

Р. М. Исрафилов, Е. В. Савельева

**ВОЛНЫ В НАСЫЩЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ ПОРИСТОМ
ВЯЗКОУПРУГОМ МАТЕРИАЛЕ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина
e-mail: reolog@jinmech.kiev.ua*

Abstract. The linear viscoelastic waves in the half-space are studied, when the harmonic short-time pulse acts on the boundary surface. The theoretical model is based on the classical linear Biot's model. A system of coupled integro-differential equations for the displacements of skeleton and the fluid is obtained using the Volterra principle and Rabotnov's operator method. The problem is solved by the Laplace transform method. The analytical solution in the space of images is obtained taking into account of the skeleton viscoelastic properties. A procedure of inverse transform is described in details.

Key words: linear viscoelastic wave, viscoelastic half-space, short-time pulse, Laplace transform method, Rabotnov's operator method.

Введение.

В настоящее время в механике неоднородных материалов существует ряд математических моделей и методов исследования связанных динамических процессов на основании заданных механических и кинематических свойств отдельных компонентов среды. Основные направления этих исследований и соответствующая библиография отражены в работах [1 – 4, 9 – 12, 19, 20 – 23]. Среди них отдельное место занимают исследования насыщенных жидкостью пористых сред [3 – 7, 11, 12, 19, 20].

В статьях [19, 20] дан обзор экспериментальных и теоретических работ, а также проведен анализ результатов исследования движения линейно-упругих волн в массивном образце, моделирующего волновое движение в полупространстве при воздействии кратковременного гармонического импульса заданной частоты.

Ниже подход, развиваемый в [19, 20], применяется для случая вязкоупругого деформирования скелета. На основе принципа Вольтерра и операторного метода Ю.Н.Работнова [6] записана система связанных интегро-дифференциальных уравнений. Построено точное решение нестационарной динамической задачи и получены необходимые аналитические выражения для изучения волн в полупространстве из насыщенного жидкостью пористого вязкоупругого материала.

§1. Постановка задачи.

По аналогии с [19, 20], рассмотрим полупространство. Средой, заполняющей полупространство, является двухфазный континуум, состоящий из твердого деформируемого вязкоупругого скелета и вязкой жидкости в порах скелета. В качестве теоретической модели среды выбрана классическая линейная схема Био [10]. Граничные условия соответствуют заданию на граничной плоскости равномерного по пространственным координатам и гармонического кратковременного колебания частичек среды (перемещений). Математически задача формулируется как задача о нахождении решения системы уравнений движения наследственного типа [19]

$$A_0 + \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} u_{,xx}^{(s)} + \int_0^t \left[\left(A_1 - \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} \right) \left(A_0 + \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} \right)^{-1} \kappa_C \mathcal{E}_\alpha(\beta_C; t - \tau) + A_2 \left(A_0 + \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} \right)^{-1} \kappa_C^2 \mathcal{E}_\alpha^2(\beta_C; t - \tau) \right] \times u_{,xx}^{(s)}(\tau) d\tau + Q u_{,xx}^{(f)} - b(u_{,t}^{(s)} - u_{,t}^{(f)}) = \rho_{11} u_{,tt}^{(s)} + \rho_{12} u_{,tt}^{(f)}; \quad (1.1)$$

$$\frac{m}{1-m} K_{np}^{(s)} \left[u_{,xx}^{(s)} - \kappa_C \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(\beta_C; t - \tau) u_{,xx}^{(s)}(\tau) d\tau \right] + R u_{,xx}^{(f)} - b(u_{,t}^{(s)} - u_{,t}^{(f)}) = \rho_{12} u_{,tt}^{(s)} + \rho_{22} u_{,tt}^{(f)}$$

при заданных нулевых начальных условиях (естественном начальном состоянии среды)

$$u^{(s)}(x, 0) = u^{(f)}(x, 0) = u_{,t}^{(s)}(x, 0) = u_{,t}^{(f)}(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

и граничных условиях на координатной плоскости yOz

$$u^{(s)}(0, t) = u^{(f)}(0, t) = u^0 \sin \omega t [H(t) - H(t - T)]. \quad (1.3)$$

С точки зрения практической применимости уравнений (1.1), ядра, входящие в них, должны достаточно точно отвечать результатам опытов, быть сингулярными. Таким свойством обладает экспоненциальная функция дробного порядка Работнова [6]

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta; t) = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^n t^{n(1-\alpha)} \{ \Gamma[(n+1)(1-\alpha)] \}^{-1}. \quad (1.4)$$

В формулах (1.1) – (1.4) приняты обозначения: $u^{(s)}(x, t)$, $u^{(f)}(x, t)$ – парциальные перемещения скелета (skeleton) и жидкости (fluid); физические постоянные $Q, R, A_0, A_2, \mu_{np}^{(s)}$ и подынтегральные ядра определены и приведены в работах [19, 20]; $b = m^2 \theta / K$ – коэффициент диффузионного взаимодействия твердого и жидкого компонентов среды; θ – динамический коэффициент вязкости жидкости; K – коэффициент проницаемости среды; $\rho_{11} = (1-m)\rho^{(s)} - \rho_{12}$; $\rho_{22} = m\rho^{(f)} - \rho_{12}$; $\rho^{(s)}, \rho^{(f)}$ – плотности отдельно взятых твердого и жидкого компонентов среды; ρ_{12} – коэффициент присоединенной массы; u^0 – амплитуда синусоидального импульса; T – продолжительность импульса; $H(t)$ – единичная функция; m – пористость среды; $-1 < \alpha \leq 0$, $\beta > 0$ – параметры ядра ползучести или релаксации скелета; $P^{(f)} = -(Qu_{,x}^{(s)} + Ru_{,x}^{(f)})/m$ – давление в жидкости.

