

А. А. Каминский, Е. Е. Курчаков

**ВЛИЯНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ ВДОЛЬ ТРЕЩИНЫ НОРМАЛЬНОГО
ОТРЫВА В УПРУГОМ ТЕЛЕ НА ФОРМИРОВАНИЕ
ЗОНЫ НЕЛИНЕЙНОСТИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

Abstract. A critical analysis is undertaken of the current state of the modelling problem for the process of fracture of different bodies with cracks. In particular, theoretical approaches are considered for an adequate description of the experimental behavior of materials during their fracture as a result of the crack propagation. An assessment is given for the perspectives of various approaches to the future development of the modern models. A nonlinear problem is solved for the limiting equilibrium state of nonlinear elastic body with a central mode I crack under biaxial loading. The influence of the tensile stresses align the crack on its opening displacement and nonlinearity zone configuration is investigated.

Key words: nonlinear elastic body, mode I crack, process zone, nonlinear zone, biaxial loading, crack opening displacement.

Введение.

Современные материалы имеют разнообразную структуру, различные механические и прочностные свойства. Кроме того, им присущи различные механизмы разрушения. Поэтому в своем развитии механика разрушения опирается на механику сплошной среды, материаловедение, физику металлов и полимеров, а также другие естественные науки.

На начальном этапе построения механики разрушения (линейной механики разрушения) основное внимание уделялось аналитическому исследованию напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины, моделируемой математическим разрезом (модель Гриффитса), и анализу сингулярности напряжений и деформаций в вершине трещины. Тогда же было введено понятие коэффициентов интенсивности напряжений (КИН), а также сформулированы энергетический и силовой критерии локального разрушения (критерии Гриффитса и Ирвина, соответственно) [21].

Однако авторы работ [16, 32] необоснованно отвергают само понятие КИН.

Следует отметить, что КИН играют исключительно важную роль в механике хрупкого разрушения, так как на их основе можно описать асимптотическое распределение напряжений в малой окрестности вершины произвольной трещины. Вместе с тем, они необходимы не только для расчетов по критериям Гриффитса и Ирвина, но и при изучении роста трещин в линейно-вязкоупругих телах [7, 27], а также при исследовании локальной потери устойчивости возле трещин [1, 24], при изучении роста трещин под действием динамических нагрузок [23] и в ряде других актуальных исследований процессов разрушения [18, 21]. В нашей стране и за рубежом опубликованы многочисленные труды, посвященные этому вопросу [18, 33].

Разработаны и получили широкое распространение теоретические и экспериментальные методы определения этих характеристик [14, 18, 21, 34].

Однако подходы линейной механики разрушения не учитывают реальное состояние материала и его структуру у вершины трещины.

Как показали многие экспериментальные исследования [7 – 9, 19 – 22], перед трещиной образуется зона предразрушения (process zone), которая впоследствии перемещается вместе с фронтом трещины. Образование зоны предразрушения вызвано высоким уровнем напряжений у фронта трещины. Материал в зоне предразрушения находится в полуразрушенном состоянии (к примеру, деструкция – в металлах, «трещины серебра» – в полимерах). В волокнистых композитах эта зона представляет собой клиновидную область у фронта трещины, в которой разрушено связующее и часть армирующих волокон. Берега этой области связаны не разрушенными волокнами.

Конфигурация зоны предразрушения и ее структура имеют существенное значение для правильного описания механизма разрушения. Исследования последних лет показали, что применение моделей мезомеханики разрушения, учитывающих зону предразрушения, оказалось наиболее эффективным для описания развития трещин в полимерах и композитах [35 – 40]. Эти модели называют еще двухфазными, поскольку согласно им материал претерпевает две фазы разрушения. К ним относятся: модель Леонова – Панасюка [13], модифицированная модель [27] и др. Согласно однофазным моделям типа моделей Гриффитса и Ирвина, материал переходит в разрушенное состояние без образования зоны предразрушения. Выбор той или иной модели разрушения для описания роста трещин обуславливается, прежде всего, физическими и механическими свойствами материала.

Электронномикроскопическое и рентгеноструктурное исследования окрестности фронта трещины в стали показало, что зона предразрушения – это очень малая область деструкции (значительно меньшая зоны пластичности), содержащая большое количество микротрещин [8, 9] (рис. 1, *а*). Поэтому попытки описать процесс деформирования в этой области на основе механики сплошной среды приводят к физически некорректным результатам, не согласующимися с экспериментальными данными [3].

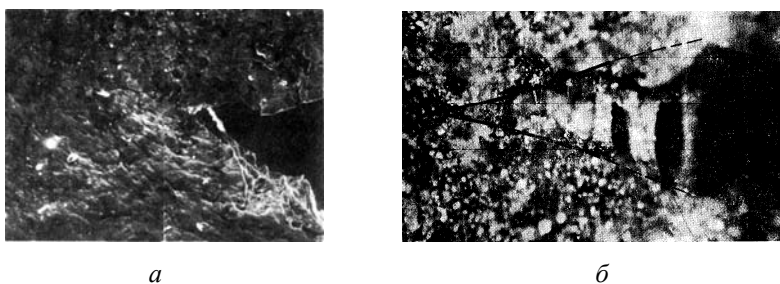


Рис. 1

На рис. 1, *б* изображена зона предразрушения в полимерном материале, характеризующаяся аналогичной картиной деструкции [27].

Принимая во внимание эти и другие экспериментальные данные [3, 27], нельзя признать правильным утверждение авторов работ [16, 32] о том, что параметры зоны предразрушения можно определить на основе теории малых упругопластических деформаций.

В работах [16, 32] с помощью приближенного метода дискретизации, включающего равномерную схему разбиения области, решена задача о растяжении бесконечной упругопластической пластины, содержащей трещину (разрез) без зоны предразрушения. Определены границы зоны пластичности у вершины трещины, которую авторы необоснованно назвали зоной предразрушения, хотя при решении задачи использовали теорию малых упругопластических деформаций.

В работе [32] приведено утверждение о том, что согласно этому приближенному решению напряжения в вершине трещины должны быть конечными. Однако это противоречит строгому математическому анализу [21, 26], согласно которому напряже-

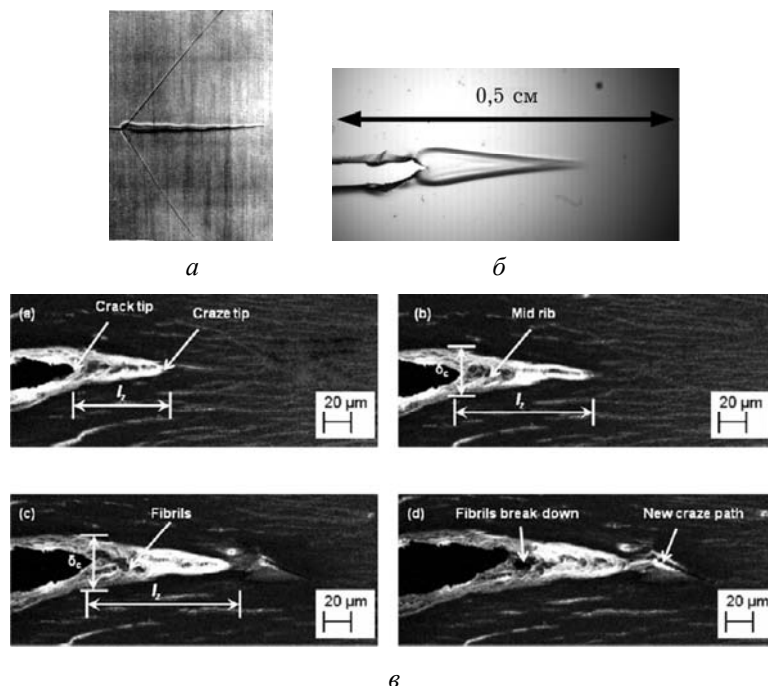
ния в вершине трещины (разреза) в упрочняющемся упругопластическом теле имеют сингулярность, хотя и другого порядка, чем в линейно-упругом теле.

Как подчеркивается во многих работах (см. библиографию в монографии [14]), обычные приближенные методы с равномерной схемой разбиения области, один из которых был использован в статьях [16, 32], не могут адекватно описывать распределение напряжений и деформаций вблизи вершины трещины (разреза) в упругом и упругопластическом телах. Ввиду этого необходимо применять методы со специальным (неравномерным) разбиением области [14].

Отметим, что обращение в бесконечность напряжений в вершине трещины (разреза) является следствием идеализации математической постановки физической проблемы. Одной из причин упомянутой особенности служит пренебрежение конечностью деформаций (геометрической нелинейностью). Это утверждение относится к большинству решений задач для упругого и упругопластического тел с трещиной (разрезом) [3, 14, 16, 21, 26, 32].

