

Л. П. Хорошун

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ОБ ОБРАЗОВАНИИ ШЕЙКИ
В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ПЛАСТИНЕ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@jmtech.kiev.ua*

Abstract. A solution is obtained for the plane nonlinear problem on tension of a plate with crack under condition of forming of a neck at the tip of crack. A diagram of deformation is assumed to be linear with the constant bulk modulus. This problem is reduced to the system of algebraic equation using the Fourier transform and by discretization. A distribution of the neck depth near the crack tip and an effect of nonlinearity on opening of the crack near the tip are studied.

Key words: diagram of deformation, crack, nonlinear problem, neck, discretization, depth of neck, crack opening.

Введение.

Основной задачей механики разрушения является изучение напряженно-деформированного состояния в окрестности трещины и установление критериев и закономерностей ее развития [2, 9, 23]. Вполне очевидно, что адекватное решение этой задачи возможно на основе всестороннего изучения физической сущности явления и сопровождающих его процессов, строгой формулировки выбранной конкретной математической модели, описывающей специфику явления, и точного решения соответствующих исходных уравнений. Упрощения в формулировке математической модели и методах аналитического или численного решения могут существенно исказить сущность реальной задачи.

Проблемы и критерии механики разрушения, как известно [12, 13], могут быть разделены на классические и неклассические. К первым относятся задачи на растяжение или сдвиг в окрестности трещины при условии отсутствия резкого изменения характера деформирования до разрушения. Критерии разрушения в этом случае формулируются относительно определенных параметров напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины.

К неклассическим проблемам механики разрушения относят вопросы установления новых механизмов разрушения и исследования на их основе определенных классов задач. Здесь фундаментальными направлениями механики трещин являются проблемы разрушения при сжатии вдоль трещин [5, 8, 10, 13, 14], а также динамические задачи для однородных и композитных материалов с трещинами [6, 7, 12].

В отличие от большинства задач механики, где прочность тела определяется путем сравнения максимальных напряжений или деформаций с их предельными значениями для рассматриваемого материала, расчетные значения напряжений и деформаций в вершине трещины в линейной механике разрушения бесконечны, что исключает применение такой процедуры, создавая трудности постановочного и вычислительного характера [2]. Поэтому развитие классической механики разрушения шло по пути создания альтернативных концепций и подходов, базирующихся на определенных дополнительных упрощающих предположениях о характере распределения напряжений и механизме разрушения в вершине трещины. Эти подходы известны как энергетические, силовые и деформационные критерии разрушения [2].

В классической механике разрушения фундаментальными принято считать энергетический критерий хрупкого разрушения Гриффитса [11] и его модификацию в виде критерия квазихрупкого разрушения Орована – Ирвина [15, 22]. Основой этих критериев является предположение о балансе освобождающейся упругой энергии линейного деформирования и приращения поверхностной энергии при увеличении длины трещины для хрупкого разрушения или работы пластической деформации в тонком слое у вершины трещины для квазихрупкого разрушения. Очевидно, что такое предположение нельзя признать корректным, так как приращение поверхностной энергии, равной работе разделения двух соседних слоев атомов, как минимум на порядок меньше освобождающейся упругой энергии, которая накоплена не менее чем в десяти слоях атомов согласно концепции сплошности, т.е. эти величины несоизмеримы. Кроме того, в линейной задаче напряжения у вершины трещины неограничены, в то время как приращение поверхностной энергии и работа пластической деформации определяются через ограниченные напряжения согласно реальной диаграмме деформирования. Это значит, что на границе упругой области и области разрушения соответствующие напряжения терпят разрыв вопреки представлениям механики сплошной среды.

К энергетическим относят также критерий J -интеграла (Эшелби, Черепанов, Райс) [3], связанный со способом определения освобождающейся упругой энергии при увеличении длины трещины, который сводится к интегрированию определенного выражения по произвольному контуру, охватывающему вершину трещины. Однако при построении J -интеграла не соблюдается строгость. Прежде всего, при приближении произвольного контура к вершине трещины погрешность может быть большой. Кроме того замена производной по длине трещины производной по координате вдоль трещины является необоснованной и весьма приближенной. Строгий подход для линейно-упругой задачи [18] приводит к результату, отличному от J -интеграла.

Анализ концепции силового критерия Ирвина [15] в виде предельной поверхности относительно коэффициентов интенсивности напряжений в сингулярных составляющих также свидетельствует о несоблюдении строгости в построении. Действительно, в нелинейных диаграммах деформирования реальных материалов напряжения всегда ограничены, поэтому напряжения в вершине трещины не могут быть бесконечными, т.е. коэффициенты интенсивности напряжений в действительности не существуют. Они являются результатом решения задачи для идеализированной линейной диаграммы деформирования, допускающей бесконечные напряжения. Второй особенностью критерия предельного значения коэффициентов интенсивности является то, что в линейной механике разрушения коэффициент интенсивности напряжений определяется как множитель при размерной корневой особенности в асимптотическом решении. Это приводит к зависимости критической нагрузки от длины трещины. Однако это противоречит решению линейной задачи для бесконечного тела, которое в безразмерных координатах, отнесенных к длине трещины, является одним и тем же для произвольной длины трещины. Этот парадокс обусловлен выделением размерной корневой особенности, где рассматривается стремление к нулю размерной величины, что не имеет смысла. Смысл имеет только безразмерная особенность, что для бесконечного однородного линейно-упругого тела с трещиной ведет к зависимости коэффициента интенсивности напряжений только от нагрузки.

Недостаточная строгость критерия критического раскрытия трещины, относящегося к деформационным критериям [2], связана с отсутствием строгого обоснования и четкого представления о расстоянии от вершины трещины, на котором рассматривается раскрытие. Вводимое понятие «тупиковая часть трещины» не имеет четкого определения. Более того, оно вообще не имеет смысла при общепринятом моделировании трещины прямолинейным математическим размером нулевой трещины. Это порождает дополнительные трудности при решении соответствующих задач и экспериментальном определении предельных параметров, преодоление которых связано с дополнительными предположениями и упрощениями.

