

В.Л.Богданов¹, А.Н.Гузъ², В.М.Назаренко³

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ
РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ СО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ
ТРЕЩИНАМИ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057 Киев, Украина; e-mail: ¹ bogdanov@nas.gov.ua;
² guz@carier.kiev.ua; ³ nazvm1@gmail.com*

Abstract. The results of study of two non-classical mechanisms of fracture of composite materials are presented. Namely, the brittle fracture of bodies with initial (residual) stresses acting along the planes of located in the body cracks and the fracture under compression of bodies along the located in the body parallel cracks. A joint approach to the study of abovementioned problems is proposed within the framework of linearized solid mechanics. A mathematical statement is given for the spatial problems for pre-stressed composites with interacting circular cracks. The problems are studied for an infinite body with two parallel co-axial cracks as well as for a semi-space with a near-the-surface crack. A few kinds of loading at the crack sides (normal loading, radial shear loading, torsion) are considered. With using the mentioned joint approach, the values of critical parameters of fracture are obtained for composites with interacting cracks under action of compression loads along the crack. An effect of the geometrical parameters and physical-mechanical characteristics of materials on aforementioned critical parameters of fracture is analyzed.

Key words: initial (residual) stresses, compression along cracks, composite materials, linearized solid mechanics.

1. Введение.

Технологические процессы изготовления композитных материалов часто обуславливают возникновение внутренних (технологических) полей напряжений и деформаций, которые необходимо учитывать при расчетах прочности и долговечности изделий из них под действием дальнейших эксплуатационных нагрузок [4, 15, 20]. В частности, указанные начальные (остаточные) напряжения и деформации могут существенно влиять на критические параметры разрушения композитов с трещинами и трещиноподобными дефектами [4, 7, 20]. В случае действия начальных (остаточных) напряжений вдоль поверхностей расположения трещин (рис. 1, а) классические подходы механики разрушения оказываются неприменимыми. Это обусловлено тем, что при использовании соотношений линейной теории упругости компоненты усилий, действующие вдоль трещин, не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин, а поэтому не учитываются классическими подходами и критериями разрушения типа Гриффитса – Ирвина, критического раскрытия трещин или их обобщениями [8, 14, 16, 26, 29].

Другой неклассической проблемой является разрушение при сжатии материалов вдоль параллельных трещин (рис. 1, б), вызванное потерей устойчивости состояния равновесия возле трещин [3, 18, 19]. При такой схеме нагружения также нельзя непосредственно применить классические критерии хрупкого разрушения, так как в рамках линейной механики трещин в рассматриваемой ситуации коэффициенты интенсивности напряжений и величины, характеризующие раскрытие берегов трещин, равны нулю. Указанная ситуация реализуется для упругих, упругопластических, вязкоупругих и других реологических моделей деформируемых тел. В данном явлении специфика композитного материала проявляется, прежде всего, в том, что трещины (расслоения, непроклеи) часто возникают в параллельных плоскостях и цилиндрических поверхностях с параллельными осями вследствие технологических процессов изготовления слоистых и волокнистых композитов [4, 7].

В [1, 2] был предложен подход к исследованию проблем механики разрушения материалов с начальными напряжениями в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела [17]. В указанных работах были развиты методы решения двух- и трехмерных задач механики разрушения предварительно напряженных тел, когда значения начальных напряжений существенно превосходят величины дополнительных полей напряжений и деформаций, а также были сформулированы критерии разрушения материалов с начальными напряжениями, аналогичные критериям Гриффитса – Ирвина. С использованием указанного подхода были получены решения отдельных классов статических и динамических задач для изолированных и взаимодействующих трещин в однородных материалах и обнаружены новые механические эффекты, связанные с влиянием начальных (остаточных) напряжений [12, 13, 18, 24, 28].

В [3, 21] при изучении проблем разрушения тел в условиях их сжатия вдоль плоскостей расположения трещин в качестве механизма начала разрушения рассматривалась локальная потеря устойчивости материала в окрестности трещин, а критические параметры сжатия определялись из решения соответствующих задач на собственные значения в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел [17]. Информация о работах, выполненных с использованием этого подхода, изложена в [3, 4, 11, 18, 21, 22, 30].

Следует при этом отметить, что еще в первых работах по механике хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями при исследовании задач для неограниченных предварительно напряженных тел с изолированными трещинами был указан новый механический эффект, связанный с влиянием начальных напряжений на распределение полей напряжений и деформаций в окрестностях контура трещины, и, соответственно, на значения разрушающих нагрузок [1]. Так, было показано, что при стремлении начальных (остаточных) напряжений к значениям, соответствующим поверхностной неустойчивости полуплоскости (для плоских задач) или полупространства (для пространственных задач), вблизи кончика трещины возникают явления «резонансного» характера, состоящие в резком стремлении к «бесконечности» части напряжений и перемещений, определяемых из линеаризованных соотношений.

С другой стороны, при изучении задач о сжатии материалов вдоль изолированных трещин, когда механизм разрушения связывается с локальной потерей устойчивости состояния равновесия возле трещины, был установлен механический эффект, состоящий в том, что критические нагрузки при сжатии вдоль трещины совпадают со значениями нагрузок, реализующих поверхностную неустойчивость полуплоскости (для плоских задач) или полупространства (для пространственных задач) [3].

Указанную ситуацию можно объяснить, исходя из следующих соображений физического характера. При достижении начальными напряжениями, действующими вдоль трещины, значений, соответствующих поверхностной неустойчивости полуплоскости или полупространства, вблизи кончика трещины возникает состояние нейтрального равновесия. В этой ситуации достаточно незначительного увеличения внешней нагрузки, чтобы нарушилось нейтральное равновесие и начался процесс разрушения, характеризующийся локальной потерей устойчивости материала возле трещины.

Учитывая отмеченную физическую интерпретацию, можно предположить, что и для других геометрических схем расположения трещин в предварительно напряженных материалах будут обнаруживаться аналогичные явления «резонансного» характера, когда при приближении начальных сжимающих напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в соответствующих задачах о сжатии тел вдоль параллельных трещин, напряжения и перемещения возле контуров трещин будут резко «резонансоподобно» изменяться. Это предположение было подтверждено, например, для случая полуограниченного тела с приповерхностной трещиной в [9, 10, 28]. Следует также отметить, что общим моментом при исследовании двух указанных выше групп задач является использование родственными математическими аппаратами в рамках линеаризованных подходов.

Исходя из вышеизложенного, в [12, 13, 25] в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела был предложен объединенный подход к исследованию задач механики разрушения тел с начальными напряжениями и задач о разрушении материалов с трещинами при сжатии вдоль трещин. При таком подходе разработан эффективный метод определения критических параметров нагружения в задачах о сжатии тел вдоль расположенных в них трещин, при котором указанные параметры рассчитываются вследствие решения соответствующих неоднородных соотношений механики разрушения материалов с начальными напряжениями как значения сжимающих начальных усилий, при достижении которых происходит резкое «резонансоподобное» изменение напряжений и перемещений возле контуров трещин.

В данной работе выполнена математическая постановка пространственных осесимметричных задач для предварительно напряженных композиционных материалов, содержащих взаимодействующие круговые трещины нормального отрыва (Mode I), радиального сдвига (Mode II) и кручения (Mode III), и с использованием аппарата интегральных разложений Ханкеля получены разрешающие интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Исследованы три класса задач, соответствующих характеру расположения указанных типов трещин в материале, а именно: 1) задачи для полупространства с приповерхностными трещинами, параллельными свободной поверхности материала; 2) задачи для пространства, содержащего две параллельные соосные трещины; 3) задачи для неограниченного тела, содержащего трещины, образующие периодическую систему соосных параллельных трещин. В рамках первого класса задач изучено влияние свободной границы материала на параметры разрушения, а второй и третий класс задач являются граничными случаями для задач о разрушении материалов с произвольным конечным числом соосных параллельных трещин. На основании полученных решений выполнен анализ асимптотического распределения напряжений вблизи краев трещин и проанализировано влияние начальных напряжений на значения коэффициентов интенсивности напряжений для отдельных типов композитных материалов (слоистых композитов с изотропными слоями и композитов, армированных короткими волокнами эллипсоидальной формы). Основываясь на вышеуказанном объединенном подходе, определены значения критических параметров сжатия, при достижении которых происходит потеря устойчивости материалов в области трещин. Исследовано влияние геометрических параметров задач (радиусов трещин и расстояния между ними или между трещиной и поверхностью материала) и физико-механических характеристик материалов на коэффициенты интенсивности напряжений и критические параметры сжатия.

2. Постановка задач.

В работе рассматриваются развитые трещины, минимальные размеры которых значительно превышают значения геометрических параметров, характеризующих структуру композитного материала, т. е. макротрещины. Кроме того, не исследуются процессы разрушения, при которых в явном виде проявляются свойства композитов как кусочно-однородных материалов (типа распространения трещин через границы раздела сред). При таких предположениях применяется известная континуальная модель композита [4, 6, 15] с приведенными (усредненными) характеристиками трансверсально-изотропного тела, плоскости изотропии которого параллельны плоскостям расположения трещин.

Используем лагранжевы координаты $y_j, j = \overline{1,3}$, которые в начальном состоянии, вызванном начальными (остаточными) напряжениями S_{ij}^0 , совпадают с декартовыми координатами. Эти координаты связаны с декартовыми координатами недеформированного состояния $x_j, j = \overline{1,3}$, соотношениями $y_j = \lambda_j x_j$, где $\lambda_j = \text{const}$ – коэффициенты удлинения (или укорочения) вдоль координатных осей, вызванные начальными растягивающими (или сжимающими) напряжениями S_{ij}^0 (S_{ij}^0 – компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади координатных площадок в недеформированном состоянии).