Следует отметить, что в 50 – 70-х годах XX века получено большое количество решений аналогичных задач для бесконечных упругопластических тел с трещинами (разрезами) [3]. Некоторые из этих решений не согласуются с результатами, полученными в работах [16, 32]. Так, в работе [14] на основе численного метода установлено, что в тонкой упругопластической пластине зона пластичности вытянута вдоль линии продолжения трещины (разреза). Это не соответствует выводам работы [32]. Авторы работ [16, 32] утверждают, что их расчеты носят универсальный характер и на их основе делают заключение о некорректности моделей типа модели Леонова – Панасюка, поскольку считают, что узкой зоны предразрушения в действительности не бывает.

Экспериментальные данные [3, 27], напротив, свидетельствуют, что во многих случаях, особенно на ранней стадии нагружения тела с трещиной, из-за тенденции к локализации нелинейных деформаций в узких слоях у вершины трещины, зона предразрушения представляет собой узкую клинообразную область на продолжении трещины. На рис. 2 показана такая область в стальной пластине (рис. 2, *a*) и в тонких полимерных пленках (рис. 2, *б, в*) [19, 20].



в
Рис. 2

Недостаток знаний о зоне предразрушения восполняется с привлечением различных моделей трещины. Поскольку во многих случаях зона предразрушения располагается на продолжении трещины и имеет, как правило, малый (по сравнению с длиной трещины) размер (рис. 2), то обычно ее представляют, развивая модель Леонова – Панасюка, в виде разреза, к поверхностям которого приложены самоуравновешенные напряжения, подлежащие определению расчетно-экспериментальными методами [22]. При этом должно выполняться условие конечности напряжений в вершине трещины и в зоне предразрушения [13, 14].

В работах [10, 11] рассмотренные выше подходы распространены на составные, кусочно-однородные тела с трещинами по их границам раздела. Введение зон предразрушения, представляемых моделями типа модели Леонова – Панасюка, приводит к физически корректным результатам – устраняется осциллирующий характер перемещений и напряжений вблизи вершин трещин, что свойственно классическим решениям [21]. К тому же, полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Подавляющее число публикаций по этой проблеме посвящено разнообразным моделям зоны предразрушения у вершины трещины в линейно-упругих телах [18, 21].

В отличие от этих публикаций, в статьях [29, 30] рассмотрена задача нелинейной механики разрушения, когда зона предразрушения представляется модифицированной моделью Леонова – Панасюка и расположена внутри зоны нелинейности. Исследовано влияние зоны предразрушения на конфигурацию зоны нелинейности у вершины трещины нормального отрыва, а также на раскрытие трещины.

В настоящей статье исследовано равновесное состояние нелинейного упругого тела малой толщины с центральной трещиной нормального отрыва при двухосном растяжении. Это исследование базируется на модели зоны предразрушения, предложенной в работах [5, 7, 27, 28]. Изучено влияние растягивающей нагрузки вдоль трещины на ее раскрытие и на конфигурацию зоны нелинейности.

Согласно принятой модели, длина зоны предразрушения считается, как и в работах [7, 29, 30], не зависящей от внешних нагрузок. Такая автотельность зоны предразрушения характерна для многих полимеров и композитов [5, 7]. Длину зоны предразрушения можно определить экспериментально [7, 8]. Самоуравновешенные напряжения, действующие по границе зоны предразрушения, подлежат определению при решении краевой задачи. При этом требуется соблюдение условия непрерывности напряжений в зоне предразрушения и в окружающей ее зоне нелинейности.

§1. Исходные предпосылки.

Предполагается, что связь компонент тензора напряжений с компонентами тензора деформаций для рассматриваемого тела будет линейной на начальной стадии его деформации, но нелинейной в последующем.

Внимание акцентируется на случае обобщенного плоского напряженного состояния. Деформации полагаются малыми. Постановка краевой задачи осуществляется в перемещениях.

Тело отнесем к системе произвольных координат x^1, x^2, x^3 . Будем подразумевать, что для этой системы координат известны ковариантный метрический тензор с компонентами $g_{\varepsilon\zeta}$ и контравариантный метрический тензор с компонентами $g^{\varepsilon\zeta}$, причем

$$g^{\varepsilon\zeta} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{\varepsilon\zeta}}, \quad (1.1)$$

где $g = \det[g_{\varepsilon\zeta}]$ – метрический определитель.

1.1. Определяющие уравнения. Для постановки краевой задачи потребуются определяющие уравнения, связывающие компоненты контравариантного тензора напряжений S с компонентами ковариантного тензора деформаций D .

Воспользуемся тензорно-линейными определяющими уравнениями в виде [12]

$$D_{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} + \frac{\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}}{\sqrt{K - \frac{H^2}{Z}}} \left(F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\gamma\delta} - \frac{H}{Z} F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\gamma\delta} \right) \quad (1.2)$$

$$\left(E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}; Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; H = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; \right.$$

$$\left. K = F_{\alpha\beta\gamma\delta} S^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; \Xi = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} \right). \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.2) содержатся компоненты двух взаимно обратных тензоров анизотропии, а именно, ковариантного тензора F и контравариантного тензора G . Заметим, что в этих компонентах можно переставлять как индексы, относящиеся к любой одной паре индексов, так и сами пары индексов. Затем, для названных компонент имеем

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} G^{\alpha\beta\epsilon\zeta} = \delta_{\gamma\delta}^{\epsilon\zeta} (\epsilon, \zeta). \quad (1.4)$$

В формулах (1.4) фигурируют символы Кронекера δ_{η}^{ι} , т.е.

$$\delta_{\eta}^{\iota} = \begin{cases} 1 & (\eta = \iota); \\ 0 & (\eta \neq \iota). \end{cases} \quad (1.5)$$

Ниже будем пользоваться правом замены немых индексов, не оговаривая это особо.

Свернув уравнения (1.2) с компонентами $G^{\alpha\beta\epsilon\zeta}$, а также учитывая формулы (1.4) и равенства (1.5), получим

$$S^{\alpha\beta} = \frac{H}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\sqrt{K - \frac{H^2}{Z}}}{\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.6)$$

Содержащиеся в уравнениях (1.6) инварианты тензоров S и D должны быть связаны между собой.

Отметим, что инвариант E представляет собой относительное изменение объема элемента тела, а инвариант H – относительное изменение объема элемента тела при условии, что компоненты тензоров S и D связаны между собой линейно. Можно допустить [2], что

$$H = E \quad (1.7)$$

При этом, как показывает анализ уравнений (1.6) с позиций первого и второго начал термодинамики [17, 25], будем иметь

$$\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}} = \varphi \left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}} \right). \quad (1.8)$$

Таким образом, величина $\sqrt{K - \frac{E^2}{Z}}$ оказывается однозначной функцией величины $\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}$ (вне зависимости от вида тензора D).

В соответствии с формулами (1.7) и (1.8) уравнения (1.6) будут

$$S^{\alpha\beta} = \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\varphi\left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right)}{\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1.9)$$

Представим функцию $\varphi\left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right)$ следующим образом:

$$\varphi\left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right) = \left[1 - \tilde{\varphi}\left(\sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}\right) \right] \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}. \quad (1.10)$$

Используя формулу (1.10), запишем уравнения (1.9) в таком виде:

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right) \quad (1.11)$$

$$\left(\Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}} \right). \quad (1.12)$$

Для изотропного тела компоненты $F_{\alpha\beta\gamma\delta}$ могут быть выражены через две константы (ρ и σ):

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \rho g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \sigma g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} \quad (\gamma, \delta). \quad (1.13)$$

Учитывая выражения (1.13), на основании формул (1.4) и равенств (1.5) для компонент $G^{\alpha\beta\gamma\delta}$ будем иметь

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sigma} \left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - \frac{\rho}{3\rho + \sigma} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right) \quad (\gamma, \delta). \quad (1.14)$$

Заметим, что константы ρ и σ связаны с константами Ламе (λ и μ) такими равенствами [15]:

$$-\rho = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}; \quad \sigma = \frac{1}{2\mu}.$$

Воспользовавшись выражениями (1.13), для второго из инвариантов (1.3) установим

$$Z = 3(3\rho + \sigma). \quad (1.15)$$

Привлекая выражения (1.14) и первый из инвариантов (1.3), для пятого из инвариантов (1.3) получим

$$\Xi = \frac{1}{\sigma} \left(Y - \frac{\rho E}{3\rho + \sigma} \right) \quad (1.16)$$

$$\left(Y = g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} \right). \quad (1.17)$$

Учитывая формулы (1.15) и (1.16), установим, что

$$\Xi - \frac{E^2}{Z} = \frac{1}{\sigma} \left(Y - \frac{E^2}{3} \right). \quad (1.18)$$

Согласно формуле (1.18) формула (1.12) примет вид

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{\sigma} \left(Y - \frac{E^2}{3} \right)}. \quad (1.19)$$

Используя выражения (1.14), а также первый из инвариантов (1.3) и формулу (1.15), преобразуем уравнения (1.11) к виду

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma} \left[g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{\rho E}{3\rho + \sigma} g^{\alpha\beta} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{3} g^{\alpha\beta} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.20) идентичны уравнениям Каудерера [31], однако более удобны для постановки краевой задачи.

