

П. С. Ковальчук¹, Л. А. Крук², В. А. Пелых¹

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
С ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССОЙ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ
С ВНУТРЕННИМ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

¹Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: volna@inmech.kiev.ua;

²Национальный транспортный университет,
ул. Суворова, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: krukles@ukr.net

Abstract. An effect of added masses on the quasi-static (divergence type) and dynamic (flutter type) stability loss of the cylindrical shells interacting with the internal flow of fluid is studied. Also, an effect of type of clamping the added masses on values of critical velocities of flow of fluid is considered.

Key words: cylindrical shell, ideal incompressible fluid, concentrated mass, critical velocity, stability loss, divergence and flutter.

Введение.

Проблема динамической устойчивости и колебаний разнообразных, транспортирующих жидкость трубопроводных систем уделяется в последние годы все большее внимание [8 – 11, 13, 14, 18 и др.]. Преобладающее большинство исследований по этой проблеме посвящено вопросам взаимодействия несущего упругого объекта и жидкостного потока в предположении, что данный объект изготовлен из изотропного материала и имеет идеальную цилиндрическую форму. Однако многие трубопроводы характеризуются нередко локальными «включениями» типа жестко или упруго присоединенных к ним сосредоточенных масс, а также твердых тел, контактирующих с конструкцией на некоторой конечной площадке.

Задачи динамики пустых упругих оболочек, несущих присоединенные массы, рассмотрены во многих исследованиях [1, 4 – 7, 12 и др.]. Главное внимание в этих работах уделено разработке специальных методик для определения собственных частот и форм колебаний оболочек, изучению влияния на эти частоты и формы величин присоединенных масс, а также характера и координат их крепления к боковой поверхности. Современные методы и результаты решения различных задач о нестационарном контактом взаимодействии твердых тел с упругими средами представлены в [16]. В работе [17] предложены подходы, на основании которых исследовано влияние жестких включений, а также подкрепленных отверстий на характер нелинейного деформирования тонких изотропных и ортотропных оболочек.

Относительно совместного влияния на устойчивость и колебания цилиндрических оболочек двух факторов (присоединенных масс и протекающей внутри жидкости), то такая задача рассмотрена в работе [15]. Принято, что масса сосредоточена в одной точке либо равномерно распределена вдоль кольцевого поперечного сечения или вдоль образующей оболочки. В развитие приведенных в [15] исследований ниже рассмотрена задача об устойчивости транспортирующей жидкостью композитной цилиндрической оболочки с более сложной структурой «распределения» присоединенной массы на ее поверхности. Принято, в частности, что контактируемая с оболочкой масса равномерно распределена по прямоугольному или эллиптическому контуру (если рассматривать развернутую поверхность оболочки). Отметим, что такое распределение «добавочных» масс характерно обычно для трубопроводного транспорта после устранения тех или иных аварийных ситуаций.

§1. Исходные динамические уравнения.

Рассмотрим замкнутую, упругую (ортотропная модель) цилиндрическую оболочку с жидкостью, которая движется с некоторой постоянной скоростью U . Геометрические размеры оболочки показаны на рис. 1. На рис. 2 показаны с указанием соответствующих координат замкнутые прямоугольный (*a*) и эллиптический (*б*) контуры, вдоль которых равномерно распределяется некоторая присоединенная масса M .

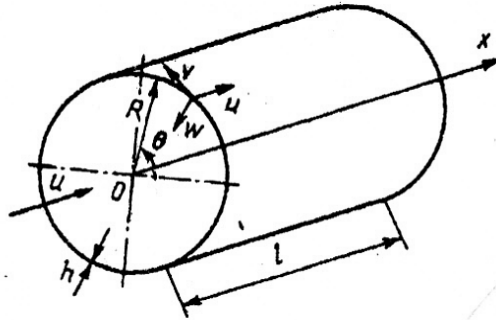


Рис. 1

Предполагаем, как обычно, что контактируемые с оболочкой элементы массы «передают» на неё только радиальную реакцию [1, 5, 6].

