

Г. Я. Попов, Ю. С. Процеров, И. А. Гончар

**ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
С УЧЕТОМ УДЕЛЬНОГО ВЕСА**

*Одесский Национальный университет им. И.И. Мечникова,
65082, г. Одесса, ул. Дворянская 2,
e-mail: popovgya@mail.ru, protserov@onu.edu.ua, gigorok@mail.com*

Abstract. The exact solution of two axisymmetric problems of the theory of elasticity for the solid and hollow cylinders of finite length is constructed with allowance for their specific weight and using the finite Hankel integral transform. The conditions of sliding support on the bottom backing and the lateral faces are given. The upper backing is loaded by axisymmetric normal and tangential forces. The transforms of displacements and stresses are obtained. The results of numerical evaluations of normal stresses on the cylindrical surfaces of external and internal cylinders are shown in the form of plots for different ratios of height.

Key words: solid and hollow cylinders of finite length, specific weight, sliding contact, finite Hankel integral transform.

Введение.

Осесимметричным задачам для упругих цилиндров конечной длины, сплошных и полых, посвящена довольно обширная литература. Состояние проблемы до 1963 года освещена в обстоятельном обзоре [1]. Этим задачам посвящена значительная часть монографии [5]. Там же приводится обзор работ, опубликованных после 1963 г. Во всех публикациях, в том числе и выполненных в последнее время, не учитывается действие объемных сил, например, удельного веса материала цилиндров. Исключение составляют работы [13] и [7,8]. В первой из них дано численное решение задачи о напряженном состоянии полого цилиндра под действием собственного веса материала. При этом внутренняя цилиндрическая поверхность и верхний торец цилиндра – свободны, а вторая цилиндрическая поверхность и нижний торец – заземлены. В работе [7] намечен путь получения точного решения для сплошного цилиндра под действием собственного веса, когда на цилиндрической поверхности и на нижнем торце цилиндра выполнено условие скользящего закрепления (нормальное смещение и касательные напряжения равны нулю), а верхний торец цилиндра загружен нормальной и касательной нагрузкой. В работе [8] построено решение задачи для сплошного цилиндра с заземленной цилиндрической поверхностью под действием силы веса и нормальной нагрузки, приложенной к верхнему основанию. Отметим работы [3, 14, 15], посвященные разработке аналитических и аналитико-численных методов решения задач для упругих цилиндров. В остальных публикациях [12, 16, 18 – 20] предложены различные приближенные аналитические или численные методы решения проблемы при различных граничных условиях.

Цель настоящей работы – указать граничные условия для цилиндров, находящихся под действием удельного веса, при которых можно получить точное решение и его построить. Тем самым обобщить и дать численную реализацию метода работы [7].

К направлению получения точных решений относятся работы [2, 4]. В [2] построено точное решение для сплошного цилиндра без учета удельного веса, у которого на цилиндрической поверхности заданы не нулевые нормальное смещение и касательные напряжения, а на торцах заданы нормальные и касательные напряжения. Использован метод, отличный от примененного в работе [7] и в настоящей работе. В публикации [4] для получения точных решений использован аппарат p -аналитических функций. При этом на торцах заданы ненулевые нормальные смещения и касательные напряжения, а на цилиндрических поверхностях могут выполняться такие условия: а) заданы ненулевые нормальные смещения и касательные напряжения; б) заданы не нулевые нормальные напряжения и касательные смещения; в) заданы ненулевые нормальные и касательные напряжения; г) заданы нормальные и касательные смещения (не нулевые); д) на внутренней цилиндрической поверхности заданы нормальные и касательные смещения, а на внешней – нормальные и касательные напряжения. Следует отметить, что задание на грани цилиндра нулевых нормальных смещений и касательных напряжений соответствует условию скользящего закрепления, т.е. эта грань цилиндра находится в контакте с абсолютно жестким гладким телом. Как практически осуществить граничные условия, когда указанные величины отличны от нуля, авторы работ [2,4] не объясняют, впрочем, как и условия задания на грани нормальных напряжений и касательных смещений.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим две осесимметричные задачи для сплошного (задача I) и полого (задача II) цилиндров, заданных в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \leq r \leq a$ (задача I), $0 < a_0 \leq r \leq a_1$ (задача II), $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. Искомыми функциями в этих задачах являются смещения $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$, которые должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами в виде удельного веса

$$(1 + \mu_0) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r \right] + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0;$$

$$\frac{\mu_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + (1 + \mu_0) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \gamma / G,$$

где $\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}$; $1 + \mu_0 = 2(1 - \mu)\mu_0$; μ – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига и γ – удельный вес материала.

Напряжения выражаются формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{pmatrix} = 2G\mu_0 \left[(1 - \mu) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \end{pmatrix} \right]; \quad \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Примем, что цилиндр опирается на абсолютно жесткое гладкое основание, т.е. на нижнем основании $z = 0$ имеем

$$u_z|_{z=0} = 0 \text{ и } \tau_{rz}|_{z=0} = 0, \text{ откуда } \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

К верхнему основанию $z = h$ приложены осесимметричные нормальная и касательная нагрузки $\sigma_z|_{z=h} = -p(r)$, $\tau_{rz}|_{z=h} = -q(r)$.

