

Н. П. Семенюк

О НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ УГЛАХ ПОВОРОТА И МАЛЫХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: compos@inmtech.kiev.ua*

Abstract. An approach is elaborated to statement and solution of a problem on nonlinear deformation of shells for the loads, that results to stability loss and strong bending in the plastic zone. The relationships among strains and displacements are assumed, which are used for the wide angles of rotations. A system of differential equations relative to the unknown functions is derived and represented in the Cauchy operator form. To solve the boundary problem, the method of discrete orthogonalization is used under fairness of the unknown functions and the load. An example in the form of the problem on stability and post-buckling behavior of long shell with a local initial deflection and made of alloy D16T is shown.

Key words: nonlinear deformation of shell, stability loss, post-buckling behavior, strong bending in the plastic zone, wide angles of rotations, method of discrete orthogonalization.

Введение.

Исследование устойчивости оболочек состоит из трех этапов, соответствующих трем характерным состояниям, которые проходит оболочка в процессе квазистатического нагружения. Начальный этап деформирования (докритический) и состояние вблизи предельных или бифуркационных нагрузок при малых деформациях, прогибах и углах поворота в большинстве случаев могут быть с высокой точностью определены на основании нелинейных уравнений теории Доннелла – Муштари – Власова или Флюгге [1, 8, 10]. Что касается заключительного этапа деформирования в закритическом состоянии, то адекватное описание свойственного ему существенного изменения геометрии возможно только с привлечением теории, в которой нет ограничений на величину прогибов и углов поворота. Разработано несколько вариантов нелинейной теории оболочек такого направления, достоинства и недостатки которых рассмотрены в работе [11]. Однако, пока нет общепринятого, наиболее обоснованного варианта, который можно было бы применять как при малых, так и при больших перемещениях оболочки. Кроме уточнений кинематического характера, расширять рамки применимости теории можно за счет выбора более подходящего, чем закон Гука, уравнения механического состояния. Потребность в этом вызвана тем, что у многих материалов, которые используются для изготовления оболочек, при сильном изгибе даже сравнительно тонких оболочек проявляются свойства пластичности.

В работе [13] проведен асимптотический анализ проблемы устойчивости конструкций в пластическом состоянии. Учитывая то, что в пластической области бифуркационная нагрузка не означает потери устойчивости, так как имеет место увеличение нагрузки в смысле Шенли, автор изучил вопрос о том, каким образом это сказывается на закритическом поведении и чувствительности к несовершенствам сжимаемых стержней и пологих оболочек. При существенных изменениях геометрии влияние пластичности исследовано с использованием численных методов в работах [6, 12].

В настоящее время интенсивно развивается область практических применений, которые стимулируют развитие исследований рассматриваемого направления [9, 14, 17, 18].

В предлагаемой работе разработан инкрементальный подход к постановке и решению задачи о нелинейном деформировании оболочек при сжимающих нагрузках, приводящих к потере устойчивости и сильному изгибу в пластической области. В его основу положены нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями, которые применимы при больших углах поворота. Они получены из соотношений нелинейной теории упругости, принятых в форме Новожилова [5], при использовании кинематической гипотезы Тимошенко. Уравнения равновесия записаны в проекциях на направления осей до деформации. Их отличительной особенностью является то, что они содержат проекции усилий и моментов, обусловленных нелинейностью кривизны и кручения k_{ij} , а также деформаций ε_{i3} . Выведена разрешающая система дифференциальных уравнений относительно скоростей разрешающих функций, представленная в операторной форме Коши. Для решения краевой задачи относительно скоростей использован метод дискретной ортогонализации при равноправии искомых функций и нагрузки [3, 11]. Система дифференциальных уравнений дополнена условием нормировки, позволяющим находить решение в регулярных и предельных точках на кривой равновесных состояний. Изложенная процедура использована при решении задачи об устойчивости и закритическом поведении длинной оболочки из сплава Д16Т с локальным начальным прогибом.

1. Уравнения теории оболочек с учетом гипотез Тимошенко при упруго-пластических деформациях.

При формулировке указанных уравнений исходим из постановки задач теории пластического течения [2, 19]. Для этой теории характерным является то, что все определяющие уравнения представляем в линеаризованном виде относительно приращений перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в теле при бесконечно малых приращениях внешних воздействий. Если скорость изменения нагрузок также мала, то реализуется квазистатический процесс. Параметром, по отношению к которому определяется скорость изменения разрешающих функций, принимаем длину дуги, которую описывает изображающая точка в пространстве равновесных состояний.

