Я. Я. Рущицкий

О ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЕ В УПРУГОМ ТЕЛЕ, ДЕФОРМИРУЮЩЕМСЯ В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Abstract. The linear and nonlinear wave equations, describing the propagation of a surface wave along the free plane boundary of elastic half-space are studied within the framework of assumption that in the half-space the state of anti-plane deformation is realized. The nonlinearity is introduced by the five-constant Murnaghan potential, which includes both the geometrical and the physical nonlinearities. Four cases of surface waves are considered: the harmonic and simple wave within the linear approach, the harmonic and simple waves within the nonlinear approach. It is shown that in all the cases the contradiction between the initial assumptions and final result arises. This can be treated as fact that within the analyzed statements the surface wave can not be described and therefore such a wave is impossible.

Key words: plane strain state, anti-plane strain state, surface elastic wave, Murnaghan elastic potential, linear and nonlinear wave equations, absence of surface wave solution.

Введение.

Как известно [1, 2, 7, 11, 18, 22, 23], теория упругости рассматривает механическое поведение (равновесие, движение, устойчивость) тел, деформирующихся упруго. Под телом обычно понимают объемный кусок материала определенной формы с размерами, примерно одинаковыми (соизмеримыми) в трех направлениях. Поэтому, как правило, теория упругости изучает поведение тел в так называемой трехмерной постановке, когда в математических моделях сплошной среды (материала) механические поля (поля перемещений, деформаций, напряжений) зависят от всех трех координат трехмерного пространства. Однако существуют такие классы задач теории упругости, когда трехмерную постановку можно заменить более простой двухмерной или одномерной. В классической линейной теории упругости выделяют класс, который характерен для тел, протяженных в каком-то одном направлении (стержни, балки и т.п.) и класс двухмерных задач, в которых реализуется состояние плоской деформации или состояние антиплоской деформации.

Плоскую деформацию определяют как такую, которая характеризуется зависимостью перемещений и деформаций только от двух пространственных координат и их отсутствием в направлении третьей координаты (к примеру, $u_3(x_1, x_2, t) = 0$, $\varepsilon_{3k}(x_1, x_2, t) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$). Тогда симметричный тензор деформации включает лишь три ненулевые и не зависимые $(\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki})$ компоненты и имеет поэтому более простой вид

$$\varepsilon\left(x_1,x_2,t\right)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}\left(x_1,x_2,t\right) & \varepsilon_{12}\left(x_1,x_2,t\right) & 0\\ \varepsilon_{21}\left(x_1,x_2,t\right) & \varepsilon_{22}\left(x_1,x_2,t\right) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\quad \varepsilon_{mn}=\frac{1}{2}\left(u_{m,n}+u_{n,m}\right);\ n,m=1,2. \qquad (1)$$

В задачах о поверхностных волнах состояние плоской деформации предполагается, в частности, при исследовании волн Рэлея и Стоунли.

Антиплоскую деформацию определяют как такую, которая характеризуется: зависимостью перемещения и деформаций только от двух пространственных координат; только одним перемещением (к примеру, $u_3\left(x_1,x_2,t\right)\neq 0, u_{1(2)}\left(x_1,x_2,t\right)=0$) и двумя сдвиговыми деформациями в одном из трех направлений (к примеру, $\varepsilon_{31}\left(x_1,x_2,t\right)$ и $\varepsilon_{32}\left(x_1,x_2,t\right)$). Тогда симметричный тензор деформации включает лишь две ненулевые и независимые $\left(\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}\right)$ компоненты и имеет поэтому один из самых простых видов

$$\varepsilon\left(x_1,x_2,t\right)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \varepsilon_{13}\left(x_1,x_2,t\right)\\ 0 & 0 & \varepsilon_{23}\left(x_1,x_2,t\right)\\ \varepsilon_{31}\left(x_1,x_2,t\right) & \varepsilon_{32}\left(x_1,x_2,t\right) & 0\end{pmatrix};\quad \varepsilon_{3n}=\frac{1}{2}\left(u_{3,n}+u_{n,3}\right)\ (n=1,2). \qquad (2)$$

В задачах о поверхностных волнах состояние антиплоской деформации предполагается, в частности, при исследовании волны Лява.

§1. Анализ возможности описания гармонической поверхностной волны в рамках линейного подхода.

Рассмотрим далее возможности линейного подхода при анализе поверхностной волны в полуплоскости $Ox_1x_2\ \ x_1\leq 0$ в рамках описания процесса деформирования антиплоской деформацией. Речь идет о возможности распространения гармонической плоской вертикально поляризованной волны перемещения в направлении Ox_2 с амплитудой $\widehat{u}_3\left(x_1\right)$ и волновым числом k

$$u_3=\widehat{u}_3\left(x_1\right)e^{i\left(kx_2-\omega t\right)}. \qquad (3)$$

Ставится требование, что волна локализована около свободной от напряжений границы нижней полуплоскости $x_1=0$, т.е. имеет на этой граничной линии максимальную амплитуду и затухает существенно при увеличении абсолютных значений x_1. В этой линейной задаче только два компонента тензора напряжений отличны от нуля

$$t_{m3}=\mu u_{3,m}\ \left(m=1,2\right). \qquad (4)$$

Из трех уравнений движения в данной задаче два тождественно равны нулю, а третье имеет вид

$$t_{13,1}+t_{23,2}=\rho\ddot{u}_3. \qquad (5)$$

Подстановка представлений (3) в уравнение (5) дает следующее нелинейное волновое уравнение относительно перемещения u_3:

$$\rho\ddot{u}_3-\mu\left(u_{3,11}+u_{3,22}\right)=0. \qquad (6)$$

Решение (3) удовлетворяет уравнение (6) при условии, что амплитудный множитель является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\left(\tilde{u}_3\right)''_{,11}+k^2\left[\left(v/v_T\right)^2-1\right]\tilde{u}_3=0,\quad v_T=\sqrt{\mu/\rho}. \qquad (7)$$

Решение уравнения (7)

$$\tilde{u}_3\left(x_1\right) = Ae^{-\sqrt{\left[1-\left(v/v_T\right)^2\right]}\,kx_1} \tag{8}$$

должно описывать затухание при отходе от границы $x_1 = 0$ и поэтому в (8) налагается условие положительности корня и подкоренного выражения

$$\beta^2 = 1-\left(v/v_T\right)^2 > 0\,. \tag{9}$$

Из условия (9) следует, что скорость линейной волны (3) должна быть меньше скорости плоской вертикальной поперечной волны.

