

М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕРМОВЯЗКО-УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТРЕТЬЕГО ИНВАРИАНТА ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The procedure of numerical investigation of thermoviscoelastoplastic stress-strain state of thin layered shells of revolution under axisymmetric loading is offered. The constitutive equations describing the non-elastic deformation processes of isotropic material with allowance for the stress deviator third invariant are used. The numerical results are given.

**Key words:** thermoviscoelastoplastic stress-strain state, constitutive equations, the stress deviator third invariant, method of successive approximations, shell of revolution

**Введение.**

В современной литературе интенсивно разрабатываются методы решения краевых задач термовязкопластичности. Некоторые из них [4, 12, 13 и др.] основаны на использовании вариантов классических определяющих уравнений [1, 9 – 11], описывающих процессы термовязкопластического деформирования изотропных материалов. В ряде работ предложены методы на основе определяющих уравнений, учитывающих в той или иной степени зависимость свойств материалов от вида нагружения. В частности, изложенные в [17, 18] методы используют уравнения вязкопластичности [16] для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию.

В данной работе методика решения осесимметричных задач термовязкопластичности для тонких оболочек разработана на основе экспериментально обоснованных уравнений термовязкопластичности [14, 15]. Эти уравнения описывают процессы термовязкоупругопластического деформирования изотропных материалов по траекториям малой кривизны с учетом зависимости их свойств от вида напряженного состояния (ВНС), который характеризуется углом ВНС [1] и вычисляется через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Связь между компонентами тензоров напряжений и линейных частей деформаций (которые для простоты ниже будем называть деформациями) записана в предположении, что деформации состоят из упругих и неупругих составляющих, а девиаторы напряжений и дифференциалов неупругих деформаций – соосны. Уравнения содержат две нелинейные зависимости, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из них выражает связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая – связь между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. Для конкретизации этих зависимостей используются две серии базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных постоянных значениях угла ВНС и нескольких значениях температуры из рассматриваемого диапазона. В первой серии проводятся опыты на мгновенное деформирование образцов, т.е. со скоростями нагружения, не влияющими на форму получаемых зависимостей. Во второй серии выполняются опыты на ползучесть, сопряженные с опытами первой серии по скоростям первоначального нагружения. В случае, когда связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций является линейной, а связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжения и деформации не зависит от ВНС и определяется из опытов на простое рас-

тяжение образцов, рассматриваемые определяющие уравнения превращаются в широко используемые соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4], которые совпадают с традиционными уравнениями [1, 9 и др.] теории пластического течения, ассоциированными с условием Мизеса.

В развитие [5, 8] в данной работе изложен метод решения осесимметричных задач термовязкопластичности для тонких слоистых оболочек с учетом зависимости свойств материалов от температуры и ВНС с использованием определяющих уравнений [14, 15].

### §1. Постановка задачи и основные соотношения.

Рассмотрим оболочку вращения, слои которой изготовлены из изотропных материалов, находящуюся в начальный момент времени  $t = t_0$  в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре  $T = T_0$ , а затем подвергнутую осесимметричному неравномерному нагреву и воздействию силовых нагрузок (кроме крутящих). Предполагаем, что между слоями оболочки осуществляется идеальный механический контакт. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta, \zeta$ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью, где  $s$  ( $s_a \leq s \leq s_b$ ) и  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – меридиональная и окружная координаты, а  $\zeta$  ( $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_l$ ) – координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности;  $\zeta_0$  соответствует внутренней поверхности первого (внутреннего) слоя оболочки, а  $\zeta_l$  – наружной поверхности последнего (внешнего) слоя;  $l$  – количество слоев, толщины которых  $h_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}, i = 1, 2, \dots, l$ . В качестве координатной поверхности принимаем срединную поверхность либо одну из поверхностей слоев.

Температурное поле оболочки предполагаем известным из решения соответствующей задачи теплопроводности или из каких-либо других источников. Принимаем, что в процессе нагружения оболочки ее материалы деформируются в пределах и за пределами упругости, деформации ползучести соизмеримы с упругими и пластическими составляющими и в областях неупругих деформаций может происходить упругая разгрузка. При формулировке краевой задачи используем подход Коши [14, 15], в соответствии с которым все уравнения записываем в вышеприведенной системе координат, связанной с недеформированной координатной поверхностью. Задачу о напряженно-деформированном состоянии (НДС) оболочки решаем в геометрически линейной квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа – Лява для пакета слоев. Для описания деформирования материалов будем использовать соотношения термовязкопластичности [14, 15] с учетом ВНС и теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4], не учитывающей ВНС, линеаризованные методом дополнительных напряжений. Задачу о НДС оболочки решаем методом последовательных приближений.

Для решения задачи процесс нагружения разбиваем на ряд малых этапов таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала разгрузки в элементах оболочки. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения и физические уравнения. Уравнения равновесия имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \frac{d(rN_s)}{ds} - \cos\varphi N_\theta + \frac{r}{R_s} Q_s + r q_s = 0; \quad \frac{d(rQ_s)}{ds} - \sin\varphi N_\theta - \frac{r}{R_s} N_s + r q_\zeta = 0; \\ \frac{d(rM_s)}{ds} - \cos\varphi M_\theta - r Q_s = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $N_s, N_\theta, Q_s$  – усилия;  $M_s, M_\theta$  – моменты;  $\mathcal{S}_s$  – угол поворота нормали к координатной поверхности в меридиональной плоскости;  $r$  – радиус параллельного круга,  $R_s$  – радиус кривизны меридиана координатной поверхности оболочки;  $\pi - \varphi$  – угол между нормалью к координатной поверхности и осью  $z$ , совмещенной с осью вра-

щения оболочки;  $q_s, q_\zeta$  – распределенные нагрузки, приведенные к координатной поверхности.