Полагаем, что оболочка отнесена к ортогональной системе координат α_1, α_2 , совпадающей с главными линиями кривизны поверхности приведения и образующей правую тройку с осью z , перпендикулярной к этой поверхности и направленной к центру кривизны. Коэффициенты Ляме A_1, A_2 и радиусы кривизны поверхности в направлении координатных линий R_1, R_2 связаны известными соотношениями Гаусса – Кодаци. Согласно кинематической гипотезе Тимошенко перемещения по координате z изменяются линейно

$$u = u_0 + z\theta; \quad v = v_0 + z\psi; \quad w = w_0 + z\chi, \quad (1)$$

где u_0, v_0, w_0 – перемещения координатной поверхности; $\theta, \psi, 1 + \chi$ – отождествляются при малых деформациях с направляющими косинусами прямолинейного волокна, которое до деформации было нормальным к поверхности приведения [5].

В связи с этим между функциями θ, ψ, χ выполняется равенство

$$\theta + \psi + (1 + \chi)^2 = 1. \quad (2)$$

Такое же равенство получим, если примем условие нерастяжимости нормального элемента. Из равенства (2) определим

$$\chi = \sqrt{1 - \theta^2 - \psi^2} - 1. \quad (3)$$

Использование этого выражения без каких-либо упрощений позволяет получить формулы для деформаций поперечного сдвига ε_{i3} и приращений кривизны и кручения k_{ij} , применимые в случае сильного изгиба оболочки. В теории оболочек Кирхгофа – Лява

на этом пути возникают дополнительные трудности, если следовать подходу, предложенному в работе [5]. Прежде чем записать эти формулы, введем обозначения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}; \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - a_1 u; \\ \theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_1}; \quad k_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}; \quad t_1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}; \quad a_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{21}}.\end{aligned}\quad (4)$$

При их записи индекс «0» возле компонентов векторов перемещений опущен. Будем использовать также аналогичные величины с индексом «2». Они получаются из приведенных путем замены 1 2, $u \leftrightarrow v$, $\theta \leftrightarrow \psi$. Приняв во внимание выражения (4), представим нелинейные выражения деформаций ε_{ij} , кривизн и кручения k_{ij} в таком виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \omega_1^2 + \theta_1^2); \quad \varepsilon_{13} = (1 + \varepsilon_1)\theta + \theta_1 S_q + \psi \omega_1; \\ k_{11} &= (1 + \alpha_{11})\varkappa_1 + \alpha_{12} t_1 + a_1 \alpha_{13} + \frac{1}{R_1} \alpha_{14}; \\ &(1 \rightarrow 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi);\end{aligned}\quad (5)$$

$$\begin{aligned}k_{12} &= (1 + \alpha_{11})t_2 + (1 + \alpha_{22})t_1 + \alpha_{12}k_2 + \alpha_{21}k_1 - a_2 \alpha_{13} - a_1 \alpha_{23} \\ \left(\begin{aligned} \alpha_{11} &= \varepsilon_1 - \frac{1}{S_q} \theta_1 \theta; \quad \alpha_{12} = \omega_1 - \frac{1}{S_q} \theta_1 \psi; \quad \alpha_{13} = (1 + \varepsilon_1)\psi - \omega_1 \theta; \\ \alpha_{14} &= 1 + 2\varepsilon_{11} - (1 + \varepsilon_1)S_q + \theta \theta_1; \end{aligned} \right. \\ &(1 \rightarrow 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi);\end{aligned}\quad (6)$$

$$\alpha_{25} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_{12} + \frac{1}{R_1} \theta_2 (\theta + \theta_1) + \frac{1}{R_2} \theta_1 (\psi + \theta_2) - \left(\frac{\omega_2}{R_1} + \frac{\omega_1}{R_2} \right) S; \quad S_q = \sqrt{1 - \theta^2 - \psi^2}.$$

Для сокращения записи ниже используем векторно-матричные операции. Введем векторы-столбцы

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, k_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, k_{12}, k_{22})^T; \\ \varepsilon_l &= (\varepsilon_1, \omega_1, \theta_1, k_1, t_1, \varepsilon_2, \omega_2, \theta_2, k_2, t_2, \theta, \psi)^T.\end{aligned}$$

Производные от компонентов вектора ε выражаются через производные от компонентов вектора ε_l следующим соотношением:

$$\dot{\varepsilon} = M_c \dot{\varepsilon}_l. \quad (7)$$

Матрица M_c состоит из 8 строк и 12 столбцов

$$M_c = (c_{ij}), \quad i = 1, \dots, 8; \quad j = 1, \dots, 12. \quad (8)$$

Выражений для коэффициентов c_{ij} не приводим, так как их легко получить, дифференцируя формулы (5).

