

В. Ф. Мейш, Н. П. Кепенач

**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. A solution of a problem on the forced vibrations of longitudinally stiffened cylindrical shell with elliptic cross section is considered for the case of nonstationary loading. A statement of the problem is given and a numerical algorithm of its solving is elaborated. A system of differential equations is based on using the theory of orthotropic shells and rods of Timoshenko type. An example of dynamical behavior of the shell in hand is studied numerically.

Key words: longitudinally stiffened cylindrical shell, elliptic cross section, forced vibrations, the theory of Timoshenko type, numerical solution.

Введение.

Задачам вынужденных колебаний подкрепленных оболочек при действии различного вида нагрузок посвящено значительное количество публикаций. Постановка задач для оболочек с учетом дискретного расположения ребер в классической постановке (модель оболочек Кирхгофа – Лява, модель стержней Кирхгофа – Клебша) дана в [1]. В уточненной постановке (модель оболочек и стержней, основанная на гипотезах Тимошенко) уравнения колебаний приведены в [3]. В указанной монографии рассмотрены задачи динамического поведения подкрепленных оболочек канонической формы (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки).

Решение задач динамического поведения подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения является достаточно сложным как и в постановке, так и в его реализации. Задача определения параметров напряженно-деформированного состояния дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения включает три основные составляющие части: расчет вынужденных колебаний, учет геометрии конструкции неканонического вида (в данном случае цилиндрические оболочки эллиптического сечения) и влияние подкреплений с учетом дискретного размещения ребер [4]. В такой постановке исследования практически отсутствуют. В основном, в работах [6 – 20] рассмотрены свободные и вынужденные колебания гладких цилиндрических оболочек эллиптического сечения или колебания подкрепленных цилиндрических оболочек кругового сечения. Практически отсутствуют работы по динамическому поведению подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при нестационарных нагрузках.

Ниже в рамках модели теории ортотропных оболочек и стержней с привлечением гипотез Тимошенко приведена постановка задачи о вынужденных колебаниях ортотропной подкрепленной цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением, построен численный алгоритм решения задачи, проведен анализ численных результатов.

1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим подкрепленную цилиндрическую оболочку с эллиптическим поперечным сечением при действии распределенной внутренней нагрузки $P_3(s_1, s_2, t)$

(s_1, s_2 и t – пространственные и временная координаты). При постановке задачи учитываем дискретное расположение продольных ребер [2, 3].

Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности исходной оболочки принимаем в следующем виде:

$$A_1 = 1; k_1 = 0; A_2 = (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2};$$

$$k_2 = ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}; s_1 = A_1 \alpha_1, s_2 = A_2 \alpha_2, \quad (1)$$

где a и b – полуоси эллипса, который характеризует поперечное сечение цилиндрической оболочки.

Для вывода уравнений колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского [2]. После стандартных преобразований в вариационном функционале, с учетом условий контакта оболочка – ребро [1, 2], получим две группы уравнений:

1) уравнения колебаний гладкой цилиндрической оболочки с эллиптическим поперечным сечением

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} - k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} + P_3(s_1, s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

2) уравнения колебаний i -го ребра, расположенного вдоль оси s_1 :

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} + [T_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} - T_{13} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right];$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} - T_{23} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

В уравнениях (2), (3) $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$ – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки; ρ, ρ_i – плотности материала оболочки и i -го ребра, соответственно; h – толщина оболочки; $h_{ci} = 0,5(h + h_i)$; h_i – высота поперечного сечения i -го ребра. Величины $[f] = f^+ - f^-$, где f^\pm – значения функций справа и слева от i -й линии разрыва (линия проецирования центр тяжести i -го ребра на срединную поверхность цилиндрической оболочки).

Связь величин усилий – моментов в уравнениях колебаний для ортотропной оболочки (2) с соответствующими величинами деформаций имеет такой вид:

$$T_{11} = B_{11} (\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}); \quad T_{22} = B_{22} (\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}); \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
T_{13} &= B_{13}\varepsilon_{13}; \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}; \quad S = B_{12}\varepsilon_{12}; \\
M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_2\kappa_{22}); \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_1\kappa_{11}); \quad H = D_{12}\kappa_{12}; \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{23} = \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\
\kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}.
\end{aligned}$$

В соотношениях (4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad B_{12} = G_{12} h; \quad B_{13} = G_{13} h; \quad B_{23} = G_{23} h; \\
D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = G_{12} \frac{h^3}{12},
\end{aligned}$$

где $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$ – физико-механические параметры ортотропного материала оболочки.