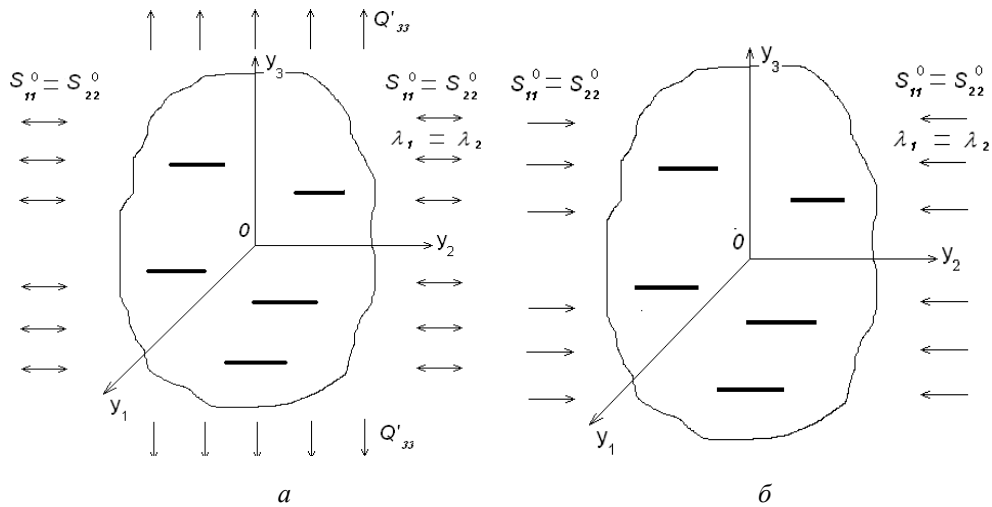


Рис. 1

Предполагаем, что начальные напряжения (или усилия сжатия) действуют строго вдоль плоскостей расположения трещин $y_3 = \text{const}$ (рис. 1), что обуславливает возникновение в теле однородного начального напряженно-деформированного состояния вида

$$S_{33}^0 = 0; S_{11}^0 = S_{22}^0 = \text{const} \neq 0; u_j^0 = \lambda_j^{-1}(\lambda_j - 1)y_j;$$

$$\lambda_j = \text{const}, \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3, j = \overline{1,3}, \quad (1)$$

где u_j^0 – компоненты вектора перемещений в начальном состоянии, соответствующие начальным напряжениям S_{ij}^0 . При исследовании будем также использовать такие обозначения: Q'_{ij} – составляющие несимметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади координатных площадок в начальном состоянии, и u_j – соответствующие им компоненты вектора перемещений.

При приложении к телу дополнительных (по отношению к начальному напряженно-деформированному состоянию) нагрузок возникающие возмущения напряженно-деформированного состояния, вызванные их действием, предполагаются значительно меньшими, чем соответствующие величины начального состояния, что позволяет применять к решению задач соотношения трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела [17].

В работах [1, 2, 4] для случая однородного начального состояния (1) предложены представления общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции, при этом вид этих представлений зависит от соотношения корней n_1 и n_2 соответствующего характеристического уравнения. Для случая неравных корней характеристического уравнения, который преимущественно реализуется для композитов, указанные представления в круговой цилиндрической системе координат (r, θ, y_3) , получаемой из декартовой, имеют вид

$$u_r = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; \quad u_3 = m_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2};$$

$$Q'_{3r} = C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_2} \varphi_2 - n_3^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_3} \varphi_3 \right\}; \quad (2)$$

$$Q'_{3\theta} = C_{44} \left\{ d_1 n_1^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} \varphi_1 + d_2 n_2^{-1/2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_2} \varphi_2 + n_3^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_3} \varphi_3 \right\};$$

$$Q'_{33} = C_{44} \left[d_1 l_1 \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \varphi_1 + d_2 l_2 \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \varphi_2 \right],$$

где $d_i \equiv 1 + m_i$, ($i = 1, 2$), $z_j \equiv n_j^{-1/2} y_3$ ($j = \overline{1, 3}$), а $\varphi_j, j = \overline{1, 3}$ – гармонические функции, удовлетворяющие уравнениям Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_j(r, z_i) = 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Величины C_{44}, n_i, m_i, l_i определяются выбором модели материала и зависят от величин начальных напряжений [1, 2]; для отдельных типов композитов их значения приведены в разделе 5 настоящей статьи.

Далее, ограничиваясь осесимметричным случаем, отдельно для каждого из трех указанных во введении классов задач сформулируем граничные условия на берегах трещин и границе материала.

2.1. Приповерхностная трещина в полупространстве. Рассмотрим полуограниченное предварительно напряженное тело, занимающее область $y_3 \geq -h$, которое содержит дискообразную трещину радиуса a , расположенную в плоскости $y_3 = 0$ с центром на оси Oy_3 . Ниже приводятся граничные условия для случаев трещины нормального отрыва, трещины радиального сдвига и трещины кручения. При этом, как и в классической механике разрушения [27], под трещиной нормального отрыва (Mode I crack) понимаем трещину, к берегам которой симметрично относительно плоскости трещины приложена нормальная растягивающая нагрузка; под трещиной радиального сдвига (Mode II crack) – трещину, к берегам которой антисимметрично относительно плоскости трещины приложены радиальные касательные усилия; под трещиной кручения (Mode III crack) – трещину, к поверхностям которой антисимметрично относительно плоскости трещины приложена касательная окружная нагрузка. Отметим, что в соответствующих задачах о разрушении материалов с трещинами при сжатии вдоль трещин следует задавать условия отсутствия на берегах трещин дополнительных нагрузок.

2.1.1. Трещина нормального отрыва. К берегам трещины симметрично относительно плоскости $y_3 = 0$ приложены дополнительные (по отношению к начальным напряжениям) нормальные напряжения интенсивности $\sigma(r)$, граница полупространства свободна от напряжений. Тогда граничные условия задачи формулируются в виде

$$Q'_{33} = -\sigma(r), \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a);$$

$$Q'_{33} = 0, \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (3)$$

Для удобства дальнейших выкладок будем рассматривать область $y_3 \geq -h$ как полупространство $y_3 \geq 0$ (подобласть «1»), соединенное со слоем $-h \leq y_3 \leq 0$ (подобласть «2»). При этом на границе подобластей вне трещины ($y_3 = 0, r > a$) напряжения и перемещения являются непрерывными. Тогда, обозначая величины, относящиеся к указанным подобластям, соответствующими верхними индексами в скобках, переформулируем граничные условия задачи в виде

$$Q_{33}^{(2)} = -\sigma(r), \quad Q_{3r}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < a); \quad (4)$$

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty); \quad (5)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad r \geq a); \quad (6)$$

$$Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (7)$$

Кроме того, указанные соотношения следует дополнить условием затухания напряжений и перемещений в полупространстве $y_3 \geq 0$ при $y_3 \rightarrow \infty$.

Для задачи о сжатии полупространства с приповерхностной трещиной усилиями, направленными вдоль плоскости расположения трещины, когда локальная потеря устойчивости возле трещины происходит по симметричной форме, граничные условия имеют вид (4) – (7), при этом $\sigma(r) \equiv 0$.

2.1.2. Трещина радиального сдвига. К берегам трещины антисимметрично относительно плоскости $y_3 = 0$ приложены касательные напряжения интенсивности $\tau(r)$, граница полупространства свободна от напряжений. Тогда граничные условия задачи имеют вид

$$Q'_{33} = 0, \quad Q'_{3r} = -\tau(r) \quad (y_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a);$$

$$Q'_{33} = 0, \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (8)$$

С учетом разбиения полупространства $y_3 \geq -h$ на подобласти «1» и «2», переформулируем граничные условия (8) к виду

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = -\tau(r) \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < a);$$

$$Q_{33}^{(2)} = 0, \quad Q_{3r}^{(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty);$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad r \geq a);$$

$$Q_{33}^{(1)} = Q_{33}^{(2)}, \quad Q_{3r}^{(1)} = Q_{3r}^{(2)} \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (9)$$

Для формулировки граничных условий задачи о сжатии полупространства с приповерхностной трещиной усилиями, направленными вдоль плоскости расположения трещины, когда локальная потеря устойчивости возле трещины происходит по антисимметричной (или изгибной) форме, в условиях (9) следует положить $\tau(r) \equiv 0$.

2.1.3. *Трещина кручения.* Напряжения и перемещения в полуограниченном теле в этом случае полностью определяются компонентами $Q'_{3\theta}$ и u_θ , а представления общих решений (2) приобретают вид

$$u_r = 0; u_\theta = \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; u_3 = 0; Q'_{3r} = 0; Q'_{3\theta} = C_{44} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial y_3} = C_{44} n_3^{-1/2} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3}; Q'_{33} = 0. \quad (10)$$

Граничные условия на берегах трещины и границе полупространства являются следующими:

$$\begin{aligned} Q'_{3\theta} &= -\tau_\theta(r) \quad (y_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r < a); \\ Q'_{3\theta} &= 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tau_\theta(r)$ – интенсивность тангенциальных скручивающих напряжений.

Принимая во внимание указанное выше разбиение полупространства на подобласти, получаем такую систему граничных условий для трещины кручения:

$$\begin{aligned} Q'_{3\theta}{}^{(2)}(r, y_3) &= -\tau_\theta(r) \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r \leq a); \\ Q'_{3\theta}{}^{(2)}(r, y_3) &= 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty); \\ Q'_{3\theta}{}^{(1)}(r, y_3) &= Q'_{3\theta}{}^{(2)}(r, y_3) \quad (y_3 = 0, \quad 0 \leq r < \infty); \\ u_\theta^{(1)}(r, y_3) &= u_\theta^{(2)}(r, y_3) \quad (y_3 = 0, \quad a < r < \infty). \end{aligned} \quad (12)$$

2.2. Две параллельные трещины в бесконечном теле. Рассмотрим неограниченный предварительно напряженный материал с двумя параллельными круговыми трещинами, каждая из которых имеет радиус a , расположенными в параллельных плоскостях $y_3 = 0$ и $y_3 = -2h$ с центрами на оси Oy_3 . В этом случае имеет место симметрия геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости $y_3 = -h$, что позволяет свести исходную задачу к задаче для полупространства $y_3 \geq -h$ с приповерхностной трещиной, расположенной в плоскости $y_3 = 0$. Ниже рассматриваются отдельно граничные условия, соответствующие трещинам нормального отрыва, радиального сдвига и кручения.