1.2. Критерий нелинейности. Подчеркнем, что уравнения (1.11), имеющие место для анизотропного тела, и уравнения (1.20), имеющие место для изотропного тела, линейны относительно компонент тензора \mathbf{D} . Нелинейной же связь компонент тензора \mathbf{S} с компонентами тензора \mathbf{D} по этим уравнениям становится вследствие функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$. Пусть имеется некоторая положительная постоянная v . Предположим, что функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ будет равной нулю, если величина Ω не превосходит постоянную v , но отличной от нуля, если величина Ω оказывается больше постоянной v . Тогда связь компонент тензора \mathbf{S} с компонентами тензора \mathbf{D} по указанным уравнениям будет нелинейной, как только величина Ω превысит постоянную v . Отсюда имеем критерий нелинейности

$$\Omega = v. \quad (1.21)$$

Выясним физический смысл критерия (1.21), предполагая тело анизотропным.

При $\tilde{\varphi}(\Omega) = 0$ уравнения (1.11) вырождаются в уравнения Гука [15]

$$S^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta}. \quad (1.22)$$

Принимая во внимание уравнения (1.22), нетрудно увидеть, что величина $\Xi - E^2/Z$ представляет собой удвоенную разность всей энергии деформации и той ее части, которая идет на изменение объема. Итак, в нелинейное состояние тело перейдет тогда, когда сама эта разность станет равной $\frac{1}{2}v^2$.

§2. Общие положения.

Если система координат x^1, x^2, x^3 , к которой отнесено тело, является прямоугольной декартовой, то компоненты $g_{\varepsilon\zeta}$ принимают следующие значения:

$$g_{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (2.1)$$

Согласно формулам (1.1) и равенствам (2.1) компоненты $g^{\varepsilon\zeta}$ будут такими:

$$g^{\varepsilon\zeta} = \begin{cases} 1 & (\varepsilon = \zeta); \\ 0 & (\varepsilon \neq \zeta). \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1. Основные уравнения. Выведем основные уравнения для компонент вектора перемещений \mathbf{u} . Для этого воспользуемся соотношениями Коши [15]:

$$D_{\varepsilon\varsigma} = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^\varsigma} \quad (\varepsilon, \varsigma). \quad (2.3)$$

В соответствии с равенствами (2.2), а также соотношениями (2.3) для первого из инвариантов (1.3) и инварианта (1.17) установим:

$$E = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\beta}; \quad Y = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^3 \sum_{\delta=1}^3 \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right) \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right). \quad (2.4)$$

Учитывая соотношения (2.3), представим уравнения (1.20) в виде

$$S^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right) - \frac{\rho E}{3\rho + \sigma} g^{\alpha\beta} - \right. \\ \left. - \tilde{\varphi}(\Omega) \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right) - \frac{E}{3} g^{\alpha\beta} \right] \right\}. \quad (2.5)$$

Остановимся на случае обобщенного плоского напряженного состояния, в котором

$$S^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad (\alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2); \quad (2.6)$$

$$S^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \quad \beta = 3; \quad \alpha = 3, \quad \beta = 1, 2; \quad \alpha = 3, \quad \beta = 3). \quad (2.7)$$

Привлекая равенства (2.2), а также первый из инвариантов (2.4), на основании уравнений (2.5) получим

$$S^{11} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{1}{3\rho + \sigma} \left[(2\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \right\}; \\ S^{22} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{1}{3\rho + \sigma} \left[(2\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \right] - \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right) \right\}; \\ S^{33} = \frac{1}{\sigma} \left\{ \frac{1}{3\rho + \sigma} \left[(2\rho + \sigma) \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) \right] - \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(2 \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) \right\}. \quad (2.8)$$

Принимая во внимание равенства (2.7), с помощью третьего из уравнений (2.8) найдем

$$\frac{\partial u_3}{\partial x^3} = \frac{3\rho + \sigma}{2\rho + \sigma} \left[\frac{\rho}{3\rho + \sigma} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(2 \frac{\partial u_3}{\partial x^3} - \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right) \right]. \quad (2.9)$$

Если внести в первое и второе из уравнений (2.8) выражение (2.9), то установим

$$S^{11} = \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left\{ (\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\}; \\ S^{22} = \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left\{ (\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \frac{1}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] \right\}. \quad (2.10)$$

Привлекая равенства (2.2), на основании уравнений (2.5) получим

$$\begin{aligned} S^{12} &= \frac{1}{2\sigma} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) \right]; \\ S^{21} &= \frac{1}{2\sigma} \left[\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} - \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Поскольку $\tilde{\varphi}(\Omega) \neq 1$, то вследствие равенств (2.7) и (2.2) из уравнений (2.5) следует, что

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (\gamma=1, 2, \quad \delta=3; \quad \gamma=3, \quad \delta=1, 2). \quad (2.12)$$

С учетом равенств (2.12) второй из инвариантов (2.4) примет вид

$$Y = \frac{1}{4} \sum_{\gamma=1}^2 \sum_{\delta=1}^2 \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right) \left(\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^\delta} + \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\gamma} \right) + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \frac{\partial u_3}{\partial x^3}. \quad (2.13)$$

Запишем уравнения (2.10) и (2.11) так:

$$\begin{aligned} S^{11} &= \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right] - T^{11}; \\ S^{12} &= \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) - T^{12}; \quad S^{21} = \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) - T^{21}; \\ S^{22} &= \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right] - T^{22}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} T^{11} &= \frac{1}{3\sigma(2\rho + \sigma)} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]; \\ T^{12} &= \frac{1}{2\sigma} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \quad T^{21} = \frac{1}{2\sigma} \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right); \\ T^{22} &= \frac{1}{3\sigma(2\rho + \sigma)} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Воспользуемся уравнениями Навье в виде [15]

$$\frac{\partial S^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.16)$$

В силу формул (2.6) и равенств (2.7) уравнения (2.16) сводятся к двум таким:

$$\frac{\partial S^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{12}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial S^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial S^{22}}{\partial x^2} = 0. \quad (2.17)$$

Допустим, что константы ρ и σ не зависят от координат x^1, x^2 .

Подставляя в уравнения (2.17) уравнения (2.14), выведем

$$\frac{\rho + \sigma}{\sigma(2\rho + \sigma)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{2(2\rho + \sigma)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} = Q^1;$$

$$\frac{1}{2\sigma} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{1}{2(2\rho + \sigma)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\rho + \sigma}{\sigma(2\rho + \sigma)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} = Q^2 \quad (2.18)$$

$$\left(Q^1 = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2}; \quad Q^2 = \frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} \right). \quad (2.19)$$

Следовательно, выведены дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка от компонент u_1, u_2 по координатам x^1, x^2 .

На поверхности тела зададим вектор напряжений \mathbf{P} .

Граничные условия для компонент тензора \mathbf{S} имеют вид [15]

$$S^{\alpha\beta} n_\beta = P^\alpha, \quad (2.20)$$

где n_β – компоненты единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} к поверхности тела.

В силу равенств (2.7) условия (2.20) сводятся к двум таким:

$$S^{11} n_1 + S^{12} n_2 = P^1; \quad S^{21} n_1 + S^{22} n_2 = P^2. \quad (2.21)$$

Подставляя в условия (2.21) уравнения (2.14), выведем

$$\frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right] n_1 + \frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) n_2 = P^1 + R^1;$$

$$\frac{1}{2\sigma} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) n_1 + \frac{1}{\sigma(2\rho + \sigma)} \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right] n_2 = P^2 + R^2 \quad (2.22)$$

$$\left(R^1 = T^{11} n_1 + T^{12} n_2; \quad R^2 = T^{21} n_1 + T^{22} n_2 \right). \quad (2.23)$$

Таким образом, получены дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка от компонент u_1, u_2 по координатам x^1, x^2 .

Представим уравнения (2.18) и (2.22) в более простом виде.