Геометрические соотношения имеют вид [3]

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_s}; & \varepsilon_\theta &= \frac{\cos \varphi}{r} u + \frac{\sin \varphi}{r} w; \\ \kappa_s &= \frac{d\mathcal{G}_s}{ds}; & \kappa_\theta &= \frac{\cos \varphi}{r} \mathcal{G}_s; & \mathcal{G}_s &= -\frac{dw}{ds} + \frac{u}{R_s}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

В формулах (1.2)  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$  – деформации и изменения кривизны координатной поверхности оболочки в направлениях  $s$  и  $\theta$ ;  $u, w$  – перемещения ее точек в направлениях  $s, \zeta$ . Переход от компонент  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$  к компонентам деформации  $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}$  в произвольной точке оболочки (в предположении, что можно пренебречь по сравнению с единицей величинами  $\zeta/R_s, \zeta/R_\theta$ , где  $R_\theta$  – радиус кривизны координатной поверхности в окружном направлении) осуществляется с помощью формул

$$\varepsilon_{ss} = \varepsilon_s + \zeta \kappa_s; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_\theta + \zeta \kappa_\theta. \quad (1.3)$$

Связь между компонентами тензоров напряжений  $\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}$  и деформаций  $\varepsilon_{ss}; \varepsilon_{\theta\theta}; \varepsilon_{\zeta\zeta}$  в произвольной точке оболочки на  $k$ -м этапе нагружения представим в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\sigma_{ss} = A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{1D}; \quad \sigma_{\theta\theta} = A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_{2D}; \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{1-2\nu}{1-\nu}(e_{ss}^{(n)} + e_{\theta\theta}^{(n)}) + \frac{1+\nu}{1-\nu}(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}); \quad (1.5)$$

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad (1.6)$$

$$A_{1D} = A_{11} \left[ e_{ss}^{(n)} + \nu e_{\theta\theta}^{(n)} + (1+\nu)(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}) \right];$$

$$A_{2D} = A_{11} \left[ e_{\theta\theta}^{(n)} + \nu e_{ss}^{(n)} + (1+\nu)(\varepsilon_T + \varepsilon_0^{(p)} + \varepsilon_0^{(c)}) \right]; \quad (1.7)$$

$E$  и  $\nu$  – зависящие от температуры модуль упругости и коэффициент Пуассона материала соответствующего слоя;  $E = 2G(1+\nu)$ ;  $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$ ;  $G$  – модуль сдвига;  $\alpha_T$  – коэффициент линейного теплового расширения материала,

$$\varepsilon_0^{(p)} = \frac{\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)} + \varepsilon_{\zeta\zeta}^{(p)}}{3}; \quad \varepsilon_0^{(c)} = \frac{\varepsilon_{ss}^{(c)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(c)} + \varepsilon_{\zeta\zeta}^{(c)}}{3};$$

$e_{ss}^{(n)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) – компоненты девиатора неупругих составляющих деформаций, которые определяются как суммы приращений  $\Delta_k e_{ss}^{(n)}$  ( $s \rightarrow \theta$ ) этих составляющих

$$e_{ss}^{(n)} = \sum_{i=1}^k \Delta_i e_{ss}^{(n)} \quad (s \rightarrow \theta). \quad (1.8)$$

Для определения  $\varepsilon_0^{(p)}$  и  $\varepsilon_0^{(c)}$  используем зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений  $\sigma_0 = (\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta})/3$  и деформаций  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\zeta\zeta})/3$  вида

$$\sigma_0 = F_1(\varepsilon_0^*, T, \omega_\sigma); \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_0^* = \varepsilon_0 - \varepsilon_T - \varepsilon_0^{(c)}; \quad (1.10)$$

$$\varepsilon_0^{(c)} = \sum_{i=1}^k \Delta_i \varepsilon_0^{(c)}; \quad (1.11)$$

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad (0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3); \quad (1.12)$$

$$S = \left[ (\sigma_{ss}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\theta\theta}) / 3 \right]^{1/2}; \quad (1.13)$$

$\omega_\sigma$  – угол ВНС;  $I_3(D_\sigma)$  – третий инвариант девиатора напряжений;  $S$  – интенсивность касательных напряжений. Приращение  $\Delta_k \varepsilon_{ss}^{(n)}$  на произвольном  $k$ -ом этапе нагружения определяется выражением

$$\Delta_k \varepsilon_{ss}^{(n)} = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{3S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(n)} \quad (s \rightarrow \theta), \quad (1.14)$$

где  $\Delta_k \Gamma^{(n)}$  – приращение интенсивности неупругих деформаций сдвига,

$$\Delta_k \Gamma^{(n)} = \Delta_k \Gamma^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(c)}; \quad (1.15)$$

$\Delta_k \Gamma^{(p)}$  и  $\Delta_k \Gamma^{(c)}$  – приращения интенсивностей мгновенных накопленных пластических деформаций сдвига и деформаций ползучести. Угловыми скобками в (1.14) обозначено среднее за этап значение заключенной в них величины. Для определения  $\Delta_k \Gamma^{(p)}$  используем предположение о существовании зависимости вида

$$S = F_2(\Gamma^*, T, \omega_\sigma), \quad (1.16)$$

где  $\Gamma^*$  – интенсивность мгновенных деформаций сдвига,

$$\Gamma^* = \frac{S}{2G} + \Gamma^{(p)}; \quad \Gamma^{(p)} = \sum_{i=1}^k \Delta_i \Gamma^{(p)}. \quad (1.17)$$