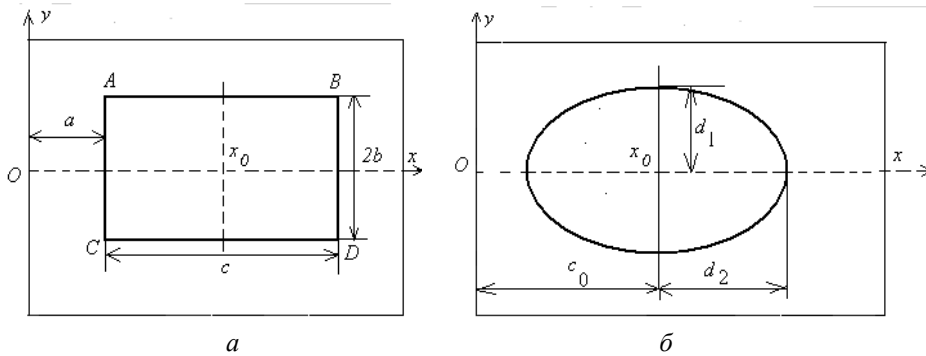


Рис. 2

Инерцией поворота массы при колебаниях оболочки пренебрегаем. Жидкость, заполняющую оболочку, полагаем идеальной и несжимаемой, а ее движение – потенциальным.

Задачу об исследовании устойчивости несущей оболочки, нагруженной равномерно распределенной массой, рассматриваем в линейной постановке. Исходные динамические уравнения выберем в смешанной форме [2, 3]

$$\frac{1}{h} \nabla_D^4 w = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon_0 \rho \frac{\partial w}{\partial t} - K_{ин} - \frac{P_z}{h};$$

$$\frac{1}{E} \nabla_\delta^4 \Phi = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

причём $\nabla_D^4, \nabla_\delta^4$ – операторы, имеющие вид

$$\nabla_D^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$

$$\nabla_{\delta}^4 = \delta_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\delta_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \delta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Здесь использованы традиционные в классической теории ортотропных оболочек обозначения [3]; кроме того, ε_0 – параметр конструкционного демпфирования; $K_{ин}$ – функция, характеризующая дополнительное «инерционное» воздействие на оболочку, обусловленное присоединенной массой (вид этой функции зависит от способа крепления массы к оболочке и её величины); P_z – гидродинамическое давление на оболочку со стороны жидкостного потока, определяемое из известного соотношения [2, 10]

$$P_z = -\rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{r=R}, \quad (1.2)$$

где ρ_0 – плотность жидкости; $\varphi = \varphi(x, r, \Theta, t)$ – потенциал возмущенных скоростей жидкости (x, r, Θ – цилиндрические координаты).

Полагаем, что на торцевых сечениях оболочки (при $x = 0, x = l$) реализуются условия свободного опирания [3, 10]. В этом случае ее динамический прогиб можно представить в виде двухпараметрического разложения

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (f_{nm}^{(1)} \cos s_n y + f_{nm}^{(2)} \sin s_n y) \sin \lambda_m x, \quad (1.3)$$

где, как обычно, $f_{nm}^{(1,2)}$ – неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат; $s_n = n / R$, $\lambda_m = m\pi / l$ – параметры волнообразования в окружном и продольном направлениях, соответственно.

В работах [14, 15] приведено полученное из решения краевой задачи

$$\Delta \varphi = 0 \quad (0 \leq x \leq l, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \Theta \leq 2\pi);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \text{ при } r = R; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} < \infty \text{ при } r = 0$$

выражение потенциала φ , соответствующее аппроксимации (1.3).

Подставляя его в формулу (1.2) и реализуя метод Бубнова – Галеркина (БГ) применительно к системе (1.1), получаем систему дифференциальных уравнений для определения обобщенных перемещений оболочки $f_{nm}^{(1,2)}$, на основании анализа которой можно установить, с одной стороны, значения «критических» скоростей движения жидкости, при которых реализуется «квазистатическая» (дивергентного типа) или динамическая (типа флаттер) потеря устойчивости данной оболочки, с другой – исследовать особенности влияния присоединённых масс на значения критических скоростей.

