

В. А. Максимюк¹, Е. А. Сторожук¹, И. С. Чернышенко²

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ГИБКИХ
ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПОДКРЕПЛЕННЫМ
КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: ¹ desc@inmech.kiev.ua, ² prikl@inmech.kiev.ua*

Abstract. A numerical analysis of the stress-strain state of flexible orthotropic cylindrical shell with stiffened circular hole under static loading is carried out. The procedure of incremental loading, the modified Newton-Kantorovich method and the finite element method are used. For the loaded by uniform internal pressure shell, an effect of geometrical nonlinearity, orthotropy of material, stiffness of reinforcement on the stress, strain and displacement distribution along the hole contour and in the zone of their concentration is studied.

Key words: flexible orthotropic cylindrical shell, geometrical nonlinearity, stress concentration, stiffened circular hole, finite deflections, internal pressure.

Введение.

При традиционном подходе оболочка с подкрепленным отверстием рассматривается как конструкция, состоящая из собственно оболочки и подкрепляющего ее одномерного тонкого стержня. Напряженно-деформированное состояние (НДС) каждого из этих элементов определяется уравнениями соответствующей прикладной теории и имеет свои особенности. Поэтому при построении теории, описывающей НДС оболочек с подкрепленными отверстиями, возникают трудности, связанные с необходимостью учета совместности работы элементов различной мерности и удовлетворения контактных условий [4, 7]. Отметим, что такие же проблемы возникают при исследовании НДС ребристых оболочек [3, 6, 12, 17].

Большинство результатов по исследованию концентрации напряжений в изотропных и анизотропных оболочках с подкрепленными отверстиями получено при решении линейно-упругих задач аналитическими, вариационными и численными методами и изложено в обобщающих монографиях и обзорных статьях [4, 7, 11, 16].

Решению же нелинейных краевых задач по данной проблеме посвящено значительно меньшее количество публикаций, в которых рассмотрены, в основном, оболочки вращения при действии осесимметричной нагрузки [4, 10, 13].

Лишь в отдельных работах представлены результаты решения нелинейных двумерных задач для оболочек с подкрепленными отверстиями. Так, в работах [7, 20] исследовано влияние пластических деформаций и конечных прогибов на НДС изотропных оболочек с подкрепленным криволинейным отверстием. В [14] предложен неклассический подход к расчету тонких композитных оболочек с подкрепленными криволинейными отверстиями, который базируется на использовании одних и тех же соотношений как для оболочки, так и для подкрепления. Представлены некоторые числовые результаты исследования нелинейного деформирования гибкой ортотропной цилиндрической оболочки с подкрепленным круговым отверстием при действии равномерного внутреннего давления.

Отметим, что значительный интерес вызывает также исследование влияния подкрепленного отверстия на устойчивость композитных оболочек [9, 18, 19].

Ниже с использованием подхода, описанного в работе [14], дана постановка геометрически нелинейных задач для тонких ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием, изложена методика численного решения данного класса задач и исследовано влияние геометрической нелинейности, ортотропии материала оболочки и жесткости подкрепления на распределение перемещений, деформаций и напряжений в зоне их концентрации.

1. Постановка задачи. Основные нелинейные соотношения.

Тонкую цилиндрическую оболочку радиуса R и толщины h_0 , изготовленную из ортотропного материала и ослабленную круговым отверстием радиуса r_0 , отнесем к криволинейной ортогональной системе координат (x, y, γ) с началом в центре отверстия, где x и y – длины образующей и дуги по направляющей, а γ – отсчитывается по нормали к координатной поверхности. Оболочка находится под действием поверхностных $\{p\} = \{p_1, p_2, p_3\}^T$ и краевых сил $\{m_k\} = \{T_k, S_k, Q_k, M_k\}^T$. За координатную поверхность (поверхность приведения $\gamma = 0$) примем срединную поверхность оболочки (Σ_0). Введем на развернутой координатной поверхности также полярную систему координат (r, θ) (рис. 1), одна из координатных линий которой ($r = r_0$) совпадает с контуром отверстия.