Полагаем, что тангенциальные деформации изменяются по толщине линейно

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij,0} + z k_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (9)$$

а деформации поперечного сдвига ε_{13} , ε_{23} от координаты z не зависят. Аналогичное представление имеют производные $\dot{\varepsilon}_{ij}$.

Чтобы получить зависимости между скоростями деформаций и усилий, моментов теории оболочек, воспользуемся соотношениями теории пластического течения [2]

$$\dot{\varepsilon} = A_p \dot{\sigma}, \quad (10)$$

представленными в векторно-матричном виде, где вектор-столбец ε имеет компоненты деформации $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}$ (ε_{ij} – удвоенные тензорные $i \neq j$) и вектор $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$. При этом учтено, что $\varepsilon_{33} = 0$, а $\dot{\sigma}_{33}$ выражаются через $\dot{\sigma}_{ij}$ в исходных соотношениях пластического течения.

Запишем соотношения (10) в виде

$$\dot{\sigma} = B_p \dot{\varepsilon}, \quad (11)$$

воспользовавшись для получения коэффициентов матрицы B_p обращенными зависимостями в тензорном виде теории пластического течения [2].

Вычисляя моменты нулевого и первого порядков от компонентов вектора $\dot{\sigma}$ при учете разложения компонентов вектора $\dot{\varepsilon}$ (9), получаем

$$\dot{T} = A \dot{\varepsilon}, \quad (12)$$

где $T = (T_{11}, T_{13}, M_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, M_{12}, M_{22})^T$; T_{ij} – моменты нулевого порядка (усилия), M_{ij} – моменты первого порядка (моменты), вектор ε совпадает с приведенным выше.

При определении коэффициентов матрицы A необходимо вычисление интегралов $\int_z b_{ij} dz = C_{ij}$; $\int_z z b_{ij} dz = B_{ij}$; $\int_z z^2 b_{ij} dz = D_{ij}$ при зависящих от напряжений коэффициентах b_{ij} . Чтобы реализовать эту процедуру по толщине оболочки, задаем множество точек, в которых определяем напряжения и деформации. Полагаем, что каждая точка этого множества лежит на срединной поверхности некоторого условного слоя. В результате получаем слоистый пакет, для вычисления приведенных механических характеристик которого можно воспользоваться известными формулами [1].

В нелинейной теории упругости уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях имеют такой же вид, как их аналоги в линейной теории упругости, если воспользоваться компонентами тензора напряжений Пиолы [19]. В теории оболочек, где вместо напряжений используются моменты от них нулевого и первого порядка, статически эквивалентными компонентам тензора Пиолы будут компоненты вектора

$$T^* = (T_{11}^*, T_{12}^*, T_{13}^*, M_{11}^*, M_{12}^*, T_{21}^*, T_{22}^*, T_{23}^*, M_{21}^*, M_{22}^*, \bar{T}_{13}, \bar{T}_{23})^T, \quad (13)$$

которые можно определить как

$$T^* = M_c^T T, \quad (14)$$

где M_c^T – транспонированная матрица (8).

Продифференцировав выражение (14), получаем

$$\dot{T}^* = (M_c^T A M_c + M_p) \dot{\varepsilon}_l, \quad (15)$$

где M_p – матрица, коэффициенты которой получим из равенства $M_p \dot{\varepsilon}_l = \dot{M}_c^T T$. Обозначим их как P_{ij} ($i, j = 1, \dots, 12$). Матрицы M_p и $M_c^T A M_c$ – одинакового порядка. Учитывая то, что $P_{ij} = P_{ji}$ и матрица A – симметрична, можем констатировать, что матрица $(M_c^T A M_c + M_p)$ также симметрична.