2.2.1. *Трещины нормального отрыва.* На берегах трещин действуют поля нормальных растягивающих напряжений $\sigma(r)$. Рассматривая только верхнее полупространство $y_3 \geq -h$ с трещиной в плоскости $y_3 = 0$, получаем такие граничные условия на берегах трещины и на плоскости $y_3 = -h$

$$Q'_{33} = -\sigma(r), \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = \pm 0, \quad 0 \leq r \leq a); \quad (13)$$

$$u_3 = 0, \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = -h, \quad 0 \leq r < \infty). \quad (14)$$

Разбивая полупространство $y_3 \geq -h$ на две подобласти, а именно, полупространство $y_3 \geq 0$ (подобласть «1») и слой $-h \leq y_3 \leq 0$ (подобласть «2»), а также обозначая величины, относящиеся к указанным подобластям, верхними индексами в скобках и принимая во внимание условие непрерывности напряжений и перемещений на границе подобластей вне трещины, получаем такие граничные условия задачи:

$$\begin{aligned}
Q_{33}^{\prime(2)} &= -\sigma(r), \quad Q_{3r}^{\prime(2)} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r \leq a); \\
u_3^{(2)} &= 0, \quad Q_{3r}^{\prime(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, 0 \leq r < \infty); \\
u_3^{(1)} &= u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, a < r < \infty); \\
Q_{33}^{\prime(1)} &= Q_{33}^{\prime(2)}, \quad Q_{3r}^{\prime(1)} = Q_{3r}^{\prime(2)} \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty).
\end{aligned} \tag{15}$$

2.2.2. *Трещины радиального сдвига.* Аналогично, в случае, когда к берегам трещин приложены радиальные касательные напряжения $\tau(r)$ (антисимметрично относительно плоскостей $y_3 = 0$ и $y_3 = -2h$), граничные условия задачи с учетом разбиения на подобласти имеют вид

$$\begin{aligned}
Q_{33}^{\prime(2)} &= 0, \quad Q_{3r}^{\prime(2)} = -\tau(r) \quad (y_3 = 0, 0 \leq r \leq a); \\
u_r^{(2)} &= 0, \quad Q_{33}^{\prime(2)} = 0 \quad (y_3 = -h, 0 \leq r < \infty); \\
u_3^{(1)} &= u_3^{(2)}, \quad u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \quad (y_3 = 0, a < r < \infty); \\
Q_{33}^{\prime(1)} &= Q_{33}^{\prime(2)}, \quad Q_{3r}^{\prime(1)} = Q_{3r}^{\prime(2)} \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty).
\end{aligned} \tag{16}$$

2.2.3. *Трещины кручения.* Рассматривая случай, когда к берегам трещин приложены тангенциальные крутящие напряжения $\tau_\theta(r)$ (антисимметрично относительно плоскостей расположения трещин $y_3 = 0$ и $y_3 = -2h$), с учетом разбиения на подобласти получаем такие граничные условия задачи:

$$\begin{aligned}
Q_{3\theta}^{\prime(2)}(r, y_3) &= -\tau_\theta(r) \quad (y_3 = 0, 0 \leq r \leq a); \\
u_\theta^{(2)}(r, y_3) &= 0 \quad (y_3 = -h, 0 \leq r < \infty); \\
u_\theta^{(1)}(r, y_3) &= u_\theta^{(2)}(r, y_3) \quad (y_3 = 0, a < r < \infty); \\
Q_{3\theta}^{\prime(1)}(r, y_3) &= Q_{3\theta}^{\prime(2)}(r, y_3) \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty).
\end{aligned} \tag{17}$$

2.3. Периодическая система параллельных трещин в бесконечном теле. Далее рассмотрим бесконечное тело с начальными напряжениями, содержащее периодическую систему соосных трещин одинакового радиуса a , которые расположены в параллельных плоскостях $y_3 = \text{const} : \{r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi, y_3 = 2hn; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с центрами на оси Oy_3 . Принимая во внимание симметрию геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости $y_3 = 0$, а также периодичность компонент тензора напряжений и вектора перемещений (с периодом $2h$) относительно переменной y_3 , можем свести исходную задачу о теле с периодической системой соосных параллельных трещин к задаче о слое $0 \leq y_3 \leq h$ с соответствующими граничными условиями на его краях. Ниже приведены граничные условия для случаев трещин нормального отрыва, радиального сдвига и кручения.

2.3.1. *Трещины нормального отрыва.* На берегах трещин действуют поля нормальных растягивающих напряжений $\sigma(r)$. В этом случае условия на границе вышеуказанного слоя имеют вид

$$Q'_{33} = -\sigma(r) \quad (y_3 = 0, 0 < r \leq a); \quad u_3 = 0, Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty);$$

$$u_3 = 0 \quad (y_3 = 0, a < r < \infty); \quad Q'_{3r} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty). \quad (18)$$

2.3.2. *Трещины радиального сдвига.* В случае, когда на берегах трещин заданы радиальные напряжения интенсивности $\tau(r)$, граничные условия соответствующей задачи для слоя имеют вид

$$Q'_{3r} = -\tau(r) \quad (y_3 = 0, 0 < r \leq a); \quad u_r = 0, Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty);$$

$$u_r = 0 \quad (y_3 = 0, a < r < \infty); \quad Q'_{33} = 0 \quad (y_3 = 0, 0 \leq r < \infty). \quad (19)$$

2.3.3. *Трещины кручения.* Предполагается, что к берегам трещин приложены тангенциальные крутящие нагрузки $\tau_\theta(r)$. В этом случае ненулевыми являются только компоненты вектора перемещений u_θ и тензора напряжений $Q'_{3\theta}$ и представления (2) имеют вид (10). Учитывая вышеуказанное сведение задачи о теле с периодической системой параллельных трещин к задаче о слое $0 \leq y_3 \leq h$, получаем такие граничные условия:

$$Q'_{3\theta} = -\tau_\theta(r) \quad (y_3 = 0, 0 < r \leq a); \quad u_\theta = 0 \quad (y_3 = 0, a < r < \infty);$$

$$u_\theta = 0 \quad (y_3 = h, 0 \leq r < \infty). \quad (20)$$

Отметим, что используя представления напряжений и перемещений в виде (2), можно переформулировать граничные условия задач в терминах потенциальных гармонических функций $\varphi_j, j = 1, 3$.

3. Парные интегральные уравнения. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода.

Задачи в приведенной выше постановке будем приводить к системам парных интегральных уравнений, а затем – к разрешающим интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, которые допускают эффективное численное исследование. Ниже более детально продемонстрируем указанную методику исследования на примере задачи о полуограниченном предварительно напряженном теле с приповерхностной трещиной нормального отрыва. Для других постановок задач математические выкладки производятся аналогично.

3.1. Приповерхностная трещина в полупространстве.

3.1.1. *Трещина нормального отрыва.* С учетом указанного в п. 2.2.1 разбиения полупространства $y_3 \geq -h$ на подобласти «1» и «2» и принимая во внимание условия затухания напряжений и перемещений в подобласти «1» при $y_3 \rightarrow \infty$, представим гармонические потенциальные функции $\varphi_j, j = 1, 2$, в виде интегральных разложений Ханкеля

$$\varphi_1^{(1)}(r, z_1) = \int_0^\infty A(\lambda) e^{-\lambda z_1} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda}; \quad \varphi_2^{(1)}(r, z_2) = \int_0^\infty B(\lambda) e^{-\lambda z_2} J_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$\varphi_1^{(2)}(r, z_1) = \int_0^\infty [C_1(\lambda) \operatorname{ch}\lambda(z_1 + h_1) + C_2(\lambda) \operatorname{sh}\lambda(z_1 + h_1)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh}\lambda h_1}; \quad (21)$$

$$\varphi_2^{(2)}(r, z_2) = \int_0^\infty [D_1(\lambda) \operatorname{ch}\lambda(z_2 + h_2) + D_2(\lambda) \operatorname{sh}\lambda(z_2 + h_2)] J_0(\lambda r) \frac{\partial \lambda}{\lambda \operatorname{sh}\lambda h_2};$$

$$h_i = hn_i^{-1/2} \quad (i = 1, 2).$$

Граничные условия (5), (7), заданные на всей области $y_3 = \text{const}$, позволяют выразить неизвестные функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_j(\lambda)$ через функции $C_j(\lambda)$, ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= C_1(\lambda) \left[\frac{k_1}{k} (\text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2) + \frac{k_2}{k} \left(1 - \frac{k_1}{k_2} \gamma \right) \right] + \\ &+ C_2(\lambda) \left[\frac{k_2}{k} (\text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2) + \frac{k_1}{k} \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \gamma \right) \right]; \\ B(\lambda) &= -\frac{d_1 l_1 k_2}{d_2 l_2 k} \left\{ C_1(\lambda) \left[\text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2 + 1 - \frac{k_1}{k_2} \gamma \right] + \right. \\ &\left. + C_2(\lambda) \left[1 - \frac{k_1}{k_2} \gamma + \text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2 \right] \right\}; \\ D_1(\lambda) &= -\frac{d_1 l_1}{d_2 l_2} \gamma C_1(\lambda); \quad D_2(\lambda) = -\frac{d_1 l_1 k_2}{d_2 l_2 k_1} \gamma C_2(\lambda) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\left(\gamma = \frac{\text{sh}\mu_2}{\text{sh}\mu_1}; \quad \mu_i = \lambda h_i \quad (i = 1, 2); \quad k_1 = \frac{l_1}{\sqrt{n_2}}; \quad k_2 = \frac{l_2}{\sqrt{n_1}}; \quad k = k_1 - k_2 \right).$$

Тогда из условий (4), (6) получаем такую систему парных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[C_1(\lambda) (\text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2) + C_2(\lambda) \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \gamma \right) \right] J_0(\lambda r) \lambda d\lambda &= -\frac{\sigma(r)}{C_{44} d_1 l_1} \quad (r \leq a); \\ \int_0^\infty \left[C_1(\lambda) \left(1 - \frac{k_1}{k_2} \gamma \right) + C_2(\lambda) (\text{cth}\mu_1 - \gamma \text{cth}\mu_2) \right] J_1(\lambda r) \lambda d\lambda &= 0 \quad (r \leq a); \\ \int_0^\infty X_1 J_0(\lambda r) d\lambda &= 0; \quad (r > a); \quad \int_0^\infty X_2 J_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (r > a), \end{aligned} \quad (23)$$

где введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} X_1 &= C_1(\lambda) \frac{k_1}{k} [(1 + \text{cth}\mu_1) - \gamma(1 + \text{cth}\mu_2)] + C_2(\lambda) \frac{k_2}{k} \left[\frac{k_1}{k_2} (1 + \text{cth}\mu_1) - \gamma(1 + \text{cth}\mu_2) \right]; \\ X_2 &= C_1(\lambda) \frac{k_2}{k} \left[(1 + \text{cth}\mu_1) - \frac{k_1}{k_2} \gamma(1 + \text{cth}\mu_2) \right] + C_2(\lambda) \frac{k_2}{k} [(1 + \text{cth}\mu_1) - \gamma(1 + \text{cth}\mu_2)]. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение системы парных интегральных уравнений (23) будем осуществлять с использованием метода подстановки [5], в соответствии с которым представим выражения X_1 и X_2 в следующей форме:

$$X_1 = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \varphi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt = \int_0^a \varphi(t) \sin \lambda t dt; \quad X_2 = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) J_{3/2}(\lambda t) dt, \quad (25)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неизвестные функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на отрезке $[0, a]$. При этом третье и четвертое уравнения в (23) тождественно удовлетворяются, а первое и второе уравнения, после некоторых преобразований [10], приводят к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, которые при введении безразмерных переменных $\xi = xa^{-1}$, $\eta = ta^{-1}$, $\beta = ha^{-1}$ имеют вид

$$f(\xi) + \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4k_1}{\pi k} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta;$$

$$g(\xi) + \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0, \quad (26)$$

где

$$f(\xi) \equiv a^{-1} \varphi(a\xi), \quad g(\xi) \equiv a^{-1} \frac{d}{d\xi} [\xi \psi(a\xi)]; \quad s(\xi) \equiv \frac{\xi \sigma(a\xi)}{C_{44} d_1 l_1}. \quad (27)$$

Ядра интегральных уравнений (26) имеют вид

$$K_{11}(\xi, \eta) = \frac{k_2}{k} \left[2I_1(\beta_1 + \beta_2, \eta) - \frac{k_1 + k_2}{2k_2} I_1(2\beta_1, \eta) - \frac{k_1 + k_2}{2k_1} I_1(2\beta_2, \eta) \right];$$

$$K_{12}(\xi, \eta) = \frac{k_1 + k_2}{k} \left\{ \left[\eta^{-1} I_0(\beta_1 + \beta_2, \eta) - I_0(\beta_1 + \beta_2, 1) \right] - \frac{1}{2} \left[\eta^{-1} I_0(2\beta_1, \eta) - I_0(2\beta_1, 1) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left[\eta^{-1} I_0(2\beta_2, \eta) - I_0(2\beta_2, 1) \right] \right\};$$

$$K_{21}(\xi, \eta) = -\frac{k_1 + k_2}{k} \xi \left[I_2(\beta_1 + \beta_2, \eta) - \frac{1}{2} I_2(2\beta_1, \eta) - \frac{1}{2} I_2(2\beta_2, \eta) \right]; \quad (28)$$

$$K_{22}(\xi, \eta) = -\frac{k_1}{k} \xi \left\{ 2 \left[\eta^{-1} I_1(\beta_1 + \beta_2, \eta) - I_1(\beta_1 + \beta_2, 1) \right] - \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \left[\eta^{-1} I_1(2\beta_1, \eta) - \right. \right.$$

$$\left. - I_1(2\beta_1, 1) \right] - \frac{k_1 + k_2}{2k_2} \left[\eta^{-1} I_1(2\beta_2, \eta) - I_1(2\beta_2, 1) \right] \right\};$$

$$I_0(\beta, \eta) = \frac{1}{4} \ln \frac{\beta^2 + (\xi + \eta)^2}{\beta^2 + (\xi - \eta)^2} = \frac{1}{4} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}; \quad I_1(\beta, \eta) = \frac{\beta}{2\xi\eta(\zeta^2 - 1)};$$

$$I_2(\beta, \eta) = I_1(\beta, \eta) \left[4\xi I_1(\beta, \eta) - \frac{1}{\beta} \right];$$

$$\zeta = \frac{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2}{2\xi\eta}, \quad \beta = ha^{-1}, \quad \beta_i = \beta n_i^{-1/2} \quad (i=1,2).$$

3.1.2. *Трещина радиального сдвига.* Применяя указанную методику, в этом случае получаем такую систему интегральных уравнений Фредгольма [9]:

$$f(\xi) + \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_1}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = 0;$$

$$g(\xi) + \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{4k_2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4k_2}{\pi k} \xi \int_0^{\pi/2} p'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (29)$$

где $p(\xi) \equiv \frac{\xi \tau(a\xi)}{C_{44} n^{-1/2} d_1}$, а ядра имеют вид (28).

3.1.3. *Трещина кручения.* Получаем разрешающее интегральное уравнение Фредгольма в виде

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (30)$$

где

$$q(\xi) \equiv \frac{\xi \tau_\theta(a\xi)}{C_{44} n_3^{-1/2}} \text{ с ядром } K(\xi, \eta) = 2\xi \left[\eta^{-1} I_1(2\beta_3, \eta) - I_1(2\beta_3, 1) \right].$$

3.2. *Две параллельные трещины в бесконечном теле.* Произведя аналогичные выкладки, можно получить разрешающие интегральные уравнения для задачи о разрушении тела с двумя параллельными соосными трещинами. Ниже приведем эти уравнения для случаев трещин нормального отрыва, радиального сдвига и кручения.

3.2.1. *Трещины нормального отрыва.* В этом случае задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$f(\xi) + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta;$$

$$g(\xi) + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta + \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = 0, \quad (31)$$

где $s(\xi) \equiv -\frac{\xi \sigma(a\xi)}{C_{44} d_2 l_2}$, а ядра имеют вид

$$K_{11}(\xi, \eta) = k_1 I_1(2\beta_1, \eta) - k_2 I_1(2\beta_2, \eta);$$

$$K_{12}(\xi, \eta) = k_1 \left\{ \left[I_0(2\beta_1, 1) - I_0(2\beta_2, 1) \right] - \eta^{-1} \left[I_0(2\beta_1, \eta) - I_0(2\beta_2, \eta) \right] \right\};$$

$$K_{21}(\xi, \eta) = -k_2 \xi \left[I_2(2\beta_1, \eta) - I_2(2\beta_2, \eta) \right]; \quad (32)$$

$$K_{22}(\xi, \eta) = -\xi \left\{ \left[k_2 I_1(2\beta_1, 1) - k_1 I_1(2\beta_2, 1) \right] - \eta^{-1} \left[k_2 I_1(2\beta_1, \eta) - k_1 I_1(2\beta_2, \eta) \right] \right\}.$$

3.2.2. *Трещины радиального сдвига.* Получаем систему интегральных уравнений в виде

$$f(\xi) - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{11}(\xi, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{12}(\xi, \eta) d\eta = 0;$$

$$g(\xi) - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 f(\eta) K_{21}(\xi, \eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 g(\eta) K_{22}(\xi, \eta) d\eta = -\frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} p'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (33)$$

где $p(\xi) \equiv -\frac{\xi \tau(a\xi)}{C_{44} n_2^{-1/2} d_2}$, а ядра имеют вид (32).

3.2.3. *Трещины кручения.* В этом случае имеем разрешающее интегральное уравнение Фредгольма

$$f(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{4}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (34)$$

где $q(\xi) \equiv \frac{\xi \tau_\theta(a\xi)}{C_{44} n_3^{-1/2}}$ с ядром

$$K(\xi, \eta) = 8\beta_3 \xi^2 \left[\frac{1}{(4\beta_3^2 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 4\xi^2 \eta^2} - \frac{1}{(4\beta_3^2 + \xi^2 + 1)^2 - 4\xi^2} \right].$$

3.3. Периодическая система параллельных трещин в бесконечном теле.

3.3.1. *Трещины нормального отрыва.* В случае материала с периодической системой параллельных трещин нормального отрыва получаем разрешающее интегральное уравнение Фредгольма второго рода вида [12]

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) \sin \theta d\theta \quad \left(s(\xi) \equiv -\frac{k_1 \sigma(a\xi)}{k C_{44} d_1 l_1} \right). \quad (35)$$

Ядро интегрального уравнения имеет вид $K(\xi, \eta) = R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta)$, при этом $R(z) = \frac{1}{k} \left[\frac{k_1}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) - \frac{k_2}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) \right]$, а $\operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_i} \right)$ – действительная часть пси-функции $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ ($\Gamma(z)$ – гамма-функция).

3.3.2. *Трещины радиального сдвига.* Получаем интегральное уравнение Фредгольма [13]

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} p'(\xi \sin \theta) d\theta \quad \left(p(\xi) \equiv \frac{k_2 \xi \tau(a\xi)}{k C_{44} n_1^{-1/2} d_1} \right). \quad (36)$$

Ядро имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \xi \eta^{-1} [R_1(\xi - \eta) - R_1(\xi + \eta)] - \xi [R_1(\xi - 1) - R_1(\xi + 1)];$$

$$R_1(z) \equiv \frac{1}{k} \left[\frac{k_1}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) - \frac{k_2}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right].$$

3.3.3. *Трещины кручения.* Интегральное уравнение Фредгольма имеет вид

$$f(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = -\frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} q'(\xi \sin \theta) d\theta; \quad q(\xi) \equiv \frac{\xi \tau_\theta(a\xi)}{C_{44} n_3^{-1/2}}. \quad (37)$$

При этом ядро имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\beta_3} \left\{ \frac{1}{\eta} [R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta)] - [R(\xi - 1) - R(\xi + 1)] \right\}; \quad R(z) = \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_3} \right).$$

4. Коэффициенты интенсивности напряжений.

