

Р. М. Киракосян, С. П. Степанян

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ДВУХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
С МАЛОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

*Институт механики Национальной Академии наук Армении,
пр. М. Баграмяна 24^б, 0019, Ереван, Армения e-mail: mechins@sci.am*

Abstract. The plane and bending problems of the plate consisting of two different cylindrically orthotropic circular layers are considered. The bending problem is solved with the help of refined theories. The hypothesis of radial displacement distribution for separate layers of plate is taking into account in the form of different linear functions of transversal coordinates. Dividing mentally the layers of the plate from each other, on the surface contact of each layer the normal and tangential contact stresses are applied and represented in the form of power polynomials with unknown coefficients. These coefficients are determined from the conditions of plate layers full contact. The specific example is considered. The quantitative and qualitative conclusions are made.

Key words: orthotropic circular plate, distributions of tangential stresses over the plate thickness, surface loads, tangential and normal tensions (stress).

Введение.

Сведения об истории развития и приложений теории пластин и оболочек имеются в [1 – 20 и др.].

В работах, посвященных сдвиговой теории первого порядка, влияние поперечных сдвигов учитывается только с помощью поперечных сил. Принимается, что поперечные касательные напряжения по толщине пластинки меняются по законам квадратных парабол, в некоторых работах [4, 7 и др.] в выражениях для поперечных сил вводится поправочный коэффициент, равный 5/6. В работе [5] рассмотрен общий случай, когда на пластинку действуют еще и касательные поверхностные нагрузки. Обобщая понятие поправочных коэффициентов, в этой работе к значению 5/6 добавляется еще один член, выраженный через параметры поверхностных касательных нагрузок. Это позволяет получить поправку и в тех случаях, когда поперечные касательные напряжения самоуравновешенные, т.е. когда поперечные силы равны нулю. В работах [5, 6] показано, что в случае действия только касательной поверхностной нагрузки, когда поперечное усилие отсутствует, в рамках теории [3] деформация поперечного сдвига поправки не дает, а теория [6] приводит к ощутимой поправке.

Например, поправка к максимальному значению прогиба шарнирно опертой по контуру пластинки составляет [6]: $\Delta = \frac{3}{5} \frac{2B_{11} + B_{12}}{B_{11} + B_{12}} \cdot \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2}$. При $B_{12} = 0,2B_{11}$; $B_{11} = 20B_{55}$; $h = 0,2a$ [6] величина этой поправки равна 0,204 или 20%. В случае же защемления контура пластинки поправка к значению максимального прогиба составляет [6] $\Delta = \frac{3}{5} \frac{B_{11}h^2}{B_{55}a^2}$; при $B_{11} = 10B_{55}$, $h = 0,2$ величина этой поправки равна 0,24 или 24%.

Результаты теорий [3, 6] будут значительно отличаться друг от друга и в тех случаях, когда внешняя нагрузка произвольная, но ее касательная составляющая является доминирующей, а нормальная – весьма малая величина.

В данной статье дано применение отмеченного обобщенного понятия поправочных коэффициентов. Роль поверхностных касательных нагрузок играют касательные контактные напряжения, действующие на соприкасающихся поверхностях слоев пластинки.

Рассмотрена плоская задача и задача изгиба пластинки, состоящей из двух различных цилиндрически ортотропных круглых слоев. Задача изгиба решена по уточненной теории [5] (учет влияния поперечных сдвигов при наличии касательных поверхностных нагрузок). При этом гипотеза о распределении радиальных перемещений принимается не для всей пластинки в целом, а для ее отдельных слоев в виде различных линейных функций поперечной координаты. Взаимодействие слоев пластинки выражается нормальными и касательными напряжениями, действующими на поверхностях их контакта. Эти напряжения представляются в виде степенных многочленов с неизвестными коэффициентами, которые определяются из условий полного контакта слоев пластинки. Рассмотрен конкретный пример, когда на верхней лицевой поверхности шарнирно опертой или защемленной по краевому сечению пластинки действует равномерно распределенная нормальная нагрузка. На основе полученных численных результатов даны количественные и качественные выводы.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим круглую пластинку радиуса a , состоящую из двух различных цилиндрически ортотропных слоев, полусы анизотропии материалов которых совпадают с их центрами. Толщину и механические параметры верхнего слоя обозначим h и B_{ij} , а нижнего – H и B_{ij}^H . Слои пластинки отнесем к локальным системам цилиндрических координат r, θ, z . Горизонтальные координатные плоскости r, θ совместим со срединными плоскостями слоев, а ось Oz направим вертикально вниз. Примем, что на верхней лицевой поверхности пластинки действует только равномерно распределенная нормальная нагрузка интенсивности q , а ее нижняя лицевая поверхность свободна от нагрузок. Краевые условия произвольны.