Функции  $F_1$  (1.9) и  $F_2$  (1.16) вычисляем по результатам первой серии вышеупомянутых базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов, как это описано в работах [5, 8, 14, 15]. Для определения  $\Delta_k \varepsilon_0^{(c)}$  и  $\Delta_k \Gamma^{(c)}$  используем результаты второй серии базовых опытов на деформирование образцов в условиях ползучести. В [15] предлагается использовать аппроксимирующие выражения вида

$$\dot{\Gamma}^{(c)}(S, T, \omega_\sigma) = \exp(c_2 \ln(c_1 S) + c_3 + c_4 T + c_5 \omega_\sigma + c_6 \omega_\sigma^2); \quad (1.18)$$

$$\dot{\varepsilon}_0^{(c)}(\sigma_0, T, \omega_\sigma) = \exp(d_2 \ln(d_1 \sigma_0) + d_3 + d_4 T + d_5 \omega_\sigma + d_6 \omega_\sigma^2), \quad (1.19)$$

где  $c_i, d_i, i = 1, \dots, 6$  – коэффициенты, вычисленные из условия наилучшей аппроксимации выражениями (1.18), (1.19) экспериментальных данных. Тогда имеем

$$\Delta_k \varepsilon_0^{(c)} = \dot{\varepsilon}_0^{(c)} \Delta_k t; \quad \Delta_k \Gamma^{(c)} = \dot{\Gamma}^{(c)} \Delta_k t, \quad (1.20)$$

где  $\Delta_k t = t_k - t_{k-1}$  – продолжительность этапа.

Приведенные определяющие уравнения (1.4), (1.5) отличаются от аналогичных соотношений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4], не учитывающих ВНС, наличием  $\varepsilon_0^{(p)}$  и  $\varepsilon_0^{(c)}$  в (1.5) и (1.7). В том случае, когда функция

$F_1$  (1.9) принимается в виде  $\sigma_0 = K(\varepsilon_0 - \varepsilon_T)$ ,  $K = E / (1 - 2\nu)$ , имеем  $\varepsilon_0^{(p)} = 0$  и  $\varepsilon_0^{(e)} = 0$ ; выражения (1.5) и (1.7) зависят только от неупругих составляющих деформаций (1.8), которые вычисляем с использованием функции  $F_2(\Gamma^*, T, \omega_\sigma)$  (1.16). В случае, когда функция (1.16) не зависит от вида напряженного состояния и определяется по результатам опытов на одноосное мгновенное растяжение образцов (т.е.  $\omega_\sigma = \pi/3$ ), и соответствующим диаграммам ползучести, уравнения (1.4) – (1.7) превращаются в уравнения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [4].

Используем соотношения (1.4) для получения связи между усилиями, моментами и деформациями координатной поверхности оболочки. Для этого в выражения для усилий и моментов подставим (1.4), в которых заменим деформации в произвольной точке оболочки их выражениями (1.3). Тогда получим формулы

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)}; \\ N_\theta &= C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)}; \\ M_s &= C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}; \\ M_\theta &= C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$C_{mn}^{(j)} = \sum_{i=1}^l \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} A_{mn}^{(i)} \zeta^j d\zeta; \quad N_{mD}^{(j)} = \sum_{i=1}^l \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} A_{mD}^{(i)} \zeta^j d\zeta \quad (m, n = 1, 2; j = 0, 1, 2). \quad (1.22)$$

Таким образом, получены все основные соотношения для решения задачи об осесимметричном НДС слоистой оболочки с учетом ВНС – уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения.

## §2. Система разрешающих уравнений.

Соотношения (1.21) вместе с (1.1) и (1.2) образуют систему 12 уравнений. Выберем в качестве основных неизвестных функции  $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$ , позволяющие непосредственно формулировать различные граничные условия. Выразив через основные неизвестные функции остальные неизвестные, приведем указанную систему к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \quad (2.1)$$

при граничных условиях

$$B_1 \vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1; \quad B_2 \vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (2.2)$$

где  $\vec{Y}$  – вектор-столбец разрешающих функций;  $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$ ,  $P(s)$  – матрица системы;  $\vec{f}(s)$  – вектор-столбец дополнительных слагаемых;  $B_1, B_2$  – заданные матрицы;  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  – заданные векторы-столбцы граничных условий. Элементы матрицы  $P(s)$  вычисляем по формулам

$$\begin{aligned} p_{11} &= -\frac{\cos \varphi}{r} (1 + \lambda_1); \quad p_{13} = -\frac{\cos \varphi}{r} \lambda_2; \quad p_{14} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_1 C_{12}^{(0)} + C_{22}^{(0)} + \lambda_2 C_{12}^{(1)}); \quad p_{15} = p_{14} \operatorname{tg} \varphi; \\ p_{16} &= -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_3 C_{12}^{(0)} + \lambda_4 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(1)}); \quad p_{21} = \frac{1}{R_s} - \frac{\lambda_1 \sin \varphi}{r}; \quad p_{22} = -\frac{\cos \varphi}{r}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{23} &= -\frac{\sin \varphi}{r} \lambda_2; \quad p_{24} = p_{15}; \quad p_{25} = p_{15} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{26} = p_{16} \operatorname{tg} \varphi; \quad p_{31} = -p_{22} \lambda_3; \quad p_{32} = -1; \\
p_{33} &= -\frac{\cos \varphi}{r} (1 - \lambda_4); \quad p_{34} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_1 C_{12}^{(1)} + C_{22}^{(1)} + \lambda_2 C_{12}^{(2)}); \quad p_{35} = p_{34} \operatorname{tg} \varphi; \\
p_{36} &= -\frac{\cos^2 \varphi}{r^2} (\lambda_3 C_{12}^{(1)} - C_{22}^{(2)} + \lambda_4 C_{12}^{(2)}); \quad p_{41} = \frac{C_{11}^{(2)}}{\delta}; \quad p_{42} = 0; \quad p_{43} = -\frac{C_{11}^{(1)}}{\delta}; \quad p_{44} = -\lambda_1 p_{22}; \\
p_{45} &= -p_{21}; \quad p_{46} = -p_{31}; \quad p_{51} = p_{52} = p_{53} = 0; \quad p_{54} = -p_{12}; \quad p_{55} = 0; \quad p_{56} = -1; \\
p_{61} &= p_{43}; \quad p_{62} = 0; \quad p_{63} = \frac{C_{11}^{(0)}}{\delta}; \quad p_{64} = -p_{13}; \quad p_{65} = -p_{23}; \quad p_{66} = \lambda_4 p_{22}; \quad (2.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(0)} C_{11}^{(2)}) / \delta; \quad \lambda_2 = (C_{11}^{(1)} C_{12}^{(0)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(0)}) / \delta; \\
\lambda_3 &= (C_{11}^{(2)} C_{12}^{(1)} - C_{12}^{(2)} C_{11}^{(1)}) / \delta; \quad \lambda_4 = (C_{11}^{(0)} C_{12}^{(2)} - C_{12}^{(1)} C_{11}^{(2)}) / \delta; \\
\delta &= C_{11}^{(0)} C_{11}^{(2)} - (C_{11}^{(1)})^2.
\end{aligned}$$