Введем обозначения:

$$2\sigma(2\rho + \sigma) T^{\alpha\beta} \equiv \underline{T}^{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \quad \beta = 1, 2). \quad (2.24)$$

В свете обозначений (2.24) и формул (2.15) имеем

$$\underline{T}^{11} = \frac{2}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right];$$

$$\underline{T}^{12} = (2\rho + \sigma) \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right); \quad \underline{T}^{21} = (2\rho + \sigma) \tilde{\varphi}(\Omega) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right);$$

$$\underline{T}^{22} = \frac{2}{3} \tilde{\varphi}(\Omega) \left[(3\rho + 2\sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - (3\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \sigma \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right]. \quad (2.25)$$

Умножая обе части уравнений (2.18) на $2\sigma(2\rho + \sigma)$ и учитывая формулы (2.19), а также обозначения (2.24), установим

$$2(\rho + \sigma) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^1} + \sigma \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} + (2\rho + \sigma) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2 \partial x^2} = \underline{Q}^1;$$

$$(2\rho + \sigma) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} + \sigma \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + 2(\rho + \sigma) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} = \underline{Q}^2 \quad (2.26)$$

$$\left(\underline{Q}^1 = \frac{\partial T^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{12}}{\partial x^2}; \underline{Q}^2 = \frac{\partial T^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{22}}{\partial x^2} \right). \quad (2.27)$$

Введем обозначения:

$$2\sigma(2\rho + \sigma)P^\alpha \equiv \underline{P}^\alpha \quad (\alpha = 1, 2). \quad (2.28)$$

Умножая обе части уравнений (2.22) на $2\sigma(2\rho + \sigma)$ и учитывая обозначения (2.28), а также формулы (2.23) и обозначения (2.24), установим

$$2\left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right]n_1 + (2\rho + \sigma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)n_2 = \underline{P}^1 + \underline{R}^1;$$

$$(2\rho + \sigma) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right)n_1 + 2\left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial x^1}\right]n_2 = \underline{P}^2 + \underline{R}^2 \quad (2.29)$$

$$\left(\underline{R}^1 = T^{11}n_1 + T^{12}n_2; \underline{R}^2 = T^{21}n_1 + T^{22}n_2\right). \quad (2.30)$$

Интегрирование уравнений (2.26) и (2.29) можно выполнить по методу последовательных приближений Ильюшина [6]. При этом в первом приближении величины \underline{Q}^1 , \underline{Q}^2 и \underline{R}^1 , \underline{R}^2 следует приравнять нулю, а в каждом последующем приближении – вычислить по результатам предыдущего приближения.

2.2. Постановка краевой задачи. Рассмотрим прямоугольное тело малой толщины с трещиной по центру. С осями симметрии тела совместим оси x^1, x^2 .

Предположим, что при растяжении тела в направлении оси x^1 у обеих вершин трещины возникают зоны предразрушения (узкие области на продолжениях трещины), не подчиняющиеся уравнениям (2.26). Представим эти зоны в виде разрезов, к поверхностям которых приложены равномерно распределенные напряжения, подлежащие определению при решении краевой задачи.

На поверхностях тела, а также трещины и разрезов, зададим компоненты P^1, P^2 . Сделаем это симметрично относительно осей x^1, x^2 . Поэтому будет достаточно рассмотреть лишь четвертую часть тела, например, располагающуюся в первом квадранте (рис. 3).

Распишем уравнения (2.29).

Для верхней поверхности рассматриваемой части тела имеем

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0. \quad (2.31)$$

В силу равенств (2.31) уравнения (2.29) примут вид

$$2\left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right] = \underline{P}^1 + \underline{R}^1; \quad (2\rho + \sigma) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right) = \underline{P}^2 + \underline{R}^2. \quad (2.32)$$

Согласно равенствам (2.31) формулы (2.30) будут

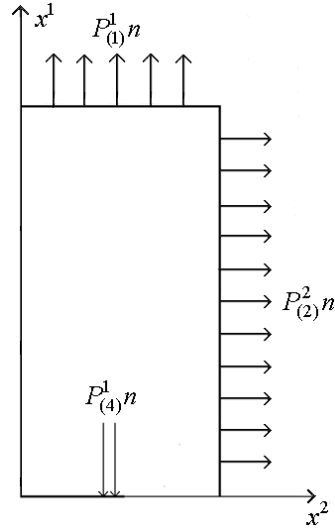


Рис. 3

$$\underline{R}^1 = \underline{T}^{11}; \quad \underline{R}^2 = \underline{T}^{21}. \quad (2.33)$$

Для боковой поверхности рассматриваемой части тела имеем

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1. \quad (2.34)$$

В силу равенств (2.34) уравнения (2.29) примут вид

$$(2\rho + \sigma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \right) = \underline{P}^1 + \underline{R}^1; \quad 2 \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_2}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right] = \underline{P}^2 + \underline{R}^2. \quad (2.35)$$

Согласно равенствам (2.34) формулы (2.30) будут

$$\underline{R}^1 = \underline{T}^{12}; \quad \underline{R}^2 = \underline{T}^{22}. \quad (2.36)$$

Для верхней поверхности трещины и разреза имеем

$$-n_1 = 1, \quad n_2 = 0. \quad (2.37)$$

Вследствие равенств (2.37) уравнения (2.29) примут вид

$$-2 \left[(\rho + \sigma) \frac{\partial u_1}{\partial x^1} - \rho \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right] = \underline{P}^1 + \underline{R}^1; \quad -(2\rho + \sigma) \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1} + \frac{\partial u_1}{\partial x^2} \right) = \underline{P}^2 + \underline{R}^2. \quad (2.38)$$

В соответствии с равенствами (2.37) формулы (2.30) будут

$$-\underline{R}^1 = \underline{T}^{11}; \quad -\underline{R}^2 = \underline{T}^{21}. \quad (2.39)$$

Из симметрии относительно осей x^1, x^2 следуют такие уравнения:

$$\begin{aligned} u_1(x^1, -x^2) - u_1(x^1, +x^2) &= 0; \quad u_2(x^1, -x^2) + u_2(x^1, +x^2) = 0; \\ u_1(-x^1, x^2) + u_1(+x^1, x^2) &= 0; \quad u_2(-x^1, x^2) - u_2(+x^1, x^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из симметрии относительно оси x^2 также следует, что в вершине разреза

$$u_1 = 0. \quad (2.41)$$

Остается записать уравнение, содержащее компоненту u_2 . Для этого обособим вблизи вершины разреза точку с координатами a^1, a^2 . Пусть в этой точке существуют все частные производные (до второго порядка включительно) от компоненты u_2 по координатам x^1, x^2 .

Координаты вершины разреза представим в виде $a^1 + \varepsilon^1, a^2 + \varepsilon^2$.

Составим кратный ряд Тейлора, расположенный по степеням $\varepsilon^1, \varepsilon^2$:

$$u_2 = u_2(a^1, a^2) + \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial u_2}{\partial x^\beta} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^\beta + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^\beta \varepsilon^\gamma. \quad (2.42)$$

На основании формулы (2.42) имеем

$$-u_2 + u_2(a^1, a^2) + \frac{\partial u_2}{\partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^1} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^1 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^1 \varepsilon^2 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2 \partial x^2} \Big|_{(a^1, a^2)} \varepsilon^2 \varepsilon^2 \right) = 0. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.26) и (2.32), (2.35), (2.38), а также (2.40), (2.41) и (2.43) являются разрешающими для компонент u_1, u_2 .

2.3. Преобразование разрешающих уравнений. Дискретизируем переменные, для чего, введя шаг h , образуем сетку координат (рис. 4)

$$\begin{aligned} x_i^1 &= (i-2)h \quad (i=1, 2, \dots, d); \\ x_j^2 &= (j-2)h \quad (j=1, 2, \dots, e). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Примем, что вершины трещины и разреза – это точка A , имеющая координаты x_2^1, x_f^2 , и точка B , имеющая координаты x_2^1, x_g^2 , соответственно.