Уравнения квазистатического состояния равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{T}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{T}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2(\dot{T}_{11}^* - \dot{T}_{22}^*) + a_1(\dot{T}_{21}^* + \dot{T}_{12}^*) + \frac{1}{R_1} \dot{T}_{13}^* - \dot{q}\theta_1 - q\dot{\theta}_1 &= 0 \quad \left(\begin{array}{c} \vec{1}, \vec{2} \\ \leftarrow \end{array} \right); \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{T}_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{T}_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 \dot{T}_{13}^* + a_1 \dot{T}_{23}^* + \frac{1}{R_1} \dot{T}_{11}^* + \frac{1}{R_2} \dot{T}_{22}^* + \dot{q}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) &= 0; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{M}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{M}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2(\dot{M}_{11}^* - \dot{M}_{22}^*) + a_1(\dot{M}_{21}^* + \dot{M}_{12}^*)_1 - \bar{T}_{1B} &= 0 \quad \left(\begin{array}{c} \vec{1}, \vec{2} \\ \leftarrow \end{array} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия формулируем относительно пяти функций, принятых по одной из пяти пар

$$(\dot{T}_{11}^*, \dot{u}), (\dot{T}_{12}^*, \dot{v}), (\dot{T}_{13}^*, w), (M_{11}^*, \theta), (M_{12}^*, \psi) \quad (17)$$

при $\alpha_i = \text{const}$; $i = 1, 2$, $\left(\begin{array}{c} \vec{1}, \vec{2} \\ \leftarrow \end{array} \right)$; $\left(\begin{array}{c} \vec{u}, \vec{v} \\ \leftarrow \end{array} \right)$; $\left(\begin{array}{c} \vec{\theta}, \vec{\psi} \\ \leftarrow \end{array} \right)$,

если контурные линии совпадают с координатными линиями.

При независимых от скоростей механических характеристиках материала можно показать, что соотношения (15) и уравнения (16) можно получить из условия стационарности функционала

$$\dot{\Pi}_R = \iint \left[\dot{T}^T M_c \dot{\varepsilon}_l + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_l^T M_p \dot{\varepsilon}_l - \frac{1}{2} \dot{T}^T A^{-1} \dot{T} - q \dot{N} \dot{U} - \dot{q} (\dot{N}^T U + N^T \dot{U}) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (18)$$

$$\left(N^T U = \left[-\frac{1}{2} \theta_1 u - \frac{1}{2} \theta_2 v + \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) w \right]; \bar{u} = (u, v, w, \vartheta, \psi)^T \right). \quad (19)$$

В случае пологих оболочек вариационный принцип относительно скоростей разрешающих функций получен в работе [4]. Потенциал нагрузки, которая в данном случае является следящим внешним давлением интенсивности q , существует только при определенных типах граничных условий [2].

2. Разрешающая система уравнений.

Для решения задач с использованием соотношений (7), (12) и уравнений (16) или вариационного уравнения $\delta \Pi_R = 0$ можно применить любой из известных методов. Ниже будем ориентироваться на метод дискретной ортогонализации [11], который лежит в основе развитых численных процедур, обеспечивающих высокую точность получаемых результатов [3]. Часть подинтегрального выражения в функционале $\dot{\Pi}_R$ (18), обусловленная работой деформации, не является преобразованием Лежандра скорости изменения потенциальной энергии

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \iint \dot{\varepsilon}_l^T (M_c^T A M_c + M_p) \dot{\varepsilon}_l A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (20)$$

так как матрица $(M_c^T A M_c + M_p)$ является вырожденной. Термин «потенциальная» употребляется в том же смысле, что и в [4]. Функционал в виде (18) невозможно использовать для получения системы уравнений в нормальном виде, так как невозможно в выражении $\dot{T}^T A^{-1} \dot{T}$ заменить компоненты вектора T компонентами вектора T^* .

Выделим в векторах T^* и ε_l три части. Пусть

$$T^* = \begin{pmatrix} Y \\ Z \\ T_3 \end{pmatrix}; \quad \varepsilon_l = \begin{pmatrix} \varepsilon_{l,1} \\ \varepsilon_{l,2} \\ \varepsilon_{l,3} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$[Y = (T_{11}^*, T_{12}^*, T_{13}^*, M_{11}^*, M_{12}^*)^T; \quad Z = (T_{21}^*, T_{22}^*, T_{23}^*, M_{21}^*, M_{22}^*)^T; \quad T_3 = (\bar{T}_{13}, \bar{T}_{23})^T;$$

$$\varepsilon_{l,1} = (\varepsilon_1, \omega_1, \theta_1, k_1, t_1)^T; \quad \varepsilon_{l,2} = (\varepsilon_{21}, \omega_2, \theta_2, k_2, t_2)^T; \quad \varepsilon_{l,3} = (\theta, \psi)^T].$$

Используя блочное представление матрицы $F = M_c^T A M_c + M_p$, записываем соотношение (15) в таком виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{T}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{l,1} \\ \dot{\varepsilon}_{l,2} \\ \dot{\varepsilon}_{l,3} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

размерность матриц $F_{i,j}$ соответствует размерности векторов $\dot{\varepsilon}_{l,i}$. Ввиду симметричности матрицы F блоки $F_{ji} = F_{ij}^T$.