На цилиндрических поверхностях $r = a_k$ ($k = 1$ для задачи I и $k = 0, 1$ для задачи II) заданы условия скользящего закрепления

$$u_r|_{r=a_k} = 0 \text{ и } \tau_{rz}|_{r=a_k} = 0, \text{ откуда } \frac{\partial u_z}{\partial r}|_{r=a_k} = 0.$$

Перейдем к безразмерным координатам $\rho = r/a$ и $\zeta = z/h$ и величинам $u(\rho, \zeta) = u_r(a\rho, h\zeta)$, $w(\rho, \zeta) = u_z(a\rho, h\zeta)$, $\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(a\rho, h\zeta)$ и т.д. Система уравнений Ламе примет вид

$$(1 + \mu_0) \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \alpha \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \zeta} = 0; \quad (1.1)$$

$$\frac{\alpha \mu_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + (1 + \mu_0) \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\gamma a_1^2}{G}; \alpha = a_1/h.$$

Краевые условия на нижнем и верхнем основаниях запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad w|_{\zeta=0} = 0; \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \alpha(1 - \mu) \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \Big|_{\zeta=1} = -\frac{a_1 P(\rho)}{2G\mu_0}; \quad \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \Big|_{\zeta=1} = -\frac{a_1 Q(\rho)}{G}, \quad (1.3)$$

где $P(\rho) = p(a\rho)$, $Q(\rho) = q(a\rho)$.

Краевые условия на боковых поверхностях примут вид: для задачи I

$$u|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (1.4)$$

для задачи II

$$u|_{\rho=b} = u|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = \frac{\partial w}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 0; \quad b = a_0/a_1 < 1. \quad (1.5)$$

Решения поставленных краевых задач удобнее строить в виде

$$u(\rho, \zeta) = u^{(\gamma)}(\rho, \zeta) + u^{(0)}(\rho, \zeta), \quad w(\rho, \zeta) = w^{(\gamma)}(\rho, \zeta) + w^{(0)}(\rho, \zeta),$$

где $u^{(\gamma)}(\rho, \zeta)$ и $w^{(\gamma)}(\rho, \zeta)$ – решение неоднородной системы уравнений Ламе (1.1) при однородных краевых условиях (1.2) – (1.5) (при $P = Q = 0$), а $u^{(0)}(\rho, \zeta)$ и $w^{(0)}(\rho, \zeta)$ – решение однородной системы уравнений Ламе (1.1) (при $\gamma = 0$), удовлетворяющее краевым условиям (1.2) – (1.5).

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции

$$u^{(\gamma)}(\rho, \zeta) = 0 \text{ и } w^{(\gamma)}(\rho, \zeta) = \frac{\gamma h^2}{2G(1 + \mu_0)} \zeta(\zeta - 2)$$

удовлетворяют требуемым условиям. При этом для напряжений в цилиндре, вызываемых удельным весом цилиндра, имеем формулы

$$\sigma_{\rho}^{(\gamma)}(\rho, \zeta) = \frac{\mu\gamma h}{1-\mu}(\zeta-1); \quad \sigma_{\zeta}^{(\gamma)}(\rho, \zeta) = \gamma h(\zeta-1), \quad \tau_{\rho\zeta}^{(\gamma)}(\rho, \zeta) = 0. \quad (1.6)$$

Для случая, когда к верхнему основанию $\zeta=1$ приложена только равномерно распределенная нормальная нагрузка $P(\rho) = P^* - \text{const}$; $Q(\rho) = 0$, функции

$$u^{(0)}(\rho, \zeta) = 0, \quad w^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{hP^*\zeta}{G(1+\mu_0)} \quad (1.7)$$

будут решениями поставленной выше задачи, в чем несложно убедиться непосредственной проверкой. Причина, почему сформулированные задачи допускают элементарное решение, объяснена в работе [7].

Таким образом, для рассматриваемого частного случая загрузки цилиндра решение задачи определим формулами

$$u(\rho, \zeta) = 0, \quad w(\rho, \zeta) = \frac{h\zeta}{2G(1+\mu_0)}[\gamma h(\zeta-2) - 2P^*];$$

$$\sigma_{\rho}(\rho, \zeta) = \frac{\mu}{1-\mu}[\gamma h(\zeta-1) - P^*], \quad \sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = \gamma h(\zeta-1) - P^*, \quad \sigma_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = 0.$$

§2. Методика решения задачи.

Для общего случая загрузки следует определить решение $u^{(0)}(\rho, \zeta)$ и $w^{(0)}(\rho, \zeta)$ однородной системы уравнений Ламе (1.1). Учитывая краевые условия скользящей заделки (1.4) и (1.5), воспользуемся конечными интегральными преобразованиями Ханкеля (они выписаны в форме, вытекающей из метода работы [6]).

Для задачи I имеем:

$$u_k^{(0)}(\zeta) = \int_0^1 u^{(0)}(\rho, \zeta) J_1(\lambda_k \rho) \rho d\rho; \quad u^{(0)}(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(0)}(\zeta) \frac{J_1(\lambda_k \rho)}{\|J_1(\lambda_k \rho)\|^2}; \quad (2.1)$$

$$w_k^{(0)}(\zeta) = \int_0^1 w^{(0)}(\rho, \zeta) J_0(\lambda_k \rho) \rho d\rho; \quad w^{(0)}(\rho, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(0)}(\zeta) \frac{J_0(\lambda_k \rho)}{\|J_0(\lambda_k \rho)\|^2}, \quad (2.2)$$

где $\lambda_0 = 0$, λ_k ($k = 1, 2, \dots$) – положительные корни уравнения $J_1(\lambda) = 0$; содержащиеся