Взаимодействие слоев пластинки заменим действием нормальных и касательных контактных напряжений p и τ (рис. 1). Примем обозначения:

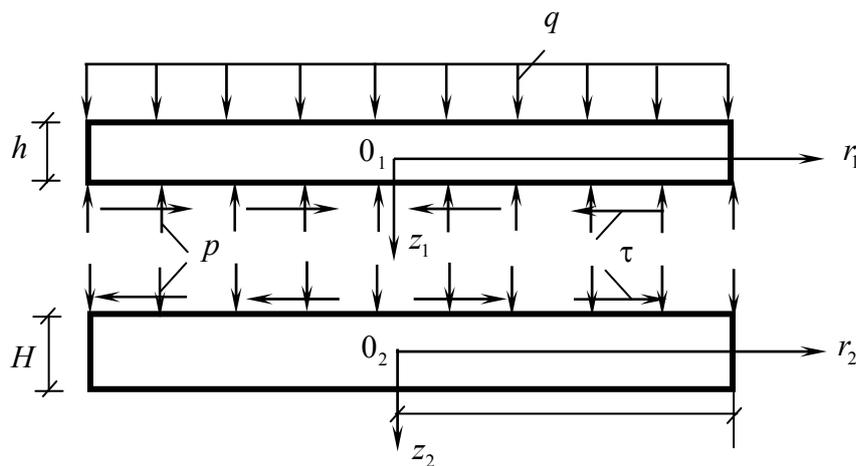


Рис. 1

$$\begin{aligned}
r &= a\rho; \quad u = h\bar{u}; \quad u_r = h\bar{u}_r; \quad w = 10^{-3}h\bar{w}; \quad H = mh; \\
q &= B_{11}\bar{q}; \quad p = B_{11}\bar{p}; \quad \tau = B_{11}\bar{\tau}; \quad B_{22} = k^2 B_{11}; \quad B_{12} = \alpha_{12} B_{11}; \\
B_{11} &= B_{55}\mathcal{X}; \quad N_r = B_{11}h\bar{N}_r; \quad N_\theta = B_{11}h\bar{N}_\theta; \quad M_r = B_{11}h^2\bar{M}_r; \\
M_\theta &= B_{11}h^2\bar{M}_\theta; \quad z = h\bar{z}; \quad a = hl; \quad Z_1 = B_{11}\bar{Z}_1; \quad \bar{Z}_2 = B_{11}\bar{Z}_2; \\
R_1 &= B_{11}\bar{R}_1; \quad R_2 = B_{11}\bar{R}_2; \quad T_r = B_{11}h\bar{T}_r; \quad T_\theta = B_{11}h\bar{T}_\theta; \\
B_{ij}^H &= \beta_{ij}B_{ij}; \quad m\beta_{11} = \beta; \quad \beta_{22}k^2 / \beta_{11} = \gamma^2.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u и u_r – радиальные перемещения точек срединной плоскости и произвольной точки, w – прогиб; N_r, N_θ и M_r, M_θ – поперечные усилия и изгибающие моменты слоев пластинки, соответственно; Z_i и R_i имеют вид [2]

$$Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2}; \quad Z_2 = Z^+ + Z^-; \quad R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2}; \quad R_2 = R^+ + R^-. \tag{1.2}$$

Через Z^\pm и R^\pm обозначены интенсивности нормальных и радиальных компонент поверхностных нагрузок. При этом знак «+» относится к нижней, а знак «-» – к верхней поверхности каждого слоя пластинки.

Контактные напряжения представим в виде степенных многочленов n -го порядка

$$\bar{p} = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i; \quad \bar{\tau} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i. \tag{1.3}$$

Неизвестные коэффициенты a_0, a_i и b_i определяем из условий полного контакта слоев, т.е. из условий равенства прогибов и радиальных перемещений точек их контактных поверхностей.

§2. Плоская задача для пластинки без учета деформации поперечного сдвига.

Величины, относящиеся к верхнему слою, обозначим дополнительным индексом «1», а к нижнему слою – индексом «2».

1) *Плоская задача для верхнего слоя.* С учетом (1.1) и (1.2) имеем

$$\bar{R}_2 = -\bar{\tau} = -\sum_{i=1}^n b_i \rho^i. \tag{2.1}$$

Уравнение осесимметричной плоской задачи в усилиях примет вид [2]

$$\frac{d\bar{T}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{T}_{r1} - \bar{T}_{\theta1}}{\rho} = l \sum_{i=1}^n b_i \rho^i. \tag{2.2}$$

Учитывая равенства

$$\bar{T}_{r1} = \frac{1}{l} \left(\frac{d\bar{u}_1}{d\rho} + \alpha_{12} \frac{\bar{u}_1}{\rho} \right); \quad \bar{T}_{\theta1} = \frac{1}{l} \left(\alpha_{12} \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} + k^2 \frac{\bar{u}_1}{\rho} \right), \tag{2.3}$$

уравнение (2.2) представляем в виде

$$\rho^2 \frac{d^2 \bar{u}_1}{d\rho^2} + \rho \frac{d\bar{u}_1}{d\rho} - k^2 \bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^n b_i \rho^{i+2}. \quad (2.4)$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное в центре пластинки $\rho = 0$, будет

$$\bar{u}_1 = C_1 \rho^k + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+2}. \quad (2.5)$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования, подлежащая определению из соответствующего условия на крае слоя ($\rho = 1$).