В качестве разрешающих функций примем компоненты вектора перемещений U и введенного выше вектора Z . Используя невырожденность блока F_{22} , получаем

$$\dot{\varepsilon}_{l,2} = F_{21}^{-1} \dot{Z} - F_{22}^{-1} F_{21} \dot{\varepsilon}_{l,1} - F_{22}^{-1} F_{23} \dot{\varepsilon}_{l,3};$$

$$\dot{Y} = F_{12} F_{22}^{-1} \dot{Z} + (F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{21}) \varepsilon_{l,1} + (F_{13} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{23}) \dot{\varepsilon}_{l,3};$$

$$\bar{T}_3 = F_{32} F_{22}^{-1} \dot{Z} + (F_{31} - F_{32} F_{22}^{-1} F_{21}) \dot{\varepsilon}_{l,1} + (F_{33} - F_{32} F_{22}^{-1} F_{23}) \dot{\varepsilon}_{l,3}. \quad (23)$$

Введем обозначения следующих матриц:

$$X_1 = \begin{pmatrix} D & a_1 & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -a_1 & D & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}; \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} D+a_2 & a_1 & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 \\ -a_1 & D+a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 0 & D+a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D+a_2 \end{pmatrix};$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}; \quad R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(D = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right). \quad (24)$$

С использованием этих матриц можно записать

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,1} &= X_1 U; \quad \varepsilon_{i,2} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + X_2 U; \quad \varepsilon_{i,3} = X_3 U; \\ \dot{Y} &= F_{11} F_{22}^{-1} Z + (F_{11} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{21}) X_1 U + (F_{13} - F_{12} F_{22}^{-1} F_{23}) X_3 U; \\ \dot{T}_3 &= F_{32} F_{22}^{-1} Z + (F_{31} - F_{32} F_{22}^{-1} F_{21}) X_1 U + (F_{33} - F_{32} F_{22}^{-1} F_{23}) X_3 U. \end{aligned} \quad (25)$$

Разрешающая система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{Z}}{\partial \varphi} &= -R_{11} \dot{Y} - R_{12} \dot{Z} - R_{13} \dot{T}_3 - qN(u) - qN(\dot{u}); \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \varphi} &= -X_2 \dot{U} + F_{22}^{-1} \dot{Z} - F_{22}^{-1} F_{21} X_1 \dot{U} - F_{22}^{-1} F_{23} X_3 \dot{U}. \end{aligned} \quad (26)$$

Приведенные в этих уравнениях векторы \dot{Y} и \dot{T}_3 выражаются через векторы \dot{Z} и \dot{U} с помощью формул (23).

Система уравнений (26) представлена в нормальном виде относительно частных производных от скоростей векторов Z и U по координате α_2 . Присутствующие в правой части системы (26) матрицы X_1 и R_1 содержат производные по координате α_1 . Поэтому, таким образом представленная система разрешающих уравнений является операторной формой Коши. Существующие методы позволяют привести такую систему к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

К системе дифференциальных уравнений (26) необходимо добавить граничные условия при начальном значении координаты $\alpha_2 = \alpha_{2,0}$ и конечном $\alpha_2 = \alpha_{2,k}$. Их удобно представить в виде

$$(A_0, B_0) \begin{pmatrix} \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad (A_k, B_k) \begin{pmatrix} \dot{Z} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = 0. \quad (27)$$

Матрицы A_0, B_0, A_k, B_k имеют размерность 5×5 и содержат единичный коэффициент на том месте каждой строки матриц A или B , которые соответствуют номеру компонента векторов \dot{Z} или \dot{U} .

Полагаем, что при некотором значении давления q_0 известно решение Z_0, U_0 . Начальное значение параметра λ можно принять равным нулю. Система уравнений

$$\frac{dZ}{d\lambda} = \dot{Z}, \quad \frac{dU}{d\lambda} = \dot{U} \quad (28)$$

с условиями при $\lambda = 0$

$$Z(0) = Z_0; U(0) = U_0. \quad (29)$$

составляют задачу Коши по параметру λ .