здесь квадраты норм функций $f(\rho)$ определены формулой $\|f(\rho)\|^2 = \int_0^1 \rho [f(\rho)]^2 d\rho$

и поэтому имеем

$$\|J_1(\lambda_k \rho)\|^2 = \|J_0(\lambda_k \rho)\|^2 = \frac{1}{2} J_0^2(\lambda_k); \quad J_0(\lambda_0 \rho) = 1 \text{ и } \|J_0(\lambda_0 \rho)\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Для задачи II:

$$u_k^{(0)}(\zeta) = \int_b^1 u^{(0)}(\rho, \zeta) y_1(\rho; \lambda_k) \rho d\rho; \quad u^{(0)}(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(0)}(\zeta) \frac{y_1(\rho; \lambda_k)}{\|y_1(\rho; \lambda_k)\|^2}; \quad (2.3)$$

$$w_k^{(0)}(\zeta) = \int_b^1 w^{(0)}(\rho, \zeta) y_0(\rho; \lambda_k) \rho d\rho; \quad w^{(0)}(\rho, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(0)}(\rho, \zeta) \frac{y_0(\rho; \lambda_k)}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2}, \quad (2.4)$$

где

$$y_1(\rho; \lambda_k) = J_1(\rho\lambda_k)N_1(\lambda_k) - N_1(\rho\lambda_k)J_1(\lambda_k);$$

$$y_0(\rho; \lambda_k) = J_0(\rho\lambda_k)N_1(\lambda_k) - N_0(\rho\lambda_k)J_1(\lambda_k), k=1,2,\dots, y_0(\rho; \lambda_0) = \frac{2}{\pi},$$

$\lambda_0 = 0, \lambda_k (k=1,2,\dots)$ – положительные корни уравнения

$$J_1(b\lambda)N_1(\lambda) - N_1(b\lambda)J_1(\lambda) = 0, \quad (2.5)$$

$$\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2 = \|y_1(\rho; \lambda_k)\|^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{J_1^2(b\lambda_k) - J_1^2(\lambda_k)}{\lambda_k^2 J_1^2(b\lambda_k)} \quad (k=1,2,\dots);$$

$$\|y_0(\rho; \lambda_0)\|^2 = \frac{2}{\pi^2} (1 - b^2).$$

Здесь $J_m(z)$ и $N_m(z)$ – функции Бесселя и Неймана.

Для интегральных преобразований (2.2) и (2.4) $\lambda_0 = 0$ является собственным числом, т.е. решением уравнений $J_1(\lambda) = 0$ и $\lambda[J_1(b\lambda)N_1(\lambda) - N_1(b\lambda)J_1(\lambda)] = 0$, соответственно. Ему отвечают собственные функции 1 и $\frac{2}{\pi}$, получаемые предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$ из функций $J_0(\lambda\rho)$ и $-\lambda y_0(\rho; \lambda)$.

Применяя указанные интегральные преобразования к однородной системе уравнений Ламе (1.1) и краевым условиям (1.2) и (1.3) (краевые условия (1.4) и (1.5) при этом будут удовлетворены), приходим к одномерной краевой задаче. При $k = 0$ она имеет вид

$$w_0^{(0)''}(\zeta) = 0, \quad 0 < \zeta < 1;$$

$$w_0^{(0)}(0) = 0, \quad w_0^{(0)'}(1) = -\frac{a_1 P_0}{\alpha G(1 + \mu_0)},$$

где $P_0 = \int_0^1 P(\rho)\rho d\rho$ – для задачи I и $P_0 = \frac{2}{\pi} \int_b^1 P(\rho)\rho d\rho$ – для задачи II.

Ее решением будет функция $w_0^{(0)}(\zeta) = -\frac{h\zeta P_0}{G(1 + \mu_0)}$.

Отметим, что соответствующее ей слагаемое в формулах обращения (2.2) и (2.4) при $P(\rho) = P^*$ дает элементарное решение (1.7).

При $k = 1, 2, \dots$ для обеих задач получаем одномерную краевую задачу

$$\alpha u_k^{(0)''}(\zeta) - (1 + \mu_0)\lambda_k^2 u_k^{(0)}(\zeta) - \alpha\mu_0\lambda_k w_k^{(0)'}(\zeta) = 0; \quad (2.6)$$

$$\alpha\mu_0\lambda_k u_k^{(0)'}(\zeta) + (1 + \mu_0)\alpha^2 w_k^{(0)''}(\zeta) - \lambda_k^2 w_k^{(0)}(\zeta) = 0;$$

$$u_k^{(0)'}(0) = 0; \quad w_k^{(0)}(0) = 0;$$

$$\mu\lambda_k u_k^{(0)}(1) + \alpha(1-\mu)w_k^{(0)'}(1) = -\frac{a_1}{2G\mu_0}P_k; \quad \alpha u_k^{(0)'}(1) - \lambda_k w_k^{(0)}(1) = -\frac{a_1}{G}Q_k, \quad (2.7)$$

где для задачи I имеем $P_k = \int_0^1 P(\rho)J_0(\lambda_k \rho)\rho d\rho$, $Q_k = \int_0^1 Q(\rho)J_1(\lambda_k \rho)\rho d\rho$, а для зада-

чи II – $P_k = \int_b^1 P(\rho)J_0(\rho; \lambda_k)\rho d\rho$, $Q_k = \int_b^1 Q(\rho)y_1(\rho; \lambda_k)\rho d\rho$.