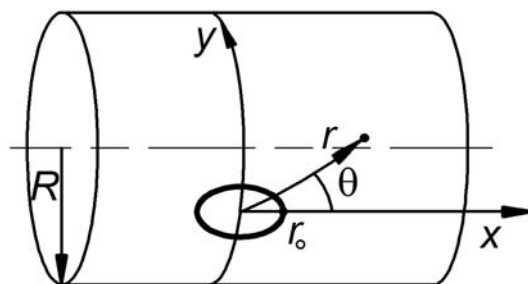


Рис. 1

Примем, что контур отверстия подкреплен криволинейным стержнем. Моделируем подкрепление фрагментом цилиндрической оболочки, срединная поверхность которой эквидистантна срединной поверхности основной оболочки. За координатную поверхность подкрепления примем эквидистантную поверхность (Σ_1), которая сопряжена со срединной поверхностью оболочки. Это позволяет использовать одни и те же соотношения при моделировании деформирования как оболочки, так и криволинейного стержня, а также учесть работу подкрепляющего элемента на растяжение (сжатие), кручение и изгиб в двух плоскостях. Впервые такой подход к расчету ребристых оболочек в конце 60-х годов прошлого века предложено в [1]. Позже с использованием аналогичного подхода разработана геометрически нелинейная теория пологих и непологих оболочек дискретно-переменной толщины [2, 3].

При повышенных уровнях нагрузки в гибкой оболочке и подкреплении имеют место большие (конечные) прогибы. Деформирование такой оболочки и тонкого подкрепляющего элемента опишем соотношениями геометрически нелинейной теории непологих оболочек в квадратичном приближении, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява [4].

Выражения для компонент мембранной (ε_{ij}) и изгибной (μ_{ij}) деформаций представим в векторной форме [14]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + \varepsilon_{xx}^*; \quad \varepsilon_{xx}^0 = \bar{e}_x \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} \varphi_x^2; \\
\varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + \varepsilon_{xy}^*; \quad \varepsilon_{xy}^0 = \bar{e}_y \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{e}_x \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy}^* = \varphi_x \varphi_y; \\
\mu_{xx} &= \mu_{xx}^0 = -\bar{e}_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}; \quad 2\mu_{xy} = 2\mu_{xy}^0 = -\bar{e}_y \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - \bar{e}_x \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}; \quad \varphi_x = \bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \\
e_{xx} &= \varepsilon_{xx} + \gamma \mu_{xx}; \quad e_{xy} = \varepsilon_{xy} + 2\gamma \mu_{xy} \quad (x \rightarrow y),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\bar{u} = u\bar{e}_x + v\bar{e}_y + w\bar{n}$ – вектор перемещений точек координатной поверхности оболочки (подкрепления); $\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{n}$ – орты криволинейной ортогональной системы координат (x, y, γ) ; $\bar{\varphi} = \varphi_x \bar{e}_x + \varphi_y \bar{e}_y$ – вектор углов поворота касательных к координатным линиям; индексы "0" и "*" вверху относятся к линейной и нелинейной частям компонент деформации.

Принимая, что направления ортотропии материала в каждой точке оболочки (подкрепления) совпадают с направлениями осей координат (x, y, γ) , физические соотношения при произвольном выборе координатной поверхности записываем согласно закону Гука в виде