Введем обозначения:

$$u_1 \left(x_i^1, x_j^2 \right) \equiv y_s; \quad u_2 \left(x_i^1, x_j^2 \right) \equiv y_t, \quad (2.45)$$

где принято

$$s = 2[(i-1)e + j - g] + 1; \quad t = 2[(i-1)e + j - g] + 2. \quad (2.46)$$

Представляя частные производные от компонент u_1, u_2 по координатам x^1, x^2 через конечные разности (с учетом формул (2.44), обозначений (2.45) и формул (2.46)), на основании уравнений (2.26) и (2.32), (2.35), (2.38), а также (2.40), (2.41) и (2.43), полагая $-\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = h$, получим n линейных алгебраических уравнений с неизвестными y_1, y_2, \dots, y_n :

$$\begin{aligned} & A_{ss} y_s + A_{ss+2e} y_{s+2e} + A_{ss-2e} y_{s-2e} + A_{ss+2} y_{s+2} + A_{ss-2} y_{s-2} + \\ & + A_{st+2(e+1)} y_{t+2(e+1)} + A_{st+2(e-1)} y_{t+2(e-1)} + A_{st-2(e-1)} y_{t-2(e-1)} + A_{st-2(e+1)} y_{t-2(e+1)} \approx B_s; \\ & A_{tt} y_t + A_{tt+2e} y_{t+2e} + A_{tt-2e} y_{t-2e} + A_{tt+2} y_{t+2} + A_{tt-2} y_{t-2} + \\ & + A_{ts+2(e+1)} y_{s+2(e+1)} + A_{ts+2(e-1)} y_{s+2(e-1)} + \\ & + A_{ts-2(e-1)} y_{s-2(e-1)} + A_{ts-2(e+1)} y_{s-2(e+1)} \approx B_t \\ & (i=2, \quad j=g+1, \dots, e-1; \quad i=3, \dots, d-1, \quad j=2, \dots, e-1); \\ & A_{ss} y_s + A_{ss-2e} y_{s-2e} + A_{ss-4e} y_{s-4e} + A_{ss-6e} y_{s-6e} + \\ & + A_{ss-2} y_{s-2} + A_{ss-4} y_{s-4} + A_{ss-6} y_{s-6} + \\ & + A_{st} y_t + A_{st-2} y_{t-2} + A_{st-4} y_{t-4} + \\ & + A_{st-2e} y_{t-2e} + A_{st-2(e+1)} y_{t-2(e+1)} + A_{st-2(e+2)} y_{t-2(e+2)} + \\ & + A_{st-4e} y_{t-4e} + A_{st-2(2e+1)} y_{t-2(2e+1)} + A_{st-4(e+1)} y_{t-4(e+1)} \approx B_s; \\ & A_{tt} y_t + A_{tt-2e} y_{t-2e} + A_{tt-4e} y_{t-4e} + A_{tt-6e} y_{t-6e} + \\ & + A_{tt-2} y_{t-2} + A_{tt-4} y_{t-4} + A_{tt-6} y_{t-6} + \\ & + A_{ts} y_s + A_{ts-2} y_{s-2} + A_{ts-4} y_{s-4} + \\ & + A_{ts-2e} y_{s-2e} + A_{ts-2(e+1)} y_{s-2(e+1)} + A_{ts-2(e+2)} y_{s-2(e+2)} + \end{aligned}$$

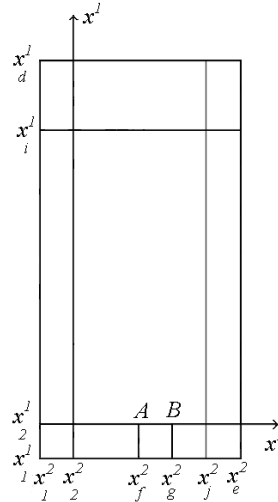


Рис. 4

$$\begin{aligned}
& +A_{ts-4e}y_{s-4e} + A_{ts-2(2e+1)}y_{s-2(2e+1)} + A_{ts-4(e+1)}y_{s-4(e+1)} \approx B_t \\
& \quad (i = d, \quad j = e); \\
& A_{ss}y_s + A_{ss-2e}y_{s-2e} + A_{ss-4e}y_{s-4e} + A_{st+2}y_{t+2} + A_{st-2}y_{t-2} \approx B_s; \\
& A_{tt}y_t + A_{tt-2e}y_{t-2e} + A_{tt-4e}y_{t-4e} + A_{ts+2}y_{s+2} + A_{ts-2}y_{s-2} \approx B_t \\
& \quad (i = d, \quad j = 2, \dots, e-1); \\
& A_{ss}y_s + A_{ss-2}y_{s-2} + A_{ss-4}y_{s-4} + A_{st+2e}y_{t+2e} + A_{st-2e}y_{t-2e} \approx B_s; \\
& A_{tt}y_t + A_{tt-2}y_{t-2} + A_{tt-4}y_{t-4} + A_{ts+2e}y_{s+2e} + A_{ts-2e}y_{s-2e} \approx B_t \\
& \quad (i = 2, \dots, d-1, \quad j = e); \\
& A_{ss}y_s + A_{ss+2e}y_{s+2e} + A_{ss+4e}y_{s+4e} + A_{st+2}y_{t+2} + A_{st-2}y_{t-2} \approx B_s; \\
& A_{tt}y_t + A_{tt+2e}y_{t+2e} + A_{tt+4e}y_{t+4e} + A_{ts+2}y_{s+2} + A_{ts-2}y_{s-2} \approx B_t \\
& \quad (i = 2, \quad j = 2, \dots, g-1); \\
& A_{s-2s-2}y_{s-2} + A_{s-2s+2}y_{s+2} = B_{s-2}; \quad A_{t-2t-2}y_{t-2} + A_{t-2t+2}y_{t+2} = B_{t-2} \\
& \quad (i = 2, \dots, d, \quad j = 2); \\
& A_{s-2es-2e}y_{s-2e} + A_{s-2es+2e}y_{s+2e} = B_{s-2e}; \quad A_{t-2et-2e}y_{t-2e} + A_{t-2et+2e}y_{t+2e} = B_{t-2e} \\
& \quad (i = 2, \quad j = g, \dots, e); \\
& A_{ss}y_s = B_s; \quad A_{tt}y_t + A_{tt-4}y_{t-4} + A_{tt-2}y_{t-2} + \\
& + A_{tt+2(e-1)}y_{t+2(e-1)} + A_{tt+2e}y_{t+2e} + A_{tt+4(e-1)}y_{t+4(e-1)} + A_{tt+4e}y_{t+4e} \approx B_t \\
& \quad (i = 2, \quad j = g) \tag{2.47} \\
& (-A_{ss} = 8(4\rho + 3\sigma); \quad A_{ss+2e} = 8(\rho + \sigma); \quad A_{ss-2e} = 8(\rho + \sigma); \\
& \quad A_{ss+2} = 4(2\rho + \sigma); \quad A_{ss-2} = 4(2\rho + \sigma); \\
& A_{st+2(e+1)} = \sigma; \quad -A_{st+2(e-1)} = \sigma; \quad -A_{st-2(e-1)} = \sigma; \quad A_{st-2(e+1)} = \sigma; \\
& -A_{tt} = 8(4\rho + 3\sigma); \quad A_{tt+2e} = 4(2\rho + \sigma); \quad A_{tt-2e} = 4(2\rho + \sigma); \\
& \quad A_{tt+2} = 8(\rho + \sigma); \quad A_{tt-2} = 8(\rho + \sigma); \\
& A_{ts+2(e+1)} = \sigma; \quad -A_{ts+2(e-1)} = \sigma; \quad -A_{ts-2(e-1)} = \sigma; \quad A_{ts-2(e+1)} = \sigma;
\end{aligned}$$

$$B_s = 4h^2 \underline{Q}^1 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix}; \quad B_t = 4h^2 \underline{Q}^2 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix}$$

$$(i=2, \quad j=g+1, \dots, e-1; \quad i=3, \dots, d-1, \quad j=2, \dots, e-1);$$

$$A_{ss} = 8(4\rho + 3\sigma); \quad -A_{ss-2e} = 40(\rho + \sigma); \quad A_{ss-4e} = 32(\rho + \sigma); \quad -A_{ss-6e} = 8(\rho + \sigma);$$

$$-A_{ss-2} = 20(2\rho + \sigma); \quad A_{ss-4} = 16(2\rho + \sigma); \quad -A_{ss-6} = 4(2\rho + \sigma);$$

$$A_{st} = 9\sigma; \quad -A_{st-2} = 12\sigma; \quad A_{st-4} = 3\sigma;$$

$$-A_{st-2e} = 12\sigma; \quad A_{st-2(e+1)} = 16\sigma; \quad -A_{st-2(e+2)} = 4\sigma;$$

$$A_{st-4e} = 3\sigma; \quad -A_{st-2(2e+1)} = 4\sigma; \quad A_{st-4(e+1)} = \sigma;$$

$$A_{tt} = 8(4\rho + 3\sigma); \quad -A_{tt-2e} = 20(2\rho + \sigma); \quad A_{tt-4e} = 16(2\rho + \sigma); \quad -A_{tt-6e} = 4(2\rho + \sigma);$$