Решение полученной краевой задачи строим по схеме [17, §3]. Запишем систему (2.6) в векторном виде

$$Ly_k(\zeta) = Ay_k''(\zeta) + By_k'(\zeta) + Cy_k(\zeta) = 0, \quad (2.8)$$

где

$$y_k(\zeta) = \begin{pmatrix} u_k^{(0)}(\zeta) \\ w_k^{(0)}(\zeta) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & (1+\mu_0)\alpha^2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha\mu_0\lambda_k \\ \alpha\mu_0\lambda_k & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -(1+\mu_0)\lambda_k^2 & 0 \\ 0 & -\lambda_k^2 \end{pmatrix}.$$

Для получения решения уравнения (2.8), следует построить решение матричного уравнения

$$LY(\zeta) = 0. \quad (2.9)$$

Для этого сформируем матрицу

$$M(s) = As^2 + Bs + C = \begin{pmatrix} \alpha^2 s^2 - (1+\mu_0)\lambda_k^2 & -\alpha\mu_0\lambda_k s \\ \alpha\mu_0\lambda_k s & (1+\mu_0)\alpha^2 s^2 - \lambda_k^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение матричного уравнения (2.9) имеют вид $Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\zeta s} M^{-1}(s) ds$,

где матрица $M^{-1}(s)$ – обратная к матрице $M(s)$, а C – замкнутый контур, охватывающий полюсы матрицы $M^{-1}(s)$. Определив

$$M^{-1}(s) = \frac{1}{(1+\mu_0)(\alpha^2 s^2 - \lambda_k^2)} \begin{pmatrix} (1+\mu_0)\alpha^2 s^2 - \lambda_k^2 & \alpha\mu_0\lambda_k s \\ -\alpha\mu_0\lambda_k s & \alpha^2 s^2 - (1+\mu_0)\lambda_k^2 \end{pmatrix}$$

и вычисляя контурный интеграл при помощи теоремы о вычетах с учетом того, что подынтегральная функция имеет полюсы второй кратности в точках $s = \pm \frac{\lambda_k}{\alpha}$, получим решения

$$Y^+(\zeta) = \frac{e^{\frac{\lambda_k \zeta}{\alpha}}}{8(1-\mu)\alpha^2} \begin{pmatrix} \zeta + (3-4\mu)\frac{\alpha}{\lambda_k} & \zeta \\ -\zeta & -\zeta + (3-4\mu)\frac{\alpha}{\lambda_k} \end{pmatrix};$$

$$Y^-(\zeta) = \frac{e^{-\frac{\lambda_k \zeta}{\alpha}}}{8(1-\mu)\alpha^2} \begin{pmatrix} \zeta - (3-4\mu)\frac{\alpha}{\lambda_k} & -\zeta \\ \zeta & -\zeta - (3-4\mu)\frac{\alpha}{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

первое из которых растет на бесконечности, а второе убывает там. Тогда общее решение векторного уравнения (2.8) будет определяться формулой

$$y_k(\zeta) = Y^+(\zeta) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + Y^-(\zeta) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

где C_k ($k = \overline{1,4}$) – произвольные постоянные.

Определив их из краевых условий (2.7), получим выражения для трансформант смещений в виде

$$u_k^{(0)}(\zeta) = \frac{a_1}{2G} [P_k A_k(\zeta) + Q_k A_k^*(\zeta)];$$

$$w_k^{(0)}(\zeta) = -\frac{a_1}{2G} [P_k B_k(\zeta) + Q_k B_k^*(\zeta)], \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\begin{aligned} A_k(\zeta) &= \Delta^{-1}(\lambda_k) \left[ch \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \zeta sh \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - (1-2\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta \right]; \\ A_k^*(\zeta) &= \Delta^{-1}(\lambda_k) \left[sh \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \zeta ch \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - 2(1-\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta \right]; \\ B_k(\zeta) &= \Delta^{-1}(\lambda_k) \left[ch \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \zeta sh \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta + 2(1-\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta \right]; \\ B_k^*(\zeta) &= \Delta^{-1}(\lambda_k) \left[sh \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \zeta ch \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta + (1-2\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta \right]; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\Delta(\lambda_k) = \lambda_k + \alpha ch \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha}.$$

Воспользовавшись формулами обращения (2.1) – (2.2) для задачи I и (2.3) – (2.4) для задачи II, получим выражение для смещений $u^{(0)}(\rho, \zeta)$ и $w^{(0)}(\rho, \zeta)$.

Так, например, для задачи II получим равенства

$$w^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{\pi h \zeta P_0}{G(1+\mu_0)(1-b^2)} - \frac{a_1}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_0(\rho, \lambda_k)}{\|y_0(\rho, \lambda_k)\|^2} [P_k B_k(\zeta) + Q_k B_k^*(\zeta)].$$

§3. Анализ решения задачи I и числовые результаты.