Подставляя (2.5) в (2.3), для безразмерных усилий получаем равенства

$$\bar{T}_{r1} = \frac{1}{l} \left[(k + \alpha_{12}) \rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{(i+2 + \alpha_{12}) b_i}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right]; \quad (2.6)$$

$$\bar{T}_{\theta 1} = \frac{1}{l} \left[k(k + \alpha_{12}) \rho^{k-1} \cdot C_1 + l^2 \sum_{i=1}^n \frac{(i \cdot \alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2)}{(i+2)^2 - k^2} \cdot \rho^{i+1} \right]. \quad (2.7)$$

2) *Плоская задача для нижнего слоя.* В этом случае имеем

$$\bar{R}_2 = \bar{\tau} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i. \quad (2.8)$$

Опуская подробности, представим решение плоской задачи для этого слоя

$$\bar{u}_2 = B_1 \rho^\gamma - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \cdot \rho^{i+2}; \quad (2.9)$$

$$\bar{T}_{r2} = \frac{m}{l} \left[B_1 \cdot (\beta_{11} \gamma + \alpha_{12} \beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(i \beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12} \beta_{12}) b_i \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \right]; \quad (2.10)$$

$$\bar{T}_{\theta 2} = \frac{m}{l} \left[\beta_1 \cdot \gamma (\beta_{11} \gamma + \alpha_{12} \beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(i \cdot \alpha_{12} \beta_{12} + 2\alpha_{12} \beta_{12} + \beta_{11} \gamma^2) b_i \rho^{i+1}}{(i+2)^2 - \gamma^2} \right]. \quad (2.11)$$

Здесь B_1 – постоянная интегрирования, определяемая из условия для края слоя ($\rho = 1$).

§3. Задача изгиба слоев пластинки.

Эту задачу решаем в рамках уточненной теории [5]. В основе этой теории лежит допущение о линейном распределении тангенциальных перемещений по толщине пластинки. В осесимметричном случае это допущение для однослойной пластинки имеет вид

$$u_r = u + z\varphi; \quad u_z = w, \quad (3.1)$$

где φ – угол поворота нормального элемента пластинки в плоскости $r0z$. В классической теории пластин, состоящих из слоев постоянной толщины, гипотеза о недеформируемых нормалях принимается для всего пакета в целом, поскольку элемент, нормальный к срединной плоскости любого слоя, одновременно нормален к срединным поверхностям всех слоев как до, так и после их деформирования. В случае же учета поперечных сдвигов нормальный элемент после деформирования пластинки перестает быть нормальным к срединной поверхности и составляет с ней некоторый

угол. Поскольку величина этого угла зависит от сдвиговых свойств материала, а материалы разных слоев обладают различными сдвиговыми свойствами, то в сдвиговой теории первого порядка следует (для изменения тангенциальных перемещений по толщине разных слоев пластинки) принимать различные линейные законы аппроксимации. По этой причине в рассматриваемом случае допущение (3.1) принимаем не для всей пластинки в целом, а для каждого слоя в отдельности. Далее рассмотрим задачи изгиба слоев пластинки.

1) Задача изгиба верхнего слоя. Так как

$$\bar{Z}_2 = \bar{q} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i; \quad \bar{R}_1 = -\frac{1}{2}, \quad (3.2)$$

то уравнения задачи изгиба этого слоя примут такой вид:

$$\frac{d\bar{N}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{N}_{r1}}{\rho} = -l\bar{q} + la_0 + l \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i; \quad (3.3)$$

$$\frac{d\bar{M}_{r1}}{d\rho} + \frac{\bar{M}_{r1} - \bar{M}_{\theta 1}}{\rho} = l\bar{N}_{r1} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.3), ограниченное в центре пластинки $\rho = 0$, будет

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2}\rho + \frac{la_0\rho}{2} + l \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}.$$

Для компактности записи целесообразно член $la_0\rho/2$ ввести под знак суммы, начиная суммирование от $i = 0$. Таким образом, получим

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{\bar{q}l}{2}\rho + l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}. \quad (3.5)$$

Аналогично поступим и в формулах для других расчетных величин.

С учетом (3.2) в рамках [6] имеем равенство

$$\bar{N}_{r1} = \frac{5}{6\chi} \left(\varphi_1 + \frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} \right) - \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i. \quad (3.6)$$

Из (3.6) с учетом (3.5) для φ_1 получим формулу

$$\varphi_1 = -\frac{1}{l} \frac{d\bar{w}_1}{d\rho} + \frac{\chi}{10} \left(\sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i + 12l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1} - 6\bar{q}l\rho \right). \quad (3.7)$$

Изгибающие моменты согласно [6] имеют безразмерные выражения

$$\bar{M}_{r1} = \frac{1}{12l} \left(\frac{d\varphi_1}{d\rho} + \alpha_{12} \frac{\varphi_1}{\rho} \right); \quad \bar{M}_{\theta 1} = \frac{1}{12l} \left(\alpha_{12} \frac{d\varphi_1}{d\rho} + k^2 \frac{\varphi_1}{\rho} \right). \quad (3.8)$$

Учитывая (3.5), (3.7) и (3.8), уравнение (3.4) можно привести к виду

$$\rho^2 \frac{d^3 \bar{w}_1}{d\rho^3} + \rho \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho^2} - k^2 \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\rho} = \frac{3\bar{q}l^2 \rho}{5} [10l^2 \rho^2 - \chi(1-k^2)] - \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n [10l^2 \rho^2 - \chi(i^2 + 2i + 1 - k^2)] \frac{a_i \cdot \rho^{i+1}}{i+2} - \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n [60l^2 \rho^2 - \chi(i^2 - k^2)] b_i \cdot \rho^i. \quad (3.9)$$