Амплитудный множитель A в (8) постоянен и неизвестен. Поскольку волна (3) является свободной поверхностной волной, то множитель должен оставаться произвольным [9]. Также неизвестны фазовая скорость v или волновое число k. Они могут быть получены из условия удовлетворения граничному условию – условию отсутствия на свободной границе компонента напряжения t_{13}, т. е.

$$t_{13}\left(x_1 = 0, x_2\right) = 0 \tag{10}$$

или

$$\mu\tilde{u}_{3,1}\left(x_1 = 0\right)e^{i\left(kx_2-\omega t\right)} = 0\,. \tag{11}$$

Подстановка предполагаемого решения (3) или (8) в условие (10) дает

$$-\mu A\sqrt{\left[1-\left(v/v_T\right)^2\right]}e^{i\left(kx_2-\omega t\right)} = 0\,. \tag{12}$$

Поскольку условие (12) выполняется только при равенстве нулю подкоренного выражения и оно противоречит условию затухания волны (9), то, следовательно, представление (3) не является решением волнового уравнения (6) при граничных условиях (11) и, таким образом, использованный линейный подход не описывает движение гармонической поверхностной волны перемещения в виде (3).

§2. Основные соотношения теории нелинейного упругого деформирования.

Изменим подход и введем дополнительно нелинейность в описание процесса деформирования. Предположим, что материал деформируется согласно модели Мурнагана [2, 4, 7, 9, 11, 12]. Тогда свойства материала включают плотность ρ и пять упругих постоянных λ, μ, A, B, C. В теории упругости введение нелинейности имеет следствием различение конфигурации тела в недеформируемом и деформируемом состояниях, а также различение тензоров деформации и напряжений. Как правило, потенциал Мурнагана записывается для параметров недеформированного состояния.

В рассматриваемом случае антиплоской деформации обычно используемые в описании потенциала Мурнагана градиенты перемещений $u_{i,k}$, симметричный тензор деформаций Коши – Грина ε_{nm} и несимметричный тензор напряжений Кирхгофа t_{ik} включают не все компоненты. Прежде всего, только два $u_{3,1}, u_{3,2}$ из девяти компонентов градиента перемещений $u_{i,k}$ будут отличны от нуля. Поскольку тензор ε_{nm} задается формулой

$$\varepsilon_{nm} = \frac{1}{2}\left(u_{n,m} + u_{m,n} + u_{i,n}u_{i,m}\right), \tag{13}$$

то его компоненты можно вычислить по этой формуле

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}\left(u_{1,1}u_{1,1} + u_{2,1}u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,1}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{3,1}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}\left(u_{1,2}u_{1,2} + u_{2,2}u_{2,2} + u_{3,2}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{3,2}\right)^2;$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}\left(u_{3,3} + u_{3,3} + u_{k,3}u_{k,3}\right) = 0; \qquad (14)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}\right) = \frac{1}{2}u_{3,1}u_{3,2};$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}u_{3,1};$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}\right) = \frac{1}{2}u_{3,2}.$$

Соответствующий поставленной задаче потенциал Мурнагана имеет вид

$$W = \frac{1}{4}\lambda\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{2}\mu\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(u_{3,1}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(u_{3,2}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(u_{3,1}u_{3,2}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{24}A\left\{3\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^2 + \left(u_{3,1}\right)^6 + \left(u_{3,2}\right)^6 + 3\left(u_{3,1}\right)^2\left(u_{3,2}\right)^2\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{8}B\left[2\left(u_{3,1}\right)^2 + 2\left(u_{3,2}\right)^2 + \left(u_{3,1}\right)^4 + \left(u_{3,2}\right)^4 + \left(u_{3,1}u_{3,2}\right)^2\right]\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right] + \qquad (15)$$

$$+\frac{1}{24}C\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]^3.$$

Особенностью представления (15) является присутствие в потенциале лишь четных степеней двух компонентов градиента перемещения $u_{3,1}, u_{3,2}$: присутствуют только вторые степени (соответствующие линейной теории упругости), четвертые степени (соответствующие кубически нелинейной теории упругости) и шестые степени (соответствующие нелинейности пятого порядка).

Вид тензора напряжений определяется по формуле $t_{ik} = \left(\partial W / \partial u_{k,i}\right)$. Поскольку в записи потенциала присутствуют лишь два из девяти компонентов градиентов перемещений, то в итоге компонентов тензора напряжений будет только два:

$$t_{13} = \mu u_{3,1} + \left(\lambda + \mu\right)\left[\left(u_{3,1}\right)^3 + \frac{1}{2}u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{4}A\left\{2u_{3,1}\left[\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right] + \left(u_{3,1}\right)^5 + u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^2\left[2\left(u_{3,1}\right)^2 + \left(u_{3,2}\right)^2\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}B\left\{4\left(u_{3,1}\right)^3 + 4u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^2 + 3\left(u_{3,1}\right)^5 + 4\left(u_{3,1}\right)^3\left(u_{3,2}\right)^2 + 2u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^4\right\} +$$