§2. Устойчивость оболочки с массой, распределенной вдоль прямоугольного контура.

Пусть присоединённая масса распределена вдоль прямоугольного контура, две стороны которого AB и CD параллельны оси оболочки (рис. 2, а). Как следует из [15], функция $K_{ин}$ в данном случае может быть представлена в виде $K_{ин} = K_1 + K_2$, где K_1 – составляющая, характеризующая «инерционное» воздействие на оболочку массы, распределённой вдоль параллельных сторон AC и BD , причём

$$K_1 = \left\{ \frac{M}{2(2b+c)h} [\delta(y-b) + \delta(y+b)] \int_a^{a+c} \delta(x-\xi) d\xi \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

K_2 – соответствующее воздействие массы, распределённой вдоль сторон AB и CD :

$$K_2 = \left\{ \frac{M}{2(2b+c)h} [\delta(x-a) + \delta(x-(a+c))] \int_{-b}^b \delta(y-\eta) d\eta \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Здесь $c, 2b$ – длины сторон прямоугольника; $\delta = \delta(z)$ – дельта-функция.

Выберем в качестве весовых функций функции $\cos s_n y \sin \lambda_m x$ и $\sin s_n y \sin \lambda_m x$.

После применения метода БГ получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \ddot{f}_{nm}^{(1)} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_{nm}^{(1)} + \varepsilon_{nm} \dot{f}_{nm}^{(1)} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{nq}^{(m)} U \dot{f}_{nq}^{(1)} + \frac{2k_0 G_1^{nm}}{M_{nm}} &= 0; \\ \ddot{f}_{nm}^{(2)} + (\omega_{nm}^2 - \alpha_{nm} U^2) f_{nm}^{(2)} + \varepsilon_{nm} \dot{f}_{nm}^{(2)} + \sum_{q=1}^{\infty} \beta_{nq}^{(m)} U \dot{f}_{nq}^{(2)} + \frac{2k_0 G_2^{nm}}{M_{nm}} &= 0 \\ (n=0, 1, 2, \dots; \quad m=1, 2, \dots), & \end{aligned} \quad (2.1)$$

где обозначено [13]:

$$\begin{aligned} \omega_{nm}^2 &= \frac{\omega_{nm0}^2}{M_{nm}}; \quad \omega_{nm0}^2 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{h} \Delta_D(\lambda_m, s_n) + \frac{\lambda_m^4}{R^2 \Delta_\delta(\lambda_m, s_n)} \right]; \\ M_{nm} &= 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{K_{nm}}{h \lambda_m}; \\ \alpha_{nm} &= \frac{\rho_0}{\rho h} \frac{K_{nm} \lambda_m}{M_{nm}}; \quad \varepsilon_{nm} = \frac{\varepsilon_0}{M_{nm}}; \quad \beta_{nq}^{(m)} = \frac{4\rho_0 \lambda_m [1 - (-1)^{m-q}]}{\rho h l (\lambda_m^2 - \lambda_q^2) M_{nm}} K_{nq}; \\ K_{nm} &= \frac{I_n(\lambda_m R)}{I_n'(\lambda_m R)}, \quad I_n'(\lambda_m R) = \frac{I_{n-1}(\lambda_m R) + I_{n+1}(\lambda_m R)}{2} \quad (q=1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (2.2)$$

Δ_D, Δ_δ – операторы вида

$$\Delta_D(\lambda_m, s_n) = D_1 \lambda_m^4 + 2D_3 \lambda_m^2 s_n^2 + D_2 s_n^4; \quad \Delta_\delta(\lambda_m, s_n) = \delta_2 \lambda_m^4 + 2\delta_3 \lambda_m^2 s_n^2 + \delta_1 s_n^4;$$