Приведенный анализ основных концепций и подходов в классической механике разрушения свидетельствует об отсутствии единой обоснованной формулировки физического смысла и механизма образования критического состояния трещины, а также соответствующей математической модели. При этом допускаемые предположения и упрощения с целью преодоления трудностей постановочного и вычислительного

характера ведут к определенному отходу от адекватности реальным процессам и механизмам. Это значит, что адекватная математическая модель разрушения в механике трещин должна базироваться как на строгом соблюдении физической сущности явления в математической формулировке задачи, так и точности решения соответствующих уравнений.

Одним из основных условий соблюдения строгости постановки является формулировка задачи классической механики разрушения для полной нелинейной диаграммы деформирования материала. В этом случае в окрестности вершины трещины формируются зоны нелинейных или пластических деформаций, называемых также зонами предразрушения, где напряжения ограничены. Аналитическое решение такой задачи осуществить невозможно без упрощающих предположений, поэтому единственным строгим подходом является дискретизация исходных континуальных уравнений и численное их решение.

Необходимо отметить, что попытки построить приближенные аналитические решения задачи о трещине с зоной предразрушения на основе упрощающих предположений [4, 16, 17] не могут быть признаны обоснованными и достоверными. В самом деле, здесь зоны предразрушения не определяются из решения задачи, а задаются в виде трещин-разрезов с неопределенной длиной и наклоном, к берегам которых приложена простая нагрузка, соответствующая пределу текучести или неизвестная. При этом для определения длины и наклона трещины-разреза формулируются дополнительные необоснованные условия. В действительности же зоны предразрушения полностью определяются из решения нелинейной задачи [20, 21], причем в них имеет место неоднородное сложное напряженное состояние, а отношение поперечных размеров зон предразрушения к продольным имеют порядок 0,7 – 0,8 для плоского деформированного состояния и 0,8 – 1,0 для плоского напряженного состояния. Не имеет также физического смысла задание на бесконечности сингулярных составляющих асимптотического приближения линейно-упругой задачи вместо естественного общепринятого задания однородных нагрузок. Очевидно, что построенные таким образом приближенные аналитические решения неадекватны реальной задаче.

В настоящей работе рассмотрена плоская нелинейная задача о растяжении пластины с трещиной при условии, что в окрестности вершины трещины образуется шейка. В основу положены уравнения плоского напряженного состояния для пластины переменной толщины, материал которой следует физически нелинейному деформированию. Диаграмма деформирования принимается кусочно-линейной, модуль сдвига зависит от второго инварианта девиатора деформаций при постоянном модуле объемного сжатия. Применение преобразования Фурье [24] позволяет свести задачу к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, которая заменой интегралов суммами и производных разностями преобразуется в систему нелинейных алгебраических уравнений. Проведено численное решение системы для диаграмм идеального упругопластического деформирования, линейного упрочнения и линейно ниспадающего участка диаграммы. Исследовано распределение глубины шейки возле вершины трещины, а также влияние нелинейности на особенности кривых раскрытия трещины возле вершины.

§1. Основные уравнения.

Исходя из физически нелинейного закона деформирования материала, описываемого, соответственно, линейными и нелинейными зависимостями между объемными и девиаторными частями напряжений и деформаций, имеем

$$\sigma_{rr} = 3K\varepsilon_{rr}; \quad \sigma'_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon)\varepsilon'_{ij}; \quad J_\varepsilon = (\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij})^{1/2}; \quad (i, j, r = 1, 2, 3), \quad (1.1)$$

откуда следуют соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\mu(J_\varepsilon) \left(\frac{\nu(J_\varepsilon)}{1-2\nu(J_\varepsilon)} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right); \quad \nu(J_\varepsilon) = \frac{3K - 2\mu(J_\varepsilon)}{6K + 2\mu(J_\varepsilon)} \quad (i, j, r = 1, 2, 3), \quad (1.2)$$

где K , μ , ν – соответственно, модули объемной деформации, сдвига и коэффициент Пуассона.

Примем, что модуль сдвига определяется функцией

$$\mu(J_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_0, & J_\varepsilon < \frac{k}{2\mu_0}, \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{k}{2J_\varepsilon}, & J_\varepsilon \geq \frac{k}{2\mu_0}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\mu_0, \mu', k = \sigma_0 \sqrt{2/3}$ – постоянные; σ_0 – предел текучести материала. Для одноосной деформации при $\mu' > 0$, $\mu' = 0$, $\mu' < 0$ имеет место, соответственно, линейное упрочнение, идеальное упругопластическое деформирование и линейный ниспадающий участок диаграммы деформирования.

Если ввести замену

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{k\bar{\mu}} \sigma_{ij}; \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (1.4)$$

то соотношения (1.2) примут вид

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu}_0 \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{rr} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \right); \quad \bar{\mu}_0 = \frac{\mu_0}{k} \quad (i, j, r = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Полагая в (1.5), соответственно, $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$ и $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, получаем выражения инварианта J_ε для плоского деформированного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} J_{\bar{\sigma}}; \quad J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[(1-\nu + \nu^2) (\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22})^2 - 3(\bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{12}^2) \right]^{1/2} \quad (1.6)$$

и для плоского напряженного состояния

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} J_{\bar{\sigma}}; \quad J_{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\sigma}_{11}^2 + \bar{\sigma}_{22}^2 - \bar{\sigma}_{11}\bar{\sigma}_{22} + 3\bar{\sigma}_{12}^2)^{1/2}. \quad (1.7)$$

При этом безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$ согласно (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) определяется формулой

$$\bar{\mu}(J_{\bar{\sigma}}) = 1 - \gamma(J_{\bar{\sigma}}); \quad \gamma(J_{\bar{\sigma}}) = \begin{cases} 0, & J_{\bar{\sigma}} < 1; \\ (1 - \bar{\mu}') \left(1 - \frac{1}{J_{\bar{\sigma}}}\right), & J_{\bar{\sigma}} \geq 1; \end{cases} \quad \left(\bar{\mu}' = \frac{\mu'}{\mu_0} \right). \quad (1.8)$$

Из соотношений (1.5) следуют выражения для деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\bar{\mu}_0} (\bar{\sigma}_{ij} - \hat{\nu} \bar{\sigma}_{rr} \delta_{ij}) \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.9)$$

где $\hat{\nu} = \nu$ – для плоского деформированного и $\hat{\nu} = \nu/(1+\nu)$ – для плоского напряженного состояний. Согласно (1.2) – (1.4), (1.8) коэффициент $\hat{\nu}$ можно представить в виде суммы $\hat{\nu} = \hat{\nu}_0 + \hat{\nu}_1$, где

$$\hat{\nu} = \frac{\nu_0}{1+\nu_0}; \quad \hat{\nu}_1 = \frac{2}{3} \delta \gamma(J_{\bar{\sigma}}); \quad \nu_0 = \frac{3K - 2\mu_0}{6K + 2\mu_0}; \quad \delta = \frac{1 - 2\nu_0}{2(1 + \nu_0)} \quad (1.10)$$

– для плоского напряженного состояния и

$$\hat{\nu}_0 = \nu_0; \quad \hat{\nu}_1 = \frac{3\delta\gamma(J_{\bar{\sigma}})}{2(1+\delta)[1+\delta+\delta\gamma(J_{\bar{\sigma}})]} \quad (1.11)$$

– для плоского деформированного состояния.