Для анализа построенного решения необходимо задать конкретный вид приложенной нагрузки. Примем для задачи I:

$$P(\rho) = P_* a_1^2 (1-\rho^2); \quad Q(\rho) = 0 \quad (P_* - \text{const}). \quad (3.1)$$

Их трансформанты Ханкеля –

$$P_0 = \frac{a_1^2}{4} P_*; \quad P_k = -\frac{2a_1^2}{\lambda_k^2} P_* J_0(\lambda_k); \quad Q_k = 0; \quad k=1,2,\dots$$

Тогда получим равенства

$$u^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{a_1^3 P_*}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k \rho) J_0(\lambda_k)}{\lambda_k^2 \|J_1(\lambda_k \rho)\|^2} A_k(\zeta);$$

$$w^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{ha_1^2 P_* \zeta}{2G(1+\mu_0)} + \frac{a_1^3 P_*}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k \rho) J_0(\lambda_k)}{\lambda_k^2 \|J_0(\lambda_k \rho)\|^2} B_k(\zeta). \quad (3.2)$$

Используя известную асимптотику функций Бесселя для больших значений аргумента [10], можно показать, что $\|J_1(\lambda_k \rho)\|^2 = \|J_0(\lambda_k \rho)\|^2 \sim \frac{1}{\pi \lambda_k}$ при $\lambda_k \rightarrow \infty$, откуда

следует, что величины $\frac{J_1(\lambda_k \rho) J_0(\lambda_k)}{\|J_1(\lambda_k \rho)\|^2}$ и $\frac{J_0(\lambda_k \rho) J_0(\lambda_k)}{\|J_0(\lambda_k \rho)\|^2}$ ограничены по модулю при всех значениях $\rho \in [0, 1]$.

Далее из выражений (2.10) можно получить, что при $\lambda_k \rightarrow \infty$

$$A_k(\zeta) \sim \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\lambda_k}{\alpha}(1-\zeta)} \left[1 - \zeta - (1-2\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} \right];$$

$$B_k(\zeta) \sim \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{\lambda_k}{\alpha}(1-\zeta)} \left[1 - \zeta + 2(1-\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} \right]. \quad (3.3)$$

Таким образом, ряды в формулах (3.2) ведут себя как

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} \left[1 - \zeta - (1-2\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} \right] e^{-\frac{\lambda_k}{\alpha}(1-\zeta)} \quad \text{и} \quad \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2} \left[1 - \zeta + 2(1-2\mu) \frac{\alpha}{\lambda_k} \right] e^{-\frac{\lambda_k}{\alpha}(1-\zeta)}, \quad (3.4)$$

откуда следует их абсолютная и равномерная сходимость при всех $\zeta \in [0, 1]$.

Выражения для нормальных напряжений для этой задачи имеют вид

$$\sigma_\rho^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{2\mu}{1-\mu} P_0 + \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\|J_0(\lambda_k \rho)\|^2} \left[\left((1-\mu) \lambda_k J_0(\lambda_k \rho) - \frac{1-2\mu}{\rho} J_1(\lambda_k \rho) \right) A_k(\zeta) - \right.$$

$$\left. -\alpha \mu J_0(\lambda_k \rho) B_k'(\zeta) \right]; \quad (3.5)$$

$$\sigma_\zeta^{(0)}(\rho, \zeta) = -2P_0 + \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k J_0(\lambda_k \rho)}{\|J_0(\lambda_k \rho)\|^2} \left[\mu \lambda_k A_k(\zeta) - \alpha (1-\mu) B_k'(\zeta) \right].$$

Наибольший интерес представляет нормальное напряжение на цилиндрической поверхности $\rho = 1$:

$$\sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=1} = -\frac{2\mu}{1-\mu} P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{\lambda_k J_0(\lambda_k)}{\|J_0(\lambda_k \rho)\|^2} D_k(\zeta), \quad (3.6)$$

где

$$D_k(\zeta) = \Delta^{-1}(\lambda_k) \left[ch \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \zeta sh \frac{\lambda_k}{\alpha} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta - \frac{\alpha}{\lambda_k} sh \frac{\lambda_k}{\alpha} ch \frac{\lambda_k}{\alpha} \zeta \right].$$

Проведя аналогичные рассуждения относительно сходимости ряда в формуле (3.6), получим, что он ведет себя, как

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k} \left[1 - \zeta - \frac{\alpha}{\lambda_k} \right] e^{-\frac{\lambda_k}{\alpha}(1-\zeta)}, \quad (3.7)$$

т.е. сходится равномерно при всех $\zeta \in [0,1]$.

На верхнем основании $\zeta = 1$ выражение для нормального напряжения

$$\sigma_{\zeta}^{(0)} \Big|_{\zeta=1} = -\frac{a_1^2 P_*}{2} + 4a_1^2 P_* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k \rho)}{\lambda_k^2 J_0(\lambda_k)}$$

есть не что иное, как принятое со знаком «минус» разложение в ряд Фурье – Бесселя приложенной нагрузки (3.1), что свидетельствует о выполнении краевого условия. При определении трансформанты внешней нагрузки использовано интегральное преобразование (2.2), в котором в формуле обращения будет [6] обеспечена (согласно теоремы разложения Стеклова) равномерная сходимость ряда для функций, у которых производная обращается в ноль при $\rho = 1$. Внешняя нагрузка (3.1) не удовлетворяет условию $P'(1) = 0$. Несмотря на это, численные результаты дают хорошее совпадение напряжения $\sigma_{\zeta}^{(0)} \Big|_{\zeta=1}$ с приложенной нагрузкой. Для сравнения была рассмотрена внешняя нагрузка $P(\rho) = P_* a_1^2 (1 - \rho)^2$, $P_* - \text{const}$, которая удовлетворяет уже указанному требованию и при вычислении напряжения $\sigma_{\zeta}^{(0)} \Big|_{\zeta=1}$ оно полностью совпадает с приложенной внешней нагрузкой.

Для учета напряжений, возникающих из-за удельного веса цилиндра, к выражениям (3.5) и (3.6) следует присоединить выражения (1.6).

