других авторов – иллюстрируем для разных частот, материалов, граничных условий и относительных размеров параллелепипеда. Выбранные расчетные варианты представлены в табл. 1. Сравнение проводим по частотному параметру $\tilde{\omega} = \omega c \sqrt{\rho / C_{11}}$, принятому в [3].

Таблица 1

Варианты расчета	№ частоты	Материал	Граничные условия	c/a	M
I	1	<i>trigonal</i>	CFCF (2.4)	0,5	4
II	2	<i>monoclinic</i>	SSSS (2.5)	0,1	3
III	3	<i>orthotropic</i>	CFCF (2.4)	0,5	2

Для этих вариантов в табл. 2 приведены значения частот, иллюстрирующие сходимость единого итерационного процесса решения системы одномерных задач (1.20) – (1.22) (параметр j) при фиксированном числе членов аппроксимации M , приведенном в последнем столбце табл. 1.

Таблица 2

Варианты расчета	j						
	1	2	3	4	5	6	7
I	$9,422 \cdot 10^{-1}$	$8,637 \cdot 10^{-1}$	$8,051 \cdot 10^{-1}$	$8,028 \cdot 10^{-1}$	$8,027 \cdot 10^{-1}$	$8,026 \cdot 10^{-1}$	$8,026 \cdot 10^{-1}$
II	$5,276 \cdot 10^{-1}$	$5,290 \cdot 10^{-1}$	$1,260 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$
III	$7,461 \cdot 10^{-1}$	1,050	1,043	1,044	1,044	1,044	1,044

Как видно из табл. 2, для сходимости решения в четырех знаках при разном числе аппроксимирующих функций требуется от 4 до 7 итераций.

Сходимость вычисления собственных частот в зависимости от числа членов ряда (1.5) представлена данными табл. 3.

Таблица 3

Варианты расчета	M					
	1	2	3	4	5	6
I	$9,485 \cdot 10^{-1}$	$8,049 \cdot 10^{-1}$	$8,030 \cdot 10^{-1}$	$8,026 \cdot 10^{-1}$	$8,022 \cdot 10^{-1}$	$8,022 \cdot 10^{-1}$
II	$1,266 \cdot 10^{-1}$	$1,260 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$	$1,242 \cdot 10^{-1}$
III	1,059	1,044	1,042	1,041	1,041	1,041

С возрастанием числа удерживаемых членов в представлении (1.5) вычисляемые собственные частоты по (1.4) устанавливаются в тех же 4-х знаках не более чем при шести членах аппроксимации.

Достоверность полученных по ОКМ значений собственных частот, удовлетворяющих обоим условиям 1), 2), подтверждается сопоставлением их с результатами работы [3] для приведенных типов анизотропии. Эти данные содержатся в табл. 4 и 5 для граничных условий (2.4) и (2.5), соответственно.

Таблица 4

Тип анизотропии	№ частоты	$c/a=0,5$		$c/a=0,1$	
		ОКМ	[3]	ОКМ	[3]
<i>trigonal</i>	1	$8,020 \cdot 10^{-1}$	$8,005 \cdot 10^{-1}$	$5,950 \cdot 10^{-2}$	$5,950 \cdot 10^{-2}$
	2	$9,907 \cdot 10^{-1}$	$9,795 \cdot 10^{-1}$	$7,160 \cdot 10^{-2}$	$7,150 \cdot 10^{-2}$
	3	1,026	1,025	$1,145 \cdot 10^{-1}$	$1,141 \cdot 10^{-1}$
<i>monoclinic</i>	1	$8,259 \cdot 10^{-1}$	$8,241 \cdot 10^{-1}$	$5,980 \cdot 10^{-2}$	$5,980 \cdot 10^{-2}$
	2	$9,862 \cdot 10^{-1}$	$9,800 \cdot 10^{-1}$	$6,990 \cdot 10^{-2}$	$6,980 \cdot 10^{-2}$
	3	1,025	1,023	$1,184 \cdot 10^{-1}$	$1,178 \cdot 10^{-1}$
<i>orthotropic</i>	1	$6,812 \cdot 10^{-1}$	$6,821 \cdot 10^{-1}$	$5,850 \cdot 10^{-2}$	$5,850 \cdot 10^{-2}$
	2	$7,436 \cdot 10^{-1}$	$7,436 \cdot 10^{-1}$	$9,480 \cdot 10^{-2}$	$9,480 \cdot 10^{-2}$
	3	1,041	1,042	1,472	1,472