Аналогично тому, как принято в классической механике разрушения [27], коэффициенты интенсивности напряжений определим как коэффициенты при сингулярностях в распределении соответствующих компонент тензора напряжений в окрестностях вершин трещин. С учетом того, что как показано в [2] порядок особенности у края трещины, вычисленный в рамках механики разрушения материалов с начальными напряжениями, совпадает с порядком особенности, получаемой в рамках классической линейной механики разрушения, представления для коэффициентов интенсивности напряжений имеют вид

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} \sqrt{2\pi(r-a)} Q'_{33}(r, 0); \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} \sqrt{2\pi(r-a)} Q'_{3r}(r, 0);$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow +a} \sqrt{2\pi(r-a)} Q'_{3\theta}(r, 0). \quad (38)$$

Из решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода (26), (29) – (31), (33) – (37) с учетом (27), (25), (24), (22), (21) и (2) можно определить распределение компонент тензора напряжений $Q'_{ij}(r, y_3)$ в материале и из анализа значений этих компонент в плоскости расположения трещин в области вне трещины с учетом формул (38) можно получить выражения для коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Продемонстрируем это более подробно на примере приповерхностной трещины нормального отрыва в полупространстве; получение выражений для КИН при других постановках задач производится аналогично.

4.1. Приповерхностная трещина в полупространстве.

4.1.1. Трещина нормального отрыва. Из (2), с учетом (21), (22), (24), (25), имеем

$$Q'_{33}^{(2)}(r, 0) = C_{44} d_1 l_1 \left\{ \frac{k}{2k_1} \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[2 \frac{k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left(\frac{k_2}{k_1} e^{-2\mu_2} + e^{-2\mu_1} \right) \right] \sin \lambda t J_0(\lambda r) \lambda d\lambda - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[\frac{k_1 + k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left(e^{-2\mu_1} + e^{-2\mu_2} \right) \right] \times \right.$$

$$\left. \times J_{3/2}(\lambda t) J_0(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda \right\};$$

$$Q'_{3r}^{(2)}(r, 0) = -C_{44} n_1^{-1/2} d_1 \left\{ \frac{k}{2k_2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty J_{3/2}(\lambda t) J_1(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda + \sqrt{\pi} \int_0^a \sqrt{t} \psi(t) dt \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty \left[2 \frac{k_1}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left(\frac{k_1}{k_2} e^{-2\mu_1} + e^{-2\mu_2} \right) \right] J_{3/2}(\lambda t) J_1(\lambda r) \lambda^{3/2} d\lambda - \right.$$

$$\left. - \int_0^a \varphi(t) dt \int_0^\infty \left[\frac{k_1 + k_2}{k} e^{-\mu_1 - \mu_2} - \frac{1}{2} \frac{k_1 + k_2}{k} \left(e^{-2\mu_1} + e^{-2\mu_2} \right) \right] \sin \lambda t J_1(\lambda r) \lambda d\lambda \right\}; \quad (39)$$

$$Q_{3\theta}^{(2)}(r, 0) = 0.$$

Анализ соотношений (39) показывает, что при $r \rightarrow +a$ особенности в $Q_{33}^{(2)}(r, 0)$ и $Q_{3r}^{(2)}(r, 0)$ содержатся только в первых слагаемых выражений в фигурных скобках. Проведя в этих выражениях интегрирование по частям и применяя формулу Вебера – Шафхейтлина [5], получаем

$$Q_{33}^{(2)}(r, 0) = -C_{44}d_1l_1 \frac{k}{2k_1} \frac{\varphi(a)}{\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1);$$

$$Q_{3r}^{(2)}(r, 0) = C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \frac{a\psi(a)}{r\sqrt{r^2 - a^2}} + O(1),$$

где символом $O(1)$ обозначены регулярные составляющие, не имеющие особенностей при $r \rightarrow +a$.

Тогда из (38) получаем такие выражения для КИН:

$$K_I = -C_{44}d_1l_1 \frac{k}{2k_1} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \varphi(a); \quad K_{II} = C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \psi(a); \quad K_{III} = 0. \quad (40)$$

Переходя в (40) с учетом выражений (27) к безразмерным переменным и функциям, получаем

$$K_I = -C_{44}d_1l_1 \frac{k}{2k_1} \sqrt{\pi a} f(1); \quad K_{II} = C_{44}n_1^{-1/2}d_1 \frac{k}{2k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\xi) d\xi; \quad K_{III} = 0, \quad (41)$$

где функции f и g определяются из решения системы интегральных уравнений Фредгольма (26).

Из (40), (41) видим, что взаимодействие трещины со свободной поверхностью материала приводит к ненулевому значению K_{II} в задаче о трещине нормального отрыва (для неограниченного тела с начальными напряжениями, содержащего изолированную трещину нормального отрыва, как следует из [1, 2], $K_{II} = 0$). Следует отметить, что аналогичный механический эффект был установлен и в соответствующей задаче механики разрушения материалов без начальных напряжений [27]. Кроме того, оба КИН K_I и K_{II} зависят от начальных напряжений и от расстояния между трещиной и границей полупространства, поскольку значения функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$, получаемые из уравнений (26), зависят от этих параметров.

Проанализируем предельный случай расположения трещины, когда расстояние между ней и границей полупространства стремится к бесконечности. Из выражения для ядер интегральных уравнений (28) следует, что при $h \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$) все ядра стремятся к нулю. Тогда из уравнений (26) получаем граничные значения функций f и g

$$f^\infty(\xi) = -\frac{4k_1}{\pi k} \int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta; \quad g^\infty(\xi) = 0. \quad (42)$$

Учитывая, что $\int_0^{\pi/2} s(\xi \sin \theta) d\theta = \int_0^{\xi} \frac{\eta \sigma(a\eta)}{\sqrt{\xi^2 - \eta^2}} d\eta$, из (41), (27) получаем значения

для КИН в предельном случае расположения трещины, когда расстояние между ней и свободной границей стремится к бесконечности, в виде

$$K_I^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta \sigma(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t \sigma(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt; \quad K_{II}^\infty = 0; \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (43)$$

В частности, при действии на берегах трещины равномерной нормальной нагрузки $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$ из (43) получаем

$$K_I^\infty = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}}. \quad (44)$$

Значения коэффициентов интенсивности напряжений (43), (44) полностью совпадают со значениями КИН, полученными в задаче о трещине нормального отрыва в предварительно напряженном материале [1, 2], а также со значениями КИН в случае неограниченного тела без начальных напряжений, ослабленного изолированной дискообразной трещиной нормального отрыва [27].

4.1.2. Трещина радиального сдвига. В этом случае значения КИН имеют вид (40), где функции f и g определяются из решения системы интегральных уравнений (29).

Как видим, и в этом случае наличие свободной поверхности приводит к качественным изменениям в распределении напряжений в окрестности края трещины радиального сдвига, а именно, ненулевым значениям коэффициента интенсивности напряжений K_I (для бесконечного тела с трещиной радиального сдвига $K_I = 0$ [1, 2]).

В предельном случае расположения трещины, когда расстояние между ней и границей полупространства стремится к бесконечности, получаем такие выражения для КИН:

$$K_I^\infty = 0, \quad K_{II}^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta^2 \tau(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (45)$$

В частности, в случае равномерной сдвиговой нагрузки на берегах трещины $\tau(r) = \tau = \text{const}$ имеем

$$K_{II}^\infty = \frac{\tau}{2} \sqrt{\pi a}. \quad (46)$$

Выражения для КИН (45), (46) совпадают с соответствующими значениями КИН, которые были получены в [1, 2] в задаче о трещине радиального сдвига в неограниченном материале с начальными напряжениями, а также совпадают со значениями КИН в случае неограниченного тела без начальных напряжений, ослабленного изолированной круговой трещиной радиального сдвига [27].

4.1.3. Трещина кручения. Получаем значения КИН в следующем виде:

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} d_3 n_3^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (47)$$

где функция $f(\eta)$ определяется из решения уравнения (30).

В предельном случае расположения трещины кручения, когда расстояние между ней и границей полупространства стремится к бесконечности, получаем такие выражения для КИН:

$$K_I^\infty = 0; \quad K_{II}^\infty = 0; \quad K_{III}^\infty = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\eta^2 \tau_\theta(a\eta) d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2}{a\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{t^2 \tau_\theta(t) dt}{\sqrt{a^2-t^2}}; \quad (48)$$

в частности, в случае действия на берегах трещины равномерного напряжения $\tau_\theta(r) = \tau = \text{const}$ имеем

$$K_{III}^\infty = \frac{\tau}{2} \sqrt{\pi a}. \quad (49)$$

Эти выражения совпадают с соответствующими значениями КИН, которые были получены в [1, 2] в задаче о трещине кручения в неограниченном материале с начальными напряжениями, а также совпадают со значениями КИН в случае неограниченного тела без начальных напряжений, ослабленного изолированной круговой трещиной кручения [27].

4.2. Две параллельные трещины в бесконечном теле.

4.2.1. *Трещины нормального отрыва.* В этом случае получаем такие выражения для КИН:

$$K_I = -\frac{1}{2} C_{44} d_2 l_2 \sqrt{\pi a} f(1); \quad K_{II} = \frac{1}{2} C_{44} d_2 n_2^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\xi) d\xi; \quad K_{III} = 0, \quad (50)$$

где функции f и g определяются из системы интегральных уравнений (31).

4.2.2. *Трещины радиального сдвига.* Выражения для КИН в этом случае совпадают с (50), при этом функции f и g определяются из решения системы интегральных уравнений (33).

4.2.3. *Трещины кручения.* Выражения для КИН имеют вид

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = \frac{1}{2} C_{44} n_3^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (51)$$

где функция f определяется из уравнения (34).

Как видим из (50), взаимовлияние двух параллельных соосных трещин в предварительно напряженном материале приводит к изменениям качественного характера в распределении напряжений в окрестностях краев трещин по сравнению со случаем единичной изолированной трещины в бесконечном теле, а именно, к ненулевым значениям коэффициента интенсивности напряжений K_{II} в случае трещин нормального отрыва и к ненулевым значениям K_I в случае трещин радиального сдвига.

4.3. Периодическая система параллельных трещин в бесконечном теле.

4.3.1. *Трещины нормального отрыва.* Получаем такие значения КИН:

$$K_I = -C_{44} d_1 l_1 \frac{k}{k_1} \sqrt{\pi a} f(1); \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = 0, \quad (52)$$

где f определяется из решения интегрального уравнения (35).

4.3.2. *Трещины радиального сдвига.* В этом случае выражения для КИН имеют вид

$$K_I = 0; \quad K_{II} = C_{44} d_1 n_1^{-\frac{1}{2}} \frac{k}{k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta; \quad K_{III} = 0, \quad (53)$$

где f определяется из решения уравнения (36).