$$+\frac{1}{4}Cu_{3,1}\left[\left(u_{3,1}\right)^2+\left(u_{3,2}\right)^2\right]^2; \qquad (16)$$

$$t_{23}=\mu u_{3,2}+(\lambda+\mu)\left[\left(u_{3,2}\right)^3+\frac{1}{2}u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{4}A\left\{\left(u_{3,2}\right)^5+u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^2\left[\left(u_{3,1}\right)^2+2\left(u_{3,2}\right)^2\right]+2u_{3,2}\left[\left(u_{3,1}\right)^2+\left(u_{3,2}\right)^2\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}B\left\{4\left(u_{3,2}\right)^3+4u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^2+3\left(u_{3,2}\right)^5+4\left(u_{3,2}\right)^3\left(u_{3,1}\right)^2+2u_{3,2}\left(u_{3,1}\right)^4\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}Cu_{3,2}\left[\left(u_{3,1}\right)^2+\left(u_{3,2}\right)^2\right]^2.$$

Подстановка представлений компонентов тензора напряжений (4) в уравнение движения (5) дает следующее нелинейное волновое уравнение:

$$\rho\ddot{u}_3-\mu\left(u_{3,11}+u_{3,22}\right)= \qquad (17)$$

$$=T_1\left(u_{3,1}\right)^2u_{3,11}+T_2\left(u_{3,2}\right)^2u_{3,11}+T_1\left(u_{3,2}\right)^2u_{3,22}+T_2\left(u_{3,1}\right)^2u_{3,22}+4T_2u_{3,1}u_{3,2}u_{3,12}+$$

$$+F_1\left(u_{3,1}\right)^4u_{3,11}+F_1\left(u_{3,2}\right)^4u_{3,22}+F_2\left(u_{3,2}\right)^4u_{3,11}+F_2\left(u_{3,1}\right)^4u_{3,22}+$$

$$+F_3\left(u_{3,1}\right)^3u_{3,2}u_{3,12}+F_3u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^3u_{3,12}+F_4\left(u_{3,1}\right)^2\left(u_{3,2}\right)^2u_{3,11}+F_4\left(u_{3,2}\right)^2\left(u_{3,1}\right)^2u_{3,22},$$

в котором введены обозначения

$$T_1=\frac{3}{4}\left[4(\lambda+\mu)+A+2B\right];\qquad T_2=\frac{1}{2}\left[2\lambda+\mu+A+B\right];$$

$$F_1=\frac{5}{4}(A+B+C);\ F_2=A+\frac{1}{4}B+\frac{1}{4}C;\ F_3=2A+\frac{3}{2}B+2C;\ F_4=\frac{3}{4}(2A+B+2C).$$

Уравнение (17) содержит лишь нелинейные составляющие третьего (пять составляющих) и пятого (восемь составляющих) порядков. Такая особенность уравнений является следствием присутствия нелинейных составляющих по причине учета нелинейности в соотношениях Коши и потенциале Мурнагана и отсутствия составляющих четных порядков (второго и четвертого) по причине постановки задачи о поперечных волнах. Аналогичная ситуация отсутствия составляющих второго порядка возникала ранее при исследовании поперечных плоских волн в третьем приближении [5, 14].

Сохраним далее в уравнении (17) лишь кубическую нелинейность, что допустимо при условии малости градиентов перемещений

$$\rho\ddot{u}_3-\mu\left(u_{3,11}+u_{3,22}\right)= \qquad (18)$$

$$=T_1\left(u_{3,1}\right)^2u_{3,11}+T_2\left(u_{3,2}\right)^2u_{3,11}+T_1\left(u_{3,2}\right)^2u_{3,22}+T_2\left(u_{3,1}\right)^2u_{3,22}+4T_2u_{3,1}u_{3,2}u_{3,12}.$$

Соответствующие выражения для напряжений имеют вид

$$t_{13}=\mu u_{3,1}+\left(\lambda+\mu+\frac{1}{2}A+B\right)\left[\left(u_{3,1}\right)^3+\frac{1}{2}u_{3,1}\left(u_{3,2}\right)^2\right]; \qquad (19)$$

$$t_{23} = \mu u_{3,2} + \left(\lambda + \mu + \frac{1}{2} A + B \right) \left[\left(u_{3,2} \right)^3 + \frac{1}{2} u_{3,2} \left(u_{3,1} \right)^2 \right].$$

Если предположить, что перемещения достаточно малы, чтобы считать подход геометрически линейным (и в то же время физически нелинейным), то уравнения (18), (19) несколько упрощаются: в уравнении (18) упрощаются выражения для постоянных

$$T_1 = (3/4)(A + 2B); \; T_2 = (1/2)(A + B);$$

уравнение (19) упрощается к виду

$$t_{i3} = \mu u_{3,1} + \frac{1}{2}(A + 2B) \left[\left(u_{3,i} \right)^3 + \frac{1}{2} u_{3,i} \left(u_{3,j} \right)^2 \right] \quad (i, j = 1; 2; i + j = 3). \tag{20}$$

§3. Анализ возможности описания гармонической поверхностной волны в рамках нелинейного подхода.