Общее решение (3.9), ограниченное в центре пластинки $\rho = 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 = & C_2 + C_3 \rho^{1+k} + \frac{3\bar{q}l^2 \rho^2}{10} \cdot \frac{5l^2 \rho^2 - \chi(9-k^2)}{9-k^2} - \\ & - \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2}}{i+2} \left\{ \frac{10l^2 \rho^2}{(i+4)[(i+3)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+2} \right\} - \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \times \\ & \times \rho^{i+1} \left\{ \frac{60l^2 \rho^2}{(i+3)[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+1} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь C_2 и C_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя (3.10) в (3.8), для изгибающих моментов получаем формулы

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r1} = & -\frac{C_3(1+k)(k+\alpha_{12})}{12l^2} \cdot \rho^{k-1} - \frac{\bar{q}l^2 \rho^2 (3+\alpha_{12})}{2(9-k^2)} + \\ & + l^2 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2} \cdot (i+3+\alpha_{12})}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \cdot \frac{i+2+\alpha_{12}}{(i+2)^2 - k^2}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 1} = & -\frac{C_3 k(1+k)(k+\alpha_{12})}{12l^2} \cdot \rho^{k-1} - \frac{\bar{q}l^2 \rho^2 (3\alpha_{12} + k^2)}{2(9-k^2)} + \\ & + l^2 \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \cdot \frac{i \cdot \alpha_{12} + 3\alpha_{12} + k^2}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \cdot \frac{i \cdot \alpha_{12} + 2\alpha_{12} + k^2}{(i+2)^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С учетом (3.10) из (3.7) следует равенство

$$\varphi_1 = -\frac{C_3}{l} (1+k) \rho^k - \frac{6\bar{q}l^3 \rho^3}{9-k^2} + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} + 6l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+2}}{(i+2)^2 - k^2}. \quad (3.13)$$

2) Задача изгиба нижнего слоя. В этом случае имеем

$$\bar{Z}_2 = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot \rho^i; \quad \bar{R}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^i. \quad (3.14)$$

Поступая аналогично, для решения задачи изгиба нижнего слоя с учетом (3.14) получаем такие равенства:

$$\bar{N}_{r2} = -l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \rho^{i+1}; \quad (3.15)$$

$$\bar{w}_2 = B_2 + B_3 \rho^{1+\gamma} + \frac{6l^2}{5m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+2}}{i+2} \left\{ \frac{10l^2 \rho^2}{(i+4)[(i+3)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi}{\beta_{55}(i+2)} \right\} -$$

$$-\frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \left\{ \frac{60l^2 \rho^2}{(i+3)[(i+2)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi}{\beta_{55}(i+1)} \right\}; \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{r2} = & -\frac{B_3 m^3}{12l^2} (1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}) \rho^{\gamma-1} - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\ & + \frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{(i+2)^2 - \gamma^2}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\theta 2} = & -\frac{B_3 m^3}{12l^2} \gamma(1+\gamma)(\alpha_{12}\beta_{12} + \gamma\beta_{11}) \rho^{\gamma-1} - \\ & - \frac{ml^2}{\beta} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \rho^{i+2} \frac{i \cdot \alpha_{12}\beta_{12} + 3\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \\ & + \frac{m^2 l}{2\beta} \sum_{i=1}^n b_i \cdot \rho^{i+1} \frac{i \cdot \alpha_{12}\beta_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{12} + \beta_{11}\gamma^2}{(i+2)^2 - \gamma^2}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\varphi_2 = -\frac{B_3}{l} (1+\gamma) \rho^\gamma - \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i \cdot \rho^{i+3}}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} + \frac{6l^2}{\beta m} \sum_{i=1}^n \frac{b_i \cdot \rho^{i+2}}{(i+2)^2 - \gamma^2}.$$

Здесь B_2 и B_3 – постоянные интегрирования.

§4. Задача для пластинки при разных условиях для слоев.

Рассмотрим случай, когда нижний слой по всему контуру $z = H/2$, $r = a$ оперт на подвижные шарнирные опоры. Верхний же слой по всей лицевой поверхности соединен с нижним слоем. Краевые условия имеют такой вид:

для верхнего слоя –

$$\bar{T}_{r1}|_{\rho=1} = \bar{w}_1|_{\rho=1} = \bar{M}_{r1}|_{\rho=1} = 0; \quad (4.1)$$

для нижнего слоя –

$$\bar{T}_{r2}|_{\rho=1} = \bar{w}_2|_{\rho=1} = \bar{M}_{r2}|_{\rho=1} = 0. \quad (4.2)$$