В случае плоского напряженного состояния, имеющего место в тонкой пластине под воздействием сил в ее плоскости, в зоне больших напряжений растяжения, превышающих предел текучести, могут появляться остаточные деформации ε_{33} , обусловленные эффектом Пуассона, приводящие к образованию шейки. Для описания этого явления необходимо вышеприведенные уравнения состояния дополнить дифференциальными уравнениями равновесия относительно усилий s_{ij} , действующих в плоскости x_1x_2 на пластину

$$s_{ij,j} = 0; \quad s_{ij} = 2h\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \quad (1.12)$$

где $2h$ – толщина пластины, зависящая от напряжений, которая, согласно (1.5), (1.10), определяется через исходную постоянную толщину $2h_0$ и напряжения соотношениями

$$2h = 2h_0(1 + \varepsilon_{33}); \quad \varepsilon_{33} = -(\hat{\nu}_0 + \hat{\nu}_1) \frac{\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}}{2\bar{\mu}_0}. \quad (1.13)$$

С учетом (1.4) уравнения равновесия (1.12) приводятся к виду

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{f}_i = 0; \quad \bar{f}_i = \frac{1}{h\bar{\mu}} (h\bar{\mu})_{,j} \bar{\sigma}_{ij} \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.14)$$

Подставляя (1.9) в уравнение совместности деформаций

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}, \quad (1.15)$$

приходим к уравнению совместности относительно модифицированных напряжений

$$[(1 - \hat{\nu}_0)\bar{\sigma}_{11} - \hat{\nu}_0\bar{\sigma}_{22}]_{,22} + [(1 - \hat{\nu}_0)\bar{\sigma}_{22} - \hat{\nu}_0\bar{\sigma}_{11}]_{,11} - \bar{f}_{3,rr} = 2\bar{\sigma}_{12,12}; \quad \bar{f}_3 = \hat{\nu}_1\bar{\sigma}_{rr} \quad (r = 1, 2). \quad (1.16)$$

Решение однородных дифференциальных уравнений (1.14), (1.16) определяется через функцию напряжений

$$\bar{\sigma}_{11}^0 = \varphi_{,22}; \quad \bar{\sigma}_{22}^0 = \varphi_{,11}; \quad \bar{\sigma}_{12}^0 = -\varphi_{,12}, \quad (1.17)$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\varphi_{,ijij} = 0 \quad (i, j = 1, 2). \quad (1.18)$$

Частное решение неоднородных уравнений (1.14), (1.16), которое можно построить методом преобразований Фурье для бесконечной области [24], представлено через интегралы по области D тела

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^* = & -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2 - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\ & -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) e_{ij}(x_i - \xi_i) \bar{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} \bar{f}_3(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\
\bar{\sigma}_{22}^* & = -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r)}{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} (x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i) \bar{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\
& - \frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} \bar{f}_3(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2; \\
\bar{\sigma}_{12}^* & = -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} e_{ij}(x_i - \xi_i) \bar{f}_j(\xi_r) d\xi_1 d\xi_2 - \\
& - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2)(x_j - \xi_j) \bar{f}_j(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 + \\
& + \frac{1}{\pi(1-\hat{\nu}_0)} \int_D \frac{(x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) \bar{f}_3(\xi_r)}{[(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)]^2} d\xi_1 d\xi_2 \quad (i, j, r = 1, 2), \quad (1.19)
\end{aligned}$$

где $e_{11} = e_{22} = 0$, $e_{12} = -e_{21} = 1$. Постоянные интегрирования определяются из граничных условий для общего решения $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij}^*$, состоящего из суммы (1.17), (1.19). Таким образом приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно модифицированных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$.

§2. Задача о растяжении пластины с трещиной.

Рассмотрим плоское напряженное состояние пластины с внутренней трещиной ($-c \leq x \leq c$, $y = 0$) при заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной растягивающей нагрузке p_0 , действующей вдоль оси y . Так как распределение напряжений имеет симметрию относительно осей x и y , то достаточно ограничиться рассмотрением первого квадрата D_1 области тела D . При этом необходимо учесть влияние остальных квадратов D_2, D_3, D_4 при построении частного решения (1.19). Тогда приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}^*(x, y) & = \int_{D_1} \{ [P_i(x, y; \xi, \eta) + Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) + P_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta) \} d\xi d\eta; \\
\bar{\sigma}_{22}^*(x, y) & = \int_{D_1} \{ [P_i(x, y; \xi, \eta) - Q_i(x, y; \xi, \eta)] \bar{f}_i(\xi, \eta) - P_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta) \} d\xi d\eta; \\
\bar{\sigma}_{12}^*(x, y) & = \int_{D_1} [S_i(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_i(\xi, \eta) + S_3(x, y; \xi, \eta) \bar{f}_3(\xi, \eta)] d\xi d\eta \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.1)
\end{aligned}$$