Таблица 5

Тип анизотропии	№ частоты	$c/a = 0,5$		$c/a = 0,1$	
		ОКМ	[3]	ОКМ	[3]
trigonal	1	$9,252 \cdot 10^{-1}$	$9,210 \cdot 10^{-1}$	$5,350 \cdot 10^{-2}$	$5,350 \cdot 10^{-2}$
	2	1,018	1,017	$1,298 \cdot 10^{-1}$	$1,296 \cdot 10^{-1}$
	3	1,056	1,051	$1,984 \cdot 10^{-1}$	$1,984 \cdot 10^{-1}$
monoclinic	1	$9,055 \cdot 10^{-1}$	$9,036 \cdot 10^{-1}$	$5,270 \cdot 10^{-2}$	$5,270 \cdot 10^{-2}$
	2	$9,075 \cdot 10^{-1}$	$9,064 \cdot 10^{-1}$	$1,243 \cdot 10^{-1}$	$1,241 \cdot 10^{-1}$
	3	$9,373 \cdot 10^{-1}$	$9,299 \cdot 10^{-1}$	$1,426 \cdot 10^{-1}$	$1,424 \cdot 10^{-1}$
orthotropic	1	$7,293 \cdot 10^{-1}$	$7,295 \cdot 10^{-1}$	$4,770 \cdot 10^{-2}$	$4,770 \cdot 10^{-2}$
	2	$8,054 \cdot 10^{-1}$	$8,054 \cdot 10^{-1}$	$1,021 \cdot 10^{-1}$	$1,021 \cdot 10^{-1}$
	3	$8,054 \cdot 10^{-1}$	$8,054 \cdot 10^{-1}$	$1,227 \cdot 10^{-1}$	$1,227 \cdot 10^{-1}$

Отличие в значениях приведенных частот, полученных по методу конечных элементов в [3] и по разработанному подходу не превышает 1%.

Пример 2. Для оценки правомерности предложенного подхода в случае консольного закрепления боковых граней параллелепипеда используем в качестве тестовых данные работ [16, 19] для изотропного материала. Сравнение результатов проводим по частотному параметру $\Omega_* = \omega b^2 \sqrt{\rho c / D}$, принятому в [19] ($D = Ec^3 / 12(1 - \mu^2)$), E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона.

Принимаем, что грань $x = 0$ жестко закреплена, а другие грани – свободны, т.е.

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x = 0; \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \text{ при } x = a;$$

$$\sigma_{22} = \sigma_{21} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } y = 0, b; \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \text{ при } z = 0, c. \quad (2.6)$$

Выполнение указанных выше необходимых условий 1), 2) для получения решения по ОКМ в этом случае граничных условий иллюстрируют данные табл. 6 (сходимость общего итерационного процесса решения системы одномерных задач (1.20) – (1.22) при фиксированном числе членов аппроксимации) и табл. 7 (сходимость решения в зависимости от числа аппроксимирующих членов).

