

М. Е. Бабешко, Ю. Н. Шевченко, Н. Н. Тормахов

О ПРИМЕНИМОСТИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ,  
УЧИТЫВАЮЩИХ ТРЕТИЙ ИНВАРИАНТ ДЕВИАТОРА НАПРЯЖЕНИЙ,  
К ОПИСАНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
КРУПНОЗЕРНИСТОГО МЕТАЛЛА

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: plast@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** An applicability of one variant of the including the third stress invariant constitutive equations to description of the nonlinear deformation of coarse-grained metal is considered. The reported in literature results of experimental study of the thin-wall tubular specimens made of the coarse-grained metal are used. It is shown that these equations describe adequately the data on tension (compression) and torsion of tubular specimens.

**Key words:** constitutive equations, the third stress invariant, nonlinear deformation, coarse-grained metal, thin-wall tubular specimens.

**Введение.**

Определяющие уравнения термопластичности, учитывающие зависимость свойств изотропных материалов от вида напряженного состояния (ВНС), предложены в [8] для процессов деформирования по прямолинейным траекториям, а в [20] — для процессов по траекториям малой кривизны. В этих уравнениях для характеристики ВНС используется угол ВНС [4], определяющий ориентацию октаэдрического касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно отрицательного направления проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует минимальное главное напряжение. Угол ВНС связан простой зависимостью [4] с параметром Лоде [16], но в отличие от последнего вычисляется не через главные напряжения, а через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Определяющие уравнения [8, 20] связывают компоненты тензоров условных напряжений и относительных деформаций, которые в дальнейшем будем именовать напряжениями и деформациями, соответственно. Определяющие уравнения для процессов деформирования по траекториям малой кривизны записаны в предположении, что деформации состоят из упругих и неупругих составляющих, а направляющие тензоры напряжений и дифференциалов неупругих деформаций совпадают. Определяющие уравнения для процессов деформирования по прямолинейным траекториям записаны с использованием предположения о совпадении направляющих тензоров напряжений и деформаций. Заметим, что при прямолинейных траекториях деформирования направляющий тензор неупругих составляющих деформаций совпадает с направляющим тензором напряжений, т.е. уравнения для процессов по траекториям деформирования малой кривизны превращаются в уравнения для процессов по прямолинейным траекториям. В обоих случаях определяющие уравнения содержат две нелинейные зависимости, вычисляемые по результатам экспериментов. Одна из них выражает связь между первы-

ми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а вторая — связь между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. Для конкретизации этих зависимостей используются результаты базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных постоянных значениях угла ВНС. При линейной связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций и независимости от ВНС связи между вторыми инвариантами соответствующих девиаторов определяющие уравнения [20] и [8] превращаются в традиционные соотношения [7] теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и теории простых процессов, в основу которых положены соотношения теории Прандтля – Рейса [18, 19] и Генки [15], соответственно.

Определяющие уравнения [20] с учетом ВНС экспериментально обоснованы [1, 20] и широко используются при решении краевых задач [10, 14 и др.]. При обосновании уравнений [20] использованы результаты опытов на растяжение и внутреннее давление трубчатых образцов из материала X18H10T в диапазоне деформаций от 0 до 15%. Показано, что нелинейность связи между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций для этого материала проявляется при деформациях, превышающих 7%. Зависимость от ВНС связи между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций становится существенной в области деформаций, превышающих 5% при комнатной температуре и превышающих 3% – при высоких температурах.

В отличие от сплава X18H10T некоторые материалы, в частности, крупнозернистые металлы, проявляют зависимость диаграмм деформирования от вида нагружения в области малых деформаций. В ряде работ [2, 3, 6, 11 – 13, 21 – 24] изложены результаты теоретических и экспериментальных исследований этого явления, выполненных с использованием различных подходов. В данной работе на примере серого чугуна рассмотрена применимость варианта [9] уравнений [8, 20] для описания процессов деформирования крупнозернистых металлов при малых деформациях (менее 2,5%). Как показано в исследованиях [2, 5, 6], диаграммы одноосного растяжения, сжатия и чистого кручения серого чугуна существенно различаются в области деформаций, превышающих 0,3%, когда проявляется нелинейный характер деформирования.