§2. Решение задачи с помощью трансформации Лапласа.

После применения к функции (1.4) интегрального преобразования Лапласа по времени имеем

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta; p) = (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1}, \quad (2.1)$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

Исходя из (2.1), в пространстве изображений необходимо решать систему связанных уравнений

$$\left[A_0 + \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} + \kappa_C \left(A_1 - \frac{4}{3} \mu_{np}^{(s)} + A_2 \kappa_C \right) (p^{1-\alpha} - \beta)^{-1} \right] \tilde{u}_{,xx}^{(s)} - p(\rho_{11}p + b)\tilde{u}^{(s)} + Q\tilde{u}_{,xx}^{(f)} - p(\rho_{12}p - b)\tilde{u}^{(f)} = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{m}{1-m} K_{np}^{(s)} \left[1 - \kappa_C (p^{1-\alpha} - \beta_C)^{-1} \right] \tilde{u}_{,xx}^{(s)} - p(\rho_{12}p - b)\tilde{u}^{(s)} + R u_{,xx}^{(f)} - p(\rho_{22}p + b)\tilde{u}^{(f)} = 0$$

с такими граничными условиями:

$$\tilde{u}^{(s)}(0, p) = \tilde{u}^{(f)}(0, p) = \frac{u^0}{p^2 + \omega^2} \left[\omega - (\omega \cos \omega T + p \sin \omega T) e^{-pT} \right] \equiv u^0(p). \quad (2.3)$$

Отметим, что при выводе формул (2.2) использована теорема о свертке.

Решение системы уравнений (2.2), удовлетворяющее граничным условиям (2.3), аналогично [15], имеет вид

$$\tilde{u}^{(s)}(x, p) = \frac{u_0(p)}{\rho_{12}R - \rho_{22}Q} \left[\frac{\tilde{\varphi}_1(x, p)}{p + a_0} - e^{-pt} \frac{\tilde{\varphi}_2(x, p)}{p + a_0} \right]; \quad (2.4)$$

$$\tilde{u}^{(f)}(x, p) = \frac{-u_0(p)}{\rho_{12}R - \rho_{22}Q} \left[\frac{\tilde{\varphi}_3(x, p)}{p + a_0} - e^{-pt} \frac{\tilde{\varphi}_4(x, p)}{p + a_0} \right]; \quad (2.5)$$

$$\tilde{P}(x, p) = -\frac{1}{m} \left(Q \frac{\partial \tilde{u}^{(s)}(x, p)}{\partial x} + R \frac{\partial \tilde{u}^{(f)}(x, p)}{\partial x} \right). \quad (2.6)$$

Здесь

$$\tilde{\varphi}_1(x, p) = \omega \tilde{\psi}_1(x, p), \tilde{\varphi}_2(x, p) = (\omega \cos \omega T + p \sin \omega T) \tilde{\psi}_1(x, p); \tilde{\varphi}_3(x, p) = \omega \tilde{\psi}_2(x, p),$$

$$\tilde{\varphi}_4(x, p) = (\omega \cos \omega T + p \sin \omega T) \tilde{\psi}_2(x, p); \tilde{\psi}_1(x, p) = \left[(p^2 + \omega^2)(k_1^2(p) - k_2^2(p)) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \left[R(\rho_{12} + \rho_{22})pk_1^2(p) + (R + Q)(p\rho_{22} + b)k_2^2(p) - (a_1(p)p + a_2(p))p^2 \right] e^{k_1(p)x} - \right.$$

$$\left. - \left[R(\rho_{12} + \rho_{22})pk_2^2(p) + (R + Q)(p\rho_{22} + b)k_1^2(p) - (pa_1(p) + a_2(p))p^2 \right] e^{k_2(p)x} \right\},$$

$$\tilde{\psi}_2(x, p) =$$

$$= \left[(p^2 + \omega^2)(k_1^2(p) - k_2^2(p)) \right]^{-1} \left\{ \left[Q(\rho_{12} + \rho_{22})pk_1^2(p) + (R + Q)(p\rho_{12} - b)k_2^2(p) - \right. \right.$$

$$\left. - \left[pa_3(p) + a_4(p) \right] p^2 \right\} e^{k_1(p)x} - \left[Q(\rho_{12} + \rho_{22})pk_2^2(p) + (R + Q)(p\rho_{12} - b)k_1^2(p) - \right.$$

$$\left. \left[pa_3(p) + a_4(p) \right] p^2 \right\} e^{k_2(p)x},$$

где для вычисления величин $k_{1,2}(p)$ получены формулы

$$k_{1,2}(p) = -M_0(p) \left[M_1(p) \pm \sqrt{M_2^2(p) + M_3(p)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

$$k_1^2(p) - k_2^2(p) = p \left[RL_0 \left(1 - \frac{L_1}{p^{1-\alpha} + \beta} \right) \right]^{-1} \sqrt{M_2^2(p) + M_3(p)}. \quad (2.8)$$