$$\begin{aligned}
T_{xx} &= T_{xx}^0 + T_{xx}^*; \quad T_{yy} = T_{yy}^0 + T_{yy}^*; \quad T_{xy} = T_{xy}^0 + T_{xy}^*; \\
T_{xx}^0 &= C_{11}\varepsilon_{xx}^0 + C_{12}\varepsilon_{yy}^0 + K_{11}\mu_{xx}^0 + K_{12}\mu_{yy}^0; \\
T_{yy}^0 &= C_{21}\varepsilon_{xx}^0 + C_{22}\varepsilon_{yy}^0 + K_{21}\mu_{xx}^0 + K_{22}\mu_{yy}^0; \quad T_{xy}^0 = C_{33}\varepsilon_{xy}^0 + K_{33}2\mu_{xy}^0; \\
T_{xx}^* &= C_{11}\varepsilon_{xx}^* + C_{12}\varepsilon_{yy}^*; \quad T_{yy}^* = C_{21}\varepsilon_{xx}^* + C_{22}\varepsilon_{yy}^*; \quad T_{xy}^* = C_{33}\varepsilon_{xy}^*; \\
M_{xx} &= M_{xx}^0 + M_{xx}^*; \quad M_{yy} = M_{yy}^0 + M_{yy}^*; \quad M_{xy} = M_{xy}^0 + M_{xy}^*; \\
M_{xx}^0 &= K_{11}\varepsilon_{xx}^0 + K_{12}\varepsilon_{yy}^0 + D_{11}\mu_{xx}^0 + D_{12}\mu_{yy}^0; \\
M_{yy}^0 &= K_{21}\varepsilon_{xx}^0 + K_{22}\varepsilon_{yy}^0 + D_{21}\mu_{xx}^0 + D_{22}\mu_{yy}^0; \quad M_{xy}^0 = K_{33}\varepsilon_{xy}^0 + D_{33}2\mu_{xy}^0; \\
M_{xx}^* &= K_{11}\varepsilon_{xx}^* + K_{12}\varepsilon_{yy}^*; \quad M_{yy}^* = K_{21}\varepsilon_{xx}^* + K_{22}\varepsilon_{yy}^*; \quad M_{xy}^* = K_{33}\varepsilon_{xy}^*.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь C_{mn}, K_{mn}, D_{mn} ($m, n = 1, 2; m = n = 3$) – жесткостные характеристики оболочки (подкрепления), значения которых вычисляются согласно формулам:

$$\begin{aligned}
C_{mn} &= B_{mn}h; \quad K_{mn} = B_{mn}eh; \quad D_{mn} = B_{mn} \left(\frac{h^3}{12} + he^2 \right); \\
B_{11} &= \frac{E_{xx}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad B_{22} = \frac{E_{yy}}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}; \quad B_{12} = B_{21} = \nu_{yx}B_{11} = \nu_{xy}B_{22}; \quad B_{33} = G_{xy},
\end{aligned} \tag{3}$$

где E_{xx}, E_{yy} – модули упругости в направлениях образующей и направляющей, соответственно; G_{xy} – модуль сдвига в плоскости, параллельной координатной поверхности; h – толщина оболочки или высота подкрепления; e – отклонение срединной поверхности от координатной поверхности.

2. Методика решения геометрически нелинейных задач для ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным отверстием.

Система разрешающих уравнений получена согласно принципу возможных перемещений с помощью процедуры пошагового нагружения, модифицированного метода Ньютона – Канторовича и метода конечных элементов (МКЭ) [7]. В этом случае полная энергия гибкой цилиндрической оболочки с подкрепленным вырезом имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi^\ell = & \frac{1}{2} \sum_{i=0,1} \iint_{(\Sigma_i)} (\{\Delta \varepsilon^\ell\}^T [D] \{\Delta \varepsilon^\ell\} + \{\Delta \varphi\}^T [\bar{S}] \{\Delta \varphi\}) d\Sigma + \\ & + \sum_{i=0,1} \iint_{(\Sigma_i)} (\{\Delta \varepsilon^\ell\}^T \{\Delta m^*\} + \{\Delta \varphi\}^T [\Delta A_L]^T \{\Delta T\}) d\Sigma - \\ & - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u_0\}^T \{\Delta p\} d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\}^T \{\Delta m_k\} ds + \\ & + \sum_{i=0,1} \iint_{(\Sigma_i)} \{\Delta \varepsilon^\ell\}^T \{\bar{m}\} d\Sigma - \iint_{(\Sigma_p)} \{\Delta u_0\}^T \{\bar{p}\} d\Sigma - \int_{(\Gamma_k)} \{\Delta u_k\}^T \{\bar{m}_k\} ds . \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\{u_0\} = \{u, v, w\}^T$, $\{u_k\} = \{u_m, u_\tau, w, -\varphi_m\}^T$ – векторы перемещений точек срединной поверхности и контура оболочки; $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mu_{11}, \mu_{22}, 2\mu_{12}\}^T$ – вектор деформаций; $\{m\} = \{T_{11}, T_{22}, T_{12}, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ – вектор внутренних силовых факторов; (Σ_p) – часть области (Σ_0) , на которой заданы поверхностные силы, (Γ_k) – часть контура срединной поверхности оболочки, на которой заданы краевые силы; символами Δf и \bar{f} обозначены приращения функции f на n -м шаге нагружения и их значения в конце предыдущего шага нагружения; $\{\Delta \varepsilon^\ell\}$ – линейные относительно приращений компонент векторов перемещений и углов поворота составляющие приращений деформаций; $[\bar{S}]$ – симметричная матрица накопленных тангенциальных усилий, $\{\Delta T\}$ – значения приращений компонент вектора внутренних усилий; $[\Delta A_L]$, $\{\Delta \varphi\}$ – матрица и вектор приращений углов поворота; $[D]$ – матрица жесткостей оболочки (подкрепления).