где функции влияния определяются формулами

$$\begin{aligned}
P_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_3} + \frac{\alpha_1}{\beta_4} \right); \\
P_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\alpha_3}{\beta_1} + \frac{\alpha_3}{\beta_2} - \frac{\alpha_4}{\beta_3} - \frac{\alpha_4}{\beta_4} \right); \\
P_3(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
Q_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
Q_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(-\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right); \\
S_1(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(-\frac{\alpha_3\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_3\gamma_2}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_4\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_4\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1^2\alpha_3}{\beta_1^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2^2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1^2\alpha_4}{\beta_4^2} \right); \\
S_2(x, y; \xi, \eta) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\gamma_2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\gamma_3}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\gamma_4}{\beta_4^2} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3^2}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3^2}{\beta_2^2} - \frac{\alpha_2\alpha_4^2}{\beta_3^2} - \frac{\alpha_1\alpha_4^2}{\beta_4^2} \right); \\
S_3(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\alpha_1\alpha_3}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2^2} + \frac{\alpha_2\alpha_4}{\beta_3^2} + \frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_4^2} \right);
\end{aligned}$$

$$\alpha_1 = x - \xi; \quad \alpha_2 = x + \xi; \quad \alpha_3 = y - \eta; \quad \alpha_4 = y + \eta;$$

$$\beta_1 = \alpha_1^2 + \alpha_3^2; \quad \beta_2 = \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \tag{2.2}$$

$$\beta_3 = \alpha_2^2 + \alpha_4^2; \quad \beta_4 = \alpha_1^2 + \alpha_4^2; \quad \gamma_1 = \alpha_1^2 - \alpha_3^2; \quad \gamma_2 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2; \quad \gamma_3 = \alpha_2^2 - \alpha_4^2; \quad \gamma_4 = \alpha_1^2 - \alpha_4^2.$$

Нагрузку p_0 принимаем меньшей предела текучести k , приводящую к образованию нелинейной зоны лишь в окрестности трещины, так что на бесконечности, согласно (1.4), (1.8), выполняются граничные условия $\bar{\sigma}_{22}|_{\infty} = \bar{p}_0$, $\bar{\sigma}_{11}|_{\infty} = \bar{\sigma}_{12}|_{\infty} = 0$, где $\bar{p}_0 = p_0/k$. На оси $y=0$ граничные условия формулируются в виде $\bar{\sigma}_{22}(x, 0) = 0$ для

$|x| \leq c$, $u_2(x, 0) = 0$ для $|x| \geq c$, $\bar{\sigma}_{12}(x, 0) = 0$ для $0 \leq |x| < \infty$, где $u_2(x, 0)$ – перемещение вдоль оси y .

На основе преобразования Фурье [24] решение сформулированной задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi)(1 - \xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\ \bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi)(1 + \xi y) e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\ \bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2y}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \xi e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi,\end{aligned}\quad (2.3)$$

где функция $\tilde{p}(\xi)$ определяется из дуальных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) \quad (0 \leq x \leq c), \\ \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi &= 0 \quad (x \geq c),\end{aligned}\quad (2.4)$$

при этом перемещение берега трещины определяется формулой

$$u_2(x, 0) = \frac{2(1 - \hat{\nu}_0)k}{\pi\mu_0} \int_0^{\infty} \tilde{p}(\xi) \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi \quad (0 \leq x \leq c). \quad (2.5)$$

Таким образом, приходим к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.1) – (2.4) относительно модифицированных напряжений $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$.

Учитывая, что трансформанта Фурье перемещения $u_2(x, 0)$ согласно (2.5) определяется формулой

$$\tilde{u}_2(\xi, 0) = \frac{(1 - \hat{\nu}_0)k}{\mu_0} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\xi}, \quad (2.6)$$

преобразуем уравнения (2.3) к виду

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(x, y) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)k} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] u_2(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{22}(x, y) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)k} \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] u_2(\eta, 0) d\eta; \\ \bar{\sigma}_{12}(x, y) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)k} \int_0^c R_3(x, y, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где функция $u_2(\eta, 0)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = \frac{2\mu_0}{\pi(1 - \hat{\nu}_0)k} \int_0^c R(x, \eta) u_2(\eta, 0) d\eta \quad (0 \leq x \leq c), \quad (2.8)$$

а ядра определяются формулами

$$R(x, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right); \quad R_1(x, y, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{x+\eta}{(x+\eta)^2 + y^2} - \frac{x-\eta}{(x-\eta)^2 + y^2} \right];$$

$$R_2(x, y, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{y(x+\eta)}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{y(x-\eta)}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\};$$

$$R_3(x, y, \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{(x+\eta)^2 - y^2}{[(x+\eta)^2 + y^2]^2} - \frac{(x-\eta)^2 - y^2}{[(x-\eta)^2 + y^2]^2} \right\}. \quad (2.9)$$

Если ввести безразмерное перемещение

$$\bar{u}(\eta, 0) = \frac{2\mu_0 u_2(\eta, 0)}{\pi(1-\hat{\nu}_0)kc}, \quad (2.10)$$

то соотношения (2.7) приводятся к виду

$$\bar{\sigma}_{11}(x, y) = \bar{\sigma}_{11}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) - yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta;$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x, y) = \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, y) - c \int_0^c [R_1(x, y, \eta) + yR_2(x, y, \eta)] \bar{u}(\eta, 0) d\eta;$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x, y) = \bar{\sigma}_{12}^*(x, y) - cy \int_0^c R_3(x, y, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta, \quad (2.11)$$

где функция $\bar{u}(\eta, 0)$, как следует из (2.8), удовлетворяет интегральному уравнению

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x, 0) = c \int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta \quad (0 \leq x \leq c). \quad (2.12)$$

§3. Дискретизация задачи.

Решение системы интегро-дифференциальных уравнений (2.1), (2.11), (2.12) можно осуществить только численными методами, для чего необходимо их преобразовать из континуальной в дискретную форму. С этой целью разобьем интервал $(0, c)$ на N частей, представив интеграл в (2.12) суммой

$$\int_0^c R(x, \eta) \bar{u}(\eta, 0) d\eta = \sum_{k=1}^N \bar{u}(x_k, 0) \int_{x_k - a_k}^{x_k + a_k} R(x, \eta) d\eta \quad \left(\sum_{k=1}^N 2a_k = c \right). \quad (3.1)$$

Тогда с учетом (2.9) приведем интегральное уравнение (2.12) относительно $\bar{u}(\eta, 0)$ к системе алгебраических уравнений

$$\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik} \bar{u}(x_k, 0) \quad (i=1, \dots, N), \quad (3.2)$$

где матрица I_{ik} с безразмерными элементами определяется формулой

$$I_{ik} = -\bar{a}_k \left[\frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \left(\bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}; i, k = 1, \dots, N \right). \quad (3.3)$$

Аналогично на основе (2.9), (2.11) получим представление решения в произвольной точке x_i, y_j области D_1 , включая границу, через суммы