Компоненты вектора  $\vec{f}(s)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\frac{\cos \varphi}{r} [\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_s; \quad f_2 = -\frac{\sin \varphi}{r} [\lambda_1 N_{1D}^{(0)} + \lambda_2 N_{1D}^{(1)} + N_{2D}^{(0)}] - q_c; \\
f_3 &= \frac{\cos \varphi}{r} [\lambda_3 N_{1D}^{(0)} + \lambda_4 N_{1D}^{(1)} - N_{2D}^{(0)}]; \quad f_4 = \frac{C_{11}^{(2)} N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(1)} N_{1D}^{(1)}}{\delta}; \quad (2.4) \\
f_5 &= 0; \quad f_6 = -\frac{C_{11}^{(1)} N_{1D}^{(0)} - C_{11}^{(0)} N_{1D}^{(1)}}{\delta}.
\end{aligned}$$

Из выражений (2.3), (2.4) видно, что матрица системы зависит от термоупругих характеристик материалов оболочки и параметров ее геометрии, а компоненты вектора  $\vec{f}(s)$  еще и от неупругих составляющих деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений с использованием функций (1.9), (1.16).

### §3. Алгоритм решения краевой задачи.

Принимаем, что известны форма меридиана оболочки, количество слоев и их толщины, условия закрепления, действующие нагрузки и законы их изменения. Предполагаем, что для каждого материала оболочки известны функции  $F_1$  (1.9) и  $F_2$  (1.16) при нескольких постоянных значениях температуры и угла  $\omega_\sigma$ , а также коэффициенты Пуассона и линейного теплового расширения в зависимости от температуры. Также должны быть заданы коэффициенты аппроксимирующих выражений (1.18), (1.19) для учета деформаций ползучести. Для решения задачи процесс нагружения необходимо разбить на ряд этапов. На первом этапе удобно выбрать уровень нагрузок так, чтобы оболочка деформировалась в пределах упругости. Тогда в выражениях (1.5), (1.7) полагаем  $e_{ss}^{(n)} = e_{\theta\theta}^{(n)} = 0$ ,  $\varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_0^{(c)} = 0$  и решаем задачу термоупругости (2.1), (2.2) для рассматриваемой оболочки. Получим НДС оболочки на первом этапе. Выстраивая процесс последовательных приближений на втором и любом из следующих этапов, будем использовать компоненты НДС, соответствующие концу предыдущего этапа. Начиная процесс последовательных приближений на втором или произвольном  $k$ -м этапе, предполагаем,

что известны значения  $(\sigma_{ss})_{k-1}$ ,  $(\sigma_{\theta\theta})_{k-1}$ ,  $(e_{ss}^{(n)})_{k-1}$ ,  $(e_{\theta\theta}^{(n)})_{k-1}$ ,  $(\Gamma^{(p)})_{k-1}$ ,  $(\varepsilon_0^{(p)})_{k-1}$ ,  $(\varepsilon_0^{(c)})_{k-1}$ . Используя  $(e_{ss}^{(n)})_{k-1}$ ,  $(e_{\theta\theta}^{(n)})_{k-1}$  и  $(\varepsilon_0^{(p)})_{k-1}$ ,  $(\varepsilon_0^{(c)})_{k-1}$ , вычисляем  $A_{1D}$ ,  $A_{2D}$  (1.7) и решаем краевую задачу (2.1), (2.2) при нагрузках и граничных условиях, соответствующих концу данного этапа. Получив значения компонент НДС, определим  $\varepsilon_0$  и  $\omega_\sigma$  (1.12) и вычислим  $\varepsilon_0^*$  (1.10). Путем линейной интерполяции по температуре и углу  $\omega_\sigma$ , определим соответствующую кривую  $F_1$ , на которой определим значение  $\sigma_0$ , соответствующее  $\varepsilon_0^*$ , и вычислим  $\varepsilon_0^{(p)} = \varepsilon_0^* - \sigma_0/K$ . По значениям  $\sigma_0$ ,  $\omega_\sigma$  и температуры в конце этапа определим  $\Delta\varepsilon_0^{(c)} = \dot{\varepsilon}_0^{(c)} \cdot \Delta t$  и вычислим  $\varepsilon_0^{(c)} = (\varepsilon_0^{(c)})_{k-1} + \Delta\varepsilon_0^{(c)}$ . Затем вычислим  $\Delta_k \Gamma^{(p)}$ . Для этого путем линейной интерполяции по температуре и углу  $\omega_\sigma$  определим соответствующую кривую  $F_2$  и на ней вычислим значение  $S^{(d)}$ , соответствующее значению

$$\Gamma^* = \Gamma_{k-1}^{(p)} + \Delta_k \Gamma^{(p)} + \frac{S}{2G}, \quad (3.1)$$