Величины усилий – моментов в уравнениях колебаний для i -го ребра (3) связаны с соответствующими величинами деформаций согласно соотношениям

$$\begin{aligned}
T_{11i} &= E_i F_i \varepsilon_{11i}; \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}; \quad T_{13i} = G_i F_i \varepsilon_{13i}; \\
M_{11i} &= E_i I_{1i} \kappa_{11i}; \quad M_{12i} = G_i I_{cri} \kappa_{12i}; \quad \varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_1}{\partial s_1} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \varepsilon_{22i} = \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}; \\
\varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; \quad \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; \quad \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

В соотношениях (5) E_i, G_i – физико-механические параметры материала ребра; F_i, I_{1i}, I_{cri} – геометрические параметры поперечного сечения i -го ребра.

Уравнения колебаний (2) – (5) дополняем соответствующими граничными и начальными условиями [3].

2. Численный алгоритм решения задачи.

Алгоритм решения начально-краевой задачи (2) – (5) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам s_1, s_2 и явной аппроксимации по временной координате t [2, 7].

Основные разностные уравнения на дискретной сетке (k, l, t) принимают такой вид: для уравнений (2) –

$$\frac{T_{11k\pm 1/2, l}^n - T_{11k-1/2, l}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{k, l+1/2}^n - S_{k, l-1/2}^n}{\Delta s_2} = \rho h (u_{1i}^n)_{\bar{n}}; \tag{6}$$

.....

для уравнений (4) –

$$\begin{aligned}
T_{11k\pm 1/2, l}^n &= B_{11}(\varepsilon_{11k\pm 1/2, l}^n + \nu_2 \varepsilon_{22k\pm 1/2, l}^n); \quad T_{22k\pm 1/2, l}^n = B_{22}(\varepsilon_{22k\pm 1/2, l}^n + \nu_1 \varepsilon_{11k\pm 1/2, l}^n); \\
T_{13k\pm 1/2, l}^n &= B_{13} \varepsilon_{13k\pm 1/2, l}^n; \\
M_{11k\pm 1/2, l}^n &= D_{11}(\kappa_{11k\pm 1/2, l}^n + \nu_2 \kappa_{22k\pm 1/2, l}^n); \quad M_{22k\pm 1/2, l}^n = D_{22}(\kappa_{22k\pm 1/2, l}^n + \nu_1 \kappa_{11k\pm 1/2, l}^n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11k+1/2,l}^n &= \frac{u_{1k+1,l}^n - u_{1k,l}^n}{\Delta s_1}; \quad \varepsilon_{11k-1/2,l}^n = \frac{u_{1k,l}^n - u_{1k-1,l}^n}{\Delta s_1}; \\
\varepsilon_{22k+1/2,l}^n &= \frac{u_{2k+1,l+1/2}^n - u_{2k+1/2,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2l} \frac{u_{3k+1,l}^n + u_{3k,l}^n}{2}; \\
\varepsilon_{22k-1/2,l}^n &= \frac{u_{2k-1,l+1/2}^n - u_{2k-1/2,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + k_{2l} \frac{u_{3k,l}^n + u_{3k-1,l}^n}{2}. \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{7}$$

В уравнениях (6), (7) принято: $\Delta s_1, \Delta s_2$ – разностные шаги по пространственным координатам s_1, s_2 ; индексы $k, k \pm 1/2, l, l \pm 1/2, n$ относятся к кинематическим и силовым величинам в дискретных точках пространственных координат s_1, s_2 и временной координаты t . Обозначения разностных производных по пространственным и временной координате введено согласно [7].

3. Числовые результаты.

Как числовой пример, рассмотрена задача динамического поведения продольно подкрепленной ребрами цилиндрической панели с эллиптическим поперечным сечением при распределенной внутренней импульсной нагрузке. Принято, что все стороны цилиндрической панели жестко защемлены. Продольное ребро при $0 \leq s_1 \leq L$ расположено в сечении $s_2 = 0$.

Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задана в виде

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)],$$

где A – амплитуда нагрузки; T – длительность нагрузки. (В расчетах принято $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с).

Решение задачи получено при следующих геометрических и физико-механических параметрах оболочки: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0,4$ м. Параметры эллиптичности поперечного сечения приняты в виде: 1) $a = b = 0,1$; 2) $a = 1,1b$; 3) $a = 1,2b$; для подкрепляющего ребра принято: $E_i = E$; $F_i = a_i h_i$; $a_i = h$; $h_i = 2h$.

Конкретные расчеты проведены для трех вариантов эллиптичности поперечного сечения цилиндрической панели: 1) $a = b$; 2) $a = 1,1b$; 3) $a = 1,2b$. Расчеты проведены для области $D = \{0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \pi / 8\}$. Их результаты представлены в виде графиков.

На рис. 1 – 8 приведены результаты численных расчетов для величин $u_3, \varepsilon_{22}, \sigma_{22}$. Учитывая, что исходная задача является многопараметрической (в разные моменты времени t кинематические и силовые параметры принимают разные значения по координатам s_1 и s_2), в дальнейшем рассматриваем зависимости искомых величин в моменты времени достижения ими максимальных значений по модулю. Рис. 1 соответствует зависимости перемещения u_3 в сечении $s_2 = 0$ (место расположения подкрепляющего ребра) вдоль координаты s_1 ($0 \leq s_1 \leq L$) в момент времени $t = 2,5T$. На рис. 2 показаны зависимости величин u_3 в сечении $s_2 = A_2 \pi / 16$ вдоль координаты s_1 в момент времени $t = 4,5T$. Обозначения на рис. 1, 2 следующие: кривая 1 соответствует случаю $a/b = 1$; кривая 2 – $a/b = 1,1$; кривая 3 – $a/b = 1,2$.

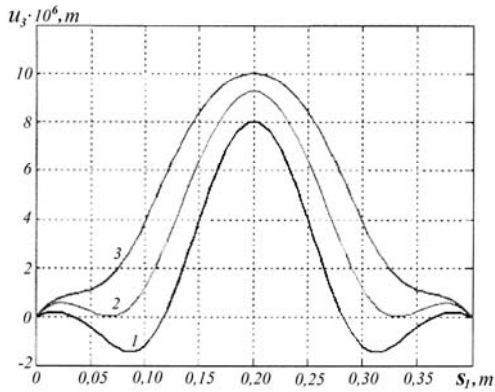


Рис. 1

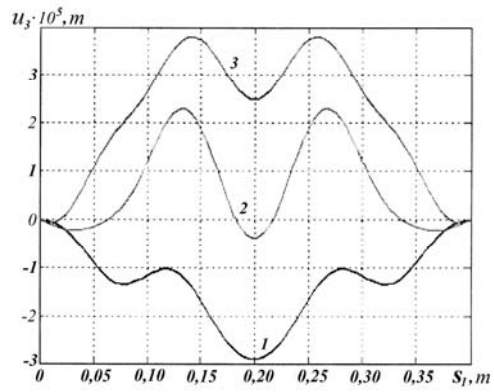


Рис. 2

На рис. 3 приведены зависимости величин u_3 от времени t в точке $s_1 = L/2$, $s_2 = 0$ (в точке середины подкрепляющего ребра). Кривая 1 соответствует случаю $a/b = 1$; кривая 2 – $a/b = 1,1$. На рис 4 приведены зависимости величин ε_{22} от пространственной координаты s_1 в сечении $s_2 = 0$ при различных значениях отношения a/b ($1 - t = 10,5T$, $2 - t = 8,25T$, $3 - t = 9T$); кривая 1 соответствует случаю $a/b = 1$; кривая 2 – $a/b = 1,1$; кривая 3 – $a/b = 1,2$.