### §1. Определяющие уравнения.

Используем вариант [9] определяющих уравнений [20], в котором связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций зависит от ВНС, а связь между первыми инвариантами соответствующих тензоров принята линейной. Тогда определяющие уравнения, связывающие компоненты тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и учитывающие ВНС при температуре  $T = T_0 = 20^\circ\text{C}$  как при процессах деформирования по траекториям малой кривизны, так и при процессах деформирования по прямолинейным траекториям, могут быть представлены в виде

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (K - 2G)\varepsilon_0\delta_{ij} - \sigma_{ij}^{(d)}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ij}^{(d)} = 2Ge_{ij}^{(n)}, \quad (1.2)$$

где  $K = \frac{E}{1-2\nu}$ ;  $E = 2G(1+\nu)$ ;  $E$ ,  $G$  и  $\nu$  – модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала;  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3$  – первый инвариант тензора деформаций, связанный с первым инвариантом тензора напряжений  $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$  линейной зависимостью

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.1) отличаются определением величин  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$  при использовании теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и по прямолинейным траекториям с учетом ВНС.

При проведении вычислений процесс нагружения необходимо разбить на ряд этапов. В случае использования теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны с учетом ВНС величины  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$  представляют собой компоненты девиатора (тензора) неупругих деформаций, которые в конце произвольного  $N$ -го этапа определяются как суммы приращений

$$e_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k e_{ij}^{(n)}. \quad (1.4)$$

Приращение  $\Delta_k e_{ij}^{(n)}$  определяется выражением

$$\Delta_k e_{ij}^{(n)} = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^{(n)}, \quad (1.5)$$

где  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;  $S$  – интенсивность касательных напряжений

$$S = \left( \frac{s_{ij} s_{ij}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.6)$$

$\Delta_k \Gamma^{(n)}$  – приращение интенсивности неупругих деформаций сдвига,

$$\Gamma^{(n)} = \sum_{k=1}^N \Delta_k \Gamma^{(n)}. \quad (1.7)$$

Угловыми скобками в (1.5) обозначено среднее за этап значение заключенной в них величины. Для определения  $\Delta_k \Gamma^{(n)}$  используется предположение о существовании зависимости вида

$$S = F(\Gamma, \omega_\sigma), \quad (1.8)$$

где  $\Gamma$  – интенсивность мгновенных деформаций сдвига;  $\omega_\sigma$  – угол ВНС,

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad \left( 0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3} \right); \quad (1.9)$$

$I_3(D_\sigma) = |s_{ij}|$  – третий инвариант девиатора напряжений  $D_\sigma$ .

При использовании уравнений теории процессов деформирования по прямолинейным траекториям с учетом ВНС величины  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$  можно определять по формулам

$$e_{ij}^{(n)} = s_{ij} \left( \frac{1}{2G^*} - \frac{1}{2G} \right), \quad (1.10)$$

$$2G^* = \frac{S}{\Gamma}; \quad \Gamma = \left( \frac{e_{ij} e_{ij}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad (1.11)$$

а  $S$ ,  $\Gamma$  и  $\omega_\sigma$  связаны между собой соотношением (1.8), т.е. зависимость (1.8) необходимо использовать при вычислении величин  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$  на основе обеих упомянутых теорий пластичности. Следует заметить, что от традиционных уравнений [7] теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и теории простых процессов без учета ВНС соотношения (1.1) отличаются зависимостью функции  $F$  (1.8) от ВНС и ее конкретизацией. Функция  $F$  (1.8) конкретизируется по результатам базовых опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных значениях угла ВНС,  $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$ . При конкретизации функции  $F$  (1.8) с использованием теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны предполагаем, что

$$\Gamma = S / (2G) + \Gamma^{(n)}. \quad (1.12)$$

В работах [1, 8, 9, 20] для конкретизации зависимости (1.8) используются результаты опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов растягивающим осевым усилием и равномерным внутренним давлением при значениях угла  $\omega_\sigma = 0$ ,  $\omega_\sigma = \pi/6$ ,  $\omega_\sigma = \pi/3$ ; при промежуточных значениях угла  $\omega_\sigma$  зависимость (1.8) вычисляется интерполированием.