где  $S$  вычислено по формуле (1.13). В общем случае в произвольном  $M$ -том приближении на  $k$ -том этапе имеем

$$\Delta_k \Gamma^{(p)} = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma^{(p)} + \frac{S - S^{(d)}}{2G}. \quad (3.2)$$

Определим величину  $\dot{\Gamma}^{(c)}$  (1.18) для значений  $S^{(d)}$ ,  $\omega_\sigma$  и температуры в конце этапа и вычислим  $\Delta_k \Gamma^{(c)}$  (1.20). Далее определим  $\Delta_k \Gamma^{(n)}$  (1.15), а затем приращения компонент девиатора неупругих деформаций (1.14) и значения этих компонент (1.8). Имея уточненные значения  $\varepsilon_0^{(p)}$ ,  $\varepsilon_0^{(c)}$ ,  $e_{ss}^{(n)}$ ,  $e_{\theta\theta}^{(n)}$ , уточняем  $A_{1D}$ ,  $A_{2D}$  (1.7), после чего можно решить краевую задачу (2.1), (2.2) в новом приближении. Таким образом, каждое новое приближение на текущем этапе выполняем, используя результаты решения задачи в предыдущем приближении и на предыдущем этапе. Процесс последовательных приближений на этапе продолжаем до выполнения условий

$$\left| \frac{\sigma_0 - F_1(\varepsilon_0^*, T, \omega_\sigma)}{K} \right| \leq \delta_1; \quad \left| \frac{S - F_2(\Gamma^*, T, \omega_\sigma)}{2G} \right| \leq \delta_2, \quad (3.3)$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – заданные числа, характеризующие точность, с которой полученные в результате расчета значения  $\omega_\sigma$ ,  $\varepsilon_0^*$ ,  $\sigma_0$  и  $T$  удовлетворяют уравнению (1.9), а значения  $\omega_\sigma$ ,  $S$ ,  $\Gamma^*$  и  $T$  – уравнению (1.16). Расчетная практика свидетельствует, что  $\delta_1 < \delta_2$ .

Описанный алгоритм реализуется в том случае, когда в элементах тела происходит процесс активного нагружения. Для выяснения, происходит ли процесс активного нагружения или разгрузка, на произвольном этапе в каждом элементе тела, в котором возникли пластические деформации ( $\Gamma^{(p)} > 0$ ), после решения задачи в первом приближении необходимо выполнить проверку условия

$$\Delta \Gamma^{(p)} \geq 0. \quad (3.4)$$

Если условие (3.4) выполняется, это означает, что в данном элементе происходит активное нагружение, а в противном случае – разгрузка. Для ее учета в этом элементе тела необходимо положить  $\Delta \Gamma^{(p)} = 0$ ,  $\Delta \Gamma^{(c)} = 0$  и при определении  $A_{1D}$ ,  $A_{2D}$  использовать значения  $e_{ss}^{(n)}$ ,  $e_{\theta\theta}^{(n)}$  и  $\varepsilon_0^{(p)}$ ,  $\varepsilon_0^{(c)}$ , соответствующие концу предыдущего этапа, и с этими значениями  $A_{1D}$ ,  $A_{2D}$  решать краевую задачу в следующих приближениях данно-

го этапа. Правильность разбивки на этапы проверяется путем повторного расчета при уменьшении величины этапов. Процесс дробления этапов необходимо выполнять до тех пор, пока результаты расчетов компонент НДС оболочки с разбивками на разное количество этапов в конце исследуемого процесса не совпадут с заданной точностью.

#### §4. Числовые результаты.

Представим результаты решения некоторых задач, полученные при реализации вышеописанной методики. На конкретном примере рассмотрим практическую сходимость изложенного метода последовательных приближений в случае возникновения деформаций ползучести. Определим термовязкоупругопластическое НДС тонкой цилиндрической оболочки (из материала Х18Н10Т) радиуса срединной поверхности 10 см, длины 20 см, толщины 1 см, находящейся в начальный момент времени  $t = t_0 = 0$  при температуре  $T = T_0 = 20^\circ\text{C}$  в ненапряженном и недеформированном состоянии, а затем равномерно нагретой до температуры  $T = 580^\circ\text{C}$ , после чего подвергнутой действию растягивающего усилия  $N_s$ , равномерного внутреннего давления  $q_\zeta$  и дальнейшему равномерному нагреву. Числовые значения нагрузок и температуры при соответствующих значениях времени на 10 этапах нагружения заданы табл. 1. Эти данные соответствуют процессу деформирования трубчатого образца в эксперименте, описанном в [15].

Таблица 1

Номер этапа	$N_s^* \cdot 10^{-3}$ , Н/м	$q_\zeta^*$ , МПа	$T$ , °C	$t$ , мин
1	1641	8,26	590	0
2	1753	8,43	606	1,5
3	1874	8,79	615	3,3
4	1914	9,03	633	4,3
5	2006	9,30	642	5,5
6	2114	9,72	654	6,7
7	2184	10,39	660	8
8	2268	11,31	674	9,3
9	2287	11,65	682	10,8
10	2289	11,81	691	11,1

Данные о свойствах материала были заданы в виде таблиц функций [5, 8]  $F_1$  (1.9) и  $F_2$  (1.16) при значениях температуры  $T = 500^\circ\text{C}$ ,  $T = 700^\circ\text{C}$  и значениях угла  $\omega_\sigma = 0$ ,  $\omega_\sigma = \pi/6$ ,  $\omega_\sigma = \pi/3$ ;  $\nu = 0,27$ ;  $\alpha_T = 0,1 \cdot 10^{-4} \text{град}^{-1}$ .