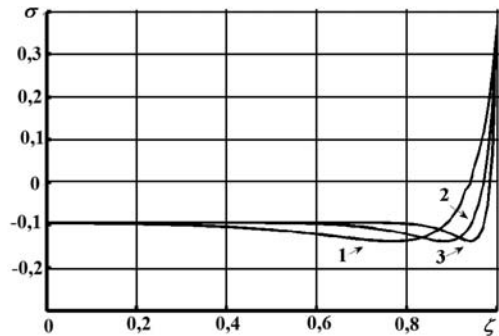


Рис. 1

Вычисления проведены для стального цилиндра ($\mu = 0,28$; $\gamma = 7,65 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$; $a_1 = 1 \text{ м}$; $P_* = 10^5 \text{ Н/м}^2$). На рис. 1 приведены значения напряжения $\sigma = \sigma_{\rho}^{(0)} \Big|_{\rho=1} \cdot P_*^{-1}$,

т.е. без учета веса цилиндра, для значений $h = 2, 4, 8$ м (кривые 1, 2 и 3) в зависимости от безразмерной координаты ζ для внешней нагрузки (3.1). Во всех трех случаях при приближении к верхнему основанию возникают зоны положительных нормальных напряжений, размер которых уменьшается с увеличением h .

На рис. 2 приведены напряжения $\sigma = \sigma_{\rho} \Big|_{\rho=1} \cdot P_*^{-1}$ для случая учета удельного веса при тех же исходных данных. Зоны положительных нормальных напряжений, как видно, уменьшились и в нижней половине цилиндра определяющими являются линейные по ζ напряжения (1.6), вызванные удельным весом.

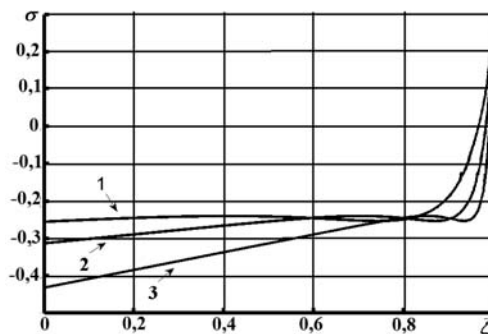


Рис. 2

При вычислениях значения корней λ_k были приняты согласно [9,10].

§4. Анализ решения задачи II и числовые результаты.

Для задачи II внешнюю нагрузку примем в виде

$$P(\rho) = P_* a_1^2 (\rho - b)(1 - \rho); Q(\rho) = 0; P_* - \text{const}; \quad (4.1)$$

ее трансформанта

$$P_0 = \frac{a_1^2}{6\pi} P_* [1 - 2b + b^3(2 - b)];$$

$$P_k = \frac{2a_1^2}{\pi\lambda_k^3} P_* \left[2 \left(1 - b \frac{J_1(\lambda_k)}{J_1(b\lambda_k)} \right) - (b+1) \left(S_{1,1}(\lambda_k) - \frac{J_1(\lambda_k)}{J_1(b\lambda_k)} S_{1,1}(b\lambda_k) \right) \right];$$

$$Q_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $S_{1,1}(x)$ – функция Ломмеля [11]. Ее значение при малых аргументах вычислены при помощи квадратурных формул из пакета Matlab, а при больших аргументах – при помощи асимптотической формулы [11]

$$S_{1,1}(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{3 \cdot 15}{x^6} - \frac{3 \cdot 15 \cdot 35}{x^8} + \dots$$

Для данной нагрузки выражения для смещения имеют вид

$$u^{(0)}(\rho, \zeta) = \frac{a_1}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{y_1(\rho; \lambda_k)}{\|y_1(\rho; \lambda_k)\|^2} A_k(\zeta);$$

$$w^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{\pi h \zeta P_0}{G(1 + \mu_0)(1 - b^2)} - \frac{a_1}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{y_0(\rho; \lambda_k)}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2} B_k(\zeta). \quad (4.2)$$

Проводя рассуждения, аналогичные задаче I, можно показать, что

$$\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2 = \|y_1(\rho; \lambda_k)\|^2 \sim \frac{2(1-b)}{\pi^2 \lambda_k^2}$$

при $\lambda_k \rightarrow \infty$,

откуда следует ограниченность по модулю величин

$$\frac{y_1(\rho; \lambda_k)}{\lambda_k \|y_1(\rho; \lambda_k)\|^2} \text{ и } \frac{y_0(\rho; \lambda_k)}{\lambda_k \|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2} \text{ при } \lambda_k \rightarrow \infty.$$

Далее, учитывая соотношения (3.3) и то, что $P_k = O(1/\lambda_k^3)$, получим, что поведение рядов в формулах (4.2) имеет тот же вид (3.4), что и для задачи I, а значит, они сходятся абсолютно и равномерно.