На каждой итерации модифицированного метода Ньютона – Канторовича задачу решаем с помощью варианта МКЭ, особенность которого состоит в том, что вектор углов поворота касательных к координатным линиям $\bar{\varphi}$ не определяется по формулам (1), как это принято в классическом МКЭ для тонких оболочек, а аппроксимируется биквадратичными полиномами серендипового типа с выполнением гипотез Кирхгофа – Лява только в узлах конечного элемента [7].

Такой подход к определению вектора углов поворота, по существу, является реализацией гипотез Кирхгофа – Лява в дискретной форме. Впервые метод дискретного наложения гипотез Кирхгофа – Лява был предложен в работе [8] и далее широко применен для расчета тонких пластин и оболочек [5, 7, 15].

Из условий стационарности дискретного аналога функционала (4) получена система разрешающих уравнений для тонкой композитной цилиндрической оболочки с подкрепленным отверстием при учете конечных прогибов, которая в матричной форме для n -го шага нагружения имеет вид

$$\left([K_0] + [K_\varphi] + [K_\sigma] \right) \{ \Delta q \} = \{ \Delta P \} - \{ \Delta \Omega \} + \{ \Delta \Psi \}, \quad (5)$$

где $[K_0]$ – матрица жесткости линейно-упругих оболочки и подкрепления, $[K_\varphi]$, $[K_\sigma]$ – матрицы влияния начальных углов поворота и напряжений; $\{ \Delta q \}$ – вектор приращений узловых степеней свободы; $\{ \Delta P \}$ – вектор нагрузок; $\{ \Delta \Omega \}$ – вектор нелинейностей; $\{ \Delta \Psi \}$ – вектор невязок уравнений равновесия в конце $(n-1)$ -го шага нагружения.

3. Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с круговым отверстием при изменении жесткости его подкрепления.

Представим результаты исследования влияния величины модуля Юнга материала подкрепления на НДС возле кругового отверстия на боковой поверхности гибкой ортотропной органопластиковой цилиндрической оболочки.

Расчеты выполнены для оболочки с параметрами:

$$R/h_0 = 400; \quad r_0/h_0 = 30; \quad (6)$$

$$E_{xx} = 25,3 \text{ ГПа}; \quad E_{yy} = 38,4 \text{ ГПа}; \quad G_{xy} = 7,6 \text{ ГПа}; \quad \nu_{yx} = 0,238.$$

Контур отверстия подкреплен кольцом прямоугольного поперечного сечения высотой $h_c = 3h_0$, шириной $b_c = 3h_0$ и эксцентриситетом $e_c = 0$. Кольцо изготовлено из однородного изотропного материала с коэффициентом Пуассона $\nu^c = 0,3$.

Оболочка нагружена внутренним давлением интенсивности $q = q_0 \cdot 10^5$ Па, осевыми растягивающими усилиями $T_k = qR/2$ на торцах и перерезывающим усилием $Q_k = qr_0^2 / (2r_0 - b_c)$, приложенным к оси подкрепления.