Поскольку изучается задача о возможности распространения поверхностной волны перемещения, то уравнение (18) должно рассматриваться вместе с граничным условием на поверхности (прямой линии). В данном случае это условие отсутствия напряжения t_{13} на линии, ограничивающей полуплоскость (см. представленную выше линейную задачу; в частности, соотношения (11)). В принятой здесь нелинейной постановке граничное условие уже нелинейное и имеет вид

$$t_{13}(x_1 = 0, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \mu u_{3,1} + (\lambda + \mu)\left(u_{3,1}\right)^3 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\mu \right) u_{3,1} \left(u_{3,2} \right)^2 \\ + \left(\frac{1}{2} A + B \right) \left[\left(u_{3,1} \right)^3 + u_{3,1} \left(u_{3,2} \right)^2 \right] \end{array} \right\}_{x_1 = 0} =$$

$$= \mu u_{3,1}^o \left\{ 1 + \frac{2(\lambda + \mu) + A + 2B}{2\mu} \left(u_{3,1}^o \right)^2 + \frac{2\lambda + \mu + A + 2B}{2\mu} \left(u_{3,2}^o \right)^2 \right\} = 0 \, ;$$

$$\left(u_{3,n}^o = u_{3,n}(x_1 = 0, x_2) \right). \tag{21}$$

Заметим, что подобная к рассматриваемой здесь нелинейная задача, основанная на ином описании нелинейности деформирования полупространства, рассмотрена в работе Можаева [12] В ней анализировалось более простое по сравнению с (18) уравнение. Автором приведено доказательство существования нелинейной поверхностной волны. В работе [11] профессор Можен предложил продолжить классическую традицию обозначения поверхностных волн именами ученых-первооткрывателей (волны Релэя, Лява, Стоунли, Гуляева – Блюстейна и т.д.), и, в частности, предложил такую волну называть волной Можаева.

Также заметим, что задача (18),(19) отличается от нелинейных задач, обобщающих линейные задачи о волнах Рэлея, Лява, Стоунли и т.д., отсутствием классического линейного приближения. Поэтому обычно применяемый в таких задачах метод последовательных приближений к задаче (18), (19) неприменим, поскольку наличие линейного приближения является в этом методе определяющим фактором. Итак, анализ задачи (18), (19) требует нетрадиционного подхода.

Прежде всего, примем классическое предположение, что решение уравнения (18) имеет вид гармонической волны, распространяющейся в направлении Ox_2 и имеющей затухающую при отходе от граничной линии амплитуду $\hat{u}_3(x_1)$

$$u_3(x_1,x_2,t)=\hat{u}_3(x_1)e^{i(kx_2-\omega t)}, \tag{22}$$

где гармоническая волна характеризуется произвольной частотой ω и неизвестными амплитудой $\hat{u}_3(x_1)$ и не зависимым от x_2,t волновым числом k.

Тогда дифференциальное уравнение в частных производных (18) преобразуется в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\hat{u}_{3,11}+k^2\left[(v/v_T)^2-1\right]\hat{u}_3=\hat{T}_1(\hat{u}_{3,1})^2\hat{u}_{3,11}+k^4\hat{T}_1(\hat{u}_3)^3-k^2\hat{T}_2(\hat{u}_3)^2\hat{u}_{3,11}-5k^2\hat{T}_2\hat{u}_3(\hat{u}_{3,1})^2; \tag{23}$$

$$\hat{T}_k=(T_k/\mu)e^{2i(kx_2-\omega t)} \qquad (k=1,2). \tag{24}$$

Заметим, что для уравнения (23) величины (24) (коэффициенты в правой нелинейной части) полагаются постоянными, поскольку они не зависят от переменной дифференцирования x_1.

Граничное условие (20) преобразуется к виду

$$\mu\hat{u}^o_{3,1}\left\{1+\frac{2(\lambda+\mu)+A+2B}{2\mu}\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2-\frac{2\lambda+\mu+A+2B}{2\mu}k^2\left(\hat{u}^o_3\right)^2\right\}=0. \tag{25}$$

Итак, далее следует решать задачу (23),(25). Более легким представляется анализ граничного условия (25). В классических задачах о гармонических поверхностных волнах граничные условия дают возможность определить неизвестное волновое число k или фазовую скорость $v=(\omega/k)$. Условие (25) также дает выражение для волнового числа через неизвестное значение амплитуды волны на поверхности $\hat{u}^o_3$, которое должно быть произвольным для бегущей волны (22), и неизвестное значение величины $\hat{u}^o_{3,1}$ (присутствующие в (25) упругие постоянные полагаются всегда известными).

Связь между величинами $\hat{u}^o_3$ и $\hat{u}^o_{3,1}$ может быть вычислена с помощью первого интеграла уравнения (23). Такой интеграл находится следующим образом. Сначала необходимо преобразовать уравнение (23) к такому виду:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_{3,1})^2\right]'+k^2\left[(v/v_T)^2-1\right]\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_3)^2\right]'=\\=\hat{T}_1\frac{1}{4}\left[(\hat{u}_{3,1})^4\right]'+k^4\hat{T}_1\frac{1}{4}\left[\left((\hat{u}_3)^4\right)\right]'-5k^2\hat{T}_2\frac{1}{2}\left[(\hat{u}_3)^2(\hat{u}_{3,1})^2\right]'.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь уже учтено, что волновое число k не зависит от пройденного волной расстояния x_2 и не зависит от глубины x_1. В противном случае соотношение (26) значительно усложняется и не может быть представлено в виде суммы производных и в итоге не может быть проинтегрировано.

Затем следует проинтегрировать равенство (26) по x_1. В итоге получается выражение, которое может быть квалифицировано как первый интеграл уравнения (21),

$$(\hat{u}_{3,1})^2+k^2\left[(v/v_T)^2-1\right](\hat{u}_3)^2=\hat{T}_1\frac{1}{2}(\hat{u}_{3,1})^4+k^4\hat{T}_1\frac{1}{2}(\hat{u}_3)^4-5k^2\hat{T}_2(\hat{u}_3)^2(\hat{u}_{3,1})^2. \tag{27}$$

Отметим, что соотношение (27) может быть получено лишь при условии равенства коэффициентов в последних двух слагаемых в (26), т. е. эти коэффициенты должны бы равняться или 1, или 5, что будет отражено в последующей записи (27). Внесенная ошибка может быть оценена при числовом анализе полученного представления поверхностной волны.