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{22}(x_i, y_j) &= \bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) \bar{u}(x_k, 0); \\ \bar{\sigma}_{12}(x_i, y_j) &= \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^N I_{ijk}^{(3)} \bar{u}(x_k, 0), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где матрицы $I_{ijk}^{(1)}, I_{ijk}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} I_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right); \\ I_{ijk}^{(2)} &= r_5^2 \left[\frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ I_{ijk}^{(3)} &= \frac{r_5}{2} \left[\frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ r_1 &= \bar{x}_i + \bar{x}_k + \bar{a}_k; \quad r_2 = \bar{x}_i + \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_3 = \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{a}_k; \\ r_4 &= \bar{x}_i - \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_5 = \bar{y}_j. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Частное решение (2.1) представлено через двойные суммы по прямоугольным ячейкам области D_1 , т.е.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= \\ &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) + Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) + P_3(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \right\} \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= \\ &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left\{ \left[P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) - Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) - P_3(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \right\} \bar{a}_k \bar{b}_n; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= 4 \sum_{k,n=1}^{\infty} \left[S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) + \right. \\ &\quad \left. + S_3(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \right] \bar{a}_k \bar{b}_n \quad (r = 1, 2), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cP_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \quad Q_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = cQ_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \\ S_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) &= cS_r(x_i, y_j; x_k, y_n); \end{aligned}$$

$$P_3(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = c^2 P_3(x_i, y_j; x_k, y_n); \quad S_3(\bar{x}_i, \bar{y}_j; \bar{x}_k, \bar{y}_n) = c^2 S_3(x_i, y_j; x_k, y_n);$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_r(\bar{x}_k, \bar{y}_n) &= \frac{\bar{\sigma}_{r1}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)}{\bar{a}_k + \bar{a}_{k+1}} \left[\frac{h(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n)}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right] + \\ &+ \frac{\bar{\sigma}_{r2}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)}{\bar{b}_n + \bar{b}_{n+1}} \left[\frac{h(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1}) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1})}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right]; \end{aligned}$$

$$\bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) = \hat{V}_1(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{\sigma}_{rr}(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \quad (r=1, 2). \quad (3.7)$$

При этом безразмерные координаты и величины определяются отношениями

$$\begin{aligned} \bar{x}_i = \frac{x_i}{c}; \quad \bar{y}_j = \frac{y_j}{c}, \quad \bar{x}_k = \frac{x_k}{c}; \quad \bar{y}_n = \frac{y_n}{c}; \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{c}, \quad \bar{b}_n = \frac{b_n}{c}, \\ (i, j = 0, 1, \dots; k, n = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где a_k, b_n – половины размеров прямоугольных ячеек области D_1 с координатами центров x_k, y_n .

Если принять равномерное разбиение области D_1 с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, т.е.

$$a_k = b_n = a = \frac{1}{2N} \quad (k, n = 1, 2, \dots), \quad (3.9)$$

то безразмерные координаты \bar{x}_i, \bar{y}_j в области D_1 могут быть представлены в виде

$$\bar{x}_i = (2i-1)a; \quad \bar{y}_j = (2j-1)a \quad (i, j = 1, 2, \dots). \quad (3.10)$$

Границе $\bar{y} = 0$ соответствует значение индекса $j = 1/2$. Подставляя (3.9), (3.10) в (3.3), (3.5), получаем

$$I_{ik} = -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{4(i-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} \right] \quad (i, k = 1, \dots, N), \quad (3.11)$$

а также формулы:

$$\begin{aligned} I_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2a} \left(\frac{s_1}{s_1^2 + s_5^2} - \frac{s_2}{s_2^2 + s_5^2} + \frac{s_3}{s_3^2 + s_5^2} - \frac{s_4}{s_4^2 + s_5^2} \right); \\ I_{ijk}^{(2)} &= \frac{s_5^2}{a} \left[\frac{s_1}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right]; \\ I_{ijk}^{(3)} &= \frac{s_5}{2a} \left[\frac{s_1^2 - s_5^2}{(s_1^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_2^2 - s_5^2}{(s_2^2 + s_5^2)^2} + \frac{s_3^2 - s_5^2}{(s_3^2 + s_5^2)^2} - \frac{s_4^2 - s_5^2}{(s_4^2 + s_5^2)^2} \right]; \\ s_1 &= 2(i+k)-1; \quad s_2 = 2(i+k)-3; \quad s_3 = 2(i-k)+1; \\ s_4 &= 2(i-k)-1; \quad s_5 = 2j-1 \quad (k = 1, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Частное решение (3.6) с учетом (3.9), (3.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \bar{P}_3(i, j; k, n) g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{22}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) - \bar{P}_3(i, j; k, n) g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{12}^*(x_i, y_j) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \bar{S}_r(i, j; k, n) g_r(k, n) + \bar{S}_3(i, j; k, n) g_3(k, n); \quad (r=1,2), \quad (3.13)\end{aligned}$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned}\bar{P}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\beta}_3} + \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\beta}_4} \right); \\ \bar{P}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1} + \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3} - \frac{\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4} \right); \\ \bar{P}_3(i, j; k, n) &= \frac{1}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\ \bar{Q}_1(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\ \bar{Q}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{2\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(-\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\ \bar{S}_1(i, j; k, n) &= \\ &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(-\frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_3\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_4\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1^2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\ \bar{S}_2(i, j; k, n) &= -\frac{1-2\hat{\nu}_0}{4\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_1}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_3}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\gamma}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3^2}{\bar{\beta}_2^2} - \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_3^2} - \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4^2}{\bar{\beta}_4^2} \right); \\ \bar{S}_3(i, j; k, n) &= \frac{1}{\pi(1-\hat{\nu}_0)} \left(\frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_1^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3}{\bar{\beta}_2^2} + \frac{\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_3^2} + \frac{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_4}{\bar{\beta}_4^2} \right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1 &= i-k; \quad \bar{\alpha}_2 = i+k-1; \quad \bar{\alpha}_3 = j-n; \quad \bar{\alpha}_4 = j+n-1; \quad \bar{\beta}_1 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_3^2; \\ \bar{\beta}_3 &= \bar{\alpha}_2^2 + \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\beta}_4 = \bar{\alpha}_1^2 + \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\gamma}_1 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\gamma}_2 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_3^2; \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{\alpha}_2^2 - \bar{\alpha}_4^2; \quad \bar{\gamma}_4 = \bar{\alpha}_1^2 - \bar{\alpha}_4^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_r(k, n) &= \\ &= \bar{\sigma}_{r1}(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \left[\frac{h(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_{k+1}, \bar{y}_n)}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right] + \bar{\sigma}_{r2}(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \left[\frac{h(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1}) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_{n+1})}{h(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \bar{\mu}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)} - 1 \right]; \\ g_3(k, n) &= \bar{f}_3(\bar{x}_k, \bar{y}_n) \quad (r=1, 2).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Таким образом, при равномерном разбиении области D_1 на квадратные ячейки задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений (3.2), (3.4), (3.13) относительно переменных $\bar{u}(\bar{x}_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$, где коэффициенты определяются формулами (3.11), (3.12), (3.14), а безразмерный модуль сдвига $\bar{\mu}$ связан с напряжениями $\bar{\sigma}_{ij}$ зависимостями (2.14) – (2.16). Полученную систему можно упростить, исключив переменные $\bar{u}(\bar{x}_k, 0)$, $\bar{\sigma}_{ij}^*(\bar{x}_k, \bar{y}_n)$. Для этого представим уравнения (3.2) в виде