Учитывая геометрическую и силовую симметрию, рассматриваем четвертую часть оболочки. На линиях $x = 0$ и $y = 0$ заданы условия симметрии, на контуре отверстия – условия контакта оболочки и подкрепляющего элемента, а на достаточном расстоянии от контура отверстия ($x = 6r_0$ и $y = 6r_0$) – условия безмоментности.

Результаты решения линейной (ЛЗ) и геометрически нелинейной (ГНЗ) задач для цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием получены в виде таблиц и графиков распределения перемещений, деформаций и напряжений для интенсивности внутреннего давления $q_0 = 2$ и ряда значений модуля Юнга материала подкрепления: 1) $E^c = 0$ ($N = 1$; свободное отверстие); 2) $E^c = 10$ ГПа ($N = 2$; подкрепление пониженной жесткости); 3) $E^c = 67$ ГПа ($N = 3$; сплав АМг-6); 4) $E^c = 110$ ГПа ($N = 4$; подкрепление, близкое к оптимальному); 5) $E^c = 10^3$ ГПа ($N = 5$; подкрепление повышенной жесткости); 6) $E^c = 67 \cdot 10^5$ ГПа ($N = 6$; жесткое включение).

На рис. 2 ($N = 1; 2; 3$) и рис. 3 ($N = 4; 5; 6$) показан характер изменения относительных прогибов ($\tilde{w} = w/h_0$) вдоль контура отверстия. Здесь пунктирные линии соответствуют решениям линейной, а сплошные – геометрически нелинейной задач.

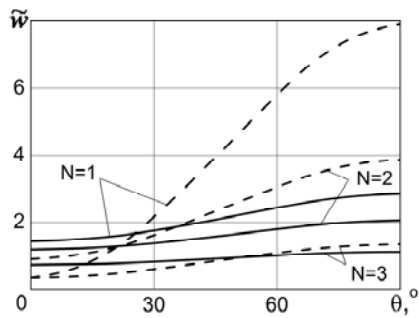


Рис. 2

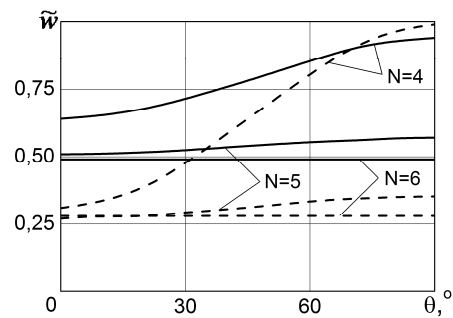


Рис. 3

Из анализа полученных результатов следует, что для свободного ($N=1$), слабо- и умеренноподкрепленных отверстий ($N=2; 3; 4$) максимальные прогибы имеют место на контуре отверстия в точке $\theta = 90^\circ$, а для подкрепления повышенной жесткости и жесткого включения ($N=5; 6$) – в сечении $\theta = 90^\circ$ на значительном расстоянии от контура отверстия ($r \approx 4r_0$ для ЛЗ и $r \approx 6r_0$ для ГНЗ). Подкрепление контура отверстия стержнем заданной жесткости приводит к уменьшению максимальных прогибов. Наибольшее понижение максимальных прогибов на контуре отверстия имеет место при жестком включении и составляет 96% и 83%, соответственно, для линейной и геометрически нелинейной задач. С увеличением жесткости подкрепления максимальные прогибы монотонно уменьшаются. Учет геометрической нелинейности приводит к уменьшению максимальных прогибов для первых четырех вариантов подкрепления и к их увеличению на контуре отверстия для пятого и шестого вариантов расчета. Видно, что нелинейность в наибольшей мере влияет на максимальные прогибы оболочек со свободным и слабоподкрепленным отверстиями и в наименьшей мере – для варианта подкрепления 4. Так, для данных вариантов расчета максимальные прогибы для ГНЗ отличаются от соответствующих прогибов для ЛЗ на 64%, 47% и 5%, соответственно.