Теперь можно связать формулы (25) и (27), исходя из факта, что (27) верно и для значения $x_1 = 0$

$$\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2 + k^2\left[\left(v/v_T\right)^2 - 1\right]\left(\hat{u}^o_3\right)^2 = \hat{T}_1\frac{1}{2}\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^4 + (1;5)k^4\hat{T}_1\frac{1}{2}\left(\hat{u}^o_3\right)^4 - (1;5)k^2\hat{T}_2\left(\hat{u}^o_3\right)^2\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2 . \quad (28)$$

Формула (28) представляет собой биквадратное уравнение относительно $\hat{u}^o_{3,1}$

$$\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^4 - \left[(1;5)2k^2\left(\hat{T}_2/\hat{T}_1\right)\left(\hat{u}^o_3\right)^2 - 2E^2/\hat{T}_1\right]\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2 - 2\left(k^2E^2/\hat{T}_1\right)\left[\left(v/v_T\right)^2 - 1\right]\times$$

$$\times\left(\hat{u}^o_3\right)^2 + k^4\left(\hat{u}^o_3\right)^4 = 0 ,$$

решение которого имеет вид

$$\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2 = (1;5)k^2\left(\hat{T}_2/\hat{T}_1\right)\left(\hat{u}^o_3\right)^2 - E^2/\hat{T}_1 \pm$$

$$\pm\sqrt{\left[(1;5)^2\left(\hat{T}_2/\hat{T}_1\right)^2 - 1\right]k^4\left(\hat{u}^o_3\right)^4 + \left(E^2/\hat{T}_1\right)^2 - 2k^2\left(E^2/\hat{T}_1\right)\left[(1;5)\left(\hat{T}_2/\hat{T}_1\right) - \left(\left(v/v_T\right)^2 - 1\right)\right]\left(\hat{u}^o_3\right)^2} .$$

(29)

Условие положительности правой части в (29) является одним из условий существования поверхностной волны вида (22). Оно задает область изменения начальной амплитуды волны на граничной поверхности $\hat{u}^o_3$.

Подстановка (29) в (25) дает формулу для вычисления неизвестного волнового числа k через известные значения упругих постоянных μ, λ, A, B, C, неизвестную величину $E^2 = \left(e^{i(kx_2 - \omega t)}\right)^2$, характеризующую фазовое состояние волны, и произвольную величину амплитуды волны на граничной поверхности $\hat{u}^o_3$. Тот факт, что волновое число k зависит от пространственной координаты x_2 и времени t (т. е., изменяется с расстоянием распространения или, что то же, со временем распространения), противоречит начальному предположению о виде волны (22) с не зависимым от x_2, t волновым числом k.

Таким образом, в рамках принятого нелинейного подхода гармоническая поверхностная волна не может быть описана. Формальной причиной невозможности описать такую волну с помощью нестандартного подхода (с помощью первого интеграла) является неустранимое появление множителя $E^2 = \left(e^{i(kx_2 - \omega t)}\right)^2$, характеризующего фазовое состояние волны.

§4. Анализ возможности описания простой поверхностной волны в рамках линейного подхода.

Предположим, что решение линейного волнового уравнения (6) имеет вид простой волны перемещения, распространяющейся в направлении Ox_2,

$$u_3(x_1, x_2, t) = \hat{u}_3(x_1)\breve{u}_3(x_2, t) = \hat{u}_3(x_1)F(z) \quad z = x_2 - v(z)t , \quad (30)$$

где скорость волны v зависит от перемещения вдоль граничной поверхности $\breve{u}_3(x_2, t)$ и функция F задает начальный профиль волны $F(x_2, t = 0)$.

При подстановке представления (30) в дифференциальное уравнение в частных производных (6) оно преобразуется в линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\widehat{u}_{3,11}-\left(\left(v_T\right)^{-2}K_{tt}-K_{22}\right)\widehat{u}_3=0\,; \tag{31}$$

$$K_{tt}\left(x_2,t\right)=\frac{\left(F'\right)^2}{\left(1+F'v't\right)^2}\left\{-2\left(v\right)^2F''-2v'vF'+\frac{F'\left(F'v''+F''v'\right)\left(v\right)^2t}{\left(1+F'v't\right)}\right\};\tag{32}$$

$$K_{22}\left(x_2,t\right)=\left(F'\right)^2\frac{2F''-F'\left[F''v'+F'v''\right]t}{\left(1+F'v't\right)^3}.$$

Заметим, что для уравнения (31) величины (32) полагаются постоянными, поскольку они не зависят от переменной дифференцирования x_1.

Решение уравнения (31)

$$\widehat{u}_3\left(x_1\right)=\widehat{u}_3^o e^{-\sqrt{v_T^{-2}K_{tt}-K_{22}}\,x_1},\quad \widehat{u}_3^o=\widehat{u}_3\left(0\right),\tag{33}$$

должно описывать затухание при отходе от границы $x_1=0$ и поэтому в (33) налагается условие положительности корня и подкоренного выражения

$$\left(v_T\right)^{-2}K_{tt}-K_{22}>0\,.\tag{34}$$

Неизвестная скорость волны $v=v\left(\breve{u}_3\left(x_2,t\right)\right)$ может быть определена путем удовлетворения граничному условию – условию отсутствия на свободной границе $x_1=0$ компонента напряжения t_{13}, т. е.

$$t_{13}\left(x_1=0,x_2\right)=0\quad\text{или}\quad \mu\breve{u}_{3,1}\left(x_1=0\right)F\left(x_2,t\right)=0\,.\tag{35}$$

Поскольку из подстановки решения (30) в условие (35) следует $\breve{u}_{3,1}^o=0$, то далее следует определить выражение для $\breve{u}_{3,1}^o$. Здесь полезным оказывается первый интеграл уравнения (31), который находится умножением уравнения (31) на $\widehat{u}_{3,1}$, последующим интегрированием и вычислением произвольной постоянной по граничному условию в бесконечно удаленной точке

$$\left(\widehat{u}_{3,1}\right)^2-\left(v_T^{-2}K_{tt}-K_{22}\right)\left(\widehat{u}_3\right)^2=0\,.\tag{36}$$

Так как равенство (36) верно и для значения $x_1=0$, то

$$\widehat{u}_{3,1}^o=\sqrt{v_T^{-2}K_{tt}-K_{22}}\,\widehat{u}_3^o\,.\tag{37}$$

Подстановка представления (37) в граничное условие (35) показывает, что (35) выполняется лишь при равенстве нулю подкоренного выражения из (37). Это противоречит условию затухания волны (34). Следовательно, представление (30) не является решением волнового уравнения (7) при граничных условиях (10), (11) и, таким образом, линейный подход не описывает движение простой поверхностной волны перемещения в виде (30).