В отличие от [1, 8, 9, 20] в настоящей работе в качестве базовых опытов для построения зависимости (1.8) используем опыты на сжатие ( $\omega_\sigma = 0$ ), кручение ( $\omega_\sigma = \pi/6$ ) и растяжение ( $\omega_\sigma = \pi/3$ ). Методика проведения таких опытов на трубчатых образцах из серого чугуна описана в [6].

## §2. Алгоритм расчета процесса деформирования трубчатого образца.

В работах [3, 6] приведены результаты экспериментов на трубчатых образцах из серого чугуна, подвергнутых совместному действию пропорционально изменяющихся осевого усилия и крутящего момента. Применим уравнения (1.1) к определению компонент деформаций в этих процессах нагружения.

В вышеупомянутых экспериментах напряженное состояние образца характеризуется компонентами тензора напряжений  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$ ; радиальное напряжение считаем пренебрежимо малым по сравнению с  $\sigma_{11}, \sigma_{12}$ , т.е.  $\sigma_{33} = 0$ . Деформированное состояние характеризуется компонентами тензора деформаций  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}$ .

При проведении расчетов деформированного состояния образца напряжения принимаем заданными; заданы также модуль упругости материала и коэффициент Пуассона. Зависимости (1.8) при значениях угла  $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$  также принимаем заданными; они вычислены по результатам базовых экспериментов на одноосное нагружение образцов сжатием, кручением и растяжением соответственно. При промежуточных значениях угла  $\omega_\sigma$  соответствующие зависимости (1.8) находим по базовым кривым путем линейной интерполяции. С учетом вышеизложенного из уравнений (1.1) получим выражения для компонент деформаций образца в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{2G(1+\nu)} + e_{11}^{(n)}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{-\nu\sigma_{11}}{2G(1+\nu)} + e_{22}^{(n)}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{-\nu\sigma_{11}}{2G(1+\nu)} - e_{11}^{(n)} - e_{22}^{(n)}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{2G} + e_{12}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В выражениях (2.1) величины  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$  определяем с учетом ВНС по формулам (1.4) – (1.7) при использовании теории процессов деформирования по траекториям малой

кривизны и формул (1.10), (1.11) – при использовании теории простых процессов; в обоих случаях используем зависимость (1.8). Определение деформаций образца можно вести по такому алгоритму. Процесс нагружения образца разбиваем на ряд этапов. При этом удобно выбрать первый этап в пределах упругости материала, тогда в (2.1)  $e_{11}^{(n)} = e_{22}^{(n)} = e_{12}^{(n)} = 0$  и на первом этапе значения деформаций определяются формулами теории упругости. Для определения компонент деформаций на произвольном  $N$  – м этапе по значениям напряжений вычисляем  $(S)_N$  (1.6) и  $(\omega_\sigma)_N$  (1.9). Затем по базовым кривым (1.8) путем линейной интерполяции определяем кривую, соответствующую  $(\omega_\sigma)_N$ , и вычисляем значение  $(\Gamma)_N$ , соответствующее  $(S)_N$ . После этого при использовании теории процессов малой кривизны с учетом ВНС вычисляем  $\Delta_N \Gamma^{(n)} = (\Gamma)_N - \frac{(S)_N}{2G(T_N)} - (\Gamma)_{N-1} + \frac{(S)_{N-1}}{2G(T_{N-1})}$ , затем вычисляем приращения неупругих компонент деформаций (1.5) и сами эти компоненты (1.4). Если же используем теорию простых процессов с учетом ВНС, то по формуле (1.11) получим  $(2G^*)_N = \frac{(S)_N}{(\Gamma)_N}$ , а затем по (1.10) определяем  $e_{ij}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}$ . По формулам (2.1) определяем искомые компоненты деформаций.

### §3. Результаты расчетов.

Согласно [6] для серого чугуна имеем  $E = 107 \cdot 10^3$  МПа;  $\nu = 0,48$ . Базовые зависимости (1.8), построенные по приведенным в [3, 6] результатам испытаний на сжатие, кручение и растяжение, т.е. при значениях угла ВНС  $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$ , приведены на рис. 1 в виде сплошных кривых 1 – 3, соответственно; треугольники соответствуют данным экспериментов. Используя эти зависимости, выполним расчеты процессов деформирования трубчатых образцов осевым усилием и крутящим моментом, для которых имеются [3, 6] экспериментальные данные о процессах пропорционального нагружения при соотношениях между главными напряжениями  $|\sigma_3|/\sigma_1 = 1, 4; 2, 0; 4, 9$ .