В табл. 1, 2 приведены значения радиальных (e_r) и окружных (e_θ) деформаций на контуре отверстия в нескольких узловых точках ($\theta = 0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$) на внешней ($\tilde{\gamma} = \gamma/h_0 = 0,5$) и внутренней ($\tilde{\gamma} = -0,5$) поверхностях оболочки.

Таблица 1

Задача	θ	$\tilde{\gamma}$	$e_r \cdot 10^2$					
			N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6
ЛЗ	0°	0,5	-0,2331	-0,4048	0,0505	0,1064	0,1468	0,0042
		-0,5	-0,4895	0,1893	0,3503	0,3999	0,5075	0,4273
	45°	0,5	-0,7507	-0,1607	0,1742	0,1993	0,2065	0,1277
		-0,5	-0,2818	-0,3055	-0,0575	0,0343	0,2734	0,4195
	90°	0,5	-0,1930	0,1755	0,1358	0,1093	0,0790	0,2300
		-0,5	0,2023	-0,1912	-0,0080	0,0667	0,2328	0,2549
ГНЗ	0°	0,5	-0,2609	-0,2108	0,0898	0,1355	0,1959	0,0470
		-0,5	-0,2582	0,0357	0,2773	0,3487	0,4796	0,4115
	45°	0,5	-0,4321	-0,1570	0,1557	0,1994	0,2471	0,1930
		-0,5	-0,2876	-0,2126	-0,0370	0,0358	0,2554	0,3823
	90°	0,5	-0,1145	0,0329	0,1297	0,1404	0,1475	0,2688
		-0,5	-0,0090	-0,0661	-0,0025	0,0375	0,1770	0,2425

Таблица 2

Задача	θ	$\tilde{\gamma}$	$e_{\theta} \cdot 10^2$					
			$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
ЛЗ	0°	0,5	0,9249	0,8765	0,2409	0,1485	-0,0017	0,0001
		-0,5	2,0691	1,0793	0,3632	0,2390	0,0113	0,0001
	45°	0,5	1,4289	0,7852	0,2448	0,1647	0,0219	0,0001
		-0,5	0,9888	0,5671	0,2360	0,1675	0,0248	0,0001
	90°	0,5	1,2440	0,6237	0,2679	0,1954	0,0458	0,0000
		-0,5	-1,3152	-0,1814	0,0904	0,0867	0,0357	0,0000
ГНЗ	0°	0,5	1,0578	0,7769	0,2721	0,1758	0,0014	0,0002
		-0,5	1,0709	0,7495	0,3037	0,2081	0,0114	0,0002
	45°	0,5	0,9446	0,6104	0,2360	0,1653	0,0235	0,0001
		-0,5	0,7272	0,4961	0,2250	0,1632	0,0255	0,0001
	90°	0,5	0,6992	0,4435	0,2201	0,1685	0,0450	0,0000
		-0,5	0,0315	0,1111	0,1309	0,1093	0,0363	0,0000

Из представленных данных имеем, что для свободного отверстия ($N=1$), подкрепления пониженной жесткости ($N=2$) и подкрепления, изготовленного из сплава АМг-6 ($N=3$), максимальными являются окружные деформации на контуре отверстия в точке $\theta=0^\circ$, а для более жестких подкреплений ($N=4; 5; 6$) максимальными становятся радиальные деформации в той же узловой точке $\theta=0^\circ$ на внутренней поверхности оболочки. При увеличении жесткости подкрепления изменение максимальных деформаций имеет немонотонный характер: сначала происходит значительное уменьшение, потом некоторое увеличение, а затем незначительное понижение. Наибольшее понижение максимальных деформаций, вызванное подкреплением контура отверстия тонким стержнем, имеет место для подкрепления, изготовленного из сплава АМг-6, и составляет 82% и 72%, соответственно, для ЛЗ и ГНЗ. Учет конечных прогибов при расчете рассматриваемых цилиндрических оболочек приводит к уменьшению максимальных деформаций для всех вариантов подкрепления кругового отверстия. Влияние геометрической нелинейности на максимальные деформации с увеличением жесткости подкрепления уменьшается. Так, отличие максимальных деформаций, полученных из решений ЛЗ и ГНЗ, для свободного отверстия составляет 48%, для подкрепления, изготовленного из сплава АМг-6 – 16% и для жесткого включения – 3,5%.