$$-A_{tt-2} = 40(\rho + \sigma); \quad A_{tt-4} = 32(\rho + \sigma); \quad -A_{tt-6} = 8(\rho + \sigma);$$

$$A_{ts} = 9\sigma; \quad -A_{ts-2} = 12\sigma; \quad A_{ts-4} = 3\sigma;$$

$$-A_{ts-2e} = 12\sigma; \quad A_{ts-2(e+1)} = 16\sigma; \quad -A_{ts-2(e+2)} = 4\sigma;$$

$$A_{ts-4e} = 3\sigma; \quad -A_{ts-2(2e+1)} = 4\sigma; \quad A_{ts-4(e+1)} = \sigma;$$

$$B_s = 4h^2 \underline{Q}^1 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix}; \quad B_t = 4h^2 \underline{Q}^2 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix} \quad (i=d, \quad j=e);$$

$$A_{ss} = 6(\rho + \sigma); \quad -A_{ss-2e} = 8(\rho + \sigma); \quad A_{ss-4e} = 2(\rho + \sigma); \quad -A_{st+2} = 2\rho; \quad A_{st-2} = 2\rho;$$

$$A_{tt} = 3(2\rho + \sigma); \quad -A_{tt-2e} = 4(2\rho + \sigma); \quad A_{tt-4e} = 2\rho + \sigma; \quad A_{ts+2} = 2\rho + \sigma; \quad -A_{ts-2} = 2\rho + \sigma;$$

$$B_s = 2h \left[\underline{P}^1 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix} + \underline{R}^1 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix} \right]; \quad B_t = 2h \left[\underline{P}^2 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix} + \underline{R}^2 \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ i & j \end{pmatrix} \right]$$

$$(i=d, \quad j=2, \dots, e-1);$$

$$A_{ss} = 3(2\rho + \sigma); \quad -A_{ss-2} = 4(2\rho + \sigma); \quad A_{ss-4} = 2\rho + \sigma; \quad A_{st+2e} = 2\rho + \sigma; \quad -A_{st-2e} = 2\rho + \sigma;$$

$$A_{tt} = 6(\rho + \sigma); \quad -A_{tt-2} = 8(\rho + \sigma); \quad A_{tt-4} = 2(\rho + \sigma); \quad -A_{ts+2e} = 2\rho; \quad A_{ts-2e} = 2\rho;$$

$$B_s = 2h \left[\underline{P}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{R}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \right]; \quad B_t = 2h \left[\underline{P}^2 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{R}^2 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \right]$$

$$(i = 2, \dots, d-1, \quad j = e);$$

$$A_{ss} = 6(\rho + \sigma); \quad -A_{ss+2e} = 8(\rho + \sigma); \quad A_{ss+4e} = 2(\rho + \sigma); \quad A_{st+2} = 2\rho; \quad -A_{st-2} = 2\rho;$$

$$A_{tt} = 3(2\rho + \sigma); \quad -A_{tt+2e} = 4(2\rho + \sigma); \quad A_{tt+4e} = 2\rho + \sigma; \quad -A_{ts+2} = 2\rho + \sigma; \quad A_{ts-2} = 2\rho + \sigma;$$

$$B_s = 2h \left[\underline{P}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{R}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \right]; \quad B_t = 2h \left[\underline{P}^2 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{R}^2 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \right]$$

$$(i = 2, \quad j = 2, \dots, g-1);$$

$$A_{s-2s-2} = 1; \quad -A_{s-2s+2} = 1; \quad B_{s-2} = 0; \quad A_{t-2t-2} = 1; \quad A_{t-2t+2} = 1; \quad B_{t-2} = 0$$

$$(i = 2, \dots, d, \quad j = 2);$$

$$A_{s-2es-2e} = 1; \quad A_{s-2es+2e} = 1; \quad B_{s-2e} = 0; \quad A_{t-2et-2e} = 1; \quad -A_{t-2et+2e} = 1; \quad B_{t-2e} = 0$$

$$(i = 2, \quad j = g, \dots, e);$$

$$A_{ss} = 1; \quad B_s = 0; \quad -A_{tt} = 3; \quad -A_{tt-4} = 1; \quad A_{tt-2} = 4;$$

$$-A_{tt+2(e-1)} = 4; \quad A_{tt+2e} = 4; \quad A_{tt+4(e-1)} = 1; \quad -A_{tt+4e} = 1; \quad B_t = 0 \quad (2.48)$$

$$(i = 2, \quad j = g).$$

Отметим, что

$$n = 2(de - g + 1). \quad (2.49)$$

Представляя частные производные от величин $\underline{T}^{11}, \underline{T}^{12}, \underline{T}^{21}, \underline{T}^{22}$ по координатам x^1, x^2 через конечные разности, на основании формул (2.27) получим, что

$$\underline{Q}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \approx \frac{1}{2h} \left[\underline{T}^{11} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i+1 \\ j \end{matrix} \right) - \underline{T}^{11} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i-1 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{T}^{12} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \\ j+1 \end{matrix} \right) - \underline{T}^{12} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \\ j-1 \end{matrix} \right) \right];$$

$$\underline{Q}^2 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \approx \frac{1}{2h} \left[\underline{T}^{21} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i+1 \\ j \end{matrix} \right) - \underline{T}^{21} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i-1 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{T}^{22} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \\ j+1 \end{matrix} \right) - \underline{T}^{22} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \\ j-1 \end{matrix} \right) \right]$$

$$(i = 2, \quad j = g+1, \dots, e-1; \quad i = 3, \dots, d-1, \quad j = 2, \dots, e-1);$$

$$\underline{Q}^1 \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) \approx \frac{1}{2h} \left[3\underline{T}^{11} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) - 4\underline{T}^{11} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i-1 \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \underline{T}^{11} \left(\begin{matrix} x^1 \\ i-2 \end{matrix}, \begin{matrix} x^2 \\ j \end{matrix} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +3\underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_j^2\right) - 4\underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_{j-1}^2\right) + \underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_{j-2}^2\right)\Big]; \\
\underline{Q}^2\left(x_i^1, x_j^2\right) & \approx \frac{1}{2h}\left[3\underline{T}^{21}\left(x_i^1, x_j^2\right) - 4\underline{T}^{21}\left(x_{i-1}^1, x_j^2\right) + \underline{T}^{21}\left(x_{i-2}^1, x_j^2\right) + \right. \\
& \left. + 3\underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_j^2\right) - 4\underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_{j-1}^2\right) + \underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_{j-2}^2\right)\right] \quad (i=d, j=e). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (2.33), (2.36), (2.39), напишем:

$$\begin{aligned}
\underline{R}^1\left(x_i^1, x_j^2\right) & = \underline{T}^{11}\left(x_i^1, x_j^2\right); \quad \underline{R}^2\left(x_i^1, x_j^2\right) = \underline{T}^{21}\left(x_i^1, x_j^2\right) \quad (i=d, j=2, \dots, e-1); \\
\underline{R}^1\left(x_i^1, x_j^2\right) & = \underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_j^2\right); \quad \underline{R}^2\left(x_i^1, x_j^2\right) = \underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_j^2\right) \quad (i=2, \dots, d-1, j=e); \\
-\underline{R}^1\left(x_i^1, x_j^2\right) & = \underline{T}^{11}\left(x_i^1, x_j^2\right); \quad -\underline{R}^2\left(x_i^1, x_j^2\right) = \underline{T}^{21}\left(x_i^1, x_j^2\right) \quad (i=2, j=2, \dots, g-1). \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Ввиду симметрии относительно осей x^1, x^2 имеем равенства

$$\begin{aligned}
-\underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_1^2\right) & = \underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_3^2\right); \quad \underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_1^2\right) = \underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_3^2\right) \quad (i=3, \dots, d-1); \\
\underline{T}^{11}\left(x_1^1, x_j^2\right) & = \underline{T}^{11}\left(x_3^1, x_j^2\right); \quad -\underline{T}^{21}\left(x_1^1, x_j^2\right) = \underline{T}^{21}\left(x_3^1, x_j^2\right) \quad (j=g+1, \dots, e-1). \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Разумеется, величины

$$\underline{T}^{11}\left(x_i^1, x_j^2\right), \quad \underline{T}^{12}\left(x_i^1, x_j^2\right), \quad \underline{T}^{21}\left(x_i^1, x_j^2\right), \quad \underline{T}^{22}\left(x_i^1, x_j^2\right) \quad (i=2, \dots, d, j=2, \dots, e)$$

должны быть записаны через неизвестные y_1, \dots, y_n .

Решение уравнений (2.47) будем искать по модифицированному методу Гаусса [30].

§3. Числовой пример.