В силу симметрии задачу решаем для половины оболочки. Граничные условия на произвольном  $k$ -ом этапе ( $1 \leq k \leq 10$ ) имеют вид  $s = s_a = 0$ ;  $u = Q_s = \mathcal{G}_s = 0$ ;  $s = s_b = 10 \text{ см}$ ;  $N_s = N_{sk}^*$ ;  $Q_s = \mathcal{G}_s = 0$ , где  $N_{sk}^*$  и  $q_{\zeta k}^*$  на каждом этапе задано табл. 1. При заданных условиях нагружения в оболочке осуществляется однородное НДС. Решение задачи получим вышеописанным методом последовательных приближений. Отметим, что решение этой задачи можно получить и без последовательных приближений. Это статически определяемая задача, значения напряжений в оболочке определяются нагрузками, а компоненты деформаций могут быть найдены из определяющих уравнений. Значения деформаций, вычисленные из определяющих уравнений, принимаем как точные, а полученные по вышеописанному алгоритму при различных значениях  $\delta_2$  (3.3), – как приближенные. Некоторые результаты расчетов приведены в табл. 2 – 4.

В первых столбцах таблиц 2 – 4 приведены номера этапов, в столбцах 2 – точные значения деформаций  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  и  $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ , соответственно, а в столбцах 3 и 4 – приближенные значения этих деформаций, полученные в процессе последовательных приближений при заданных значениях  $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-4}$  и  $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$ . В столбцах 5 (табл. 2 – 4) приведены значения деформаций, полученные при использовании соотношений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны без учета ВНС. Из табл. 2 – 4 следует, что с уменьшением числа  $\delta_2$  (3.3) приближенные значения стремятся к точным, а при  $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$  различия между приближенными и точными значениями деформаций не превышают нескольких единиц пятого знака. Таким образом, по предложенному алгоритму в процессе последовательных приближений можно получить результаты с заданной точностью.

Таблица 2

Номер этапа	$\varepsilon_{ss} \cdot 10^5$			
	Точное значение	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-4}$	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$	Без учета ВНС
1	1484	1469	1484	1464
2	1606	1592	1605	1577
3	2001	1910	2000	1807
4	2349	2260	2348	2009
5	2797	2697	2795	2266
6	3658	3511	3657	2578
7	4380	4220	4378	2783
8	6199	5838	6195	3118
9	7180	6792	7176	3231
10	7667	7271	7663	3307

Таблица 3

Номер этапа	$\varepsilon_{\theta\theta} \cdot 10^5$			
	Точное значение	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-4}$	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$	Без учета ВНС
1	605	605	605	598
2	623	623	623	612
3	625	628	625	615
4	635	638	635	627
5	632	635	632	626
6	613	618	613	624
7	617	622	617	625
8	675	684	675	639
9	746	755	746	649
10	792	800	792	661

Таблица 4

Номер этапа	$\varepsilon_{ss} \cdot 10^5$			
	Точное значение	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-4}$	Прибл. значение $\delta_2 = 1 \cdot 10^{-7}$	Без учета ВНС
1	-285	-270	-285	-280
2	-361	-347	-361	-355
3	-712	-624	-711	-556
4	-1003	-917	-1002	-713
5	-1400	-1303	-1399	-938
6	-2173	-2031	-2172	-1207
7	-2806	-2652	-2804	-1391
8	-4428	-4077	-4425	-1691
9	-5286	-4908	-5283	-1789
10	-5709	-5323	-5705	-1848

Сопоставляя значения деформаций, полученные в расчетах с использованием определяющих уравнений с учетом ВНС, со значениями, полученными при использовании теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны без учета ВНС, видим, что в последнем случае в конце исследуемого процесса компоненты деформаций  $\varepsilon_{ss}$  примерно в 2 раза, а деформаций  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  примерно в 3 раза меньше соответствующих значений, вычисленных с учетом ВНС. Расчеты также показали, что в конце исследуемого процесса в расчете с учетом ВНС интенсивность деформаций ползучести составляет 13% от интенсивности полных деформаций. В расчете без учета ВНС интенсивность деформаций ползучести оказалась пренебрежимо малой (порядка  $1 \cdot 10^{-5}$ ) по сравнению с интенсивностью мгновенных деформаций. Таким образом, использование в расчете определяющих уравнений с учетом ВНС привело и к количественному, и к качественному различию с результатами расчета на основе традиционных уравнений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны без учета ВНС.

Полученные в расчетах значения компонент деформаций сопоставлены с экспериментальными значениями [5]. На рис. 1 сплошной линией приведены полученные в расчете по описанной методике с учетом ВНС значения деформации  $\varepsilon_{ss} - \varepsilon_T$ , штриховой линией – аналогичные значения, без учета ВНС, а треугольники экспериментальные данные ( $N$  – номер этапа расчета).

Из рис. 1 видно, что в конце исследуемого процесса значения деформаций, полученные в расчете с учетом ВНС, отличаются от экспериментальных примерно на 10%, а значения, полученные без учета ВНС, более чем в 2 раза меньше экспериментальных. Значения деформаций  $\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_T$  в данном процессе были значительно (на порядок) меньше деформаций  $\varepsilon_{ss} - \varepsilon_T$ , они изменялись от  $-0,001$  до  $0,002$  как в эксперименте, так и в расчетах, поэтому они не приведены. Таким образом, выполненные расчеты подтверждают возможность

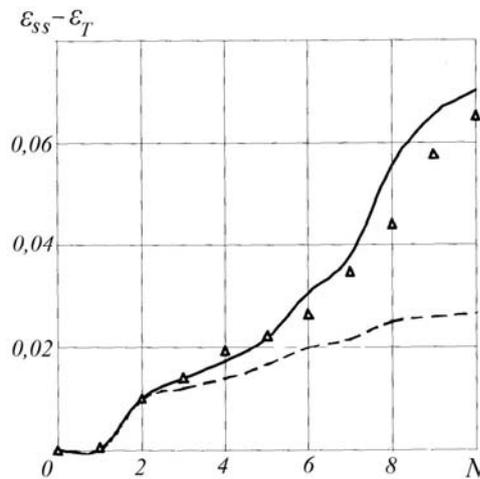


Рис. 1

адекватного описания процессов термовязкопластического деформирования материала X18H10T определяющими уравнениями [14, 15], учитывающими ВНС.