$$\bar{u}(\bar{x}_i, 0) = \sum_{k=1}^N I_{ik}^{-1} [\bar{p}_0 + \bar{\sigma}_{22}^*(\bar{x}_k, 0)] \quad (i=1, \dots, N),\tag{3.15}$$

где I_{ik}^{-1} – матрица, обратная к I_{ik} , и воспользуемся представлением

$$\bar{\sigma}_{22}^*(\bar{x}_i, 0) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, 1/2; k, n) - \bar{Q}_r(i, 1/2; k, n)] \bar{g}_r(k, n) - \bar{P}_3(i, 1/2; k, n) \bar{g}_3(k, n) \},\tag{3.16}$$

вытекающим из (3.13), (3.14). Тогда из (3.4), (3.13), (3.15), (3.16) следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \\ &= -\bar{p}_0 T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) + \bar{Q}_r(i, j; k, n) - E_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \\ &\quad + [\bar{P}_3(i, j; k, n) + E_3(i, j; k, n)] g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \bar{p}_0 [1 - T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)] + \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, j; k, n) - \bar{Q}_r(i, j; k, n) - L_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \\ &\quad + [-\bar{P}_3(i, j; k, n) + L_3(i, j; k, n)] g_3(k, n) \}; \\ \bar{\sigma}_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\bar{p}_0 T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{S}_r(i, j; k, n) - M_r(i, j; k, n)] g_r(k, n) + \\ &\quad + [\bar{S}_3(i, j; k, n) + M_3(i, j; k, n)] g_3(k, n) \quad (r=1, 2),\end{aligned}\tag{3.17}$$

где введены такие обозначения:

$$T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} - I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1}, \quad T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \sum_{k,n=1}^N (I_{ijk}^{(1)} + I_{ijk}^{(2)}) I_{kn}^{-1};$$

$$T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \sum_{k,n=1}^N I_{ijk}^{(3)} I_{kn}^{-1};$$

$$E_r(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} [\bar{P}_r(q, 1/2; k, n) - \bar{Q}_r(q, 1/2; k, n)];$$

$$L_r(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} [\bar{P}_r(q, 1/2; k, n) - \bar{Q}_r(q, 1/2; k, n)];$$

$$M_r(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} [\bar{P}_r(q, 1/2; k, n) - \bar{Q}_r(q, 1/2; k, n)];$$

$$E_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} - I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \bar{P}_3(q, 1/2; k, n);$$

$$L_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N (I_{ijp}^{(1)} + I_{ijp}^{(2)}) I_{pq}^{-1} \bar{P}_3(q, 1/2; k, n);$$

$$M_3(i, j; k, n) = \sum_{p,q=1}^N I_{ijp}^{(3)} I_{pq}^{-1} \bar{P}_3(q, 1/2; k, n).$$

Следует отметить, что в уравнениях (3.17) суммирование распространяется только на область нелинейного деформирования материала, где $g_r(k, n) \neq 0$, $g_3(k, n) \neq 0$. При этом слагаемые $-\bar{p}_0 T_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, $\bar{p}_0 [1 - T_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)]$, $-\bar{p}_0 T_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ представляют собой решение линейной задачи для случая $\bar{\mu} = 1$.

Для вычисления напряжений $\bar{\sigma}_{11}(\bar{x}_i, 0)$, $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0)$ на оси x при вычисленных напряжениях $\bar{\sigma}_{11}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$, $\bar{\sigma}_{12}(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ в области необходимо в (3.17) положить $j = 1/2$. В результате получим

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_{11}(\bar{x}_i, 0) = \\ & = -\bar{p}_0 T_{11}(\bar{x}_i, 0) + \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, 1/2; k, n) + \bar{Q}_r(i, 1/2; k, n) - E_r(i, 1/2; k, n)] g_r(k, n) + \\ & \quad + [P_3(i, 1/2; k, n) + E_3(i, 1/2; k, n)] g_3(k, n) \}; \\ & \bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0) = \\ & = \bar{p}_0 [1 - T_{22}(\bar{x}_i, 0)] + \sum_{k,n=1}^{\infty} \{ [\bar{P}_r(i, 1/2; k, n) - \bar{Q}_r(i, 1/2; k, n) - L_r(i, 1/2; k, n)] g_r(k, n) + \\ & \quad + [-P_3(i, 1/2; k, n) + L_3(i, 1/2; k, n)] g_3(k, n) \}. \end{aligned}$$

§4. Численные результаты.

На основе исходных соотношений и построенных нелинейных алгебраических уравнений проведено исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в пластине из дюралюминия с постоянными [1] $K = 61400$ МПа, $\mu_0 = 26720$ МПа, $\sigma_0 = 330$ МПа.

Нелинейность деформирования описывается уравнениями (1.1) – (1.3) для значений $\mu' = 0$, $\mu' = 0,1$, $\mu' = -0,1$, относящихся ко второму участку модуля сдвига (1.3).