После решения краевой задачи (26), (27), задавшись некоторым шагом $\Delta\lambda$, определим

$$Z(1) = Z_0 + \Delta\lambda \dot{Z}; U(1) = U_0 + \Delta\lambda \dot{U}; q(1) = q_0 + \Delta\lambda \dot{q}. \quad (30)$$

Такой алгоритм соответствует методу Эйлера. В работе [3] предложены также алгоритмы решения с помощью модифицированного метода Эйлера и метода Рунге – Кутты.

3. Нелинейное деформирование и устойчивость длинных цилиндрических оболочек с некруговым поперечным сечением при внешнем давлении.

Рассмотрим применение уравнений (26) к решению задачи, в которой все переменные зависят только от координаты α_2 . Полагаем, что бесконечно длинная цилиндрическая оболочка закреплена при $\varphi = 0$ вдоль образующей от перемещений и поворотов, нагружена равномерным внешним давлением, деформируется симметрично относительно диаметра, проходящего через точку $\varphi = 0$. В этом случае исследуется только часть поперечного сечения при $0 \leq \varphi \leq \pi$. Граничные условия в точке $\varphi = \pi$ заменяются условиями симметрии [15, 16].

Оболочка изготовлена из дюралюминиевого сплава Д-16Т. Подобные оболочки были предметом экспериментального исследования в работе [7]. Опытные данные, полученные при одноосном сжатии образцов из сплава Д-16Т, хорошо ложатся на кривую напряжение-деформация, описываемую соотношением

$$\varepsilon = C_1 \sigma + C_2 \sigma^n \quad (C_1 = 1,346 \cdot 10^{-5}; C_2 = 1,107 \cdot 10^{-20}; n = 7; \nu = 0,32). \quad (31)$$

Между интенсивностями деформаций и напряжений вместо (31) получаем зависимость

$$\varepsilon_u = \left(C_1 - \frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_u + C_2 \sigma_u^n. \quad (32)$$

В теории пластического течения используется кривая (31) для определения касательного модуля E'

$$E' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}, \quad (33)$$

а при использовании деформационной теории – зависимость (32) при вычислении касательного E_k и секущего E_c модулей, т.е.

$$E_k = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u}; \quad E_c = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}. \quad (34)$$

Соотношения между скоростями деформаций и напряжений (10) в рассматриваемом примере расчета преобразуются к виду

$$\dot{\varepsilon}_{22} = a_{22}^* \dot{\sigma}_{22} + a_{24}^* \dot{\sigma}_{23}; \quad \dot{\varepsilon}_{23} = a_{24}^* \dot{\sigma}_{22} + a_{44}^* \dot{\sigma}_{23} \quad (35)$$

$$\left(a_{22}^* = a_{22} - \frac{a_{23}a_{32}}{a_{33}}; \quad a_{24}^* = a_{24} - \frac{a_{23}a_{34}}{a_{33}}; \quad a_{44}^* = a_{44} - \frac{a_{34}a_{43}}{a_{33}} \right). \quad (36)$$

Переход от коэффициентов a_{ij} к a_{ij}^* обусловлен тем, что $\varepsilon_{33} = 0$. Поэтому

$$\sigma_{33} = -\frac{a_{32}}{a_{33}} \sigma_{22} - \frac{a_{34}}{a_{33}} \sigma_{23}. \quad (37)$$

Согласно теории течения коэффициенты a_{ij} вычисляем по формулам

$$a_{22} = \frac{1}{E} + F_2 \hat{\sigma}_{22}^2; \quad a_{23} = -\frac{\nu}{E} + F_2 \hat{\sigma}_{22} \hat{\sigma}_{33}; \quad a_{24} = 2F_2 \hat{\sigma}_{22} \sigma_{23}; \quad a_{24} = \frac{1}{G} + 4F_2 \sigma_{23}^2;$$

$$F_2 = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{\sigma_{ii}^2}; \quad \sigma_{ii} = \sqrt{\sigma_{22}^2 + \frac{1}{2} \sigma_{33}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33} + 3\sigma_{23}^2}. \quad (38)$$

Коэффициенты a_{ij} зависят от напряженного состояния и истории нагружения. Напряжения изменяются по толщине оболочки и зависят от координаты φ .

В процессе вычислений, результаты которых приведены ниже, оболочку по толщине разбиваем условно на 10 слоев, на срединной поверхности которых определяем значения коэффициентов a_{ij} . В пределах условного слоя эти величины предполагаем постоянными. Зависимость $a_{ij}(\varphi)$ учитываем при интегрировании по координате φ методом Рунге – Кутты.