Вышеописанная методика применена к определению НДС двухслойной оболочки, меридиан срединной поверхности которой представляет собой часть окружности радиуса  $R_s = 40$  см, симметричную относительно оси  $s = 0$ ; длина половины меридиана  $s_b - s_a = 25$  см, радиус параллельного круга при  $s = s_a = 0$   $r = r_0 = 20$  см, толщины слоев  $h_1 = h_2 = 1$  см. Оболочка, первоначально находившаяся в ненапряженном и недеформированном состоянии при начальной температуре  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , подвергнута действию возрастающего равномерного внутреннего давления и установившегося температурного поля, изменяющегося только по толщине оболочки. Внутреннее давление изменялось от 28 МПа до 54 МПа. Температура оболочки характеризуется следующими числовыми данными:  $T(\zeta_0) = 20^\circ\text{C}$ ,  $T(\zeta_1) = 81^\circ\text{C}$ ,  $T(\zeta_2) = 200^\circ\text{C}$ . Эти значения определены [2] в предположении, что установившееся температурное поле рассматриваемой оболочки приближенно соответствует температурному полю двухслойной сферы радиуса  $R_s$ . Материал внутреннего слоя оболочки X18H10T, свойства которого в зависимости от температуры и ВНС приведены в [5, 8, 14, 15]. Материал внешнего слоя 30ХГСА, свойства которого в зависимости от температуры приведены в [4], не зависят от ВНС. Задача рассмотрена для половины оболочки; край оболочки шарнирный, свободный в радиальном направлении. Граничные условия:  $s_a = 0$ ,  $u = 0$ ,  $Q_s = 0$ ,  $\mathcal{G}_s = 0$ ;  $s_b = 25$  см;  $M_s = 0$ ;  $u \sin \theta - w \cos \theta = 0$ ;  $N_s \cos \theta + Q_s \sin \theta = 0$ ;  $\theta = \pi - (s_b - s_a)/R_s$ .

Процесс нагружения оболочки был разбит на 51 этап. Выполнено три расчета по определению НДС оболочки. В расчете 1 учтена зависимость свойств материалов слоев от температуры и от ВНС материала внутреннего слоя; в расчете 2 учтена зависимость свойств материалов слоев от температуры и не учтена зависимость от ВНС; в расчете 3 не учтена зависимость свойств материалов от температуры и учтена зависимость от ВНС материала внутреннего слоя.

В результате расчетов установлено, что в конце рассматриваемого процесса нагружения оба материала оболочки деформировались за пределами упругости и находились в состоянии активного нагружения. Некоторые результаты расчетов 1 – 3 приведены на рис. 2 – 5; сплошные, штриховые и пунктирные линии соответствуют расчетам 1 – 3. На этих рисунках показаны изменения деформаций  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  (рис. 2, 3) и напряжений  $\sigma_{ss}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  (МПа) (рис. 4, 5) вдоль меридиана  $s$  (см) при значениях координаты  $\zeta = -h_1$  (рис. 2, рис. 4) и  $\zeta = h_2$  (рис. 3, 5); линии  $a$  и  $b$  относятся соответственно к  $\varepsilon_{ss}$ ,  $\sigma_{ss}$  и  $\varepsilon_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ . Из рис. 2 – 5 видно, что учет зависимости свойств материала внут-