Численное решение задачи осуществлено путем разбиения половины длины трещины на $N = 200$ одинаковых частей и равномерного разбиения области D_1 с одинаковыми размерами ячеек вдоль обеих осей, равными $2a = 1/N = 0,005$ в безразмерных координатах. В случае линейной задачи это приводит к решению системы 200 линейных уравнений относительно 200 неизвестных $\bar{u}(x_i, 0)$, которое определяется формулой (3.15) при $\bar{\sigma}_2^*(x_k, 0) = 0$.

В случае нелинейной задачи шаг равномерного разбиения должен быть таким, чтобы выбранное число квадратных ячеек покрывало область нелинейного деформирования у вершины трещины, размеры которой зависят от значения действующей нагрузки \bar{p}_0 . В рассматриваемой задаче принято, что нагрузка задана в интервале $0,3 \leq \bar{p}_0 \leq 0,5$. Для покрытия области нелинейного деформирования использовано 30×24 квадратных ячеек, что приводит к решению системы 2160 нелинейных алгебраических уравнений (3.17) относительно 2160 неизвестных $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$. При решении системы нулевым приближением принято решение соответствующей линейной задачи, которое описывается первыми слагаемыми правой части нелинейной системы уравнений (3.17).

Основной целью численного решения задачи было изучение характера шейки, образующейся в окрестности вершины трещины, которая в безразмерном виде определяется, согласно (1.13), ее глубиной

$$\bar{d} = 1 - h/h_0. \quad (4.1)$$

На рис. 1 – 4 представлены зависимости глубины шейки \bar{d} от координат $\bar{x} - 1$, \bar{y} при воздействии нагрузки $\bar{p}_0 = 0,5$, где черной жирной линией показана вершина трещины. На рис. 1, 3, 4 представлены соответствующие зависимости для $\bar{\mu}' = 0$, $\bar{\mu}' = -0,1$, $\bar{\mu}' = 0,1$ при действующей нагрузке $\bar{p}_0 = 0,5$. На рис. 2 представлена зависимость глубины шейки от координат для $\bar{\mu}' = 0$ после снятия нагрузки $\bar{p}_0 = 0,5$, т.е. остаточная глубина шейки.

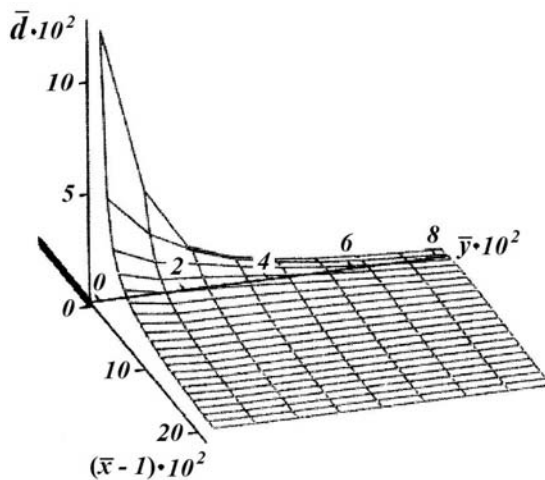


Рис. 1

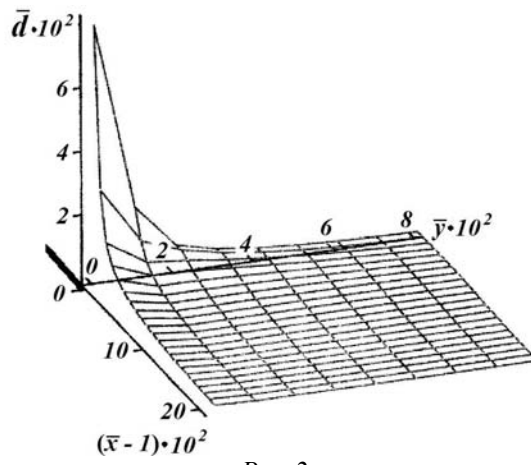


Рис. 2

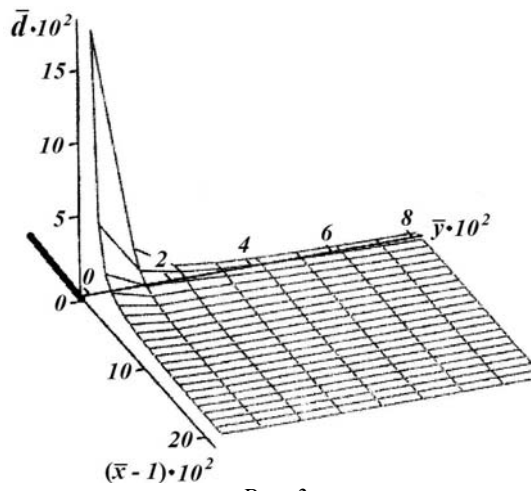


Рис. 3

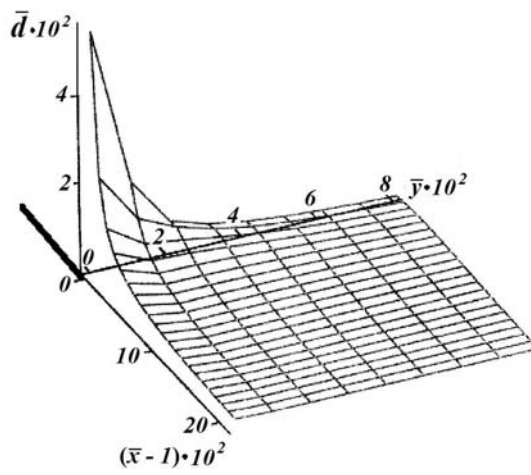


Рис. 4

Необходимо отметить, что зоны пластических деформаций и кривые зависимостей нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0)$ от координаты \bar{x} практически не зависят от образования шейки и имеют вид, приведенный в [20].

На рис. 5 приведены, согласно (2.10), кривые остаточного раскрытия трещины у вершины

$$\bar{v}(\bar{x}, 0) = \bar{u}(\bar{x}, 0) - \bar{u}_0(\bar{x}, 0) \quad (4.2)$$

для нагрузок $\bar{p}_0 = 0,3; 0,3; 0,4; 0,45; 0,5$, где $\bar{u}_0(\bar{x}, 0)$ – линейно-упругое перемещение берега трещины. Как видим, кривые имеют максимум у вершины трещины, который удаляется от вершины с увеличением нагрузки.