$k_0 = 2M/M_{об}$, $M_{об}$ – масса оболочки ($M_{об} = 2\pi R l \rho h$); G_1^{nm}, G_2^{nm} – функции, имеющие, соответственно, вид

$$\begin{aligned} G_1^{nm} &= \frac{h}{M} \int_0^l \int_0^{2\pi R} (K_1 + K_2) \cos s_n y \sin \lambda_m x dx dy; \\ G_2^{nm} &= \frac{h}{M} \int_0^l \int_0^{2\pi R} (K_1 + K_2) \sin s_n y \sin \lambda_m x dx dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая свойства δ -функции

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \delta(x-\xi) dx = f(\xi) \quad (\alpha \leq x \leq \beta); \quad \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-\eta) d\eta = e(x-\alpha) - e(x-\beta),$$

где $e = e(z)$ – единичная функция: $e(z) = 0$ при $z < 0$; $e(z) = 1$ при $z > 0$, величины G_i^{nm} ($i = 1, 2$) можно, в общем случае, представить так:

$$G_i^{nm} = \frac{1}{d} \left\{ \int_a^{c_1} [F_i^{nm}(x, b) + F_i^{nm}(x, -b)] dx + \int_{-b}^b [F_i^{nm}(a, y) + F_i^{nm}(c_1, y)] dy \right\}. \quad (2.4)$$

Здесь d – периметр прямоугольного контура $d = 2(2b + c)$, $c_1 = a + c$;

$$F_1^{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\ddot{f}_{pq}^{(1)} \cos s_p y + \ddot{f}_{pq}^{(2)} \sin s_p y) \sin \lambda_q x \cos s_n y \sin \lambda_m x; \quad (2.5)$$

$$F_2^{nm} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} (\ddot{f}_{pq}^{(1)} \cos s_p y + \ddot{f}_{pq}^{(2)} \sin s_p y) \sin \lambda_q x \sin s_n y \sin \lambda_m x.$$

Составляя характеристическое уравнение для системы (2.1) с учётом (2.3), (2.4), (2.5) и анализируя его корни, можно определить: когда и по какой форме произойдёт потеря устойчивости системы оболочка – масса при взаимодействии с жидкостным потоком. Отметим, что если все характеристические показатели $\lambda = i\Omega$ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, невозмущённая форма несущей оболочки всегда будет устойчива [2]. В противном случае (при переходе хотя бы одного характеристического показателя λ на правую полуплоскость), может наступить либо статическая (типа дивергенция), либо динамическая (типа флаттер) неустойчивость. В первом случае показатель переходит на правую полуплоскость через начало координат ($\text{Im} \lambda = 0$); во втором – через точку, в которой $\text{Im} \lambda \neq 0$. Исходя из этих условий, можно определить значения критических скоростей движения жидкости, при достижении которых наступит либо монотонное выпучивание оболочки, либо возникнут колебания с прогрессирующими во времени амплитудами. Для иллюстрации рассмотрим упрощённую, четырёхмодовую аппроксимацию прогиба w (1.3), полагая

$$w = f_1 \cos s y \sin \lambda_1 x + f_2 \sin s y \sin \lambda_1 x + f_3 \cos s y \sin \lambda_2 x + f_4 \sin s y \sin \lambda_2 x, \quad (2.6)$$

где $s = n/R$, а параметры λ_1, λ_2 отвечают низшим осевым формам оболочки ($\lambda_1 = \pi/l, \lambda_2 = 2\pi/l$), учитываемым обычно при решении задач о взаимодействии этих оболочек с потоком жидкости [2, 4, 14]. Система уравнений для определения неизвестных функций f_1, \dots, f_4 примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 + \omega_{11} f_1 + \varepsilon_1 \dot{f}_1 + \beta_1 U \dot{f}_3 + \sum_{k=1}^4 \chi_{k1} \ddot{f}_k = 0; \quad \ddot{f}_2 + \omega_{11} f_2 + \varepsilon_1 \dot{f}_2 + \beta_1 U \dot{f}_4 + \sum_{k=1}^4 \chi_{k2} \ddot{f}_k = 0; \\ \ddot{f}_3 + \omega_{22} f_3 + \varepsilon_2 \dot{f}_3 + \beta_2 U \dot{f}_1 + \sum_{k=1}^4 \chi_{k3} \ddot{f}_k = 0; \quad \ddot{f}_4 + \omega_{22} f_4 + \varepsilon_2 \dot{f}_4 + \beta_2 U \dot{f}_2 + \sum_{k=1}^4 \chi_{k4} \ddot{f}_k = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь приняты, если учитывать (2.2), такие обозначения:

$$\omega_{11} = \omega_{n1}^2 - \alpha_1 U^2; \quad \omega_{22} = \omega_{n2}^2 - \alpha_2 U^2; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 / M_{01}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 / M_{02};$$

$$\beta_1 = \beta_{n3}^{(1)}; \quad \beta_2 = \beta_{n4}^{(2)}; \quad \alpha_1 = \alpha_{n1}; \quad \alpha_2 = \alpha_{n2}.$$

Постоянные коэффициенты χ_{kj} ($k, j = 1, \dots, 4$) определим на основании соотношений (2.5), при этом

$$\chi_{11} = \frac{1}{d} \left[(c_1 - a) - \frac{1}{2\lambda_1} (\sin 2\lambda_1 c_1 - \sin 2\lambda_1 a) \cos^2 sb + \left(b + \frac{1}{2s} \sin 2sb \right) (\sin^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 c) \right];$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{d} \left\{ \frac{1}{4} \left[(c_1 - a) - \frac{1}{2\lambda_1} (\sin 2\lambda_1 c_1 - \sin 2\lambda_1 a) \right] (\sin^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 c_1) - \frac{1}{4s} (\cos 2sb_1 - \cos^2 s y_0) (\sin^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 c_1) \right\} \quad (y_0 = 0) \text{ и т. д.} \quad (2.8)$$

Характеристическое уравнение имеет в рассматриваемом случае вид

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \omega_{11} + (1 + \chi_{11})\lambda^2 + \varepsilon_1\lambda & \chi_{21}\lambda^2 & \chi_{31}\lambda^2 + \beta_1 U\lambda & \chi_{41}\lambda^2 \\ \chi_{12}\lambda^2 & \omega_{11} + (1 + \chi_{22})\lambda^2 + \varepsilon_1\lambda & \chi_{32}\lambda^2 & \chi_{42}\lambda^2 + \beta_1 U\lambda \\ \chi_{13}\lambda^2 + \beta_2 U\lambda & \chi_{23}\lambda^2 & \omega_{22} + (1 + \chi_{33})\lambda^2 + \varepsilon_2\lambda & \chi_{43}\lambda^2 \\ \chi_{14}\lambda^2 & \chi_{24}\lambda^2 + \beta_2 U\lambda & \chi_{34}\lambda^2 & \omega_{22} + (1 + \chi_{44})\lambda^2 + \varepsilon_2\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. представляет, в общем случае, уравнение 8-го порядка

$$\sum_{k=1}^9 e_k \lambda^{k-1} = 0, \quad (2.9)$$

где e_k ($k = 1, \dots, 9$) – постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических и физических параметров оболочки, а также от скорости движения жидкости U и величины присоединённой массы.

Анализируя (2.9), устанавливаем, что потеря устойчивости оболочки по типу дивергенции произойдёт при скоростях движения потока, удовлетворяющих уравнению [2, 14, 15]

$$e_1 = (\omega_1^2 - \alpha_1 U^2)(\omega_2^2 - \alpha_2 U^2) = 0. \quad (2.10)$$

Минимальная величина скорости U , полученная из (2.10), и будет отвечать критической скорости дивергенции U_d , которая в рамках рассматриваемой модели оказывается независимой от величины присоединённой массы.