Удовлетворив этим условиям и подставив полученные значения постоянных интегрирования в соответствующие формулы, в рамках теории [6] имеем

$$\bar{u}_1 = l^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left(\rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right); \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{6\bar{q}l^3}{(k+\alpha_{12})(9-k^2)} \left[(3+\alpha_{12})\rho^k - (k+\alpha_{12})\rho^3 \right] + \\ & + 12l^3 \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - k^2]} \left(\rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right) + \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
& +6l^2 \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - k^2} \left(\rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \rho^k \right); \\
\bar{w}_1 = & 3\bar{q}l^2 \left[\frac{2(3+\alpha_{12})l^2}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} (1-\rho^{1+k}) - \frac{l^2(1-\rho^4)}{2(9-k^2)} + \frac{\chi(1-\rho^2)}{10} \right] + \frac{6l^2}{5} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \times \\
& \times \left\{ \frac{10l^2(1-\rho^{i+4})}{(i+4)[(i+3)^2 - k^2]} - \frac{\chi}{i+2} (1-\rho^{i+2}) - \frac{10l^2(i+3+\alpha_{12})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+3)^2 - k^2]} (1-\rho^{1+k}) \right\} + \\
& + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1-\rho^{i+3})}{(i+3)[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{60l^2(i+2+\alpha_{12})(1-\rho^{i+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+2)^2 - k^2]} - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{i+1} \right\}; \quad (4.5)
\end{aligned}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{l^2}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left(\frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right); \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 = & \frac{12l^3}{\beta m^2} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{(i+2)[(i+3)^2 - \gamma^2]} \left(\frac{i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+3} \right) - \\
& - \frac{6l^2}{\beta m} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(i+2)^2 - \gamma^2} \left(\frac{i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma - \rho^{i+2} \right); \quad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_2 = & \frac{6l^2}{5m} \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{10l^2(1-\rho^{i+4})}{\beta m(i+4)[(i+3)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi(1-\rho^{i+2})}{\beta_{55}(i+2)} - \right. \\
& \left. - \frac{10l^2(i\beta_{11} + 3\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1+\gamma)(\beta_{11}\gamma + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+3)^2 - \gamma^2]} (1-\rho^{1+\gamma}) \right\} + \\
& + \frac{l}{10} \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1-\rho^{i+3})}{\beta m(i+3)[(i+2)^2 - \gamma^2]} - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{\beta_{55}(i+1)} - \right. \\
& \left. - \frac{60l^2(i\beta_{11} + 2\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})}{\beta m(1+\gamma)(\gamma\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2 - \gamma^2]} (1-\rho^{1+\gamma}) \right\}. \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Отметим, что решения при $k = 3$, $\gamma = 3$ можно получить путем предельного перехода.

§5. Задача для пластинки при полном контакте слоев.

В этом случае неизвестные коэффициенты a_i и b_i определяем из условий полного контакта слоев пластинки, т.е. из условий равенства прогибов и радиальных перемещений точек поверхностей $z_1 = h/2$, $z_2 = -H/2$. В безразмерной форме эти условия имеют вид

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2; \quad 2\bar{u}_1 + \varphi_1 = 2\bar{u}_2 - m\varphi_2. \quad (5.1)$$

Используя (4.3) – (4.8), условия (5.1) в рамках теории [6] приводим к виду

$$\begin{aligned}
& 12l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left\{ \frac{10l^2(1-\rho^{i+4})}{i+4} \left[\frac{1}{(i+3)^2-k^2} + \frac{1}{\beta m^2[(i+3)^2-\gamma^2]} \right] - \right. \\
& \left. \frac{\chi(1-\rho^{i+2})}{m\beta_{55}(i+2)}(1+m\beta_{55}) - 10l^2 \left[\frac{(i+3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+3)^2-k^2]} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})(1-\rho^{1+\gamma})}{\beta m^2(1+\gamma)(\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})[(i+3)^2-\gamma^2]} \right] \right\} + \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{60l^2(1-\rho^{i+3})}{i+3} \times \right. \\
& \left. \times \left[\frac{1}{(i+2)^2-k^2} - \frac{1}{\beta m[(i+2)^2-\gamma^2]} \right] - \frac{\chi(1-\rho^{i+1})}{\beta_{55}(i+1)}(\beta_{55}-1) - \right. \\
& \left. - 60l^2 \left[\frac{(i+2+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})[(i+2)^2-k^2]} - \frac{(i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})(1-\rho^{1+\gamma})}{\beta m(1+\gamma)(\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12})[(i+2)^2-\gamma^2]} \right] \right\} = \\
& = 30\bar{q}l \left[\frac{l^2(1-\rho^4)}{2(9-k^2)} - \frac{2l^2(3+\alpha_{12})(1-\rho^{1+k})}{(1+k)(k+\alpha_{12})(9-k^2)} - \frac{\chi(1-\rho^2)}{10} \right]; \\
& 6l \sum_{i=0}^n \frac{a_i}{i+2} \left[\frac{1}{(i+3)^2-k^2} \left(\rho^{i+3} - \frac{i+3+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) - \frac{1}{\beta m[(i+3)^2-\gamma^2]} \times \right. \\
& \left. \times \left(\rho^{i+3} - \frac{i\beta_{11}+3\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}} \cdot \rho^\gamma \right) \right] + 4 \sum_{i=1}^n b_i \left\{ \frac{1}{(i+2)^2-k^2} \times \right. \\
& \left. \times \left(\rho^{i+2} - \frac{i+2+\alpha_{12}}{k+\alpha_{12}} \cdot \rho^k \right) + \frac{1}{\beta[(i+2)^2-\gamma^2]} \left(\rho^{i+2} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{i\beta_{11}+2\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}}{\gamma\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{12}} \rho^\gamma \right) \right\} = \frac{3\bar{q}l}{(k+\alpha_{12})(9-k^2)} \left[(k+\alpha_{12})\rho^3 - (3+\alpha_{12})\rho^k \right].
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2) и (5.3) образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_i и b_i . Заметим, что свободный член a_0 представляет собой значение безразмерного контактного напряжения \bar{p} в центре слоев пластинки $\rho=0$. Отделив из систем уравнений члены с индексом $i=0$ и подставив в этих уравнениях $\rho=0$, можно определить значение a_0 . Остальные коэффи-