Рассматриваем оболочку с отношением $R/t = 20$ (толщина оболочки $t = 0,05$ м). Поперечное сечение оболочки имеет отклонение от идеальной окружности в виде локального прогиба при $5\pi/6 \leq \varphi \leq 7\pi/6$, который можно описать переменным радиусом $R(\varphi) = R \{1 - \gamma [1 - \cos(6\varphi - 5\pi)]\}$.

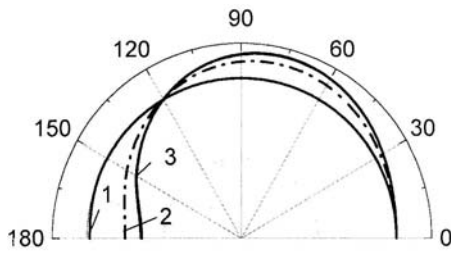


Рис. 1

На рис. 1 показан вид поперечного сечения при $\gamma = 0,01$ (кривая 1). Критическое значение интенсивности внешнего давления для бесконечно длинной цилиндрической оболочки определяется формулой

$$q_c = \frac{3D_{22}}{R^3},$$

где $D_{22} = Et^3 / [12(1 - \nu^2)]$ – изгибная жесткость оболочки в окружном направлении.

При построении равновесных кривых (рис. 2, 3) по оси ординат отложено отношение α_c значения действующей нагрузки к величине q_c , определяемой формулой (40), по оси абсцисс – отношение прогиба к толщине (w/t) при $\varphi = \pi$ и $\varphi = \pi/2$.

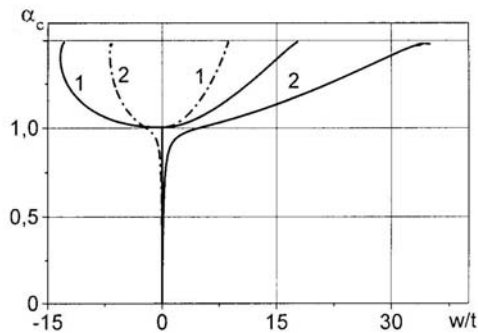


Рис. 2

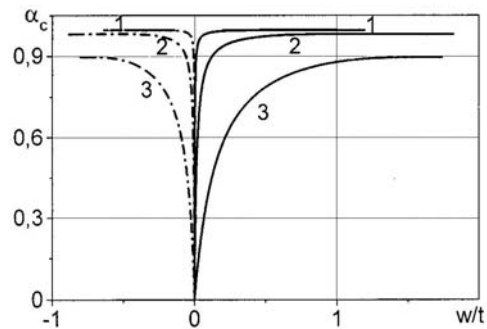


Рис. 3

Приведенная на рис. 2 кривая 1 получена для идеальной круговой оболочки в предположении, что она деформируется упруго как в докритическом, так и в закритическом состояниях. Сплошная ее часть вычислена в точке $\varphi = \pi$, штрих пунктирная – в точке $\varphi = \pi/2$. Критическим для этой оболочки является $\alpha_c = 1$. Кривая 2 относится

к оболочке с начальным прогибом, для которого $R\gamma = 1$. На этой кривой нет угловых точек, что означает отсутствие явления бифуркации. При $\alpha_c < 0,989$ оболочка изгибается незначительно. Точка $\alpha_c = 0,989$ характерна тем, что оболочка в достигнутом состоянии обладает наименьшей жесткостью по сравнению с другими точками на равновесной кривой. Однако оболочка с идеальным круговым сечением и оболочка с рассмотренным начальным прогибом после прохождения критической точки не теряют устойчивость, так как рост прогибов возможен только при увеличении нагрузки.

Учет пластичности сплава Д16Т незначительно влияет на величину критической нагрузки совершенной оболочки ($\alpha_c = 1$), но оказывает существенное влияние на ее закритическое поведение. Кривая 1 на рис. 3 получена при $R\gamma = 0,01$, кривая 2 – при $R\gamma = 0,1$, кривая 3 – при $R\gamma = 1$. Каждая из этих кривых после достижения критической нагрузки становится параллельной оси абсцисс. Это свидетельствует об их неустойчивости в закритической области. Кривые 2, 3 на рис. 1 дают представление о деформировании поперечного сечения оболочки при увеличении нагрузки в докритическом состоянии и в начальном закритическом.