В формулах (2.4), (2.5) и (2.7) введены обозначения

$$M_0(p) = (2RL_0)^{-\frac{1}{2}} \left\{ p \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad M_1(p) = L_0 \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right] \times$$

$$\times (p\rho_{22} + b) + (L_2(p) + L_3), \quad M_2(p) = L_0 \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right] (p\rho_{22} + b) - (L_2(p) + L_3),$$

$$M_3(p) = 4R^2 L_0 \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right] (L_4(p) - L_5)^2, \quad L_0 = (A + 2N)R - Q^2;$$

$$L_1 = 4N_S R (3L_0)^{-1} \kappa; \quad L_2 = R^2 \rho_{11} + Q^2 \rho_{22} - 2QR \rho_{12}; \quad L_3 = (R^2 + Q^2 + 2QR) b;$$

$$L_4 = \rho_{12} - \frac{Q}{R} \rho_{22}; \quad L_5 = \left(1 + \frac{Q}{R} \right) b; \quad a_0 = \frac{b(R+Q)}{Q\rho_{22} - R\rho_{12}};$$

$$a_1(p) = R(R+Q)L_0^{-1} \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right]^{-1} (\rho_{12}^2 - \rho_{11}\rho_{22}) + \rho_{22}(\rho_{12} + \rho_{22});$$

$$a_2(p) = \left\{ \rho_{12} + \rho_{22} - R(R+Q)L_0^{-1} \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right]^{-1} (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}) \right\} b;$$

$$a_3(p) = Q(R+Q)L_0^{-1} \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right]^{-1} (\rho_{12}^2 - \rho_{11}\rho_{22});$$

$$a_4(p) = - \left\{ \rho_{12} + \rho_{22} + Q(R+Q)L_0^{-1} \left[1 - L_1 (p^{1-\alpha} + \beta)^{-1} \right]^{-1} (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}) \right\} b.$$

§3. О процедуре реализации обращения полученного решения.

Записанное формально через обратные преобразования решение задачи (2.4), (2.5) имеет вид

$$u^{(S,f)}(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_0-i\infty}^{p_0+i\infty} e^{pt} \tilde{u}^{(S,f)}(x,p) dp. \quad (3.1)$$

Подынтегральные функции известны, задаются формулами (2.3), (2.4) и имеют такие особые точки в комплексной плоскости: 1) три простых полюса в точках

$p = \pm i \omega$, $p = -a_0 < 0$; 2) четыре точки разветвления в нулях функции $k_1(p) = k_2(p) = 0$

$$(p = 0; -\zeta_0; -\zeta_1; -\zeta_2), \zeta_0 = (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}) [\rho_{12}\rho_{22} - \rho_{12}^2]^{-1} > 0,$$

$$\zeta_1 = \beta^3 > 0, \zeta_2 = (\beta - \lambda_1)^3 > 0$$

и, согласно записи (2.8), две точки разветвления $p = \zeta_3; \zeta_4$ (комплексные) в нулях трансцендентного относительно p уравнения

$$k_1^2(p) - k_2^2(p) = 0; \zeta_{3,4} = -m_1 \pm i m_2;$$

$$m_1 > 0; m_2 > 0; m_1 > m_2; m_1 = L_6 - \frac{r_1 L_1}{r_2 \beta} \cos(\theta_1 - \theta_2); m_2 = L_7 + \frac{r_1 L_1}{r_2 \beta} \sin(\theta_1 - \theta_2);$$

$$L_6 = [-4R^2 L_0 L_4 L_5 + (L_0 b - L_3)(L_0 \rho_{22} - L_2)] [(L_0 \rho_{22} - L_2)^2 + 4R^2 L_0 L_4^2]^{-1};$$

$$L_7 = 2\sqrt{L_0} R [(L_0 b - L_3)L_4 + (L_0 \rho_{22} - L_2)L_5] [(L_0 \rho_{22} - L_2)^2 + 4R^2 L_0 L_4^2]^{-1};$$

$$r_1 = \left\{ [L_0(b - L_6 \rho_{22}) + R\sqrt{L_0} L_4 L_7]^2 + [L_0 L_7 \rho_{22} + R\sqrt{L_0}(L_5 + L_4 L_6)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$r_2 = \left\{ [(1 + d_1)(L_0 \rho_{22} - L_2) + 2R d_2 \sqrt{L_0} L_4]^2 + [d_2(L_0 \rho_{22} - L_2) - (1 + d_1)2R\sqrt{L_0} L_4]^2 \right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos \theta_1 = r_1^{-1} [L_0(b - L_6 \rho_{22}) + R\sqrt{L_0} L_4 L_7]; \sin \theta_1 = r_1^{-1} [L_0 L_7 \rho_{22} + R\sqrt{L_0}(L_5 + L_4 L_6)];$$

$$\cos \theta_2 = r_2^{-1} [(1 + d_1)(L_0 \rho_{22} - L_2) + 2R d_2 \sqrt{L_0} L_4];$$

$$\sin \theta_2 = r_2^{-1} [d_2(L_0 \rho_{22} - L_2) - (1 + d_1)2R\sqrt{L_0} L_4];$$

$$d_1 = \beta^{-1} r_0^\gamma \cos \gamma \theta, d_2 = \beta^{-1} r_0^\gamma \sin \gamma \theta;$$

$$r_0 = [(-L_6)^2 + L_7^2]^{\frac{1}{2}}, \cos \theta = -L_6 r_0^{-1}, \sin \theta = L_7 r_0^{-1}, L_6 > 0, L_7 > 0, L_6 > L_7, \gamma = 1 - \alpha.$$

Простой полюс $p = -a_0$ неудобен для прямого обращения [7]. Поэтому обращение каждого слагаемого из правых частей функций (2.3), (2.4) проводилось отдельно. Большая часть этих слагаемых может быть вычислена по теореме о свертке

$$(p + a_0)^{-1} \tilde{\varphi}_k(x, p) \rightarrow \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \varphi_k(x, \tau) d\tau \quad (k = \overline{1 \rightarrow 4}). \quad (3.2)$$

Реализованный далее общий подход к вычислению обратного преобразования основан на последовательном применении леммы Жордана и теоремы Коши о вычетах.