коэффициенты a_i и b_i определим решением систем соответствующих алгебраических уравнений при $i = 1, 2, 3 \dots$ (члены с полученным коэффициентом a_0 следует перенести в правые части уравнений). После определения значений a_i и b_i по соответствующим формулам вычислим значения всех расчетных величин.

§6. Числовые результаты и их анализ.

1. Конкретные результаты представим, принимая исходные данные в таком виде: $\bar{q} = 1$; $\beta_{11} = 2$; $\beta_{12} = 0,8$; $\alpha_{12} = 0,2$; $k = 0,5$; $\gamma = 0,5$; $\beta_{55} = 1$ ($\beta_{22} = 2$); $m = 2$; $\beta = 4$; $l = 8$.

Отметим, что, имея решение при $\bar{q} = 1$ (физически и геометрически линейная задача), получим решение для каждого конкретного случая, для чего достаточно значения расчетных величин умножить на q/B_{11} .

Таблица 1

χ, m, l	\bar{w} \bar{p} $\bar{\tau}$	n	ρ							
			0	02	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1,0
0, 1, 5	\bar{w}	10	116,86	105,55	85,08	59,28	30,26	15,16	7,57	0
		12	116,86	105,55	85,08	59,28	30,26	15,16	7,57	0
	\bar{p}	10	0,629	0,547	0,546	0,546	0,553	0,512	-0,043	-2,209
		12	0,629	0,546	0,545	0,545	0,552	0,576	0,001	-3,809
	$\bar{\tau}$	10	0	0,364	0,727	1,091	1,454	1,638	1,779	2,091
		12	0	0,364	0,727	1,091	1,455	1,634	1,765	2,158
0, 1, 5	\bar{w}	10	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
		12	149,98	137,32	112,86	80,43	42,13	21,41	10,77	0
	\bar{p}	10	0,620	0,547	0,537	0,528	0,510	0,498	0,487	0,449
		12	0,620	0,548	0,537	0,528	0,510	0,497	0,489	0,431
	$\bar{\tau}$	10	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,663	1,777	1,933
		12	0	0,359	0,727	1,096	1,469	1,661	1,774	1,953
0, 2, 8	\bar{w}	10	221,41	200,01	161,26	112,41	57,42	28,78	14,37	0
		12	221,41	200,01	161,26	112,41	57,42	28,77	14,37	0
	\bar{p}	10	0,931	0,789	0,788	0,788	0,795	0,720	0,224	-1,492
		12	0,931	0,788	0,787	0,787	0,786	0,779	0,232	-2,810
	$\bar{\tau}$	10	0	0,298	0,597	0,895	1,193	1,353	1,591	2,366
		12	0	0,298	0,597	0,895	1,195	1,340	1,549	2,573
10, 2, 8	\bar{w}	10	282,86	258,72	212,43	151,20	79,05	40,10	20,16	0
		12	282,83	258,72	212,43	151,20	79,05	40,10	20,15	0
	\bar{p}	10	0,923	0,799	0,779	0,763	0,729	0,705	0,679	0,537
		12	0,923	0,799	0,779	0,763	0,729	0,702	0,685	0,525
	$\bar{\tau}$	10	0	0,261	0,579	0,906	1,259	1,473	1,636	1,945
		12	0	0,261	0,579	0,906	1,259	1,475	1,641	1,951

В табл. 1 представлены некоторые значения \bar{p} , $\bar{\tau}$ и \bar{w} , полученные при $n=10$ и $n=12$, по классической ($\chi=0$) и уточненной теориям. Заметим, что безразмерные значения расчетных величин \bar{w} , \bar{p} , $\bar{\tau}$ при числах членов их выражений $n=10$ и $n=12$ практически не отличаются, что свидетельствует о сходимости процесса вычислений (достоверности полученных результатов).

По данным табл. 1 на рис. 1 – 3 представлены графики классических ($\chi = 0$, пунктирная линия) и уточненных ($\chi = 10$, сплошная линия) безразмерных значений прогиба \bar{w} и контактных напряжений $\bar{p}, \bar{\tau}$ при $m = 2$.

Таблица 2

m	l	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$
1	5	-0,061	-0,213	-0,701	-1,026	-2,209	-3,809
2	8	0,353	0,156	-0,113	-0,517	-1,492	-2,810

В табл. 2 приведены безразмерные значения нормального контактного напряжения \bar{p} на крае ($\rho = 1$) при некоторых значениях числа членов разложений n , соответствующих классической теории пластин.