Заметим, что характер противоречия здесь такой же, как и для гармонической волны.

§5. Анализ возможности описания простой поверхностной волны в рамках нелинейного подхода.

Изменим принятый в §4 линейный подход на нелинейный, сохраняя при этом предположение о простой волне (30).

При подстановке представления (30) в нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных (18) последнее преобразуется в нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\hat{u}_{3,11}+\left(\left(v_T\right)^{-2}K_{tt}-K_{22}\right)\hat{u}_3=$$

$$=\hat{T}_1\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2\hat{u}_{3,11}+\hat{T}_2\left(K_2\right)^2\left(\hat{u}_3\right)^2\hat{u}_{3,11}+\hat{T}_1\left(K_2\right)^2K_{22}\left(\hat{u}_3\right)^3+\hat{T}_2\left(K_{22}+4\left(K_2\right)^2\right)\hat{u}_3\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2, \quad (38)$$

где приняты такие обозначения:

$$\hat{T}_k=\left(T_k/\mu\right)\left(k=1,2\right);\ \ K_2\left(x_2,t\right)=\frac{\left(F'\right)^2}{1+F'v't}. \quad (39)$$

При учете представления (30) граничное условие (19) преобразуется к виду

$$\mu\hat{u}^o_{3,1}\left\{1+\frac{2\left(\lambda+\mu\right)+A+2B}{2\mu}\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2-\frac{2\lambda+\mu+A+2B}{2\mu}k^2\left(\hat{u}^o_3\right)^2\right\}=0 \quad (40)$$

или

$$\mu\hat{u}^o_{3,1}\left[1+l_1\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2-l_2k^2\left(\hat{u}^o_3\right)^2\right]=0, \quad (41)$$

$$\hat{u}^o_3\equiv\hat{u}_3\left(0\right),\ \hat{u}^o_{3,1}\equiv\hat{u}_{3,1}\left(0\right);\ \ l_1=\frac{2\lambda+\mu+A+2B}{2\mu};\ \ l_2=\frac{2\left(\lambda+\mu\right)+A+2B}{2\mu}. \quad (42)$$

Так как условие $\breve{u}^o_{3,1}=0$ приводит к противоречию, то из (41) следует

$$1+l_1\left(\hat{u}^o_{3,1}\right)^2-l_2k^2\left(\hat{u}^o_3\right)^2=0. \quad (43)$$

Связь между величинами $\hat{u}^o_3$ и $\hat{u}^o_{3,1}$ в (43) может быть вычислена с помощью показанной ранее процедуры вычисления первого интеграла нелинейного уравнения (38). Итак, домножим обе стороны уравнения (38) на $\hat{u}_{3,1}$ и преобразуем это уравнение к виду

$$-\left[\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2\right]'-\left[\left(1/v_T\right)^2K_{tt}-K_{22}\right]\left[\left(\hat{u}_3\right)^2\right]'=$$

$$=\hat{T}_1\frac{1}{2}\left[\left(\hat{u}_{3,1}\right)^4\right]'+\hat{T}_1\left(K_2\right)^2K_{22}\frac{1}{2}\left[\left(\left(\hat{u}_3\right)^4\right)\right]'-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left[\left(\hat{u}_3\right)^2\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2\right]', \quad (44)$$

где из соображений, приведенных ниже формулы (27), приняты обозначения: $\left(K_2\right)^2=V$; $\left(K_{22}+4\left(K_2\right)^2\right)=W$.

Уравнение (44) может быть проинтегрировано

$$-\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2-\left[\left(1/v_T\right)^2K_{tt}-K_{22}\right]\left(\hat{u}_3\right)^2=$$

$$=\hat{T}_1\frac{1}{2}\left(\hat{u}_{3,1}\right)^4+\hat{T}_1\left(K_2\right)^2K_{22}\frac{1}{2}\left(\hat{u}_3\right)^4-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3\right)^2\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2+C.$$

Произвольная постоянная C определяется из условия, что перемещение и его производная на бесконечности равны нулю (поскольку принимается слабое условие затухания поверхностной волны; сильное условие состоит в локализации волны в окрестности границы). Тогда $C=0$ и первый интеграл уравнения (38) можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
-\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2-\left[\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}\right]\left(\hat{u}_3\right)^2= \\
=\hat{T}_1\frac{1}{2}\left(\hat{u}_{3,1}\right)^4+\hat{T}_1\left(K_2\right)^2 K_{22}\frac{1}{2}\left(\hat{u}_3\right)^4-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3\right)^2\left(\hat{u}_{3,1}\right)^2 .
\end{gathered} \tag{45}
$$

Поскольку равенство (45) верно и для значения $x_1=0$, то из него можно получить связь между $\hat{u}_3^o$ и $\hat{u}_{3,1}^o$

$$
\begin{gathered}
\left(\hat{u}_{3,1}^o\right)^2=\left[1-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3^o\right)^2\right]\Big/\hat{T}_1\pm \\
\pm\sqrt{\left[1-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3^o\right)^2\right]\Big/\hat{T}_1^{\,2}-2\left[\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}\right]\Big/\hat{T}_1\left(\hat{u}_3^o\right)^2+\left(K_2\right)^2 K_{22}\left(\hat{u}_3^o\right)^4} .
\end{gathered} \tag{46}
$$