Выражения для нормальных напряжений для задачи II имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)}(\rho, \zeta) = & -\frac{\pi \mu P_0}{(1-\mu)(1-b^2)} + \mu_0 \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2} \left[\left((1-\mu) \lambda_k y_0(\rho; \lambda_k) - \frac{1-2\mu}{\rho} y_1(\rho; \lambda_k) \right) A_k(\zeta) - \right. \\ & \left. - \alpha \mu y_0(\rho; \lambda_k) B_k'(\zeta) \right]; \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\sigma_\zeta^{(0)}(\rho, \zeta) = -\frac{\pi P_0}{1-b^2} + \mu_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k y_0(\rho; \lambda_k)}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2} \left[\mu \lambda_k A_k(\zeta) - (1-\mu) \alpha B_k'(\zeta) \right].$$

На цилиндрических поверхностях $\rho=b$ и $\rho=1$ нормальные напряжения равны

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)} \Big|_{\rho=1} = & -\frac{\pi \mu P_0}{(1-\mu)(1-b^2)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2} D_k(\zeta); \\ \sigma_\rho^{(0)} \Big|_{\rho=b} = & -\frac{\pi \mu P_0}{(1-\mu)(1-b^2)} + \frac{2}{\pi b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k J_1(\lambda_k)}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2 J_1(b \lambda_k)} D_k(\zeta), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $D_k(\zeta)$ то же, что и в формуле (3.6).

Поведение рядов в формуле (4.3) такое же, как и в задаче I, и описывается формулой (3.7), а значит, они сходятся равномерно.

Для учета напряжений, возникающих при учете собственного веса цилиндра, к выражениям (4.3) и (4.4) следует добавить выражения (1.6).

На верхнем основании

$$\sigma_\zeta^{(0)} \Big|_{\zeta=1} = -\frac{\pi P_0}{1-b^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k J_0(\rho; \lambda_k)}{\|y_0(\rho; \lambda_k)\|^2},$$

т.е. равно (взятому со знаком «минус» разложению в ряд Фурье – Бесселя) приложенной нагрузке (4.1), что также хорошо подтверждается численными результатами.

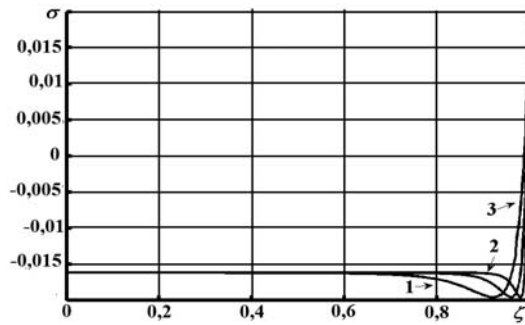


Рис. 3

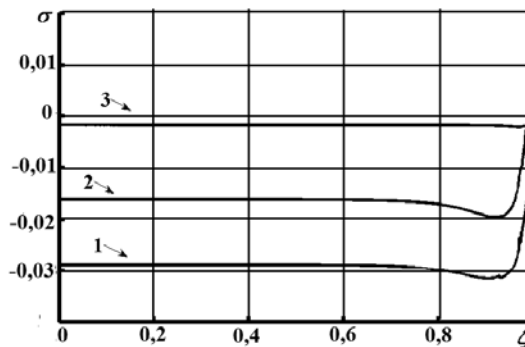


Рис. 4

При тех же исходных данных, что и для задачи I, были определены напряжения (4.4) в зависимости от параметров h и $b = a_0 / a_1$. На рис. 3 приведены значения напряжения $\sigma = \sigma_\rho^{(0)} \Big|_{\rho=1} \cdot P_*^{-1}$ для значений $h = 2, 4, 8$ м (кривые 1, 2, 3) при $b = 1/2$. На рис. 4 приведены значения того же напряжения при $h=2$ м и $b = 1/3$; $b = 1/2$ и $b = 5/6$ (кривые 1, 2, 3). Поведение этих напряжений на цилиндрической поверхности $\rho = b$ такое же, как и при $\rho = 1$. При учете удельного веса приведенные напряжения изменятся аналогично задаче I за счет линейной по ζ добавки (1.6).

Из приведенных рисунков видно, что для обеих задач в окрестности верхнего основания $\zeta = 1$ цилиндра появляется зона растягивающих нормальных напряжений. Ее появление обусловлено видом приложенной нагрузки, которая обращается в ноль на цилиндрических поверхностях и максимально – посередине между ними.

Для сравнения были вычислены напряжения для задачи II на цилиндрических поверхностях для внешней нагрузки $P(\rho) = P_* a_1^2 [\rho^3 - 1,5(1+b)\rho^2 + 3b\rho]$, которая удовлетворяет условиям $P'(b) = P'(1) = 0$, налагаемым теоремой Стеклова и уже не является симметричной относительно точки $\rho = 0,5(b+1)$. Полученные значения $\sigma = \sigma_\rho^{(0)} \Big|_{\rho=1} \cdot P_*^{-1}$ и $\sigma = \sigma_\rho^{(0)} \Big|_{\rho=b} \cdot P_*^{-1}$ приведены на рис. 5 и 6 для значений $h=2, 4, 8$ м (кривые 1, 2, 3) при $b = 1/2$.

В этом случае участки растягивающих нормальных напряжений отсутствуют.

При вычислениях первые шесть корней λ_k уравнения (2.5) приняты из таблиц в [9]. При этом следует учесть, что там приведены корни x_k уравнения $J_1(x)N_1(kx) - J_1(kx)N_1(x) = 0$ при $k > 1$, но тогда корни уравнения (2.5) получаем простой заменой $\lambda = kx$ и $k = 1/b$, т.е. $\lambda_k = x_k / b$.