Исследуем влияние растяжения вдоль трещины нормального отрыва на ее раскрытие в вершине, а также на размеры и форму зоны нелинейности.

3.1. Решение краевой задачи. Следуя работе [30], предположим, что функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ имеет такой вид:

$$\tilde{\varphi}(\Omega)\Big|_{\Omega \leq v} = 0; \quad (3.1)$$

$$\tilde{\varphi}(\Omega)\Big|_{\Omega > v} = \frac{\Omega - v + p - \sqrt[3]{\sqrt{q^3 + r^2} - r} + \sqrt[3]{\sqrt{q^3 + r^2} + r}}{\Omega} \quad (3.2)$$

$$\left(p = \frac{b}{3c}; \quad q = p^2 + \frac{1}{3c}; \quad r = p^3 - \frac{1}{2c}(\Omega - v + p)\right). \quad (3.3)$$

В этом виде функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$ согласуется с условием термодинамического равновесия [4].

Приведем данные, использованные при решении краевой задачи. Все они позаимствованы из работы [30].

Для констант ρ и σ имеем: $-\rho = 0,046 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$; $\sigma = 0,222 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$.

Для постоянной v , а также коэффициентов b и c имеем: $v = 3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}$; $b = 0,1964 \cdot 10^{-2} \text{ Па}^{-1/2}$; $c = 0,5632 \cdot 10^{-4} \text{ Па}^{-1}$.

Используя результаты вычислений по формулам (3.1)–(3.3), построим график функции $\tilde{\varphi}(\Omega)$ (рис. 5). Как видим, функция $\tilde{\varphi}(\Omega)$

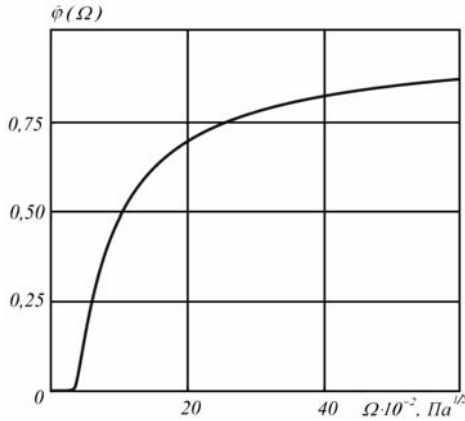


Рис. 5

становится существенно нелинейной, когда ее аргумент принимает значения, превышающие $3,25 \cdot 10^2 \text{ Па}^{1/2}$. Приведем исходные данные: $h = 0,02 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $d = 302$; $e = 152$; $f = 62$; $g = 72$.

По формуле (2.49) вычислено $n = 91666$.

Уточним длины трещины (разность $x_f^2 - x_f^2$) и разреза (разность $x_g^2 - x_f^2$).

Учитывая вторую из формул (2.44), получим, что

$$x_f^2 - x_f^2 = (f-2)h; \quad x_g^2 - x_f^2 = (g-f)h. \quad (3.4)$$

По формулам (3.4) вычислены: $x_f^2 - x_f^2 = 1,20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $x_g^2 - x_f^2 = 0,20 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Принято, что

$$P^\alpha \left(x_i^1, x_j^2 \right) = P_{(1)}^\alpha \quad (i = d, j = 2, \dots, e-1); \quad P^\alpha \left(x_i^1, x_j^2 \right) = P_{(2)}^\alpha \quad (i = 2, \dots, d-1, j = e);$$

$$P^\alpha \left(x_i^1, x_j^2 \right) = \begin{cases} P_{(3)}^\alpha & (i = 2, j = 2, \dots, f-1); \\ P_{(4)}^\alpha & (i = 2, j = f, \dots, g-1) \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2).$$

Отличными от нуля были исключительно $P_{(1)}^1, P_{(2)}^2, P_{(4)}^1$.

Решение краевой задачи получено из условия, что компонента S^{11} принимает в вершине разреза такое же значение, как и во всех точках на верхней поверхности разреза, т.е.

$$S^{11} \left(x_2^1, x_g^2 \right) = \left| P_{(4)}^1 \right|. \quad (3.5)$$

Представив частную производную от компоненты u_1 по координате x^1 и частную производную от компоненты u_2 по координате x^2 через конечные разности (с учетом формул (2.44), обозначений (2.45) и формул (2.46)), для первого из уравнений (2.14) получим

$$S^{11} \left(x_2^1, x_j^2 \right) \approx \frac{1}{2h\sigma(2\rho + \sigma)} \left[(\rho + \sigma) (y_{2(2e+j-g)+1} - y_{2(j-g)+1}) - \rho (y_{2(e+j-g)+4} - y_{2(e+j-g)}) \right] - T^{11} \left(x_2^1, x_j^2 \right) \quad (j = g, \dots, e-1). \quad (3.6)$$

При расчетах задано $P_{(1)}^1 = 5,00 \cdot 10^7$ Па; $P_{(2)}^2$ придавалось несколько значений (см. таблицу). Для приведенного значения $P_{(1)}^1$ и каждого из значений $P_{(2)}^2$ по уравнениям (2.47) в пятнадцати приближениях устанавливались (с учетом формул (2.48) и обозначений (2.28)) значения неизвестных y_1, \dots, y_n . При этом в первом приближении величины $\underline{Q}^1(x_i^1, x_j^2)$, $\underline{Q}^2(x_i^1, x_j^2)$ и $\underline{R}^1(x_i^1, x_j^2)$, $\underline{R}^2(x_i^1, x_j^2)$ приравнялись нулю, а в каждом последующем приближении – вычислялись (с помощью формул (2.50)–(2.52), (2.25), (3.1)–(3.3), первого из инвариантов (2.4), инварианта (2.13), выражения (2.9), обозначений (2.45) и формул (2.46)) на основе значений неизвестных y_1, \dots, y_n , установленных в предыдущем приближении.

Во всех случаях при решении краевой задачи выполнялось несколько итераций. Первоначально значение $P_{(4)}^1$ задавалось, а в дальнейшем – корректировалось (до соблюдения формулы (3.5)), для чего использовалось значение компоненты $S^{11}(x_2^1, x_g^2)$, вычисленное по уравнению (3.6) на основе значений неизвестных $y_{4e+1}, y_1, y_{2(e+2)}, y_{2e}$ и значения величины $T^{11}(x_2^1, x_g^2)$.

3.2. Анализ полученных результатов. В результате решения краевой задачи определено раскрытие трещины в вершине, т.е. $u_1(x_2^1, x_f^2) = u_1^A$.

$P_{(2)}^2 \cdot 10^{-7}$, Па	$-P_{(4)}^1 \cdot 10^{-7}$, Па	$u_1^A \cdot 10^6$, м
0,00	14,14	6,907
1,00	14,21	6,824
2,00	14,25	6,784
3,00	14,24	6,777
4,00	14,21	6,797
5,00	14,16	6,838
6,00	14,08	6,896
7,00	13,99	6,971
8,00	13,89	7,062

Следует отметить, что растяжение вдоль трещины оказало слабое влияние как на напряжение, приложенное к верхней поверхности разреза, так и на раскрытие трещины в вершине. Интересно, что с увеличением $P_{(2)}^2$ характер его воздействия, как это явствует из таблицы, менялся.

Действительно, $P_{(4)}^1$ и u_1^A сначала несущественно уменьшались, а затем – увеличивались.

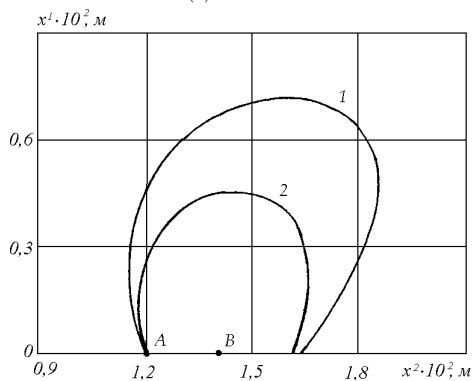


Рис. 6

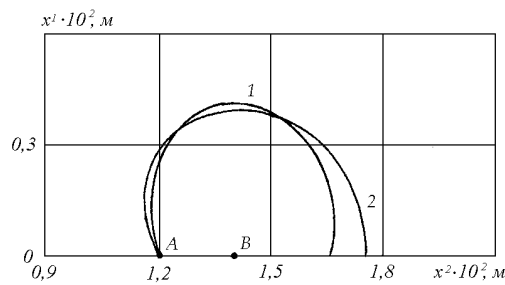


Рис. 7

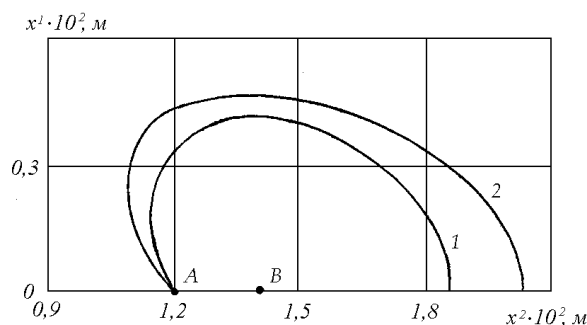


Рис. 8

На последней итерации выявлены (с точностью до шага h) точки, в которых выполняется критерий (1.21), т.е., определена граница зоны нелинейности. Она изображена на рис. 6–8.