Переход от компонент векторов напряжений и деформаций к значениям главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  соответствующих тензоров осуществлялся по формулам [7]

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{cases} = \frac{2S}{\sqrt{3}} \cos\left(\omega_\sigma \mp \frac{\pi}{3}\right) + \sigma_0; \quad \sigma_3 = -\frac{2S}{\sqrt{3}} \cos \omega_\sigma + \sigma_0; \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} = \frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \cos\left(\omega_\varepsilon \mp \frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon_0; \quad \varepsilon_3 = -\frac{2\Gamma}{\sqrt{3}} \cos \omega_\varepsilon + \varepsilon_0, \quad (3.2)$$

где  $S$ ,  $\omega_\sigma$  и  $\Gamma$  определяются формулами (1.6), (1.9) и (1.11), соответственно;  $\omega_\varepsilon$  – угол вида деформированного состояния,

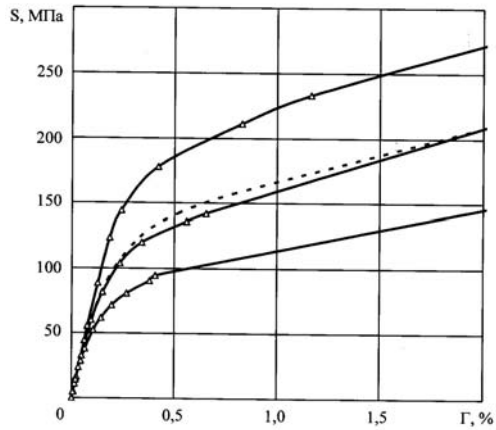


Рис. 1

$$\omega_\varepsilon = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3} J_3(D_\varepsilon)}{2 \Gamma^3} \right] \quad \left( 0 \leq \omega_\varepsilon \leq \frac{\pi}{3} \right), \quad (3.3)$$

$J_3(D_\varepsilon) = |e_{ij}|$  – третий инвариант девиатора деформаций  $D_\varepsilon$ .

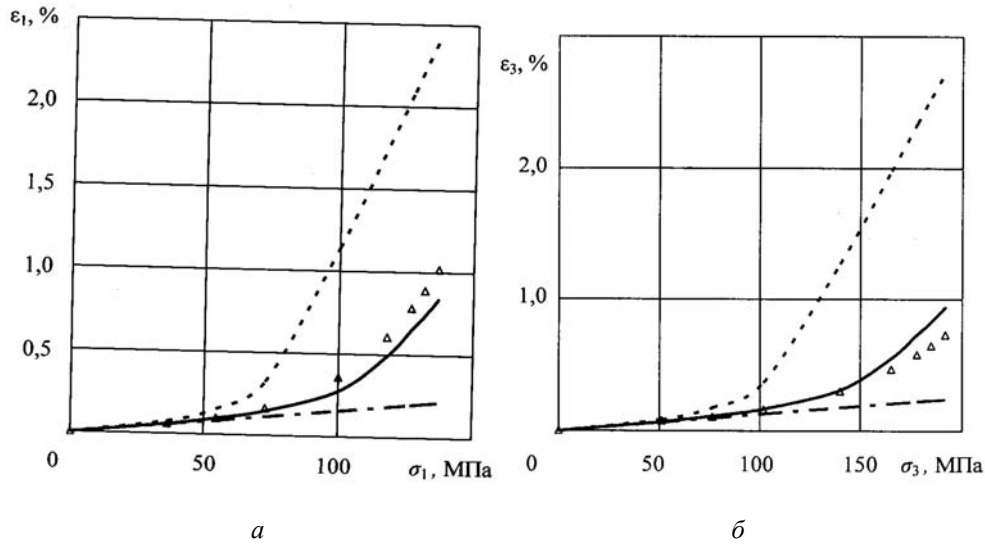


Рис. 2

Заметим, что значения деформаций, полученные в результате расчетов с использованием соотношений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и теории простых процессов, учитывающих ВНС, полностью совпадают. Эти результаты приведены сплошными линиями на рис. 2 ( $|\sigma_3|/\sigma_1 = 1,4$ ); 3 ( $|\sigma_3|/\sigma_1 = 2,0$ ) и 4 ( $|\sigma_3|/\sigma_1 = 4,9$ ) в виде зависимостей между главными значениями напряжений и деформаций.