Условие положительности подкоренного выражения в (46)

$$
\left[1-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3^o\right)^2\right]\Big/\hat{T}_1^{\,2}-2\left[\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}\right]\Big/\hat{T}_1\left(\hat{u}_3^o\right)^2+\left(K_2\right)^2 K_{22}\left(\hat{u}_3^o\right)^4\geq 0 \tag{47}
$$

является одним из условий существования поверхностной волны вида (30). Оно задает область изменения начальной амплитуды волны на граничной поверхности $\hat{u}_3^o$ при прочих известных параметрах волны. Также его можно понимать как условие на выражение $\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}$, т. е.

$$
\left[\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}\right]\leq\left[1-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3^o\right)^2\right]\left[\left(\hat{u}_3^o\right)^2\Big/2\hat{T}_1\right]+\left(1/2\right)\left(K_2\right)^2 K_{22}\hat{T}_1\left(\hat{u}_3^o\right)^6 . \tag{48}
$$

Напомним, что в линейном подходе это было условие положительности (34).

Подстановка (46) в граничное условие (25) дает нелинейное дифференциальное уравнение

$$
\begin{gathered}
1+\left(l_1\right)^2\left(u_3^o\right)^4\left(K_2\right)^4+\left(l_2\right)^2\left(K_2\right)^4 M^2+ \\
+2\left[l_1\left(K_2\right)^2\left(u_3^o\right)^2+l_2\left(K_2\right)^2 M\right]+2l_1 l_2\left(K_2\right)^4\left(u_3^o\right)^2 M= \\
=\left(l_2\right)^2\left\{M^2\left(K_2\right)^4-2\left(\hat{u}_3^o\right)^2\frac{\left(1/v_T\right)^2 K_{tt}-K_{22}}{\hat{T}_1}+\left(\hat{u}_3^o\right)^4\left(K_2\right)^2 K_{22}\right\};
\end{gathered}
$$

$$
M\equiv\frac{1-\left(V,W\right)\hat{T}_2\left(\hat{u}_3^o\right)^2}{\hat{T}_1} . \tag{49}
$$

Это уравнение (49) является уравнением для определения скорости волны. Оно имеет второй порядок, так как включает неизвестную скорость волны

$v\left(\breve{u}_3 \equiv \breve{u}_3^o F\left(x_1 - v\left(\breve{u}_3\right)t\right)\right)$ и производные скорости $v'\left(\breve{u}_3\right), v''\left(\breve{u}_3\right)$. Они содержатся в величинах K_{tt}, K_{22}, K_2 (см.формулы (32)). Также величины K_{tt}, K_{22}, K_2 содержат F и этим самым скорость волны действительно зависит от $\breve{u}_3$. Однако дополнительно в K_{tt}, K_{22}, K_2 входят $F'v't, F'v''t$, которые вносят в уравнение прямую зависимость от времени. В итоге, такая ситуация противоречит исходной предпосылке, что скорость волны зависит только от $\breve{u}_3$.

Таким образом, сформулированная задача о существовании упругой поверхностной волны в рамках нелинейной постановки не имеет решения. Снова получено противоречие.

Введем ряд упрощений в общее представление простой волны (30) с целью упрощения анализа дифференциального уравнения (49).

Сначала конкретизируем уравнение (49), выбрав V в $\left(V, W\right)$,

$$1 + 2\left[l_1\left(u_3^o\right)^2 + \frac{l_2}{\widehat{T}_1}\right]\left(K_2\right)^2 - 2\left(\widehat{u}_3^o\right)^2 \frac{\left(1/v_T\right)^2 K_{tt} - K_{22}}{\widehat{T}_1} + \left(\widehat{u}_3^o\right)^4\left(K_2\right)^2 K_{22} +$$

$$+\left[\left(\frac{2l_1l_2}{\widehat{T}_1} - \frac{2l_2\widehat{T}_2}{\widehat{T}_1}\right)\left(u_3^o\right)^2 + \left(l_1\right)^2\left(u_3^o\right)^4\right]\left(K_2\right)^4 -$$

$$-\left[2l_1l_2\left(u_3^o\right)^2 \frac{\widehat{T}_2\left(\widehat{u}_3^o\right)^2}{\widehat{T}_1} + \frac{3\left(l_2\right)^2 \widehat{T}_2\left(\widehat{u}_3^o\right)^2}{\left(\widehat{T}_1\right)^2}\right]\left(K_2\right)^6 = 0. \tag{50}$$

Также наложим ограничения $F'v't \ll 1, F'v''t \ll 1$ на изменение скорости волны, время наблюдения волны t и скорость изменения начального профиля волны F'. Тогда имеем равенства

$$K_{tt}\left(x_2, t\right) = -2\left(F'\right)^2\left[\left(v\right)^2 F'' + v'vF'\right],\quad K_{22}\left(x_2, t\right) = 2\left(F'\right)^2 F'',\quad K_2\left(x_2, t\right) = \left(F'\right)^2. \tag{51}$$

В итоге уравнение (50) становится дифференциальным уравнением первого порядка относительно скорости волны и уже не зависит явно от времени.

Упростим далее задачу, предположив, что начальный профиль волны является колоколообразным $F\left(z\right) = \widehat{u}_3^o e^{-\alpha z^2}$ $\alpha = \mathrm{const}$.