4.3.3. *Трещины кручения.* Имеем выражения для КИН в виде

$$K_I = 0; \quad K_{II} = 0; \quad K_{III} = -C_{44} n_3^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi a} \int_0^1 f(\eta) d\eta, \quad (54)$$

а функция f определяется из решения интегрального уравнения (37).

Аналогично случаю приповерхностной трещины можно показать, что для задач о двух параллельных соосных трещинах и периодической системе параллельных соосных трещин в неограниченном предварительно напряженном теле при бесконечном удалении трещин друг от друга в пределе получаем значения КИН, которые полностью совпадают со значениями, полученными в осесимметричной задаче о разрушении неограниченного тела с начальными напряжениями, ослабленного изолированной дискообразной трещиной [1, 2]. При этом в указанном предельном случае расположения трещин коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях их вершин не зависят от начальных (остаточных) напряжений и совпадают со значениями КИН для соответствующих задач механики разрушения бесконечного тела без начальных напряжений, содержащего одну круговую трещину [27].

5. Результаты численного исследования для отдельных композитов.

Численный анализ разрешающих интегральных уравнений Фредгольма второго рода проводился с использованием метода Бубнова – Галеркина. Результаты получены для случая трещин, нагруженных равномерными усилиями $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$, $\tau(r) = \tau = \text{const}$ или $\tau_\theta(r) = \tau = \text{const}$. Ниже даны результаты численного исследования для слоистых композитных материалов с изотропными слоями и для композитов, армированных короткими волокнами эллипсоидальной формы, которые в макрообъемах моделируются трансверсально-изотропной средой с приведенными механическими характеристиками [6]. Отметим также, что поскольку композитные материалы при умеренных температурах являются сравнительно жесткими, то для их исследования применим второй вариант теории малых начальных деформаций, когда начальное состояние определяется по геометрически линейной теории [4, 17].

Для случая трансверсально-изотропного тела параметры, входящие в представление (2), имеют вид

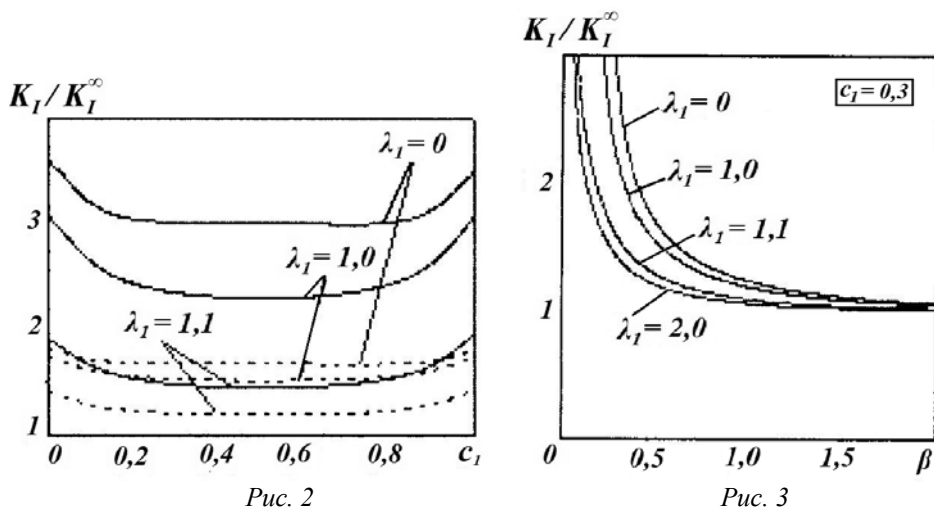
$$\begin{aligned}
 n_{1,2} &= \frac{1}{2}(\mu_{13} + S_{11}^0)^{-1} (A_{11} + S_{11}^0)^{-1} \left\{ (A_{11}A_{33} + S_{11}^0A_{33} + S_{11}^0\mu_{13} - 2A_{13}\mu_{13} - A_{13}^2) \pm \right. \\
 &\left. \pm \sqrt{(A_{11}A_{33} + S_{11}^0A_{33} + S_{11}^0\mu_{13} - 2A_{13}\mu_{13} - A_{13}^2)^2 - 4(A_{11} + S_{11}^0)(\mu_{13} + S_{11}^0)\mu_{13}A_{33}} \right\}; \\
 n_3 &= \mu_{13}(\mu_{12} + S_{11}^0)^{-1}; \\
 C_{44} &= \mu_{13}; \quad m_j = \left[(A_{11} + S_{11}^0)n_j - \mu_{13} \right] (A_{13} + \mu_{13})^{-1}; \\
 l_j &= \left[n_j (A_{11}A_{33} + S_{11}^0A_{33} - A_{13}^2 - A_{13}\mu_{13}) - A_{33}\mu_{13} \right] \left[n_j (A_{11} + S_{11}^0) + A_{13} \right]^{-1} (n_j)^{-1} \mu_{13}^{-1}, \\
 &j = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{55}$$

где параметры A_{ij}, μ_{ij} выражаются через технические постоянные в виде

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= E(1 - \nu'\nu'')A^{-1}; \quad A_{33} = E'(1 - \nu^2)A^{-1}; \\
 A_{13} &= E\nu'(1 + \nu)A^{-1}; \quad A = 1 - \nu^2 - 2\nu'\nu'' - 2\nu\nu'\nu''; \\
 \mu_{12} &= G \equiv G_{12} = \frac{1}{2}E(1 + \nu)^{-1}; \quad \mu_{13} = G' \equiv G_{13}; \\
 \nu &\equiv \nu_{12}; \quad \nu' \equiv \nu_{31}; \quad \nu'' \equiv \nu_{13}, \quad E \equiv E_1; \quad E' \equiv E_3.
 \end{aligned}$$

5.1. Слоистый композит с изотропными слоями. Рассмотрим пример расчетов для слоев алюмоборосиликатного стекла в композиции со слоями эпоксидномалеиновой смолы. Модуль упругости стекла – $E^{(1)} = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона – $\nu^{(1)} = 0,2$; для смолы эти постоянные равны: $E^{(2)} = 0,315 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu^{(2)} = 0,382$. Приведенные (усредненные) механические постоянные этого композита определяются в [6] по упругим характеристикам компонентов и их объемной концентрации в материале.

На рис. 2 для приповерхностной трещины, берега которой находятся под действием равномерной нормальной нагрузки $\sigma(r) = \sigma = \text{const}$, приведена зависимость соотношения коэффициентов интенсивности напряжений K_I / K_I^∞ (где K_I^∞ – КИН для случая изолированной трещины нормального отрыва в бесконечном материале, который определяется из (44)) от объемной концентрации стекла c_1 . Зависимости даны для разных значений параметра начального растяжения (или сжатия) λ_1 , обусловленного действием начальных напряжений, (при этом значения $\lambda_1 > 1$ соответствуют начальному растяжению, $\lambda_1 < 1$ – начальному сжатию; при $\lambda_1 = 1$ начальные напряжения отсутствуют) и для значений относительных расстояний между трещиной и границей полупространства, нормированных на радиус трещины, $\beta = 0,25$ (сплошные линии) и $\beta = 0,5$ (штриховые линии). Из рисунка видим, что значения K_I / K_I^∞ существенно зависят от начальных напряжений и от расстояния между трещиной и границей полупространства. Зависимость указанного соотношения КИН от объемной концентрации составляющих композита носит немонотонный характер и имеет экстремум при примерно одинаковой концентрации составляющих.



Для такой же геометрической и силовой схем задачи на рис. 3 представлена зависимость КИН K_I / K_I^∞ от безразмерного расстояния между трещиной и границей полупространства $\beta = h / a$. Из рисунка видим, что взаимодействие трещины и свободной поверхности материала приводит к существенному увеличению значений K_I в случае приповерхностной трещины по сравнению со значениями коэффициента интенсивности напряжений для изолированной трещины в бесконечном материале K_I^∞ .

Так, из таблицы, в которой даны значения K_I / K_I^∞ для различных величин λ_1 и β , видим, что, например, для $\lambda_1 = 0,999$ при $\beta = 0,05$ величина K_I превышает значение K_I^∞ в 18 раз. В то же время, при увеличении относительного расстояния между

трещинами их взаимное влияние быстро ослабевает, а соответствующие значения КИН стремятся к значениям, получаемым для случая изолированной трещины в бесконечном материале. Для практических расчетов взаимодействием трещины и границы полупространства можно пренебрегать при значениях расстояния между трещиной и границей, превышающих 4 радиуса трещины.

$\lambda_1 \backslash \beta$	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
0,999	18,1290	5,9081	2,8549	2,0782	1,7321	1,5386
1,050	3,4969	2,5027	1,8148	1,5298	1,3752	1,2797
1,100	2,8803	2,1178	1,5996	1,3863	1,2703	1,1986

Рис. 4 для приповерхностной трещины, берега которой находятся под действием равномерной радиальной сдвиговой нагрузки $\tau(r) = \tau = \text{const}$, иллюстрирует зависимость соотношения коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} / K_{II}^{∞} (где K_{II}^{∞} – КИН для случая изолированной трещины радиального сдвига в бесконечном материале, который определяется из (46)) от параметра начального напряжения λ_1 для разных относительных расстояний между трещиной и границей полупространства β (при коэффициенте объемной концентрации стекла $c_1 = 0,3$).