Пусть несущая оболочка характеризуется параметрами:

$$E_1 = 2,15 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad E_2 = 1,23 \cdot 10^9 \text{ Па}; \quad G = 2,15 \cdot 10^8 \text{ Па}; \quad \mu_1 = 0,32;$$

$$\rho = 1,65 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad R = 0,16 \text{ м}; \quad l = 5R; \quad h = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

а жидкость имеет плотность $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$. Здесь E_1, E_2 – модули упругости в продольном и окружном направлениях, соответственно; G – модуль сдвига; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона ($E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$).

Численные значения скоростей дивергенции $U_d^{(1)} = \omega_1 / \sqrt{\alpha_1}$ и $U_d^{(2)} = \omega_2 / \sqrt{\alpha_2}$, полученных из (2.10) для рассматриваемой оболочки, приведены в табл. 1.

Таблица 1

\bar{U}_δ	n							
	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{U}_\delta^{(1)}$	9,033	5,763	4,119	3,439	3,586	4,441	5,834	7,661
$\bar{U}_\delta^{(2)}$	11,717	8,445	6,428	5,115	4,303	3,937	4,017	4,518

Из представленных в таблице данных следует, что дивергентная неустойчивость оболочки наступит при безразмерной скорости потока $\bar{U}_\delta = \bar{U}_\delta^{(1)}$, причём окружная форма, по которой будет происходить монотонное выпучивание, соответствует волновому параметру $n = 6$ (здесь и далее безразмерные параметры скорости \bar{U} имеют вид $\bar{U} = U/k_{00}$, где $k_{00} = (\pi^2/l)\sqrt{D_1/\rho h}$ [10]). Определение скоростей флаттера $U = U_\phi$ проиллюстрируем, анализируя некоторые характерные частные случаи задачи.

Пусть $c = 0$, $b = 0$, $x_0 = a$, т.е. масса сосредоточена в точке с координатами $(x_0, 0)$.

В [15] показано, что уравнение (2.9) можно в данном случае (при $\varepsilon_0 = 0$) представить в виде произведения двух уравнений 4-го порядка (относительно λ). На основании первого из этих уравнений можно определить критические скорости флаттера оболочки при креплении массы в узловой точке. Безразмерные значения величин этих скоростей приведены в табл. 2. Жирным шрифтом выделено значение критической скорости флаттера, соответствующей наиболее ранней (при наименьшей скорости потока) потере устойчивости колебательного типа. При этом параметр окружного волнообразования в момент потери устойчивости $n = 6$.

Таблица 2

n	2	3	4	5	6	7	8
\bar{U}_ϕ	13,343	9,452	7,142	5,709	4,958	4,987	5,958

Табл. 3 иллюстрирует влияние величины присоединённой в точке с координатой $x = l/2$ массы M на флаттерные скорости \bar{U}_ϕ (как и ранее, предполагалось $\varepsilon_0 = 0$). Сравнивая полученные результаты с данными табл. 2, видно, что присоединённая масса обуславливает уменьшение критической скорости потока \bar{U}_ϕ (выделено жирным). Чем больше величина присоединённой массы, тем скорость флаттера ниже.

Таблица 3

$M/M_{об}$	n							
	2	3	4	5	6	7	8	
0,05	13,341	9,451	7,141	5,707	4,956	4,984	5,955	
0,15	13,338	9,447	7,137	5,704	4,952	4,978	5,950	
0,25	13,334	9,444	7,134	5,701	4,948	4,972	5,944	

Рассмотрим второй частный случай ($c = 0$, $2b = 2\pi R$, $x_0 = a$), т.е. масса распределена вдоль замкнутого поперечного кольца, продольная координата которого равна x_0 . Результаты расчётов \bar{U}_ϕ в данном случае приведены в табл. 4 (принято, что $x_0 = l/2$).

Таким образом, влияние массы на скорость флаттера в данном случае проявляется в большей степени, чем при креплении её в одной точке (при одном и том же значении величины этой массы).