Особого внимания заслуживает то, что растяжение вдоль трещины привело к значительному изменению протяженности зоны нелинейности в направлениях осей x^1, x^2 . К тому же, по мере увеличения $P_{(2)}^2$ (см. таблицу) наблюдалась существенная трансформация зоны нелинейности. Так, из рис. 6 (кривые 1 и 2 получены при первом и четвертом значениях $P_{(2)}^2$, соответственно) видно, что протяженность зоны нелинейности стала меньшей в обоих направлениях. Далее, из рис. 7 (кривые 1 и 2 получены при пятом и седьмом значениях $P_{(2)}^2$, соответственно) видно, что протяженность зоны нелинейности оказалась меньшей в направлении оси x^1 , но большей в направлении оси x^2 . Наконец, из рис. 8 (кривые 1 и 2 получены при восьмом и девятом значениях $P_{(2)}^2$, соответственно) видно, что протяженность зоны нелинейности стала большей в обоих направлениях.

Заключение.

Рассмотрено нелинейное упругое тело конечных размеров с центральной трещиной нормального отрыва. Принято, что при нагружении тела у каждой из вершин трещины возникает зона предразрушения, которая может быть заменена разрезом с приложенными по его поверхностям некоторыми напряжениями, подлежащими определению при решении краевой задачи.

Деформация тела изучена в случае обобщенного плоского напряженного состояния. С этой целью поставлена (в перемещениях) соответствующая краевая задача, для чего использованы термодинамически обоснованные определяющие уравнения. В результате численного решения данной задачи выявлено влияние растяжения вдоль трещины на ее раскрытие, а также на размеры и форму зоны нелинейности, окружающей зону предразрушения. В частности, установлено, что растяжение вдоль трещины мало влияет на ее раскрытие в вершине, но приводит к заметному изменению параметров зоны нелинейности.

РЕЗЮМЕ. Наведено критичний аналіз сучасного стану проблеми моделювання процесу руйнування різноманітних тіл з тріщинами. Зокрема, розглянуто теоретичні підходи до адекватного описання характеру руйнування тіл внаслідок поширення тріщини, що спостерігається у експериментах. Дано оцінку перспективності різноманітних підходів до подальшого удосконалення сучасних моделей. Розв'язано задачу про рівноважний стан нелінійного пружного тіла з центральною тріщиною нормального відриву при двовісному розтязі. Досліджено вплив розтягуючих напружень, які діють уздовж тріщини, на її розкриття і на конфігурацію зони нелінійності.

1. Богданов В.Л., Гузь А.Н., Назаренко В.М. Напряжённо-деформированное состояние материала с периодической системой соосных круговых трещин радиального сдвига при действии направленных вдоль них усилий // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 12. – С. 3–16.
2. Бриджмен П.В. Новейшие работы в области высоких давлений. – М.: И. Л., 1948. – 299 с.
3. Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я. Пластические деформации в окрестности трещины и критерии разрушения (обзор) // Пробл. прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
4. Гольденблат И.И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. – М.: ГТИ, 1955. – 272 с.
5. Гузь А.Н., Каминский А.А., Назаренко В.М. Механика разрушения. – К.: "АСК", 1996. – 340 с. — (Механика композитов: В 12-ти т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя; Т. 5).

6. *Ильюшин А.А.* Некоторые вопросы теории пластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1943. – 7, № 4. – С. 245 – 272.
7. *Каминский А.А., Гаврилов Д.А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – К.: Наук. думка, 1992. – 248 с.
8. *Каминский А.А., Усикова Г.И., Курчаков Е.Е., Дмитриева Е.А., Дорошенко С.П.* Экспериментальное исследование зоны пластичности в окрестности вершины трещины // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 1991. – Вып. 6. – С. 79 – 85.
9. *Каминский А.А., Усикова Г.И., Дмитриева Е.А.* Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 11. – С. 69 – 75.
10. *Каминский А.А., Кипнис Л.А., Колмакова В.А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 63 – 68.
11. *Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А.* Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 6. – С. 71 – 80.
12. *Курчаков Е.Е.* Исследование связи деформаций с напряжениями для нелинейной анизотропной среды // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 9. – С. 19 – 24.
13. *Ланасюк В.В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
14. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 502 с.
15. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
16. *Хорошун Л.П.* Дискретизация плоской задачи о растяжении тела с трещиной при нелинейном законе деформирования // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 11. – С. 31 – 48.
17. *Clausius R.* Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Warmetheorie // Annalen der Physik und Chemie. – 1854. – 93, N 12. – S. 481 – 506.
18. *Cherepanov G.P.* Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – P. 710.
19. *Cortet P.P., Santucci S., Vanel L., Ciliberto S.* Slow crack growth in polycarbonate films // Europhysics Letters. – 2005. – 71, N 2. – P. 242 – 248.
20. *Desai C.K., Kumar A.S., Basu S., Parameswaran V.* Measurement of Cohesive Parameters of Crazes in Polystyrene Films // Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, 2011. – P. 519 – 526.
21. *Fracture: An advanced treatise* / Ed. H. Liebowitz, vol. I—VI. – New York: Academic press, 1968 – 1974.
22. *Gain A.L., Carroll J., Paulino G.H., Lambros J.* A hybrid experimental/numerical technique to extract cohesive properties for mode-I fracture of quasi-brittle materials // Int. J. Fracture. – 2011. – 169, N 2. – P. 113 – 131.
23. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 1. – P. 1 – 61.
24. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 1. – P. 1 – 57.
25. *Helmholtz H.* Ueber die Erhaltung der Kraft. Wissenschaftliche Abhandlungen. – Berlin: Reimer, 1847. – 72 s.
26. *Hutchison J.W.* Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – 16, N 1. – P. 13 – 22.
27. *Kaminsky A.A.* Long-Term Fracture Mechanics of Viscoelastic Bodies with Cracks (Theory, Experiment) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 5. – P. 3 – 79.
28. *Kaminsky A.A.* Subcritical crack growth in polymer composite materials // Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge / Ed. G. Cherepanov. – Malabar, FL: Krieger Publishing Company, 1998. – P. 758 – 763.
29. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Modeling of Fracture Process Zone Near a Crack Tip in a Nonlinear Elastic Body // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 6. – P. 735 – 744.
30. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Modelling a Crack with a Fracture Process Zone in a Nonlinear Elastic Body // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 5. – P. 552 – 562.
31. *Kauderer H.* Nichtlineare Mechanik. – Berlin: Springer-Verlag, – 1958. – 778 s.
32. *Khoroshun L.P., Levchuk O.I.* Stress Distribution Around Cracks in Linear Hardening Materials Subject to Tension: Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 2. – P. 128 – 140.
33. *Sih G.C.* Handbook of stress intensity factors. – Bethlehem: Lehigh Univ. Press, 1973. – 415 p.
34. *Voitovich L.V., Malezhik M.P., Chernyshenko I.S.* Photoelastic Modeling of the Fracture of Viscoelastic Orthotropic Plates with a Crack // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 6. – P. 677 – 682.
35. *Wells A.A.* Critical tip opening displacement as fracture criterion // Proc. Crack Propagation Symp., Cranfield. 1961. – Vol. 1. – P. 210 – 221.
36. *Williams J.G.* Fracture mechanics of polymers. – New York: Wiley, 1984. – 320 p.
37. *Wnuk M.P.* Subcritical growth of fracture (inelastic fatigue) // Int. J. Fract. Mech. – 1971. – 7, N 4 – P. 383 – 407.
38. *Wnuk M.P., Knauss W.G.* Delayed fracture in viscoelasticplastic solids // Int. J. Solids Struct. – 1970. – 6, N 7. – P. 995 – 1010.
39. *Yaffee M.B., Kramer E. J.* Plasticsization effects on environmental craze microstructure // J. Mater. Sci., – 1981. – 16, N 8. – P. 2130 – 2136.
40. *Yokobori T.* The strength, fracture and fatigue of materials. – Groningen: P. Noordhoff, 1965. – 372 p.