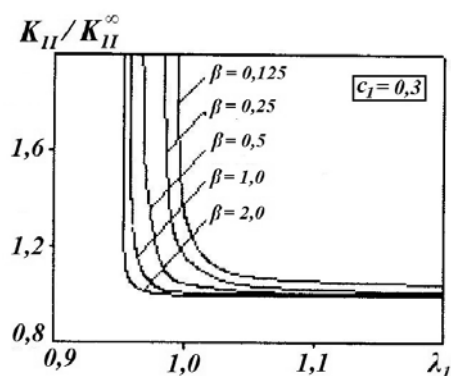


Рис. 4

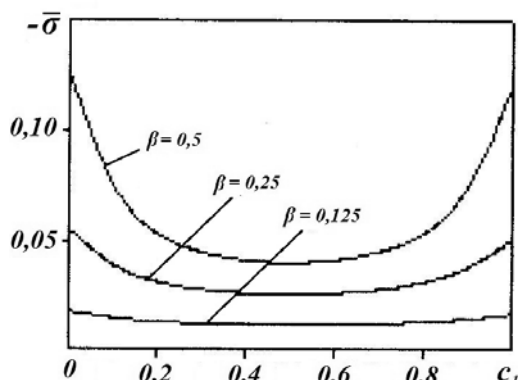


Рис. 5

Представленные на рис. 4 зависимости имеют вертикальные асимптоты, соответствующие «резонансоподобному» изменению коэффициентов интенсивности напряжений при достижении начальными сжимающими напряжениями значений, при которых происходит локальная потеря устойчивости материала в окрестности трещины. В соответствии с описанным во Введении объединенным подходом к исследованию неклассических проблем механики разрушения это явление позволяет определить критические параметры нагружения в задаче о сжатии полуограниченного композита вдоль приповерхностной трещины. Зависимости полученных таким образом значений критических безразмерных напряжений сжатия $\bar{\sigma} = S_{11}^0 / E$ (напряжений, отнесенных к приведенному модулю упругости рассматриваемого композита) от объемной концентрации стекла c_1 приведены на рис. 5 для разных значений β . Отметим, что полученные здесь значения $\bar{\sigma}$ совпадают со значениями, которые были получены ранее (см., например, [23]) при исследовании задачи о сжатии полуограниченного композита с приповерхностной круговой трещиной в рамках подходов трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел.

На рис. 6 для периодической системы параллельных соосных трещин, берега которых находятся под действием равномерной крутящей нагрузки $\tau_\theta(r) = \tau = \text{const}$, дана зависимость соотношения коэффициентов интенсивности напряжений K_{III} / K_{III}^∞ (где K_{III}^∞ – КИН для случая изолированной трещины кручения в бесконечном материале, который определяется из (49)) от нормированного на радиус трещин полурасстояния между трещинами β (при коэффициенте объемной концентрации стекла $c_1 = 0,4$). Отметим, что в этом случае взаимовлияние трещин между собой приводит, в отличие от случая приповерхностной трещины нормального отрыва, к уменьшению значений K_{III} по сравнению со случаем изолированной трещины.

На рис. 7 – 10 даны результаты численных расчетов для слоистых двухкомпонентных композитов с изотропными слоями при разных соотношениях модулей упругостей материалов слоев $E^{(1)} / E^{(2)}$. При этом предполагается, что коэффициенты Пуассона материалов слоев $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$, а объемная концентрация материала первого слоя $c_1 = 0,3$.

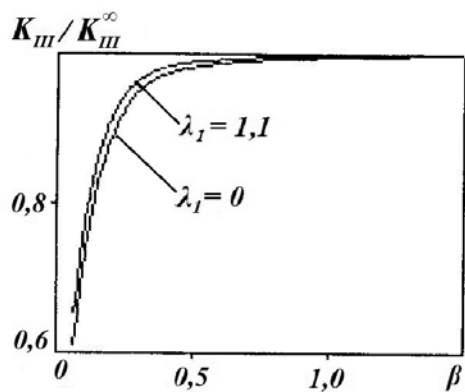


Рис. 6

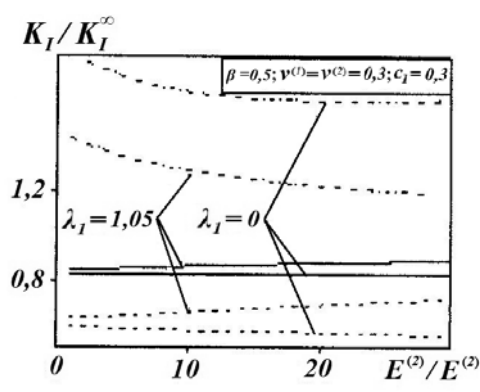


Рис. 7

Рис. 7 для случаев действия в материале начальных растягивающих ($\lambda_1 = 1,05$) и начальных сжимающих ($\lambda_1 = 0,99$) напряжений показывает существенную зависимость соотношений КИН K_I / K_I^∞ от соотношений модулей упругости слоев. Результаты даны для задач о двух параллельных трещинах (сплошные линии), периодической системе трещин (штриховые линии) и приповерхностной трещине (штрихпунктирные линии), находящихся под действием равномерной нормальной нагрузки, для одинаковых относительных полурасстояний между трещинами (две параллельные трещины, периодическая система трещин) или расстояния между трещиной и свободной границей материала (приповерхностная трещина) $\beta = 0,5$.

Зависимости соотношения КИН K_{II} / K_{II}^∞ от параметра начальных напряжений λ_1 для периодической системы трещин радиального сдвига проиллюстрированы на рис. 8. Как видим из рисунка, в области сжимающих начальных напряжений ($\lambda_1 < 1$) кривые имеют вертикальные асимптоты, соответствующие вышеуказанному «резонансоподобному» эффекту, что дает возможность определять критические параметры сжатия, при которых происходит локальная потеря устойчивости (по антисимметричной или изгибной форме) материала в условиях сжатия вдоль периодической системы трещин.

На рис. 9 приведена зависимость полученных таким образом критических безразмерных напряжений сжатия от соотношения модулей упругости слоев (кривая 3).

Здесь же для сравнения приведены полученные аналогичным образом зависимости $\bar{\sigma}$ от $E^{(1)} / E^{(2)}$ для двух параллельных трещин (кривая 2) и приповерхностной трещины (кривая 1). Отметим, что приведенные на рис. 9 значения критических напряжений сжатия для периодической системы трещин и для двух параллельных трещин соответствуют антисимметричной форме потери устойчивости (определялись из решения задач для трещин радиального сдвига), поскольку значения $\bar{\sigma}$, соответствующие симметричной форме потери устойчивости (определялись из решения задач для трещин нормального отрыва), оказались существенно выше критических значений для антисимметричной формы.

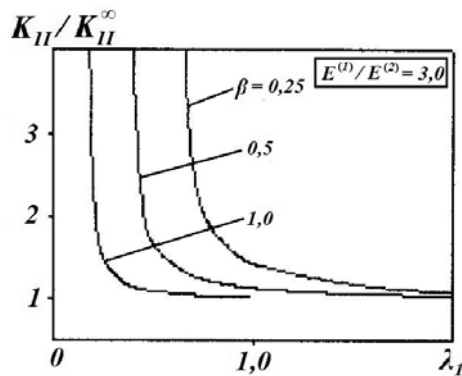


Рис. 8

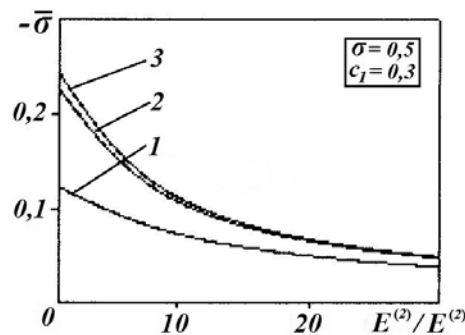


Рис. 9

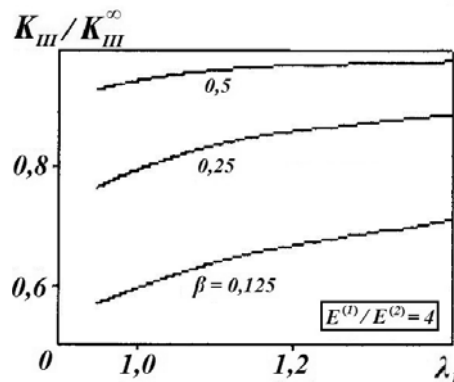


Рис. 10

На рис. 10 для случая периодической системы трещин кручения даны зависимости соотношений КИН $K_{III} / K_{III}^{\infty}$ от параметра начальных напряжений λ_1 для разных значений β при соотношении модулей упругости слоев $E^{(1)} / E^{(2)} = 4$.

Как видим, в этом случае эффектов «резонансоподобного» изменения КИН не наблюдается, поскольку, очевидно, при сжатии материала с трещинами отсутствует форма потери устойчивости, соответствующая задаче кручения.

5.2. Композит со стохастическим армированием в плоскостях $y_3 = \text{const}$ короткими волокнами эллипсоидальной формы. Макрохарактеристики композита из углепластика, армированного углеродными волокнами, при объемной концентрации волокон $c_1 = 0,7$ и при соотношении продольного и поперечного размеров волокон, равном 10, имеют такие значения [6]:

$$E = 1,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}; E_3 = 3,0 \cdot 10^4 \text{ МПа};$$

$$G_3 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \nu = 0,125; \nu_{13} = 0,09.$$

На рис. 11, 12 для приповерхностной трещины под действием равномерной нормальной нагрузки даны, соответственно, зависимости соотношений КИН K_I / K_I^∞ и K_{II} / K_{II}^∞ от параметра начальных напряжений λ_1 для разных значений относительного расстояния между трещиной и границей полупространства β .

Зависимости подтверждают существенное влияние начальных напряжений, особенно в области действия сжимающих начальных напряжений, на коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности краев трещины.