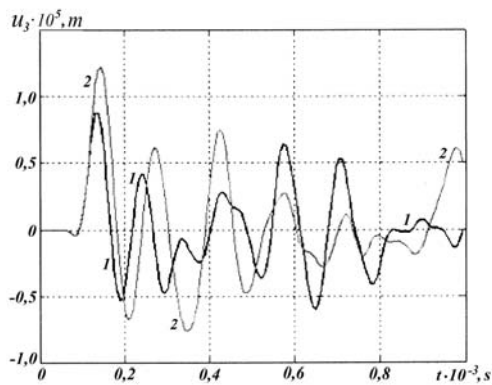


Рис. 3

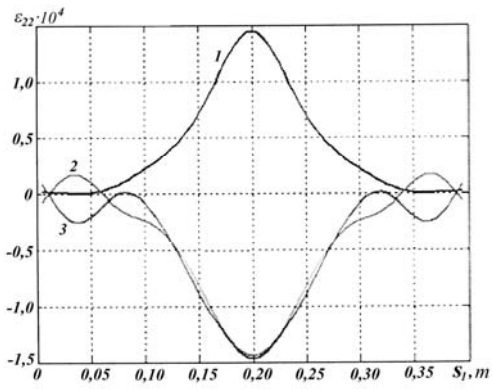


Рис. 4

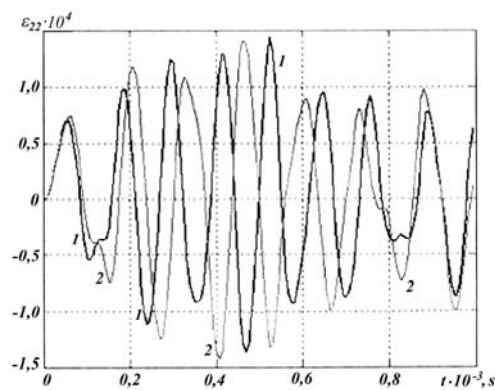


Рис. 5

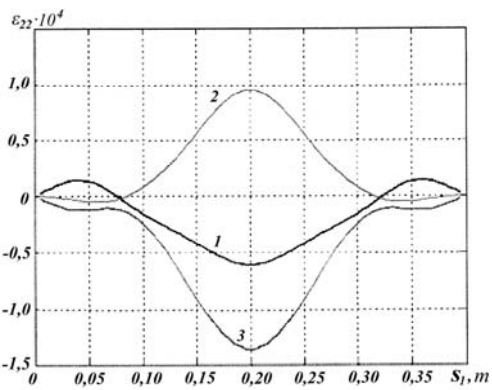


Рис. 6

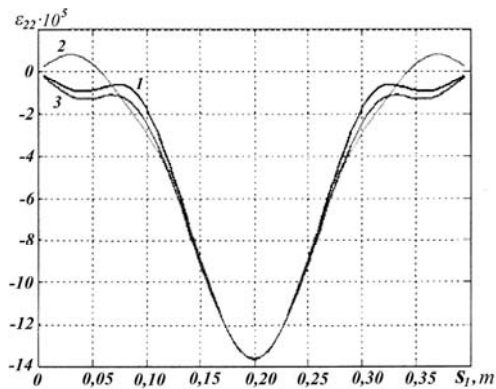


Рис. 7

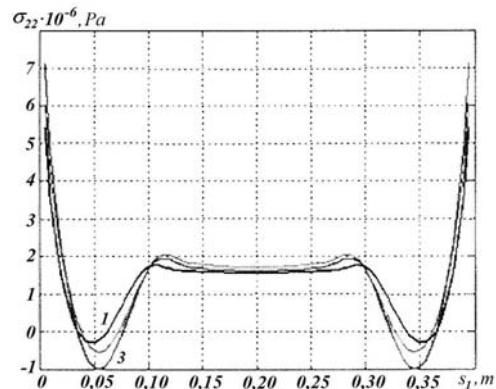


Рис. 8

На рис. 5 приведены зависимости величин ε_{22} от временной координаты t в точке ($s_1 = L/2$; $s_2 = 0$) при различных значениях отношения a/b (кривая 1 соответствует случаю $a/b = 1$; кривая 2 – $a/b = 1,1$). На рис. 6 приведены зависимости величин ε_{22} от пространственной координаты s_1 в сечении $s_2 = A_2\pi/16$ при различных значениях отношения a/b в момент времени $t = 9T$ (обозначения на рисунках согласно рис. 1 – 2).