На первом шаге обычно строят замкнутый контур, обходящий все указанные особые точки, внутри которого подынтегральная функция является однозначной и аналитической (рис. 1).

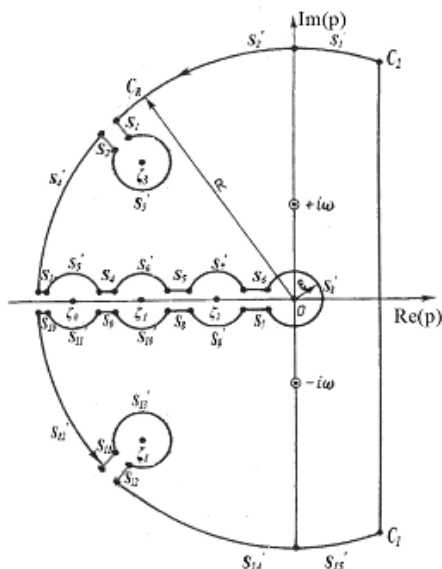


Рис. 1

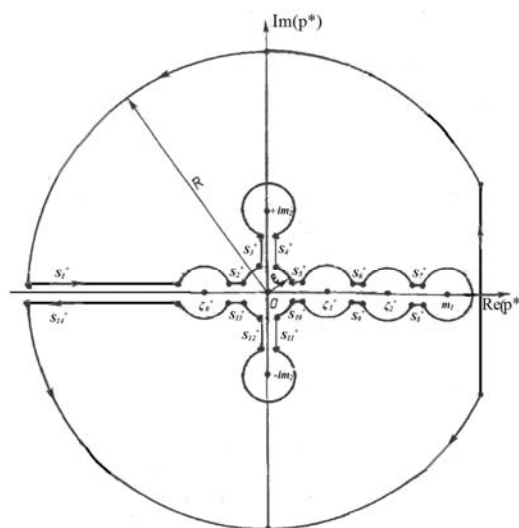


Рис. 2

Применяя для этого контура теорему Коши о вычетах, получаем формулу для вычисления $\varphi_K(x, t)$.

$$\varphi_K(x, t) = \text{Res} \left[e^{pt} \tilde{\varphi}_k(x, p), (+i\omega) \right] + \text{Res} \left[e^{pt} \tilde{\varphi}_k(x, p), (-i\omega) \right] - \left[-\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{12} \int_{S_j} e^{pt} \tilde{\varphi}_k(x, p) dp - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{15} \int_{S_j'} e^{pt} \tilde{\varphi}_k(x, p) dp \right] \quad (k=1-4). \quad (3.3)$$

Как показано в работе [19], интегралы по дугам S_j , согласно условиям леммы Жордана, равны нулю.

Таким образом, в правой части формулы необходимо вычислить вычеты в двух точках $\pm i\omega$ и интегралы по двенадцати отрезкам S_1, \dots, S_{12} ;

$$\varphi_K(x, t) = \text{Res} \left[e^{Pt} \tilde{\varphi}_K(x, p), (+i\omega) \right] + \text{Res} \left[e^{Pt} \tilde{\varphi}_K(x, p), (-i\omega) \right] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{12} \int_{S_j} e^{pt} \tilde{\varphi}_K(x, p) dp. \quad (3.4)$$

Реализация обращения подынтегральных функций (3.4), имеющих комплексные точки разветвления вида $\zeta_3 = -m_1 + im_2$ и $\zeta_4 = -m_1 - im_2$, представляет достаточно сложную задачу. Интегралы, входящие в формулу (3.4), были вычислены следующим образом. Так как они не зависят от выбора постоянной $p > p_0$, то в (3.4) была введена новая переменная $p + m_1 = p^*$. Подынтегральные функции изменяются следующим образом.

В новых переменных подынтегральные функции $\tilde{\varphi}_K^*(x, p^*)$ имеют следующие точки разветвления:

$$(p^* = -\zeta_0^*; \zeta_1^*; \zeta_2^*; m_1; \pm im_2),$$

$$\zeta_0^* = (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12})(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2)^{-1} - m_1 > 0, \zeta_1^* = m_1 - \beta^3 > 0, \zeta_2^* = m_1 - (\beta - \lambda)^3 > 0.$$

Далее был построен удобный замкнутый контур с разрезами на положительной и отрицательной части действительной и мнимой осей координат, обходящий все приведенные точки разветвления, внутри которого подынтегральные функции $\tilde{\varphi}_K(x, p^*)$ – однозначны и аналитичны. Такой контур интегрирования изображен на рис. 2.

После замены переменных выражение (3.4) было записано в виде

$$\begin{aligned} \varphi_K(x, t) = & \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_K(x, p), (+i\omega)\right] + \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_K(x, p), (-i\omega)\right] - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{14} \int_{S_j^*} e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_K(x, p^*) dp^*. \end{aligned} \quad (3.5)$$

§4. Вычисление вычетов и интегралов.