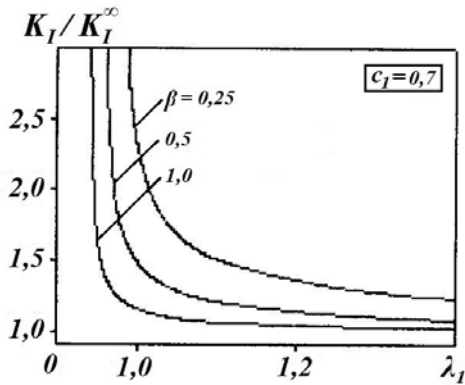


Рис. 11

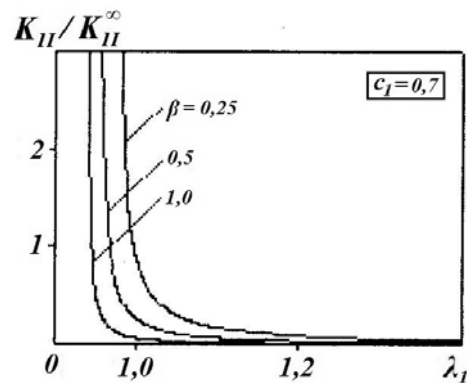


Рис. 12

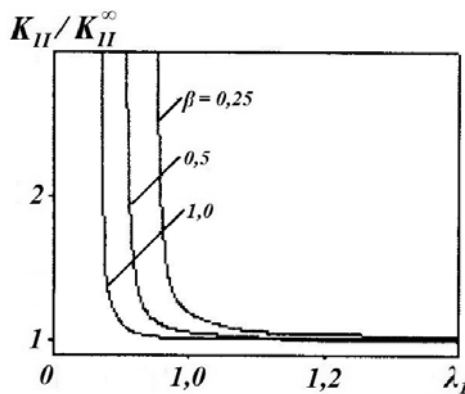


Рис. 13

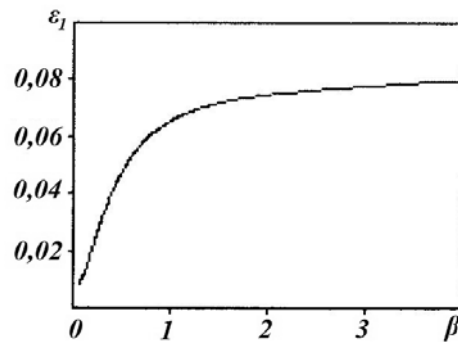


Рис. 14

Рис. 13 иллюстрирует зависимость K_{II} / K_{II}^∞ от параметра начальных напряжений в задаче о приповерхностной трещине радиального сдвига в полуограниченном композите.

Из рис. 11 – 13 видим, что при приближении значений начальных сжимающих напряжений к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещины, наблюдается эффект резкого скачкообразного увеличения значений коэффициентов интенсивности напряжений, что позволяет определять критические параметры сжатия для задачи о сжатии материала вдоль приповерхностной трещины непосредственно из решения соответствующей задачи механики разрушения материалов с начальными напряжениями. Зависимости полученных таким образом значений относительного критического укорочения $\epsilon_1 = 1 - \lambda_1$ от безразмерного расстояния между трещиной и поверхностью материала проиллюстрированы на рис. 14.

6. Заключение.

В работе в рамках подходов трехмерной линеаризированной механики деформируемого твердого тела исследованы пространственные осесимметричные задачи механики хрупкого разрушения композитных материалов с начальными напряжениями и разрушения композитов при сжатии вдоль взаимодействующих трещин. Анализ полученных результатов позволяет сделать такие основные выводы.

1. Для всех рассмотренных постановок задач выявлен новый механический эффект, состоящий в существенном влиянии начальных напряжений, действующих вдоль трещин, на коэффициенты интенсивности напряжений в окрестностях краев трещин. В этом проявляется отличие результатов рассмотренных в статье задач для взаимодействующих трещин в предварительно напряженных телах от результатов, полученных ранее в [1, 2, 4] при исследовании задач для изолированных свободных трещин, в которых параметры начального напряженно-деформированного состояния не входили в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений, но влияли на величины раскрытия трещин.

2. Во всех рассмотренных задачах (за исключением задач кручения) обнаруживается резкое «резонансоподобное» изменение значений коэффициентов интенсивности напряжений при приближении начальных сжимающих усилий к значениям, соответствующим локальной потере устойчивости материала в окрестности трещин, что позволяет определять критические параметры сжатия непосредственно из решения соответствующих неоднородных задач механики разрушения материалов с начальными напряжениями.

3. Взаимовлияние трещин между собой (периодическая система трещин, две параллельные трещины) или между трещиной и свободной границей полупространства (приповерхностная трещина) приводит к количественному изменению (особенно существенному для малых значений расстояния между трещинами или между трещиной и границей полупространства) значений коэффициентов интенсивности напряжений по сравнению со значениями КИН, получаемыми для изолированной трещины в бесконечном материале. С другой стороны, при увеличении расстояния между трещинами (или между трещиной и свободной границей полупространства) указанное взаимовлияние постепенно ослабевает, а значения коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях краев трещин стремятся к соответствующим значениям, полученным в случае изолированной трещины в бесконечном материале.

4. В предварительно напряженных материалах (аналогично ситуации в материалах без начальных напряжений [5, 27]) взаимовлияние двух параллельных соосных трещин, а также взаимовлияние приповерхностной трещины со свободной поверхностью тела приводит к изменениям качественного характера в распределении напряжений в окрестностях краев трещин, а именно, к ненулевым значениям КИН K_{II} в случаях трещин, находящихся под действием нормальных нагрузок, и к ненулевым значениям КИН K_I при действии на трещины радиальных сдвиговых нагрузок.

5. Механические характеристики композитов (модули упругости компонент, коэффициенты их объемной концентрации) оказывают существенное влияние на значения коэффициентов интенсивности напряжений.

6. Значения критических параметров сжатия, соответствующих локальной потере устойчивости материала в окрестностях трещин, существенно зависят от геометрических параметров задач (радиусов трещин, расстояний между трещинами или между трещиной и границей материала) и от механических характеристик материалов.

Р Е З Ю М Е . Представлено результати дослідження двох неklasичних механізмів руйнування композитних матеріалів, а саме, крихкого руйнування тіл з початковими (залишковими) напруженнями, що діють вздовж площин, розташованих в тілі тріщин, та руйнування при стисканні тіл вздовж паралельних тріщин. Запропоновано об'єднаний підхід до вивчення вищезазначених проблем в рамках лінеаризованої механіки деформівних твердих тіл. Приведено математичну постановку просто-

рових задач для попередньо напружених композитів, що містять взаємодіючі кругові тріщини. Досліджено задачі для нескінченного тіла з двома паралельними співвісними тріщинами, для простору з періодичною системою співвісних паралельних тріщин, а також для півпростору з приповерхневою тріщиною. Розглянуто декілька видів навантаження на берегах тріщин (нормальне навантаження, радіальне зсувне навантаження, кручення). Для окремих типів композитних матеріалів проаналізовано вплив початкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень. З використанням зазначеного об'єднаного підходу отримано значення критичних параметрів руйнування композитів з взаємодіючими тріщинами під дією стискаючих зусиль, спрямованих вздовж тріщин. Проаналізовано вплив на зазначені критичні параметри руйнування геометричних параметрів задач та фізико-механічних характеристик матеріалів.

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Гузь А.Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя; Т.2).
3. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4-х т., 5-ти кн. / Под общ. ред. А.Н.Гузя; Т.4, Кн.1).
4. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т. – К.: Литера, 2008. Т.1. Разрушение в структуре материала. – 592 с. Т.2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
5. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 404 с.
6. Хорощун Л.П., Маслов Б.П., Е.Н.Шукула, Л.В.Назаренко. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – К.: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя; Т.3).
7. Ainsworth R.A., Sharples J.K., Smith S.D. Effects of residual stresses on fracture behaviour – experimental results and assessment methods // J. Strain Analysis Eng. Design. – 2000. – **35**, N 4. – P. 307 – 316.
8. Atkinson C., Craster R.V. Theoretical aspects of fracture mechanics // Prog. Aerospace Sci. – 1995. – **31**. – P. 1 – 83.
9. Bogdanov V.L. On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // Material Science. – 2007. – **43**, N 3. – P. 321 – 330.
10. Bogdanov V.L. Effect of Residual Stresses on Fracture of Semi-Infinite Composites with Cracks // Mech. Adv. Mater. and Struct. – 2008. – **15**, N 6. – P. 453 – 460.
11. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Fracture of Semiinfinite Material with a Circular Surface Crack in Compression Along the Crack Plane // Int. Appl. Mech. – 1992. – **28**, N 11. – P. 687 – 704.
12. Bogdanov V.L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Fracture of a Body with a Periodic Set of Coaxial Cracks under Forces Directed along them: An Axisymmetric Problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 3 – 18.
13. Bogdanov V.L., Guz A. N., Nazarenko V. M. Stress-Strain State of a Material under Forces Acting along a Periodic Set of Soaxial Mode II Penny-Shaped Cracks // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, N 12. – P. 1339 – 1350.
14. Cotterell B. The past, present, and future of fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **69**. – P. 533 – 553.
15. Dvorak G.J. Composite materials: Inelastic behavior, damage, fatigue and fracture // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 1 – 2. – P. 155 – 170.
16. Erdogan F. Fracture mechanics // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 1 – 2. – P. 171 – 183.
17. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
18. Guz A.N. On study of nonclassical problems of fracture and failure mechanics and related mechanisms // ANNALS of the European Academy of Sciences. – 2006 – 2007. – P. 35 – 68.
19. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
20. Guz A.N. Ultrasonic Non-Destructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.

21. *Guz A.N., Dyshel' M.Sh., Nazarenko V.M.* Fracture and Stability of Materials and Structural Members with Cracks: Approaches and Results // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, N 12. – P.1323 – 1359.
22. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite halfplane compressed along interacting cracks // *Composites. Part B.* – 2000. – **31**, N 5. – P. 405 – 411.
23. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Nonaxisymmetric compressive failure of a circular crack parallel to a surface of halfshace // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 1995. – **22**. – P. 239 – 247.
24. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Fracture under initial stresses acting along cracks: Approach, concept and results // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2007. – **48**. – P. 285 – 303.
25. *Guz A.N., Nazarenko V.M., Bogdanov V.L.* Combined analysis of fracture under stresses acting along cracks // *Arch. Appl. Mech.* – 2013. – **83**, N 9. – P. 1273 – 1293.
26. *Kaminsky A.A.* Mechanics of Long-Term Fracture of Viscoelastic Bodies with Cracks: Theory, Experiment (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 5. – P. 3 – 79.
27. *Kassir M.K., Sih G.C.* Mechanics of Fracture. – Vol. 2. Three Dimensional Crack Problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1975. – 452 p.
28. *Nazarenko V.M., Bogdanov V.L., Altenbach H.* Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // *Int. J. Fract.* – 2000. – **104**. – P. 275 – 289.
29. *Sih G.C., Liu B.* Mesofracture mechanics: a necessary link // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2001. – **37**. – P. 371 – 395.
30. *Winiarsky B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading // *Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A.* – 2008. – **366**, N 1871. – P. 1835 – 1839.

Поступила 10.09.2013

Утверждена в печать 30.09.2014