На рис. 7 приведены зависимости величин ε_{22} от пространственной координаты s_1 в сечении $s_2 = A_2\pi/16$ при различных значениях отношения a/b в моменты достижения ими максимальных величин (1 – $9,375T$; 2 – $8,125T$; 3 – $9T$). На рис. 8 приведены зависимости величин σ_{22} от пространственной координаты s_1 в сечении $s_2 = 0$ при различных значениях отношения a/b в момент времени $t = T$ (обозначения на рис. 7, 8 – согласно обозначениям рис. 1, 2).

Выводы.

Получено численное решение задачи о вынужденных колебаниях продольно подкрепленных цилиндрических оболочек с эллиптическим поперечным сечением при действии нестационарной нагрузки. Разработан численный алгоритм решения данного класса задач. Представлены числовые результаты и дан их анализ.

РЕЗЮМЕ. Отримано чисельний розв'язок задачі про вимушені коливання повздовжньо підкріпленої циліндричної оболонки з еліптичним поперечним перерізом під дією нестационарного навантаження. Дано постановку задачі та розроблено чисельний алгоритм її розв'язання. Система диференціальних рівнянь базується на використанні теорії ортотропних оболонок і стержнів з прийнятими гіпотез Тимощенка. Досліджено динамічну поведінку оболонки.

1. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. Динамика ребристых оболочек. – К.: Наук. думка, 1983. – 204 с.
2. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
3. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. – К.: Изд-во Полигр. Центр «Киевский ун-т», 2005. – 537 с.
4. Мейш В.Ф., Майбородина Н.В. К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 10. – С. 63 – 73.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.

6. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* The Problems of Statical and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
7. *Grigorenko Ya.M., Yaremchenko S.N.* Refined Design of Longitudinally Corrugated Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 2. – P. 195 – 204.
8. *Irie T., Yamada G., Kobayashi Y.* Free vibrations of non-circular shells with longitudinal interior partitions // *J. Sound and Vibr.* – 1984. – **96** (1). – P. 133 – 142.
9. *Kumar U., Singh V.* Approximate vibrations analysis of noncircular cylinders having varying thickness // *AIAA Journal.* – 1991. – **30**, N 7. – P. 1929 – 1931.
10. *Maiborodina N.V., Meish V.F.* Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs under Nonstationary Distributed Load // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
11. *Patel B.P., Gupta S.S., Loknath M.S., Kadu C.P.* Free vibration analysis of functionally graded elliptical cylindrical shells using higher-order theory // *Compos. Structure.* – 2005. – **69**. – P. 259 – 270.
12. *Soldatos P.K.* Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross section: a survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
13. *Soldatos K.P., Tzivanidis G.J.* Buckling and vibrations of cross-ply laminated non-circular cylindrical shells // *J. Sound and Vibr.* – 1982. – **82** (3). – P. 425 – 434.
14. *Suzuki K., Leissa A.W.* Free vibrations of noncircular cylindrical shells having circumferentially varying thickness // *J. Appl. Mech.* – 1985. – **52**, N 1. – P. 149 – 154.
15. *Suzuki K., Shikanai G., Leissa A.W.* Free vibrations of laminated composite noncircular thin cylindrical shells // *J. Appl. Mech.* – 1994. – **61**, N 4. – P. 861 – 871.
16. *Tornabene F.* Free vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shells and annular plate structure with a four – parameter power – law distribution // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 2009. – **198**. – P. 2911 – 2935.
17. *Firer M., Sheinman I.* Nonlinear analysis of laminated noncircular cylindrical shells // *Int. J. Solids and Struct.* – 1995. – **32**, 10. – P. 1405 – 1416.
18. *Xiang Y., Huang Y.Y.* A novel semi-analytical method for solving acoustic radiation from longitudinally stiffened infinite non-circular cylindrical shells in water // *Acta Mech. Solid. Sin.* – 2005. – **18**. – P. 1 – 12.
19. *Yamada G., Irie T., Tagana Y.* Free vibrations of non-circular cylindrical shells with variable circumferential profile // *J. Sound and Vibr.* – 1984. – **95**, № 1. – P. 117 – 126.
20. *Zou S.Z., Huang Y.Y., He Z., Xiang Y.* New matrix method for response analysis of circumferentially stiffened non-circular shells under harmonic pressure // *Appl. Math. and Mech.* – 2007. – **28**, № 10. – P. 1397 – 1405.

Поступила 24.10.2012

Утверждена в печать 29.05.2014