Таблица 6

c/a	№ частоты	M	j						
			1	2	3	4	5	6	7
0,5	1	2	2,957	2,952	2,950	2,950	2,950	2,950	2,950
	3	3	5,233	5,222	5,215	5,205	5,204	5,204	5,204
0,1	2	3	8,111	8,107	8,102	8,099	8,091	8,090	8,090
	3	4	3,773	7,187	1,689·10	2,026·10	2,018·10	2,017·10	2,017·10

Таблица 7

c/a	№ частоты	M					
		1	2	3	4	5	6
0,5	1	3,118	2,950	2,938	2,934	2,933	2,933
	3	5,340	5,237	5,204	5,197	5,193	5,193
0,1	2	8,362	8,114	8,090	8,079	8,071	8,071
	3	2,203·10	2,072·10	2,019·10	2,017·10	2,017·10	2,017·10

Как и в случае анизотропных материалов при условиях (2.4), (2.5), для установления решения в 4-х знаках для случая консольного закрепления достаточно от 4 до 7 итераций, а устойчивое значение частот получено при 5 – 6 членах аппроксимации.

Сравнение с результатами работ [16, 19] приведено в табл. 8. Вычисление собственных частот в этих работах проведено в рамках метода Ритца с использованием в качестве базиса В-сплайн функций и ортогональных полиномов, соответственно.

Таблица 8

№ частоты	$c/a=0,5$			$c/a=0,1$		
	ОКМ	[19]	[16]	ОКМ	[19]	[16]
1	2,9327	2,9331	2,9372	3,4400	3,4387	3,4480
2	4,3889	4,3865	4,3910	8,0706	8,0746	8,0996
3	5,1926	5,1925	5,1944	2,0170·10	2,0152·10	2,0209·10

Различие в значениях частот, вычисленных по разным подходам, находится в пределах 1%.

Проведенное тестирование методики (примеры 1, 2) свидетельствует о её работоспособности для анизотропных материалов при различных граничных условиях.

§ 3. Анализ собственных частот анизотропного параллелепипеда.

Описанный выше подход применен к расчету низкочастотного участка спектра свободных колебаний консольного параллелепипеда. Обсуждены два вопроса: зависимость частот от изменения свойств анизотропного материала и влияние в проведенных расчетах «побочных» жесткостей, связывающих деформации растяжения – сжатия со сдвиговыми деформациями.

Колебания параллелепипеда рассмотрены при граничных условиях (2.6), т.е. в предположении, что грань $x = 0$ закреплена, все остальные – свободны. Длина параллелепипеда a по оси $0x$ принята постоянной, а относительные размеры сечения $x = \text{const}$ при неизменной его площади $S = b \times c = \text{const}$ меняются, что характеризуется параметром $\alpha = c/b$.

В качестве материала параллелепипеда выбран однонаправленный композит с углеродистым волокном CFRP, для которого

$$E_1 = 2,11E_0; E_2 = E_3 = 0,053E_0; G_{12} = G_{13} = 0,026E_0; G_{23} = 0,013E_0;$$

$$\mu_{21} = 0,25 \quad \rho = \rho_0 = 1524 \text{ кг/м}^3; E_0 = 10^{11} \text{ Н/м}^2. \quad (3.1)$$

Оси упругости этого ортотропного материала первоначально ориентированы по геометрическим осям тела, т.е. E_1 – по оси $0x$, E_2 – по оси $0y$, E_3 – по оси $0z$. Изменение угла ориентации φ в плоскости $x y$ между физическими и геометрическими осями параллелепипеда, позволяет трактовать его как конструктивно анизотропный с одной плоскостью упругой симметрии, перпендикулярной оси $0z$. Связь между элементами матрицы закона Гука $\bar{\sigma} = C\bar{\varepsilon}$ для ортотропного тела (три плоскости упругой симметрии $C^o = \{c_{ij}^o\}$) и анизотропного тела (одна плоскость упругой симметрии $C = \{c_{ij}\}$), обусловленного наличием угла φ , соответствует известным формулам [2]

$$c_{11} = c_{11}^o \cos^4 \varphi + 2(c_{12}^o + 2c_{66}^o) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + c_{22}^o \sin^4 \varphi;$$