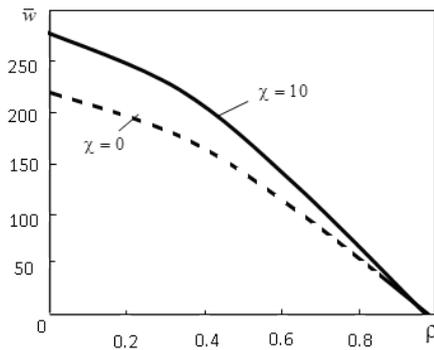


Рис. 1

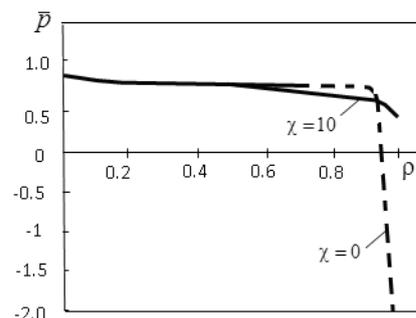


Рис. 2

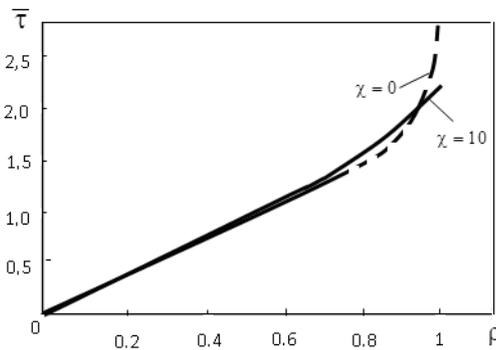


Рис. 3

Анализ данных табл. 1, 2 и рис. 1 – 3 позволяет сформулировать следующие выводы:

1) в рамках классической теории ($\chi = 0$) с приближением к краю слоев пластинки сходимость разложений (1.3) понижается. В случае, когда слои пластинки изготовлены из различных ортотропных материалов, с увеличением числа членов n нормальное контактное напряжение \bar{p} вблизи края $\rho = 1$ меняет знак и увеличивается по модулю. Это означает, что вблизи контура $\rho = 1$ происходит отрыв слоев друг от друга. Резкое увеличение значения указанного напряжения свидетельствует о том, что на контуре $\rho = 1$ имеет место концентрация напряжения \bar{p} . Эти аномалии являются следствием того, что классическая теория пластинок не учитывает эффекты ни плоского, ни антиплоского погранслоев;

2) при учете влияния деформации поперечного сдвига ($\chi = 10$), отмеченные аномалии исчезают. Это объясняется тем, что учитывая поперечный сдвиг, фактически учитываем эффект антиплоского погранслоя.

2. Числовые результаты представим для случая жесткого закрепления краевых ($\rho = 1$) сечений слоев пластинки. Краевые условия в этом случае имеют вид

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2 = 0, \quad \bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0, \quad \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0.$$

Таблица 3

χ, m, l	$\bar{w}, \bar{p}, \bar{\tau}$	n	ρ							
			0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	1
0, 2, 8	\bar{w}	8	75,067	71,007	57,673	35,736	11,972	3,338	0,826	0
		10	75,326	71,122	57,776	35,816	12,020	3,396	0,858	0
	\bar{p}	8	0,941	0,913	1,151	1,414	1,997	0,682	-1,640	-3,343
		10	0,941	0,925	1,312	1,504	1,683	1,687	-2,574	-13,68
	$\bar{\tau}$	8	0	3,042	1,085	-0,764	-2,570	-3,97	-2,382	5,435
		10	0	2,856	1,079	-0,696	-2,376	-4,15	-3,329	9,191
5, 2, 8	\bar{w}	8	108,29	104,96	88,417	59,387	24,972	9,986	3,991	0
		10	108,51	104,95	88,424	59,396	24,971	10,04	4,099	0
	\bar{p}	8	0,913	0,718	1,139	1,172	0,755	-0,01	-0,068	1,446
		10	0,913	0,735	1,154	1,186	0,767	0,014	-0,284	1,767
	$\bar{\tau}$	8	0	2,012	0,736	-0,616	-1,488	-1,32	-0,911	-0,299
		10	0	1,982	0,730	-0,615	-1,472	-1,35	-0,95	-0,30

В табл. 3 приведены безразмерные значения прогиба \bar{w} и контактных напряжений \bar{p} , $\bar{\tau}$ для различных значений механических и геометрических параметров χ , m , l .

На рис. 4–6 показаны графики изменения \bar{w} , \bar{p} и $\bar{\tau}$ в рамках классической теории пластин ($\chi = 0$) и при учете влияния поперечного сдвига ($\chi = 5$).