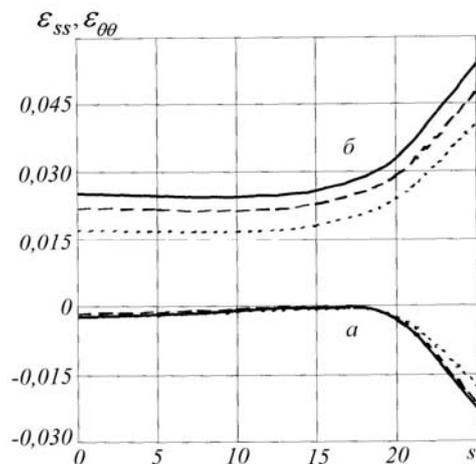


Рис. 2

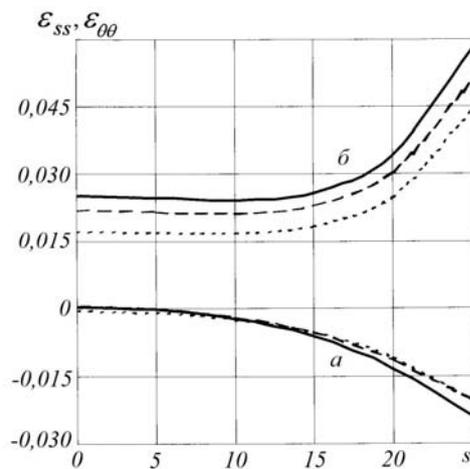


Рис. 3

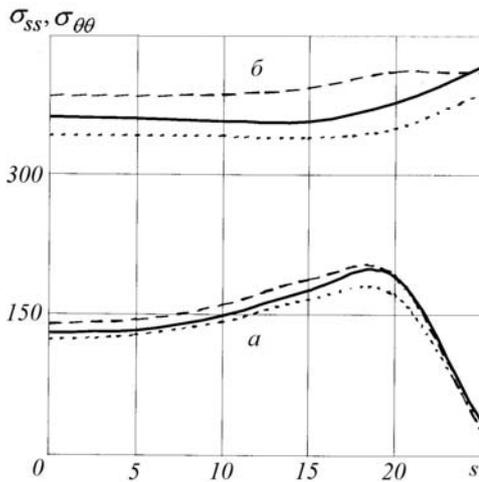


Рис. 4

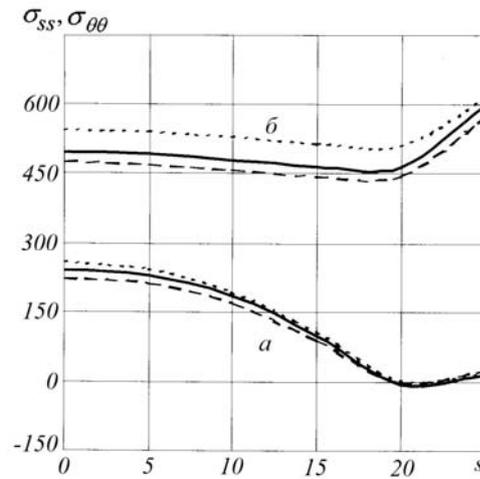


Рис. 5

ренного слоя от ВНС приводит к увеличению по абсолютной величине меридиональных деформаций в области их максимальных значений более, чем на 20% (рис. 3), а окружных – на 15%; при этом значения напряжений во внутреннем слое уменьшились примерно на 12%, а во внешнем – несколько увеличились. Следует заметить, что учет зависимости свойств материала внутреннего слоя от ВНС повлиял не только на значения компонент НДС оболочки в этом слое, но и на значения компонент НДС во внешнем слое, свойства которого не зависят от ВНС. Из приведенных данных (рис. 2 – 5) также следует, что учет зависимости свойств материалов от температуры в данной задаче привел к изменению максимальных значений деформаций примерно на 40%, а напряжений – на 10%.

Таким образом, в данной задаче учет зависимости свойств материалов слоев от температуры и одного из материалов от ВНС значительно повлияли на значения компонент НДС этой оболочки.

#### Заключение.

Основные результаты выполненных исследований состоят в следующем.

1. Разработана методика определения термоупругопластического НДС слоистых оболочек из изотропных материалов с учетом зависимости свойств материалов от температуры и ВНС в процессах осесимметричного нагружения, сопровождающихся возникновением деформаций ползучести. Методика апробирована на тестовом примере.

2. Показано, что предложенный алгоритм процесса последовательных приближений дает возможность получить решение краевой задачи с заданной точностью. Также показано, что результаты, полученные по данной методике, адекватно описывают приведенные в [15] экспериментальные данные.

3. Получены результаты решения задачи термопластичности для двуслойной бочкообразной оболочки. Установлено, что учет зависимости свойств материалов слоев от температуры и от ВНС существенно влияет на значения компонент НДС оболочки.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано методику чисельного дослідження термов'язкопружнопластичного напружено-деформованого стану тонких шаруватих оболонок обертання під дією осесиметричного навантаження. Використано визначальні рівняння, які описують непружне деформування ізотропних матеріалів з урахуванням третього інваріанту девіатора напружень. Наведено числові результати та дано їх аналіз.

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.

2. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т., Т.1).

3. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
4. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
5. Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. Describing the Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 12. – P. 1362 – 1371.
6. Betten J. Mathematical modeling of material behaviour under creep conditions // Appl. Mech. Rev. – 2001. – **54**, N 2. – P. 107 – 132.
7. Chen G.G., Hsu T.R. A mixed explicit-implicit (EL) algorithms for creep stress analysis // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1988. – **26**, N 2. – P. 511 – 524.
8. Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N. Determining the Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Thin Shells with Allowance for the Third Invariant of the Deviatoric Stress Tensor // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 675 – 684.
9. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 350 p.
10. Murakami S., Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage. In: Creep in structures. – Berlin: Springer-Verlag, 1981. – P. 422 – 444.
11. Odquist F.K.G. Mathematical theory of creep and creep rupture. – Oxford: Clarendon Press, 1966. – 170 p.
12. Shevchenko Yu.N., Babeshko M.E. The thermoviscoelastoplastic state of laminated shells of revolution under axisymmetric loading // Proc. of the Sixth Int. Congress on Thermal Stresses. – May 26-29, 2005, Vienna, Austria. – **1**. – Vienna, 2005. – P. 237 – 230.
13. Shevchenko A.Yu., Banyas M.V., Senchenkov I.K. A Variant of the Equations of Nonisothermal Plastic Flow // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 602 – 607.
14. Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. Elastoplastic Deformation of Elements of an Isotropic Solid along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Incorporating the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, N 6. – P. 621 – 630.
15. Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N. Thermoviscoplastic Deformation along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Including the Third Deviatoric Stress Invariant // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 688 – 699.
16. Zolochovsky A. Creep of isotropic and anisotropic materials with different behaviour in tension and compression. In: Zyczkowski M. (Ed.), Creep in Structures. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – P. 217 – 220.
17. Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Voyiadjis G.Z. Analysis of creep deformation and creep damage in thin-walled branches shells from materials with different behavior in tension and compression // Int. J. Solids and Struct. – 2007. – **44**, N 16. – P. 5075 – 5100.
18. Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T.H., Becker A.A., Paravali S. Numerical modeling of creep and creep damage in thin plates of arbitrary shape from materials with different behavior in tension and compression under plane stress condition // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2009. – **80**, N 11. – P. 1406 – 1436.

Поступила 12.09.2013

Утверждена в печать 29.05.2014