$$c_{22} = c_{11}^o \sin^4 \varphi + 2(c_{12}^o + 2c_{66}^o) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + c_{22}^o \sin^4 \varphi;$$

$$c_{12} = c_{12}^o + [c_{11}^o + c_{22}^o - 2(c_{12}^o + 2c_{66}^o)] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$c_{66} = c_{66}^o + [c_{11}^o + c_{22}^o - 2(c_{12}^o + 2c_{66}^o)] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$c_{16} = 0,5[c_{22}^o \sin^2 \varphi - c_{11}^o \cos^2 \varphi + (c_{12}^o + 2c_{66}^o) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi; \quad (3.2)$$

$$c_{26} = 0,5[c_{22}^o \cos^2 \varphi - c_{11}^o \sin^2 \varphi - (c_{12}^o + 2c_{66}^o) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi;$$

$$c_{44} = c_{44}^o \cos^2 \varphi + c_{55}^o \sin^2 \varphi, \quad c_{55} = c_{44}^o \sin^2 \varphi + c_{55}^o \cos^2 \varphi;$$

$$c_{45} = (c_{44}^o - c_{55}^o) \sin \varphi \cos \varphi, \quad c_{13} = c_{13}^o \cos^2 \varphi + c_{23}^o \sin^2 \varphi;$$

$$c_{23} = c_{13}^o \sin^2 \varphi + c_{23}^o \cos^2 \varphi; \quad c_{36} = (c_{23}^o - c_{13}^o) \sin \varphi \cos \varphi, \quad c_{33} = c_{33}^o.$$

Для наглядности на рис. 1 показаны графики жесткостных характеристик $\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{11}(\varphi)$; $\tilde{c}_{66} = \tilde{c}_{66}(\varphi)$; $\tilde{c}_{16} = \tilde{c}_{16}(\varphi)$ $\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$, которые с учетом симметрии и периодичности преобразований (3.2) дают представление о всех компонентах матрицы $C = \{c_{ij}\}$ ($i, j = \bar{1}, \bar{6}$) ($\tilde{c}_{ij}(\varphi) = c_{ij}(\varphi) / c_{11}(0)$).

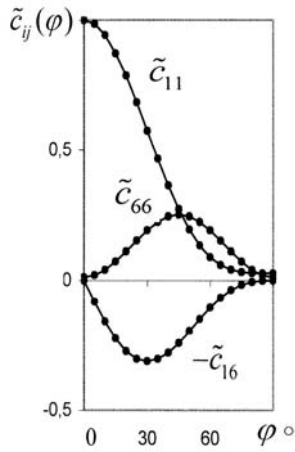


Рис. 1

В первой серии расчетов исследованы низшие частоты анизотропного параллелепипеда в зависимости от ориентации волокон стеклопластика (3.1) ($\varphi \in [0^\circ, 90^\circ]$) для трех относительных размеров сечения $x = \text{const}$: $\alpha = 1$; 0,5; 0,1 (значение $\alpha = 1$ соответствует консольному параллелепипеду квадратного сечения, $\alpha = 0,1$ – пластине с толщиной c и размерами в плане $a \times b$).

Первые четыре частоты $\tilde{\omega}_i = \omega_i / \omega_{1,\alpha=1}(0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), отнесенные к минимальной частоте ортотропного параллелепипеда с квадратным сечением $x = \text{const}$ ($\varphi = 0$, $\alpha = 1$), представлены на рис. 2, а, б, в для $\alpha = 1$; 0,5; 0,1 ($a = 25l_0$, $S = 100l_0^2$, l_0 – характерный линейный размер). Этим частотам при отсутствии в перемещениях перемен знака по оси $0x$ соответствуют следующие формы колебаний: 1 – преимущественно изгибные колебания по оси $0z$ (каждое сечение параллелепипеда $x = \text{const}$ смещается по этой оси как единое целое); 2 – аналогичные колебания по оси $0y$; 3 – сдвиговые колебания в плоскости $x = \text{const}$; 4 – колебания «поршневого» типа по оси $0x$.