Тогда имеем такие равенства:

$$K_{tt}\left(x_2, t\right) = 4\alpha^5 F^3\left[\left(1 - 2\alpha^2\right)\left(v\right)^2 + \alpha v v'\right];$$

$$\left(K_2\right)^2 = 16\alpha^8 F^4;$$

$$K_{22} = -16\alpha^5\left(1 - 2\alpha^2\right)F^3;$$

$$\left(K_2\right)^2 K_{22} = -256\alpha^{13}F^7\left(1 - 2\alpha^2\right); \left(K_2\right)^4 = 256\alpha^{16}F^8;$$

$$\left(K_2\right)^6 = \left(16\right)^3 \alpha^{24} F^{12}. \tag{52}$$

Наконец, примем начальный колоколообразный профиль достаточно пологим с условием

$$\alpha \ll 1 \tag{53}$$

(к примеру, условие $\alpha = 0,01$ вполне вписывается в (53)). Теперь формулы (52) можно еще более упростить, сохранив только наименьшие степени α^5

$$K_{tt}(x_2,t) = 4\alpha^5\left(\hat{u}_3^o e^{-\alpha z^2}\right)^3 (v)^2;$$

$$(K_2)^2, (K_2)^2 K_{22}, (K_2)^4, (K_2)^6 \sim 0;$$

$$K_{22} = -16\alpha^5\left(\hat{u}_3^o e^{-\alpha z^2}\right)^3.$$

В этом случае уравнение (50) существенно упрощается:

$$1 - 2\left(\hat{u}_3^o\right)^2 \frac{(1/v_T)^2 K_{tt} - K_{22}}{\hat{T}_1} = 0 \to 4\alpha^5 F^3 \frac{(v)^2}{(v_T)^2} = \frac{\hat{T}_1}{2\left(\hat{u}_3^o\right)^2} - 16\alpha^5 F^3 \to$$

$$(v)^2 = (v_T)^2 \left\{ \frac{\hat{T}_1}{8\left(\hat{u}_3^o\right)^2 \alpha^5 e^{-3\alpha(x_1 - vt)}} - 4 \right\}. \tag{54}$$

Полученная формула противоречит здравому смыслу по двум причинам: 1) величина $\hat{T}$ отрицательна для материалов с мягкой характеристикой нелинейности (а это почти все конструкционные материалы, включая почти все металлы); 2) при принятых упрощениях о форме профиля волны знаменатель в (54) очень мал, вследствие чего множитель скорости сдвиговой волны в фигурных скобках может превышать единицу на много порядков.

Заключение.

Проведенный анализ возможности существования поверхностных волн в упругом материале в условиях антиплоской деформации показал, что как простейший вид волн – гармонические волны, так и один из самых сложных видов – простые волны, не могут быть описаны при строгих механических постановках. Этот вывод относится как к линейной, так и к нелинейной постановке. Таким образом, вопрос о возможном существовании нелинейной поверхностной упругой волны при отсутствии такой волны в линейной постановке остается открытым.

Р Е З Ю М Е . Проаналізовано лінійні і нелінійні хвильові рівняння, які описують поширення поверхневої хвилі вздовж вільної плоскої границі пружного півпростору, в рамках припущення, що у півпросторі реалізовано стан антиплоскої деформації. Нелінійність введена через п‘ятиконстантний потенціал Мернагана, який включає як геометричну, так і фізичну нелінійності. Розглянуто чотири випадки: гармонічна і проста хвиля в рамках лінійного та нелінійного підходів. Показано, що в усіх чотирьох випадках виникає протиріччя між початковими припущеннями і кінцевим результатом. Це може трактуватися як факт, що в рамках проаналізованих постановок саме така поверхнева хвиля не може бути реалізована і тому вона є неможливою.

1. *Лейбензон Л.С.* Краткий курс теории упругости. – М.; Л.: Гостехиздат, 1942. – 346 с.
2. *Лурье А.И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 842 с. (*Lur'e A.I.* Theory of Elasticity. A.Belyaev (translater). Springer, Berlin, 2005. – 1050 p.)
3. *Ляв А.Э.Х.* Математическая теория упругости. – М.; Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с. (*Love A.E.H.* The Mathematical Theory of Elasticity. 4th edition. – New York: Dover Publications, 1944. – 843 p.)
4. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с. (*Nowacki W.* Theoria sprężystośći. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 с.. – К.: Ін-т механіки ім. С.П. Тимошенка, 1997. – 377 с.)
6. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. – М.: Физматгиз, 1961. – 186 с. (*Sneddon I.N., Berry D.S.* The Classical Theory of Elasticity. Flügge Encyclopedia of Physics, vol. 3/VI. – Berlin: Springer Verlag, 1951. – P. 1 – 126.)
7. *Тимошенко С.П., Гудьир Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 608 с. (*Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1973. – 506 p.)
8. *Хан Х.* Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с. (*Hahn H.G.* Elastizitätstheorie. Grundlagen der linearen Theorie and Anwendungen auf eindimensionale, ebene und raumliche Probleme. – Stuttgart: B.G.Teubner, 1985. – 340 p.)
9. *Федоров Ф.И.* Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965. – 388 с. (*Fiodorov F.I.* Theory of Elastic Waves in Crystals. – New York: Plenum Press, 1968. – 375 p.)
10. *Leipholz H.E.* Theory of Elasticity. – Amsterdam: Nordhoof International Press, 1974.
11. *Maugin G.A., Chevalier Y., Louzar M.* Interfacial waves in the presence of areas of slip // Geophys. J. Int. – 1994. – **118**. – P. 305 – 316.
12. *Mozhaev V.G.* A new type of surface waves in solids due to nonlinear elasticity // Physics Letters A. – 1989. – **139**, N 7. – P. 333 – 336.
13. *Murnaghan F.D.* Finite Deformation in an Elastic Solid. – New York: John Wiley, 1951, 1967. – 140 p.
14. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2013. – 580 p.

Поступила 27.12.2012 Утверждена в печать 19.02.2015