На этих рисунках зависимости  $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$  отмечены буквой «а», а зависимости  $|\sigma_3| \sim |\varepsilon_3|$  буквой «б». Экспериментальные данные приведены в виде треугольников. Пунктирные линии на рис. 2 – 4 соответствуют расчетам по теории процессов малой кривизны [7] без учета ВНС, а штриховые – расчету по теории упругости.

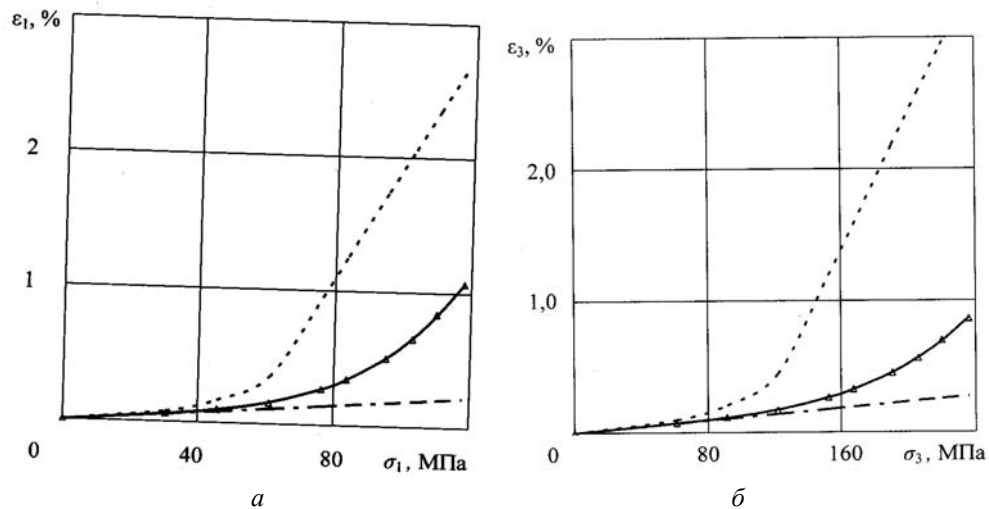


Рис. 3

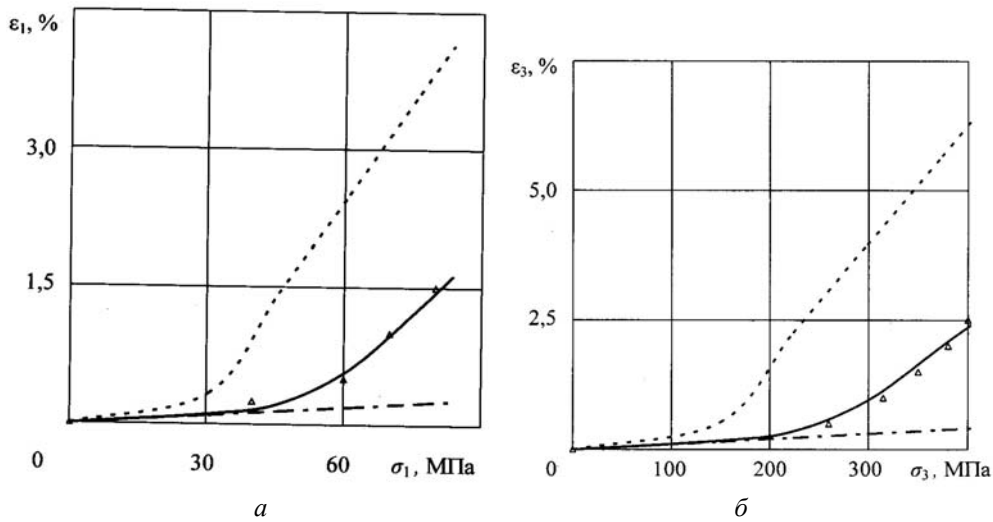


Рис. 4

Как видно из рисунков, результаты расчета приведенных процессов, полученные с использованием определяющих уравнений, учитывающих ВНС, приблизительно согласуются с экспериментальными данными.