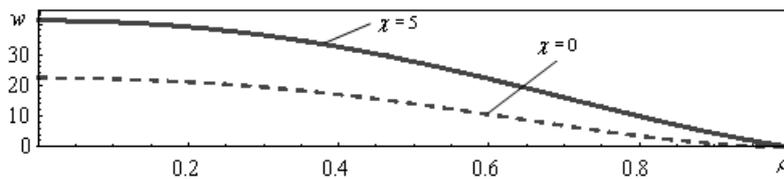


Рис. 4

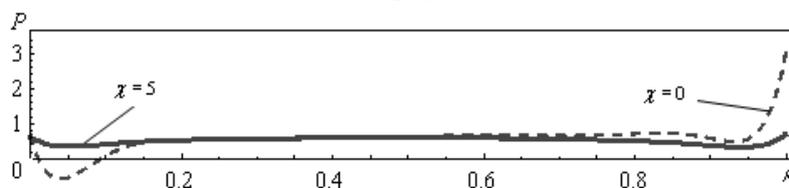


Рис. 5

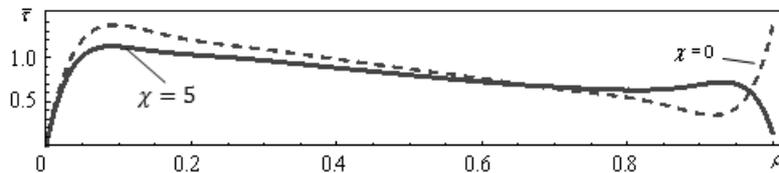


Рис. 6

Данные табл. 3 и рис. 4–6 приводят к заключениям: 1) учет поперечного сдвига и в случае закрепления приводит к увеличению прогиба пластинки; 2) в отличие от классической теории, при учете поперечного сдвига с приближением к защемленному краю пластинки контактные напряжения вместо резкого возрастания изменяются умеренно, причем нормальное напряжение \bar{p} мало изменяется, а касательное напряжение $\bar{\tau}$ – заметно уменьшается.

Заключение.

Обобщение поправочных коэффициентов уточненной теории пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок значительно приближает результаты двумерной теории пластин к соответствующим результатам трехмерной теории упругости. Это наглядно иллюстрируется, например, уточнением характера изменения касательных контактных напряжений вблизи края рассмотренной составной круглой пластинки.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто плоску задачу і задачу про згин круглої пружної плити, що складена з двох різних циліндрично ортотропних шарів. Задача про згин розглянута на основі уточнених теорій. Прийнято гіпотезу про розподіл радіальних зміщень шарів у вигляді різних лінійних функцій вертикальної координати. Шари умовно розділені, їх взаємодія описується контактними нормальними і дотичними напруженнями, які представлено степеневими многочленами з невідомими коефіцієнтами. Розглянуто числові приклади і зроблено якісні та кількісні висновки.

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 414 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
3. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №3. – С. 46 – 58.
4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с.
5. Киракосян Р.М. К уточненной теории ортотропных пластин при наличии касательных поверхностных нагрузок // Прикл. механика. – 2008. – 44, №4. – С. 107 – 119.
6. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача ортотропной круглой пластинки под действием поверхностных касательных нагрузок при учете поперечного сдвига // Изв. НАН РА. – 2009. – 62, №2. – С. 3 – 9.
7. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
8. Darwish F., Tashoutsh G., Gharaibeh M. Stress concentration analysis for countersunk rivet holes in orthotropic plates // Europ. J. of Mech. A/Solids. – 2013. – 37. – P. 69 – 78.
9. Galishin A. Z., Shevchenko Yu. N. Determining the Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Thin Shells with Allowance for the Third Invariant of the Deviatoric Stress Tensor // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N6. – P. 675 – 684.
10. Grigorenko A. Ya., Loza I. A. Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Radially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N6. – P. 641 – 649.
11. Khanna A., Sharma A.K. Vibration Analysis of Visco-Elastic Square Plate of Variable Thickness with Thermal Gradient // Int. J. Eng. Appl. Sci. – 2011. – 3, N4. – P. 1 – 6.
12. Molchenko L. V., Loos I. I., Fedorchenko L. M. Axisymmetric magnetoelastic deformation of a flexible orthotropic ring plate with orthotropic conductivity // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N3. – P. 322 – 327.
13. Neves A.M.A., Ferreira A. J. M., Carrera E., Cinefra M., Roque C. M. C., Jorge R.M. N., Soares C.M.M. Free vibration analysis of functionally graded shells by a higher-order shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations // Europ. J. Mech. A/Solids. – 2013. – 37. – P. 24 – 34.
14. Oktem A. S., Mantari J. L., Guedes Soares C. Static response of functionally graded plates and doubly-curved shells based on a higher order shear deformation theory // Europ. J. Mech.-A/Solids. – 2012. – 36. – P. 163 – 172.
15. Ponnusamy P., Amuthalakshmi A. Free vibration Analysis of Double-walled Simply Supported Carbon Nanotube // Int. J. Mech. and Appl. – 2013. – 3, N3. – P. 53 – 62.
16. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1945. – 67. – P. A69 – A77.
17. Saeedi N., Sab K., Caron J. F. Delaminated multilayered plates under uniaxial extension. Part I: Analytical analysis using a layerwise stress approach // Int. J. Solids and Struct. – 2012. – 49, N26. – P. 3711 – 3726.
18. Sayyad A. S., Ghugal Y. M. Bending and free vibration analysis of thick isotropic plates by using exponential shear deformation theory // Appl. and Comp. Mech. – 2012. – 6, N 1. – P. 65 – 81.
19. Stanak P., Sladek V., Sladek J., Krahulec S., Sator L. Application of patch test in meshless analysis of continuously non-homogeneous piezoelectric circular plate // Appl. and Comp. Mech. – 2013. – 7, N 1. – P. 65 – 76.
20. Yu J., Li S. Dispersion of guided waves in initially stressed layered plates // J. Mech. Mater. and Struct. – 2013. – 8, N2. – 4. – P. 185 – 198.

Поступила 05.06.2012

Утверждена в печать 03.12.2013