Далее был получен полный комплект формул для вычисления вычетов функций: в полюсе $+i\omega$ – согласно формулам

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_1(x, p), (+i\omega)\right] &= \lim_{p \rightarrow i\omega} (p - i\omega) e^{pt} \tilde{\varphi}_1(x, p); \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_2(x, p), (+i\omega)\right] &= \text{Res}\left[e^{pt} \frac{1}{\omega} (\omega \cos \omega T + P \sin \omega T) \tilde{\varphi}_1(x, p), (+i\omega)\right]; \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_3(x, p), (+i\omega)\right] &= \lim_{p \rightarrow i\omega} (p - i\omega) e^{pt} \tilde{\varphi}_3(x, p); \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_4(x, p), (+i\omega)\right] &= \text{Res}\left[e^{pt} \frac{1}{\omega} (\omega \cos \omega T + P \sin \omega T) \tilde{\varphi}_3(x, p), (+i\omega)\right]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В полюсе $-i\omega$:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_1(x, p), (-i\omega)\right] &= \lim_{p \rightarrow -i\omega} (p + i\omega) e^{pt} \tilde{\varphi}_1(x, p) \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_2(x, p), (-i\omega)\right] &= \text{Res}\left[e^{pt} \frac{1}{\omega} (\omega \cos \omega T + P \sin \omega T) \tilde{\varphi}_1(x, p), (-i\omega)\right]; \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_3(x, p), (-i\omega)\right] &= \lim_{p \rightarrow -i\omega} (p + i\omega) e^{pt} \tilde{\varphi}_3(x, p); \\ \text{Res}\left[e^{pt} \tilde{\varphi}_4(x, p), (-i\omega)\right] &= \text{Res}\left[e^{pt} \frac{1}{\omega} (\omega \cos \omega T + P \sin \omega T) \tilde{\varphi}_3(x, p), (-i\omega)\right]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Далее, путем исследования характера многозначности комплексных выражений (4.1), (4.2), после вычисления и упрощения вычетов в полюсах $(\pm i\omega)$, получаем формулы для

$$\varphi_i(x, t) = \text{Res} \left[e^{pt} \tilde{\varphi}_i(x, p), (+i\omega) \right] + \text{Res} \left[e^{pt} \tilde{\varphi}_i(x, p), (-i\omega) \right]. \quad (4.4)$$

Вычисление интегралов по отрезкам $(-\infty; -\zeta_0], \dots, [-\zeta_0; -\infty)$ (по горизонтальным и вертикальным дугам s_j^* ($j = 1, \dots, 14$)) выполнялось при условии $R \rightarrow \infty$, а $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом далее использована обычная методика вычисления интегралов из формул (3.5) (т. е. отдельно рассматривались нижние, верхние, левые и правые берега надреза).

Вводя замену переменной $p^* = ip_*$ на положительной и отрицательной частях мнимой оси координат, что соответствует повороту контура интегрирования, по часовой стрелке, на $\pi/2$, для реализации указанных операций получаем формулу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{14} \int_{S_j^*} e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) dp^* = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\zeta_0} \left[e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{i\pi}} - e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{-i\pi}} \right] dr^* + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_0}^{\infty} \left[e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{i\pi}} - e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{-i\pi}} \right] dr^* + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{m_1} \left[e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{i0}} - e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) \Big|_{p^*=r^*e^{i2\pi}} \right] dr^* + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{m_1} \left[e^{(ip_*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p_*) \Big|_{p_*=r_*e^{i\pi}} - e^{(ip_*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p_*) \Big|_{p_*=r_*e^{-i\pi}} \right] dr^*. \end{aligned}$$

Таким образом, исследуя характер неоднозначности подынтегральных функций, в итоге вычислений и упрощений на нижних и верхних границах разреза получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{14} \int_{S_j^*} e^{(p^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_k(x, p^*) dp^* &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\zeta_0} e^{-(r^*+m_1)t} \tilde{\varphi}_{k1}(x, r^*) dr^* + \int_{\zeta_0}^{\infty} e^{-(r^*+m_1)t} \tilde{\varphi}_{k1}(x, r^*) dr^* \right] + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{m_1} e^{(r^*-m_1)t} \tilde{\varphi}_{k2}(r^*, x) dr^* + \int_0^{m_2} e^{-m_1 t} \tilde{\varphi}_{k3}(x, r_*, t) dr_*. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Согласно результатам (4.4), (4.5), подставляя (3.5) в интегральные комбинации (3.2), получаем формулы для вычисления свертки в виде

$$\begin{aligned} (p+a_0)^{-1} \tilde{\varphi}_1(x, p) &\xrightarrow{\cdot} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \varphi_1(x, \tau) d\tau = \Psi_{11}(x, t) = \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \varphi_1^{(664)}(x, \tau) d\tau - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{\zeta_0} e^{-(r^*+m_1)\tau} \varphi_{11}(x, r^*) dr^* \right] d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{\infty} e^{-(r^*+m_1)\tau} \varphi_{11}(x, r^*) dr^* \right] d\tau - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{m_1} e^{(r^*+m_1)\tau} \varphi_{12}(r^*, x) dr^* \right] d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{m_2} e^{m_1\tau} \varphi_{13}(x, r_*, \tau) dr_* \right] d\tau.$$