Аналогичные результаты получено и при распределении массы вдоль незамкнутого поперечного кольца (при $b < \pi R$).

Таблица 4

$M/M_{об}$	n						
	2	3	4	5	6	7	8
0,05	13,338	9,447	7,137	5,704	4,953	4,978	5,946
0,15	13,328	9,438	7,128	5,694	4,941	4,962	5,923
0,25	13,318	9,428	7,119	5,685	4,930	4,945	5,899

В табл. 5 приведены значения \bar{U}_ϕ , соответствующие оболочке с присоединённой массой, равномерно распределённой вдоль образующей (в этом случае $c=l, b=0$).

Таблица 5

$M/M_{об}$	n						
	2	3	4	5	6	7	8
0,05	13,342	9,451	7,141	5,707	4,957	4,985	5,956
0,15	13,338	9,447	7,138	5,704	4,953	4,981	5,953
0,25	13,335	9,444	7,135	5,701	4,950	4,977	5,950

Влияние массы при таком креплении практически не отличается от случая её «сосредоточенного» присоединения в точке. Лишь при значительных величинах этой массы обнаруживается заметное различие влияния способов её контакта с оболочкой. Справедливость такого вывода подтверждена численно и для отрезков образующей, длины которых $c < l$ ($c \neq 0$).

В целом приведенные результаты позволяют оценить влияние на величины U_ϕ присоединённых масс, распределённых вдоль всего прямоугольного контура. Очевидно, что это влияние наиболее существенно при креплении масс вдоль дуг AC и BD и значительно меньше при распределении масс вдоль параллельных оси оболочки сторон AB и CD . Отметим, что такое сравнение корректно в предположении, что «плотность» погонной массы одна и та же как для отрезков AC, BD так и для AB, CD .

Если $\varepsilon_0 \neq 0$, то проведенные численные исследования показали, что динамическая (типа флаттер) потеря устойчивости нагруженной массой оболочки произойдёт непосредственно после дивергентной области, т.е. критические скорости флаттера U_ϕ будут равны ($U_\phi = U_o^{(2)}$).

При увеличении массы M в пределах $0 \leq M \leq 0,25M_{об}$ величина \bar{U}_ϕ остаётся практически неизменной для разных вариантов крепления этой массы.

§3. Устойчивость оболочки с массой, распределенной вдоль эллиптического контура.

Аналогичный подход можно использовать для расчёта устойчивости нагруженной массой оболочки, показанной на рис. 2, б. При этом следует учесть, что обе координаты x, y эллиптического контура с полуосями d_1 и d_2 связаны между собой посредством известного уравнения, на основании которого для случаев $y < 0$ и $y > 0$, соответственно, получаем такие зависимости $y = y(x)$:

$$y = y_1 = -\frac{d_1}{d_2} \sqrt{d_2^2 - (x - c_0)^2}; \quad y = y_2 = +\frac{d_1}{d_2} \sqrt{d_2^2 - (x - c_0)^2}.$$

Учитывая, что элементарная длина дуги эллипса $d\bar{s}$ равна

$$d\bar{s} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = F(x) dx \quad \left(F(x) = \sqrt{\frac{d_2^4 + (d_1^2 - d_2^2)(x - c_0)^2}{d_2^2 [d_2^2 - (x - c_0)^2]^2}}; c_0 - d_2 \leq x \leq c_0 + d_2 \right),$$

находим окончательно следующие выражения функций G_1^{nm} , G_2^{nm} в исходных уравнениях (2.3):

$$G_1^{nm} = \frac{1}{l_0 h} \int_{c_0 - d_2}^{c_0 + d_2} \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \cos s_n y \sin \lambda_m x [\delta(y - y_1) + \delta(y - y_2)] \right\} F(x) dx;$$

$$G_2^{nm} = \frac{1}{l_0 h} \int_{c_0 - d_2}^{c_0 + d_2} \left\{ \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} \sin s_n y \sin \lambda_m x [\delta(y - y_1) + \delta(y - y_2)] \right\} F(x) dx. \quad (3.1)$$

Здесь l_0 – длина эллипса (выражается через эллиптический интеграл второго рода).