Величины радиальных ($\sigma_r = \sigma_r^0 \cdot 10^5$ Па) и окружных ($\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^0 \cdot 10^5$ Па) напряжений, вычисленных в тех же точках, что и соответствующие деформации, представлены в табл. 3, 4.

Таблица 3

Задача	θ	$\tilde{\gamma}$	σ_r^0					
			$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$	$N=6$
ЛЗ	0°	0,5	-33	-515	283	373	385	11
		-0,5	9	1173	1148	1201	1341	1123
	45°	0,5	-7	556	848	824	668	381
		-0,5	-11	-128	222	390	853	1170
	90°	0,5	10	1091	710	558	344	918
		-0,5	-17	-877	25	320	951	1017
ГНЗ	0°	0,5	-23	-67	406	466	516	123
		-0,5	-8	563	919	1047	1268	1082
	45°	0,5	-17	329	778	819	779	560
		-0,5	-10	24	241	371	802	1071
	90°	0,5	-18	409	655	666	617	1072
		-0,5	-19	-194	719	218	729	968

Таблица 4

Задача	θ	$\tilde{\gamma}$	σ_{θ}^0					
			N=1	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6
ЛЗ	0°	0,5	3544	3243	993	659	85	3
		-0,5	7949	4422	1668	1204	363	268
	45°	0,5	3306	1994	955	771	387	187
		-0,5	1921	1199	668	592	475	533
	90°	0,5	3150	1749	789	582	170	144
		-0,5	-3330	-597	233	270	240	160
ГНЗ	0°	0,5	4059	2967	1142	786	128	30
		-0,5	4109	3012	1385	1048	346	258
	45°	0,5	2075	1495	900	767	440	267
		-0,5	1533	1101	639	565	453	490
	90°	0,5	932	1186	660	531	211	168
		-0,5	1766	251	343	311	206	152

Результаты решений ЛЗ и ГНЗ свидетельствуют о том, что для всех вариантов жесткости подкрепления максимальные напряжения имеют место на контуре отверстия в точке $\theta = 0^\circ$ на внутренней поверхности оболочки. Исключение составляет жесткое включение, когда напряжения для ЛЗ достигают максимального значения в точке ($r = r_0; \theta = 45^\circ$) на внутренней поверхности. Для оболочки со свободным, слабо- и умеренноподкрепленными отверстиями максимальными являются окружные напряжения, а для оболочки с подкреплением повышенной жесткости и жестким включением – радиальные напряжения. С увеличением жесткости подкрепления максимальные напряжения изменяются немонотонно.

Определим оптимальное подкрепление с помощью минимаксного критерия, который приводит к минимизации максимального напряжения, т. е.

$$N_{opt} = \arg \min_{N \in [N]} \max_{(x,y,\gamma) \in \Omega} \sigma[N, (x, y, \gamma)], \quad (7)$$

где $[N]$ – множество вариантов допустимых значений жесткостей подкрепляющего стержня; Ω – область изменения криволинейных координат (x, y, γ) , к которым отнесена оболочка.

Применив минимаксный критерий (7) к результатам решения задачи в линейной постановке, получаем, что оптимальным подкреплением является жесткое включение, а в геометрически нелинейной – вариант подкрепления 4.

Таким образом, оптимальное подкрепление контура отверстия вызывает наибольшее понижение максимальных напряжений, которое составляет 74% и 85%, для ГНЗ и ЛЗ, соответственно.

Отметим, что для сферической оболочки с подкрепленным круговым отверстием при действии равномерного внутреннего давления из минимаксного критерия (7) следует равенство максимальных радиальных и окружных напряжений ($\sigma_r^{\max} = \sigma_{\theta}^{\max}$).