Для параллелепипеда с квадратным сечением $x = \text{const}$ зависимость $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(\varphi)$ для всех представленных частот, кроме третьей, являются монотонно убывающими функциями (рис. 2 а, обозначение 1, 2, 4). Их качественный характер соответствует изменению жесткости \tilde{c}_{11} как преобладающей над другими жесткостями для этих типов колебаний (рис. 1). Для третьей частоты (обозначение 3) зависимость $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(\varphi)$ является немонотонной функцией с максимумом при $\varphi = 30^\circ$. Качественно эта функция согласуется с изменением жесткости \tilde{c}_{66} , которая вместе с \tilde{c}_{12} являются преобладающими при определении сдвиговых деформаций (рис. 1). Различие между первыми двумя частотами в пределах 15% наблюдается в диапазоне $\varphi \in [10^\circ, 30^\circ]$. Эта величина и определяет, собственно, эффект анизотропии. Заметим, что в изотропном случае обе первые частоты совпадают и не зависят от угла φ (штриховые линии на рисунках).

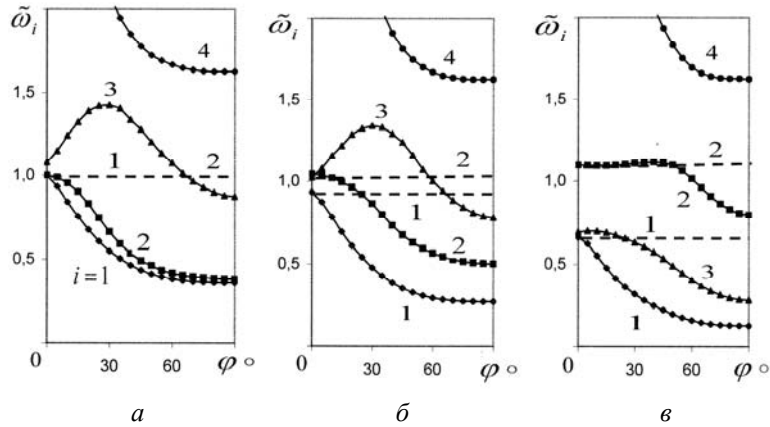


Рис. 2

Для других относительных размеров сечения $x = \text{const}$ ($\alpha = 0,5; 0,1$) качественный характер функций $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(\varphi)$ практически не меняется (рис. 2, б, в). Количественно различие между первой и второй частотами существенно увеличивается и это увеличение обусловлено не анизотропией материала, а изменением геометрических размеров параллелепипеда. Частотные кривые $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_1(\varphi)$ (изгибные колебания по оси Oz) с уменьшением параметра α имеют тенденцию к снижению во всем диапазоне принятого изменения свойств материала. Кривые $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_2(\varphi)$ для второй частоты, наоборот, имеют тенденцию к повышению, а частоты сдвиговых колебаний $\tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_3(\varphi)$ при этом не только снижаются, но и характер их зависимости от угла φ становится более пологим. При этом для толстой пластины $\alpha=0,1$ (рис. 2 в) частоты колебаний $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\omega}_2(\varphi)$ практически не меняются вплоть до $\varphi = 45^\circ$ и во всем диапазоне изменения угла φ становятся выше частот сдвиговых колебаний $\tilde{\omega}_2(\varphi) > \tilde{\omega}_3(\varphi)$.

Частоты «поршневого» типа (обозначение 4) с уменьшением параметра α весьма существенно возрастают в диапазоне $\varphi \in [0, 20^\circ]$, а при значении $\varphi > 60^\circ$ – практически не зависят от этого параметра.