Очевидно, что структура разрешающих уравнений, на основании которых можно в данном случае исследовать влияние присоединённой массы, как и ранее, будет с учётом (2.10) иметь вид (2.11).

Однако, в отличие от прямоугольного контура, коэффициенты χ_{kj} , полученные в результате применения метода БГ, не могут быть представлены в замкнутом виде через элементарные функции (по аналогии с (2.8)). Для их определения следует (в соответствии с формулами (3.1)) использовать методы непосредственного численного интегрирования.

Заключение.

В данной статье предложена и реализована на численных примерах методика расчёта устойчивости композитных (ортотропная модель) оболочек цилиндрической формы, нагруженных присоединённой массой при взаимодействии с внутренним потоком жидкости.

Рассмотрены процессы потери устойчивости, соответствующие дивергентной (монотонной) и флаттерной (колебательного типа) форме выпучивания несущих оболочек, реализуемые при определённых скоростях движения жидкости. Изучено влияние различных способов жёсткого крепления «добавочных» масс к оболочкам (вдоль кольца, образующей, прямоугольного и эллиптического контуров) на величины критических скоростей жидкостного потока.

РЕЗЮМЕ. Досліджено вплив приєднаних мас на квазістатичну (типу дивергенція) і динамічну (типу флатер) втрату стійкості циліндричних оболонок при взаємодії з внутрішнім потоком рідини. Досліджено вплив кріплення приєднаних мас до оболонок на величини критичних швидкостей потоку рідини.

1. *Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г.* Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
2. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 340с.
3. *Вольмир А.С.* Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
4. *Ганиев Р.Ф., Ковальчук П.С.* Динамика систем твердых и упругих тел. – М.: Машиностроение, 1980. – 208 с.
5. *Даревский В.М., Шаринов И.Л.* Свободные колебания цилиндрической оболочки с сосредоточенной массой // Труды VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – Баку, 1965. – С. 350 – 354.

6. Козлов С.В. К вопросу об определении собственных частот и форм малых колебаний цилиндрических оболочек с присоединенными массами // Прикл. механика. – 1981. – **18**, № 2. – С. 46 – 52.
7. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наук. думка, 1984. – 220 с.
8. Amabili M. Nonlinear and Stability of Shells and Plates. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 402 p.
9. Amabili M., Païdoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels with a without fluid-structure interaction // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, N 4. – P. 349 – 381.
10. Amabili M., Pellicano F., Païdoussis M.P. Nonlinear dynamics and stability of circular cylindrical shell containing flowing fluid. Part 1: Stability // J. Sound and Vibration. – 1999. – **225**, N 4. – P. 655 – 699.
11. Avramov K.V., Strelnikova E.A. Chaotic Vibrations of Plates Two-Sided Interaction with Flux of Moving Fluid // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 86 – 93.
12. Chen S.S., Wambsgans M. W., Jendrzejczyk J.A. Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluid // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1976. – **43**, N 2. – P. 325 – 329.
13. Dowell E.H., Hall K.C. Modeling of fluid structure interaction // Ann. Rev. Fluid Mech. – 2001. – N 33. – P. 445 – 490.
14. Kovalchuk P.S., Podchasov N.P. On Stability of Elastic Cylindrical Shells Interacting with a Flowing Fluid // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 1. – P. 73 – 82.
15. Kovalchuk P.S., Puchka G.N. Stability of Cylindrical Shells with Added Mass in Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 546 – 555.
16. Kubenko V.D. Nonstationary Contact of a Rigid Body with an Elastic Medium. Plane Problem (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 487 – 551.
17. Maksimyuk V. A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 685 – 692.
18. Pellicano F., Amabili M. Stability and vibration of empty and fluid-filled circular cylindrical shells under static and periodic axial loads // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**. – P. 3229 – 3251.

Поступила 11.11.2011

Утверждена в печать 29.05. 2014