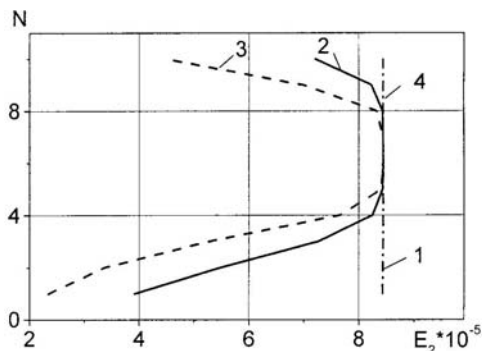


Рис. 4

На рис. 4 приведены кривые, описывающие изменение мгновенных модулей E_2 по толщине оболочки в сечении $\varphi = \pi$ на различных этапах нагружения. По оси ординат отложены номера слоев, на срединной поверхности которых вычисляются напряжения и деформации. Кривые 1 и 2 соответствуют докритическому деформированию, причем вторая из них получена в непосредственной близости от критической точки. Кривая 3 вычислена в критической точке, а кривая 4 – в закритической. Как видим, кривые 1 и 4 – совпадают. Следует отметить, что разгрузка происходит по всему периметру поперечного сечения рассматриваемой оболочки. Изменение шага по параметру продолжения показывает, что из достигнутого состояния происходит переход на другую равновесную траекторию. Кроме того, теория пластического течения Прандтля – Рейса, которая использована в данной работе, является простейшей и корректно описывает процесс пластического деформирования лишь на начальном этапе.

Р Е З Ю М Е . Розроблено інкрементальний підхід до постановки та розв'язання задачі про нелінійне деформування оболонок при навантаженнях, що призводять до втрати стійкості та сильного згину в пластичній області. Використано залежності між деформаціями та переміщеннями, які застосовуються при великих кутах повороту. Виведено систему диференціальних рівнянь відносно швидкостей невідомих функцій, яка представлена в операторній формі Коші. Для розв'язання крайової задачі використовується метод дискретної ортогоналізації при рівноправності невідомих функцій та навантаження. Наведено приклад розв'язання задачі про стійкість та закритичну поведінку довгої оболонки зі сплаву Д16Т з локальним початковим прогином.

1. Баженов В.Л., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. – К.: Каравела, 2010. – 352 с.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 512 с.
3. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
4. Кантор Б.Я. Змішаний варіаційний принцип теорії гнучких пружно пластичних пологих оболонок // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 12. – С. 1095 – 1098.

5. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М. – Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
6. Сахаров А.С., Кислюцкий В.Н., Киричевский В.В., Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кенплер Х., Кочык З. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища шк.; Лейпциг: Фахбухферлаг, 1982. – 480 с.
7. Тетерс Г.А. Сложные нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с.
8. Donnell L.H. Beams, Plates and Shells. – N.-Y.: McGraw Hill, 1976. – 453 p.
9. Flugge W. Stresses in shells. – Berlin: Springer-Verlag., 1960. – 499 p.
10. Firer M., Sheinman I. Nonlinear analysis of laminated noncircular cylindrical shells // Int. J. Solids and Struct. – 1995. – **32**, 10. – P.1405 – 1416.
11. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya. The Problem of Static and Dynamical Deformation of Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Revier) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
12. Grognes Ph., Van A. Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – **45**, N 1. – P.64 – 86.
13. Hutchinson J.W. Plastic buckling // Adv. Appl. Mech. – 1977. – **14**, N 4. – P. 67 – 144.
14. Kyriakides S., Corona E. Mechanics of offshore pipelines. Volume 1: Buckling and Collapse. – Amsterdam – Tokyo: Elsevier, 2007. – 415 p.
15. Semenyuk N.P. Stability of Corrugated Arches under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 211 – 219.
16. Semenyuk N.P., Zhukova N.B. Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels Under External Pressure // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 702 – 714.
17. Soldatos P.K. Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross section: a survey // Appl. Mech. Rev. – 1999. – **52**, N 8. – P. 237 – 274.
18. Soldatos P.K., Tzivanidis G.J. Buckling and vibrations of cross-ply laminated non-circular cylindrical shells // J. Sound and Vibr. – 1982. – **82** (3). – P. 425 – 434.
19. Washizu K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. – Oxford – New York: Pergamon Press, 1982. – 540 p.

Поступила 26.04.2012

Утверждена в печать 30.09.2014