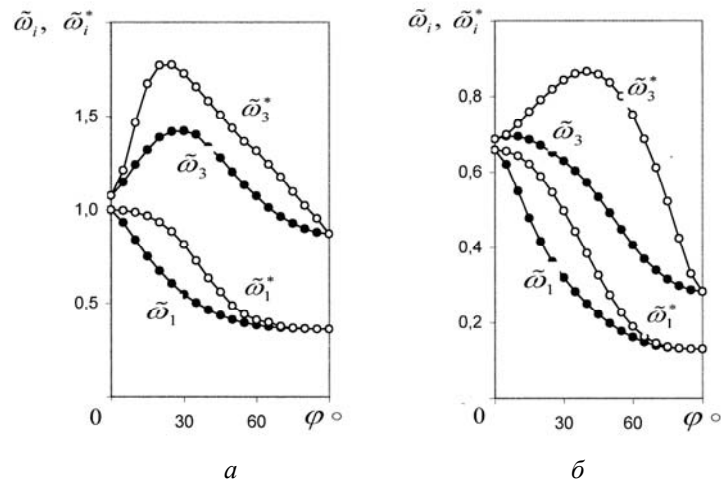


Рис. 3

Вторая серия расчетов связана с оценкой учета «побочных» жесткостей в представленных вычислениях. Проведено сравнение зависимостей $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(\varphi)$, полученных с учетом жесткостей c_{16}, c_{26}, c_{45} в законе Гука (точная схема) и с их пренебрежением $\tilde{\omega}_i^* = \tilde{\omega}_i^*(\varphi)$ (условно упрощенная ортотропная схема). Эти результаты представлены на рис. 3 для первой и третьей частот в случае параллелепипеда квадратного $\alpha = 1$ (рис. 3, а) и прямоугольного $\alpha = 0,1$ (рис. 3, б) сечений $x = \text{const}$.

Как видно из графиков, качественный характер частотных зависимостей, рассчитанных по точной $\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i(\varphi)$ и упрощенной $\tilde{\omega}_i^* = \tilde{\omega}_i^*(\varphi)$ схемам, сохраняется для обеих частот. При этом условно ортотропная схема дает, естественно, их завышенные значения. В процентном отношении $(\varepsilon_i(\varphi) = (\tilde{\omega}_i^*(\varphi) - \tilde{\omega}_i(\varphi)) / \tilde{\omega}_i(\varphi) \times 100, i = 1, 3)$ упрощенная схема вносит большую погрешность в расчет первой частоты (~50% для $\alpha = 1$ и $\alpha = 0,1$), чем в расчёт третьей частоты (~20% для $\alpha = 1$ и ~45% для $\alpha = 0,1$).

Выводы.

1. Разработанный подход к определению собственных частот упругого параллелепипеда в трехмерной постановке апробирован для разных анизотропных материалов (trigonal, monoclinic, orthotropic) путем сравнения с результатами, полученными по МКЭ и методу Ритца.

2. Исследовано влияние свойств анизотропных материала на низшие частоты консольного параллелепипеда. Показано, что для этого типа закрепления изменение низших частот параллелепипеда коррелируется с соответствующим изменением доминирующих жесткостных характеристик, что не имеет места для других граничных условий.

3. Пренебрежение «побочными» жесткостями, связывающими в законе Гука деформации растяжения–сжатия со сдвиговыми деформациями, приводит к естественному завышению значений частот. При этом качественный характер исследуемых зависимостей сохраняется, а количественные различия в отдельных случаях могут превышать 50%.

РЕЗЮМЕ. Розроблено підхід для визначення нижчих частот пружного паралелепіпеда в 3-D постановці з врахуванням анізотропії матеріалу. Підхід базується на поєднанні метода оберненої ітерації і узагальненого методу Канторовича – Власова. Порівняння з результатами, отриманими методом скінчених елементів і методом Рітца, підтвердили правомірність запропонованої методики. Проведено аналіз впливу властивостей анізотропних матеріалів на нижчі частоти консольного паралелепіпеда. Показано, що для цього типу граничних умов зміна частот паралелепіпеда відповідає зміні домінуючих жорсткісних характеристик.