Прежде чем вычислять свертки, рассмотрим следующие представления, записанные в символической форме:

$$e^{-\eta_0 t} \cos(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T); \quad (4.6)$$

$$\frac{\eta_2}{(a_0 - \eta_0)^2 + \eta_2^2} \left\{ e^{-\eta_0 t} \sin(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T) - e^{-a_0 t} \sin(\eta_1 x + \eta_3 T) + \frac{a_0 - \eta_0}{\eta_2} \left[e^{-\eta_0 t} \cos(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T) - e^{-a_0 t} \cos(\eta_1 x + \eta_3 T) \right] \right\}; \quad (4.7)$$

$$e^{-\eta_0 t} \sin(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T); \quad (4.8)$$

$$\frac{\eta_2}{(a_0 - \eta_0)^2 + \eta_2^2} \left\{ e^{-\eta_0 t} \cos(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T) - e^{-a_0 t} \cos(\eta_1 x + \eta_3 T) + \frac{a_0 - \eta_0}{\eta_2} \left[e^{-\eta_0 t} \sin(\eta_1 x + \eta_2 t + \eta_3 T) - e^{-a_0 t} \sin(\eta_1 x + \eta_3 T) \right] \right\}, \quad (4.9)$$

$$\int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \varphi_1^{(664)}(x, \tau) d\tau$$

получим из $\varphi_1^{(664)}(x, \tau)$, заменив, соответственно, (4.6) на (4.7) и (4.8) на (4.9) при $\eta_0 = T = 0$, $\eta_1 = L_{21}$ и $\eta_2 = \pm \omega$,

$$\int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{\xi_0} e^{-(r^*+m_1)\tau} \varphi_{11}(x, r^*) dr^* \right] d\tau = - \int_0^t \frac{e^{-a_0 t} - e^{-(r^*+m_1)t}}{a_0 - r^* - m_1} \varphi_{11}(x, r^*) dr^* ;$$

$$\int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{m_1} e^{(r^*-m_1)\tau} \varphi_{12}(r^*, x) dr^* \right] d\tau = - \int_0^{m_1} \frac{e^{-a_0 t} - e^{-(r^*-m_1)t}}{a_0 + r^* - m_1} \varphi_{12}(x, r^*) dr^* ;$$

$$\int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \left[\int_0^{m_2} e^{-m_1\tau} \varphi_{13}(x, r_*, \tau) dr_* \right] d\tau$$

получим из $\int_0^{m_2} e^{-m_1\tau} \varphi_{13}(x, r_*, \tau) dr_*$, заменив, соответственно, (4.6) на (4.7) и (4.8) на

(4.9) при $\eta_0 = m_1$, $\eta_2 = r_*$ и $\eta_1 = L_{47}^{(\pm)}$, $\eta_3 = 0$.

Аналогично вычисляется $(p + a_0)^{-1} \tilde{\varphi}_v(x, p) = \varphi_{1v}$ ($v = 2, 3, 4$).

Принимая во внимание, что

$$e^{-ST} \Phi(S) \xrightarrow{\cdot} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ \Phi(t-T) & \text{при } t \geq T \end{cases} \quad (4.10)$$

и учитывая $(p+a_0)^{-1} \tilde{\varphi}_k(x,p) \xrightarrow{\cdot} \int_0^t e^{-a_0(t-\tau)} \varphi_k(x,\tau) d\tau = \Psi_{1k}(x,t)$ ($k=\overline{1,4}$), опреде-

лим кусочно-непрерывные по времени решения данной задачи в следующем виде:
для перемещения скелета

$$u^{(s)}(x,t) = \frac{u_0}{R\rho_{12} - Q\rho_{22}} [\Psi_{11}(x,t)], \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$u^{(s)}(x,t) = \frac{u_0}{R\rho_{12} - Q\rho_{22}} [\Psi_{11}(x,t) - \Psi_{12}(x,t-T)], \quad t \geq T; \quad (4.11)$$

для перемещения жидкости –

$$u^{(f)}(x,t) = -\frac{u_0}{R\rho_{12} - Q\rho_{22}} [\Psi_{13}(x,t)], \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$u^{(f)}(x,t) = -\frac{u_0}{R\rho_{12} - Q\rho_{22}} [\Psi_{13}(x,t) - \Psi_{14}(x,t-T)], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.12)$$

Давление жидкости в порах определяется из соотношения

$$P(x,t) = -\frac{1}{m} \left[Q \frac{\partial u^{(s)}(x,t)}{\partial x} + R \frac{\partial u^{(f)}(x,t)}{\partial x} \right]. \quad (4.13)$$

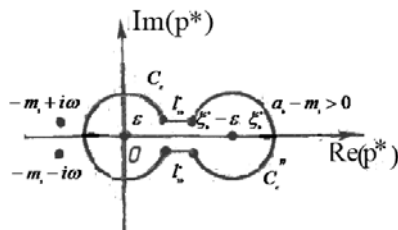


Рис. 3

Часто вычисляют действительный определен-
ный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, рассмат-
ривая его как часть комплексного контур-
ного интеграла $\int_C f(z) dz$, принимая, что
контур C включает интервал (a,b) дейст-
вительной оси. Поэтому для применения
теории вычетов продолжим аналитически
подынтегральные функции в комплекс-

ную плоскость.