Максимальное различие вычисленных и экспериментальных главных значений деформаций в конце процесса  $|\sigma_3|/\sigma_1 = 1,4$  (рис. 2), составляет около 20%, а в двух других процессах это различие менее 10%. Результаты расчетов, полученные по теории процессов малой кривизны без учета ВНС, в конце исследуемых процессов в 2 – 3 раза больше, а по теории упругости – в 2 – 3 раза меньше соответствующих экспериментальных значений.

В работах [1, 8, 9, 20] при определении базовых кривых принято, что эти кривые, полученные при разных видах нагружения, в которых один и тот же угол  $\omega_\sigma$ , совпадают. Проверим, насколько это предположение оправдано для серого чугуна. Для процесса, в котором  $-\sigma_1 = \sigma_2$ , угол ВНС  $\omega_\sigma = \pi/6$ , как и для кручения. Это означает, что если указанное предположение оправдано, то кривая  $S \sim \Gamma$ , вычисленная для процесса  $-\sigma_1 = \sigma_2$  при использовании линейной интерполяции и базовых кривых  $S \sim \Gamma$  при  $\omega_\sigma = 0$  (сжатие) и  $\omega_\sigma = \pi/3$  (растяжение), должна приблизительно соответствовать кривой  $S \sim \Gamma$  при одноосном кручении, т.е. кривая  $S \sim \Gamma$  для угла  $\omega_\sigma = \pi/6$  должна быть посередине между кривыми, соответствующими  $\omega_\sigma = 0$  и  $\omega_\sigma = \pi/3$ . На рис 1 вычисленная кривая приведена штриховой линией. Из рис. 1 видно, что вычисленная кривая приблизительно соответствует экспериментальной; максимальное различие между ними по деформациям не превышает 20%, а по напряжениям 5%.

Таким образом, выполненное исследование свидетельствует, что использованный вариант определяющих уравнений, содержащих третий инвариант девиатора напряжений, приблизительно описывает процессы нелинейного деформирования серого чугуна в рассмотренном диапазоне процессов пропорционального нагружения.

#### Заключение.

Рассмотрена применимость соотношений теории процессов неупругого деформирования по траекториям малой кривизны и теории простых процессов, учитывающих ВНС, к описанию нелинейного деформирования крупнозернистого металла. Используются известные из литературы результаты опытов по деформированию трубчатых образцов из серого чугуна [3, 6] при совместном действии пропорционально изменяющихся растяжения, сжатия и кручения. В определяющих соотношениях [9] ВНС

учитывается в нелинейной связи между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, а связь между первыми инвариантами соответствующих тензоров принимается линейной. Максимальные значения компонент деформаций в этих опытах составляют 2,5%. Установлено, что результаты расчета с использованием названных вариантов [9] уравнений пластичности [8, 20], в которых учитывается ВНС, удовлетворительно согласуются с полученными экспериментальными значениями компонент деформации.

Отметим, что в качестве базовых зависимостей между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций при значениях угла ВНС  $\omega_\sigma = 0, \pi/6, \pi/3$ , были использованы зависимости, вычисленные по результатам экспериментов на сжатие, кручение и растяжение, соответственно. Результаты расчета, полученные с использованием аналогичных определяющих уравнений без учета ВНС, в конце исследуемых процессов превышают экспериментальные данные более, чем в 2 раза.

**РЕЗЮМЕ.** Розглянуто застосовність варіанта визначальних рівнянь, що включають третій інваріант девиатора напружень, до опису нелінійної деформації крупнозернистого металу. Використовуються опубліковані в літературі результати експериментальних досліджень тонкостінних трубчатих зразків з даного матеріалу. Показано, що цими рівняннями адекватно описуються експериментальні дані по розтягу (стиску) та крученні трубчатих зразків з сірого чавуну.