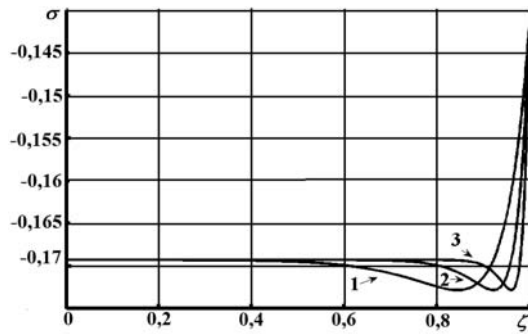


Рис. 5

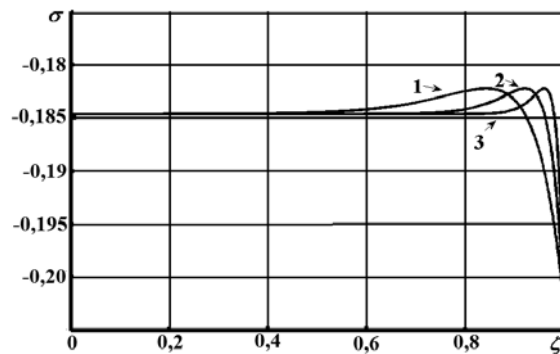


Рис. 6

Отметим, что при подсчете значений корней λ_k при больших значениях k использована асимптотическая формула [8]

$$\lambda_k \sim \frac{\pi k}{1-b} + \frac{3(1-b)}{8\pi b k} - \frac{3(1-b^3)(7b^2 + 13b + 7)}{128\pi^3 b^3 k^3}.$$

Заключение.

При помощи конечного интегрального преобразования Ханкеля построены точные решения двух осесимметричных задач теории упругости для сплошного и полого цилиндров конечной длины с учетом удельного веса материала цилиндров. На нижнем основании и боковых поверхностях цилиндров заданы условия скользящей заделки, а к верхнему основанию приложены осесимметричные нормальная и касательная нагрузки. Получены выражения для смещений и напряжений. Результаты вычислений нормальных напряжений на цилиндрических поверхностях при различных соотношениях высоты, внешнего и внутреннего радиусов цилиндров представлены в виде графиков.

РЕЗЮМЕ. За допомогою скінченного інтегрального перетворення Ханкеля побудовано точний розв'язок двох осесиметричних задач теорії пружності для суцільного та порожнистого циліндрів скінченної довжини з урахуванням їх питомої ваги. На нижній основі та на бічних поверхнях задано умови ковзного закріплення, до верхньої основи прикладено осесиметричне нормальне та дотичне навантаження. Отримано зображення переміщень та напружень. Результати розрахунків нормованих напружень на циліндричних поверхнях для різних співвідношень висоти, зовнішніх та внутрішніх циліндрів подано у вигляді графіків.

1. *Абрамян Б.Л., Александров А.Я.* Осесимметричная задача теории упругости // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – Вып. 3. – М.: Наука, 1966. – С.7 – 37.
2. *Бухаринов Г.Н.* К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра // Вестн. Ленинград. ун-та. – 1952. – № 2. – С.3 – 23.
3. *Гузь А.Н., Немши Ю.И.* Статика упругих тел неканонической формы. – К.: Наук. думка, 1984, 301с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т.; Т. 2).
4. *Капицкий О.О.* О применении p -аналитических функций в осесимметричной задаче теории упругости // Вісн. Київ. ун-та. Сер. математика и механіка. – 1962. – № 5. – Вып.1. – С.76 – 89.
5. *Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – М.: Высш. шк., 1975. – 516 с.
6. *Попов Г.Я.* Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики // Мат. методы и физ.-мат. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 74 – 89.
7. *Попов Г.Я.* Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Докл. АН. – 2011. – **439**, № 2. – С. 1 – 6.
8. *Попов Г.Я., Процеров Ю.С.* Осесимметричная задача для упругого цилиндра конечной длины с защемленной боковой поверхностью и с учетом собственного веса // Мат. методы и физ.-мат. поля. – 2014. – **57**, № 1. – С. 57 – 68.
9. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И.Стигана.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.
10. *Янке Е., Эмде Ф., Леуи Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
11. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions and orthogonal polynomials. – New York: McGraw – Hill, 1953. – 396 p.
12. *Chau K.T., Wei X.X.* Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I. Analytic solution. // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, N 40. – P. 5707 – 5732.
13. *Conte S.D., Miller K.Z., Sensenig C.B.* The numerical solution of axisymmetric problems in elasticity // Ballistic missile and space technol. – 1969. – N 4. – P. 173 – 202.
14. *Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 197.
15. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Application of the Fourier Discrete Series to Solving of Problem on the Stress State of Hollow Cylinder with Noncircular Cross Section // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 3 – 26.
16. *Meleshko V.V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder. Filon’s problem revisited // J. Eng. Math. – 2003. – **40** – P. 355 – 376.
17. *Popov G. Ya.* New Transforms for the Resolving Equations in Elastic Theory and New Integral Transforms, with Applications to Boundary – Value Problems of Mechanics // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 12. – P. 1400 – 1424.
18. *Revenko V.P.* Investigation of the stress – strain state of a finite cylinder under the action of compressive forces // Mater. Scie. – 2010. – **46**, N 3. – P. 330 – 335.
19. *Vasiliev T.A., Shaldirvan V.A.* Study of Local Singularities of a Stress Field in the Mixed Axisymmetric Problems of Bending of Circular Cylinders // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 74 – 86.
20. *Wei X.X., Chan K.T.* Three – dimensional analytical solution for finite circular cylinders subjected to indirect tensile test // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **50**, N 14. – P. 2395 – 2406.

Поступила 06.07.2012

Утверждена в печать 19.02.2015