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503с.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. Barta R.C., Qian L.F., Chen L.M. Natural frequencies of thick square plates made of orthotropic, trigonal, monoclinic, hexagonal and triclinic materials // J. Sound and Vibr. – 2004. – **270**, N 4–5. – P. 1074–1086.
4. Bepalova E.I. Solving Stationary Problems for Shallow Shells by a Generalized Kantorovich – Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 11. – P. 1283 – 1293.
5. Bepalova E.I., Urusova G.P. Solving the Torsion Problem for an Anisotropic Prism by the Advanced Kantorovich – Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 149 – 158.
6. Bepalova E.I. Determinin the Natural Frequencies an Elastic Parallelepiped by the Advanced Kantorovich – Vlasov Method // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 4. – P. 410 – 421.
7. Bepalova E., Urusova G. Solution of the Lamé Problem by the Complete Systems Method // Int. J. Comput. Meth. in Eng. Sci. and Mech. – 2013. – **14**, N 2. – P. 159 – 167.
8. Ciancio P.M., Rossit C.A., Laura P.A.A. Approximate study of the free vibrations of a cantilever anisotropic plate carrying a concentrated mass // J. Sound and Vibr. – 2007. – **302**, N 3. – P. 621 – 628.
9. Cook G. M., Tessler A. A {3, 2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams // Composites Part B: Engineering. – 1998. – **29**, N 5. – P. 565 – 576.

10. *Gorman D. J., Singhal R.* Free vibration analysis of cantilever plates with step discontinuities in properties by the method of superposition // *J. Sound and Vibr.* – 2002. – **253**, N 3. – P. 631 – 652.
11. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L.* Free Axisymmetric Vibrations of Solid Cylinders: Numerical Problem Solving // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 5. – P. 499 – 508.
12. *GrigorenkoYa.M., Grigorenko A.Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
13. *GrigorenkoYa.M., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N.* Numerical Solution of Bending Problems for Rectangular Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 1. – P. 81 – 94.
14. *Houmat A.* Three-dimensional free vibration analysis of plates using the *h-p* version of the finite element method // *J. Sound and Vibr.* – 2006. – **290**, N 3–5. – P. 690 – 704.
15. *Li R., Zhong Y., Tian B., Du J.* Exact Bending Solutions of Orthotropic Rectangular Cantilever Thin Plates Subjected to Arbitrary Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 1. – P. 131 – 143.
16. *Liew K.M., Hung K.C., Lim K.M.* A continuum three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates // *Int. J. Solids and Struct.* – 1993. – **30**. – P. 3357 – 3379.
17. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational Finite-Difference Methods in Linear and Nonlinear Problems of the Deformation of Metallic and Composite Shells (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
18. *McGee O.G., Giaino G.T.* Three-dimensional vibrations of cantilevered right triangular plates // *J. Sound and Vibr.* – 1992. – **159**, N 2. – P. 279 – 293.
19. *Nagino I. H., Mikami T., Mizusawa T.* Three-dimensional free vibration analysis of isotropic rectangular plates using the B-spline Ritz method // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – **317**, N 1–2. – P. 329 – 353.
20. *Woodcock Roland L., Bhat Rama B., Stiharu Ion G.* Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – **312**, N 1–2. – P. 94 – 108.
21. *Xiang Song, Yang Ming-sui, Jiang Shao-xi, Wang Ke-ming.* Three-dimensional vibration analysis of isotropic plates by multiquadric and thin-plate spline radial basis functions // *Computers & Structures.* – 2010. – **88**, N 13–14. – P. 837 – 844.
22. *Zhou Ding, Liu Weiqing, Yang Qingli.* Three-dimensional vibration analysis of cantilevered skew plates // *J. Sound and Vibr.* – 2008. – **313**, NN 1–2. – P. 134 – 148.

Поступила 05.12.2011

Утверждена в печать 03.12.2013