В качестве примера запишем интеграл следующего вида:

$$I = -\int_0^{\xi_0^*} \frac{e^{-a_0 t} - e^{-(r^*+m_1)t}}{a_0 - r^* - m_1} \varphi_{11}(x, r^*) dr^* = \int_0^{\xi_0^*} \varphi_{11}^*(x, r^*) dr^*. \quad (4.14)$$

Рассмотрим расширенную комплексную плоскость $D(P^*)$ с разрезом $[0; \xi_0^*]$ и замкнутым контуром C_ε , имеющим вид «гантели». Контур состоит из окружностей C_ε' ($|P^*| = \varepsilon$), C_ε'' ($|P^* - \xi_0^*| = \xi_0^* - \varepsilon$) и отрезков l_{10}^* ($\varepsilon \leq r^* \leq \xi_0^* - \varepsilon$), l_{20}^* ($\varepsilon \leq r^* \leq \xi_0^* - \varepsilon$), лежащих, соответственно, на верхнем и нижнем берегах разреза (рис. 3).

Подынтегральная функция φ_{11}^* однозначна внутри контура C_ε и имеет полюсы $p^* = -m_1 \pm i\omega$, $p^* = a_0 - m_1$.

По второй теореме о вычетах для расширенной комплексной плоскости имеем [19]:

$$\int_{C_\varepsilon} \varphi_{11}^*(p^*) dp^* = 2\pi i \left[\operatorname{Res}_{p^*=-m_1+i\omega} \varphi_{11}^*(p^*) + \operatorname{Res}_{p^*=-m_1-i\omega} \varphi_{11}^*(p^*) + \operatorname{Res}_{p^*=a_0-m_1} \varphi_{11}^*(p^*) + \operatorname{Res}_{p^*=\infty} \varphi_{11}^*(p^*) \right], \quad (4.15)$$

причем ε выбрано настолько малым, чтобы все полюсы функции $\varphi_{11}^*(p^*)$ лежали вне разреза.

Так как при $p^* \rightarrow \infty$, $\varphi_{11}^*(p^*) \rightarrow 0$, то $\operatorname{Res}_{p^*=\infty} \varphi_{11}^*(p^*) = 0$.

Положим $p^* = r^* e^{i\phi}$, на верхнем крае разреза: $\phi = 0$ и функция $\varphi_{11}^*(p^*)$ – положительна, на нижнем крае разреза: $\phi = 2\pi$ и функция $\varphi_{11}^*(p^*)$ – отрицательна.

С другой стороны, левая часть выражения (4.15) равна сумме интегралов

$$\int_{C_\varepsilon} \varphi_{11}^*(p^*) dp^* = \int_{C'_\varepsilon} \varphi_{11}^*(p^*) dp^* + \int_{\varepsilon}^{\zeta_0^*-\varepsilon} \varphi_{11}^*(r^*) dr^* + \int_{C''_\varepsilon} \varphi_{11}^*(p^*) dp^* - \int_{\zeta_0^*-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_{11}^*(r^*) dr^*. \quad (4.16)$$

На окружностях C'_ε и C''_ε подынтегральная функция ограничена. Поэтому интегралы по окружностям C'_ε и C''_ε стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Переходя в равенстве (4.16) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, из (3.2) получим

$$I = \int_0^{\zeta_0^*} \varphi_{11}^*(r^*) dr^* = \pi i \left[\operatorname{Res}_{s=-m_1+i\omega} \varphi_{11}^*(p^*) + \operatorname{Res}_{p^*=-m_1-i\omega} \varphi_{11}^*(p^*) + \operatorname{Res}_{p^*=a_0-m_1} \varphi_{11}^*(p^*) \right].$$

Процедура вычисления этих вычетов подобна уже изложенной. Результаты, в связи с их громоздкостью, не приводим.

§5. Обсуждение результатов.

Решением поставленной задачи являются формулы (4.11) – (4.13), содержащие выражения для перемещений и давления жидкости и скелета. К основным результатам относятся также формулы (2.4) – (2.6), дающие выражения для них в пространстве изображений Лапласа. Подробное описание процедуры получения указанных формул, наряду с полученными на их основании выводами физико-механического и кинематического характера, является основными результатами исследования.

Прежде всего, отметим, что процесс движения волн на стадии воздействия начального импульса T отличается от процесса движения после прекращения такого воздействия. Об этом свидетельствуют две различные записи, (4.11) и (4.12), для соответствующих стадий. Записи аналитически различны, но первая непрерывно переходит во вторую.

Из анализа результатов видно, что полученное решение обобщает результаты, изложенные в [19, 20], дополняя их новыми составляющими, которые описывают новые механические эффекты и более полно отражают реологические свойства смеси.

В отличие от существующих исследований для случая постоянного оператора дилатации, в данном исследовании учтено, следуя [18], развитие объемной деформации во времени.

С учетом вязкоупругости матрицы, в формулах (4.11), (4.12) появился ряд кинематических изменений, в частности, замедление фильтрационных динамических процессов.

В результате вычисления вычетов в полюсах $\pm i\omega$ описаны гармонические волны частоты ω , зависящие от параметров ползучести.

Стационарная часть решения состоит из двух гармонических волн с существенно отличающимися фазовыми переменными $-[L_{21}x \pm \omega t], [L_{21}x \pm \omega(T+t)]$. Кроме того, каждая стационарная волна имеет амплитуду, содержащую экспоненциальный множитель вида $e^{-L_{20}x}$, и затухает по мере возрастания переменной x . Волновое число L_{21} и показатель L_{20} нелинейно зависят от частоты ω и ω' ($\gamma = 1 - \alpha$), а также от параметров ползучести α, κ, β .