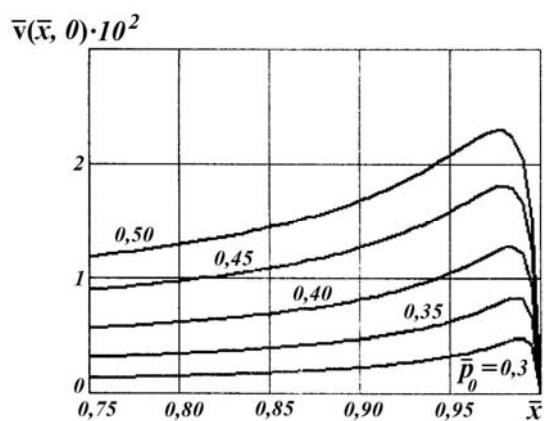


Рис. 5

На рис. 6 приведены кривые остаточного раскрытия трещины (4.3) для нагрузки $\bar{p}_0 = 0,5$ при $\bar{\mu}' = 0$, $\bar{\mu}' = -0,1$, $\bar{\mu}' = 0,1$. Как видим, остаточное раскрытие трещины уменьшается для материала с упрочнением и увеличивается при наличии ниспадающего участка диаграммы деформирования. Это вполне соответствует физическим представлениям о процессе нелинейного деформирования в окрестности вершины трещины.

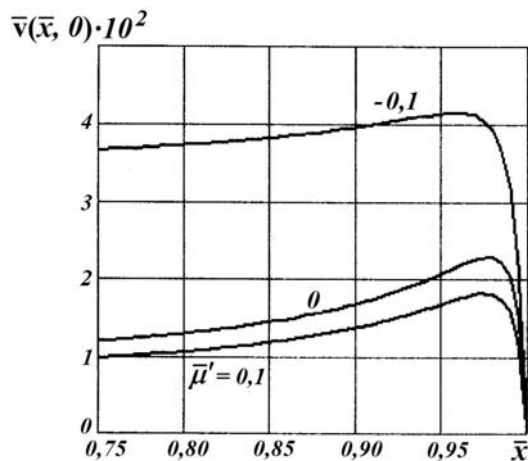


Рис. 6

Наличие максимального раскрытия трещины на некотором расстоянии от ее вершины при нелинейном деформировании, которое всегда имеет место для реальных материалов, может служить основанием принять его предельное значение в качестве критерия разрушения. Достоверность такой гипотезы может быть установлена экспериментальным путем.

Заключення.

Высокая концентрация напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины в пластине при растяжении приводит к образованию шейки.

Исследование задачи об образовании шейки в вершине трещины осуществлено на основе уравнений плоского напряженного состояния для пластины переменной толщины, материал которой следует физически нелинейному деформированию.

Применением преобразования Фурье с последующей дискретизацией уравнений задача об образовании шейки сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Исследовано распределение глубины шейки и раскрытие трещины для диаграмм идеального упруго-пластического деформирования, линейного упрочнения и линейно ниспадающего участка диаграммы.

Р Е З Ю М Е . Дано розв'язок плоскої нелінійної задачі про розтяг пластини з тріщиною при умові утворення шийки в вершині тріщини. Діаграму деформування прийнято кусково-лінійною з постійним модулем об'ємного стиску. Перетворенням Фур'є і дискретизацією задачу зведено до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Досліджено розподіл глибини шийки біля вершини тріщини і вплив нелінійності на розкриття тріщин біля вершини.

1. Гуляев А.П. Металловедение. – М.: Металлургия, 1986. – 542 с.
2. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 487 с. – (Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах; Т. 1).
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
4. Черепанов Г.П. Пластические линии разрыва в конце трещины // Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 4. – С. 720 – 728.
5. Amar C.G. Delamination – a damage mode in composite structures // Engng. Frac. Mech – 1988. – **29**, N 5. – P. 557 – 584.
6. Composite Materials. V. 1-8/ Ed by L.J.Broutman and R.H.Krock. – New York and London: Academic Press, 1973 – 1976.
7. Elastodynamic crack problems / Ed. G.C.Sih. – Leyden: Noordhoff, 1977. – 423 p.
8. Evans A.G. and Hutchinson J.W. On the mechanics of delamination and spalling in compressed films // Int. J. Solids Struct. – 1984. – **20**, N 5. – P. 455 – 466.
9. Fracture. An advance treatise. V. 1 – 7 / Liebowitz H., Chief Editor. – New York and London: Academic Press, 1968 – 1972.
10. Garg A.C. Intralaminar and interlaminar fracture in graphite / epoxy laminates // Engng. Frac. Mech. – 1986. – **23**, N 4. – P. 719 – 733.
11. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. – 1920. – **A221**. – P. 163 – 198.
12. Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V and Men'shikov V.A. Tree-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **48**, N 1. – P. 1 – 61.
13. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
14. Hutchinson J.W., Mear M., Rice J.R. Crack paralleling an interface between dissimilar material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1987. – **54**, N 4. – P. 828 – 832.
15. Irwin G.P. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech., 1957. – **24**, N 4. – P. 361 – 364.
16. Kaminsky A.A., Kurchakov E.E. Modeling a Crack with a Fracture Process Zone in a Nonlinear Elastic Body // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 552 – 562.
17. Kipnis L.A., Polishchuk T.V. Analysis of the Plastic Zone at the Corner Point of Interface // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 2. – P. 159 – 168.
18. Khoroshun L.P. Integral Relations in the Vicinity of a Crack Tip // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 8. – P. 601 – 607.
19. Khoroshun L.P. On the Correctness of Energy Criterion in Fracture Mechanics // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 10. – P. 799 – 805.
20. Khoroshun L.P. Discretization of the plane problem for a cracked body with nonlinear stress-strain diagram under tension // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 11. – P. 1238 – 1252.
21. Khoroshun L.P., Levchuk O.I. Distribution around Cracks in Linear Hardening Materials Subject to Tension: Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 128 – 140.
22. Orowan E.O. Fundamentals of brittle behavior of metals // Fatigue and Fracture of Metals. – New York: Wiley, 1950. – P. 139 – 167.
23. Perez N. Fracture Mechanics. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 299 p.
24. Sneddon J.N., Berry D.S. The classical theory of elasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 219 p.

Поступила 28.05.2013

Утверждена в печать 19.02.2015