1. *Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н.* О теории термовязкопластичности, учитывающей третий инвариант девиатора напряжений // Прикл. механика. – 2015. – **51**, №1. – С. 105 – 111.
2. *Жуков А.М.* Сопротивление некоторых материалов чистому растяжению и сжатию // Инж. журн.: Механика твердого тела. – 1986. – №4. – С. 197 – 202.
3. *Золочевский А.А.* Вариант теории пластичности материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию, при простых процессах нагружения // Прикл. механика. – 1988. – **24**, №12. – С. 79 – 84.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
5. *Ковальчук Б.И., Лебедев А.А.* Деформационные свойства серого чугуна при плоском напряженном состоянии в условиях низких температур // Пробл. прочности. – 1970. – №7. – С. 9 – 13.
6. *Паняев В.А.* О деформациях и разрушении полухрупких тел. – Автореф. дисс. .... канд. техн. наук. – Фрунзе, 1970. – 16 с.
7. *Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов П.Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328 с.
8. *Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н.* Определяющие уравнения термопластичности для процессов пропорционального нагружения с учетом вида напряженного состояния // Математичні проблеми технічної механіки: Зб. наук. праць Дніпродзержин. держ. техн. ун-ту. – Дніпродзержинськ, 2012. – Вип. 2(19). – С. 69 – 73.
9. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Approximate Description of the Inelastic Deformation of an Isotropic Material with Allowance for the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 2. – P. 139 – 148.
10. *Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N.* Studying the Axisymmetric Thermoviscoelastoplastic Deformation of Layered Shells Taking into Account the Third Deviatoric Stress Invariant // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 615 – 626.
11. *Bert C.W.* Prediction of Bending Rupture Strength of Non-linear Materials with Different Behavior in Tension and Compression // Int. J. Non-Linear Mech. – 1983. – **18**, N5. – P. 353 – 361.
12. *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A Creep Damage Model for Initially Isotropic Materials with Different Properties in Tension and Compression // Eng. Fract. Mech. – 1998. – **57**, N 5. – P. 623 – 641.
13. *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A Microcrack Description of Creep Damage in Crystalline Solids with Different Behavior in Tension and Compression // Int. J. Damage Mech. – 1999. – **8**. – P. 197 – 232.
14. *Galishin A.Z., Shevchenko Yu.N.* Determining the Axisymmetric Thermoelastoplastic State of Thin Shells with Allowance for the Third Invariant of the Deviatoric Stress Tensor // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 675 – 684.



15. *Hencky H.* Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – **4**, N4. – S. 323 – 334.
16. *Lode W.* Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metals – Eisen, Kupfer und Nickel // Z. Physik. – 1926. – **36**. – S. 913 – 939.
17. *Ohashi Y., Tokuda M., Yamashita H.* Effect of Third Invariant of Stress Deviator on Plastic Deformation of Mild Steel // J. Mech. and Phys. Solids. – 1975. – **23**, N4. – P. 295 – 323.
18. *Prandtl L.* Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht // ZAMM. – 1923. – **3**, N6. – S. 401 – 406.
19. *Reuss A.* Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie // ZAMM. – 1930. – **10**, N3. – S. 266 – 274.
20. *Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N.* Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P. 421 – 430.
21. *Shevchenko Yu.N., Tormakhov N.N.* Thermoviscoplastic Deformation Along Paths of Small Curvature: Constitutive Equations Including the Third Deviatoric Stress Invariant // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 6. – P. 688 – 699.
22. *Zolochovsky A.* Creep of Isotropic and Anisotropic Materials with Different Behaviour in Tension and Compression // Zyczkowski M. (Ed.). Creep in Structures. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – P. 217 – 220.
23. *Zolochovsky A., Galishin A., Sklepus S., Voyiadjis G.Z.* Analysis of Creep Deformation and Creep Damage in Thin-Walled Branches Shells from Materials with Different Behavior in Tension and Compression // Int. J. Solids and Struct. – 2007. – **44**, N 16. – P. 5075 – 5100.
24. *Zolochovsky A., Sklepus S., Hyde T.H., Becker A.A., Paravali S.* Numerical Modeling of Creep and Creep Damage in Thin Plates of Arbitrary Shape From Materials with Different Behavior in Tension and Compression Under Plane Stress Condition // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2009. – **80**, N 11. – P. 1406 – 1436.

Поступила 29.05.2013

Утверждена в печать 19.02.2015

---