Вторая часть решения состоит из двух стоячих волн с амплитудами, экспоненциально затухающими со временем $e^{-a_0 t} \cos(a_{21}x), e^{-a_0 t} \cos(a_{21}x \pm \omega T), e^{-a_0 t} \sin(a_{21}x),$

$e^{-a_0 t} \sin(a_{21}x \pm \omega T)$ ($a_0 = b \frac{R+Q}{Q\rho_{22} - R\rho_{12}}$). Причем затухание прямо определяется через коэффициент межфазового взаимодействия и не зависит от частоты ω .

Диффузионное взаимодействие в модели Био имеет следствием затухание всех волн. Это следует из формул (2.4) – (2.6).

Показатели, содержащие параметр ползучести γ ($\gamma = 1 - \alpha$), существенно влияют на характер распределения напряжений и перемещений в среде. Эта особенность приводит к новым интегралам, вследствие чего изменяется нестационарная часть решения задачи. (Общее изложение процедуры вычисления интегралов с помощью теории вычетов также приведено выше).

Результаты исследования могут быть использованы при решении задач механики насыщенных пористых сред и пористых композитных материалов, матрицы которых обладают свойством последействия.

РЕЗЮМЕ. Розв'язувана задача є прямою аналогією задачі, дослідженої раніше для насиченого пружного матеріалу, на випадок пористої насиченої рідиною в'язко-пружного середовища. В якості теоретичної моделі середовища використовується класична лінійна схема Біо. Система зв'язаних інтегрально-диференціальних рівнянь для переміщень скелета і рідини отримані за допомогою принципу Вольтера і операторного методу Работнова. Поширення лінійно-пружних хвиль вивчається для півпростору, на граничній поверхні якого діє гармонічний короткочасний імпульс заданої частоти. Викладено процедуру розв'язання задачі за методом перетворення Лапласу за часом. Побудований аналітичний розв'язок задачі в просторі зображень Лапласа з врахуванням в'язко-пружності скелета, процедура оберненого перетворення детально описана.

1. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М.: Высшая шк., 1978. – 477 с.
2. Городецкая Н.С. Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акуст. вестник. – 2007. – **10**, №2. – С.43 – 63.
3. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. Определение материальных функций пористой среды наследственного типа // Theses of the XV Int. Conf. "Dynamical system modeling and stability investigation". May 25–27, 2011. – Kyiv – 2011. – P. 276.
4. Исрафилов Р.М., Савельева Е.В. К определению ядер наследственного уравнения насыщенной жидкостью пористой среды (Био) // Тези XIV міжнарод. конф. ім. акад. М.Кравчука (Київ). – 2012. – **I**. – С.194 – 197.
5. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Г., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. – М.: Наука, 1970. – 335 с.

6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
8. Berryman J. G. Confirmation of Biot's theory // Appl. Phys. Lett. – 1980. – **37**. – P.382 – 384.
9. Biot M. A. Theory of elasticity and consolidation of an anisotropic porous medium // Collection of translations and reviews of foreign periodicals. – 1956.– N 1. – P. 140 – 146.
10. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – **28**, N 2. – P. 168 –191.
11. Boyle F. A., Chotiros N. P. Experimental detection of a slow acoustic wave in sediment at shallow grazing angles // J. Acoust. Soc. Am. – 1992. – **91**. – P. 2615 – 2619.
12. Chabot L. Single-Well Imaging Using Full-Waveform Sonic Data // PhD Thesis. University of Calgary. – 2003.
13. Golub V.P., Pavluk Ya.V., Fernaty P.V. Determining the Parameters of Fractional Exponential Hereditary Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 220 – 232.
14. Golub V.P., Kobzar` Yu.M., Ragulina V.S. Determining the Parameters of the Heredity Kernels of Nonlinear Viscoelastic Materials in Tension // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 102 – 109.
15. Hashin Z., Shtrickman S. Note on a variational approach to the theory of composite elastic materials // J. Franklin Inst. – 1961. – 271 p.
16. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Long-Term Damage of Homogeneous and Composite Materials of Stochastic Structure (Review) // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 7 – 55.
17. Khoroshun L.P., Shikula E.N. Deformation and Damage of Composite materials of Stochastic Structure: Physically Nonlinear Problems (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 130 – 142.
18. Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J. The Rock Physics Handbook. – Cambridge: Univ. Press, 1998. – 648 p.
19. Rushchitskiy Ya.Ya., Israfilov R.M. Waves in Saturated Porous Half-Space. Part I // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 4. – P. 520 – 527.
20. Rushchitskiy Ya.Ya., Israfilov R.M. Waves in Saturated Porous Half-Space. Part II // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 5. – P. 570 – 681.
21. Stoll R. Acoustic waves in ocean sediments // Geophysics. – 1977. – **42**, N 4. – P. 715 – 725.
22. Tsiklauri D. Phenomenological model of propagation of the elastic waves in a fluid-saturated porous solid with non-zero boundary slip velocity // J. Acoust. Soc. Am. – 2002. – **112**. – P.843 – 849.
23. Tsiklauri D., Beresnev I. Properties of Elastic Waves in a Non-Newtonian Fluid Saturated Porous Medium // Transport in Porous Media. – 2003. – **53**. – P. 39 – 50.

Поступила 05.09.2011

Утверждена к печати 29.05.2014