Учет конечных прогибов приводит к уменьшению максимальных напряжений для всех вариантов подкрепления кругового отверстия. Геометрическая нелинейность проявляется, в основном, в случаях неподкрепленного и подкрепленных кольцами пониженной жесткости отверстий. С увеличением жесткости подкрепления ее влияние на напряженное состояние оболочек уменьшается. Так, учет конечных прогибов в случае неподкрепленного отверстия приводит к уменьшению максимальных напря-

жений на 48%, в случае подкрепления контура отверстия кольцом из сплава АМг-6 – на 17% и в случае жесткого включения – на 7,5%.

4. Влияние ортотропии материала на нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с подкрепленным отверстием.

Изменение ориентации осей ортотропии композитных материалов относительно системы координат (x, y) на срединной поверхности оболочки позволяет исследовать влияние ортотропии на НДС оболочек при прочих одинаковых условиях. Сопоставим результаты расчетов НДС цилиндрической оболочки (пункт 3), для которой соотношение модулей упругости материала составляло $\tilde{E} = E_{xx}/E_{yy} = 0,659$, с расчетом такой же оболочки, но с измененной ориентацией осей ортотропии композита так, что $\tilde{E} = 1,518$.

Результаты сопоставления максимальных прогибов, деформаций и напряжений для оболочек со свободным ($N=1$) и подкрепленным ($N=3$) отверстиями, а также жестким включением ($N=6$) приведены в табл. 5.

Таблица 5

\tilde{E}	N	ЛЗ			ГНЗ		
		\tilde{w}_{\max}	$e_{\max} \cdot 10^2$	σ_{\max}^0	\tilde{w}_{\max}	$e_{\max} \cdot 10^2$	σ_{\max}^0
0,659	1	7,897	2,0691	7949	2,858	1,0709	4109
	3	1,354	0,3632	1668	1,119	0,3037	1385
	6	0,792	0,4273	1170	0,734	0,4115	1082
1,518	1	8,109	2,4971	6317	3,318	1,3429	3396
	3	1,690	0,3915	1295	1,500	0,3336	1069
	6	1,220	0,5098	1374	1,166	0,4615	1320

Представленные данные свидетельствуют о том, что для всех трех вариантов жесткости подкрепления увеличение модуля упругости в направлении образующей приводит к увеличению максимальных прогибов, соответственно, на 3%, 25%, 54% для ЛЗ и 16%, 34%, 59% для ГНЗ. Видно, что ортотропия материала влияет на прогибы в большей степени при решении задач в нелинейной постановке, чем в линейной. Максимальные деформации в данном случае также увеличиваются – на 21%, 8%, 19% для ЛЗ и 26%, 10%, 12% для ГНЗ. Влияние ортотропии на напряженное состояние зависит от жесткости подкрепления и для двух крайних случаев – свободный контур отверстия и жесткое включение – имеет, подобно [13], противоположный характер. Так, максимальные напряжения в рассматриваемом случае для свободного и подкрепленного отверстий уменьшаются, соответственно, на 21%, 22% для ЛЗ и 17%, 23% для ГНЗ, а для жесткого включения – увеличиваются на 17% для ЛЗ и 22% для ГНЗ, что можно объяснить увеличением подкрепляющего действия более жесткой части оболочки на ее менее жесткую часть.

Заключение.

Таким образом, в работе дана постановка и изложена методика численного решения геометрически нелинейных задач для тонких ортотропных цилиндрических оболочек с подкрепленным круговым отверстием, которая базируется на применении процедуры пошагового нагружения, модифицированного метода Ньютона – Канторовича и метода конечных элементов. Особенность предложенной методики состоит в использовании одних и тех же соотношений при моделировании деформирования как оболочки, так и подкрепляющих элементов, а также в реализации геометрических гипотез Кирхгофа – Лява в дискретной форме. С помощью разработанной методики и составленных программ исследовано влияние конечных прогибов, ортотропии материала оболочки и жесткости подкрепления на напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с

круговым отверстием при действии равномерного внутреннего давления. Числовые результаты представлены в виде таблиц и графиков и дан их анализ.

РЕЗЮМЕ. Проведено чисельний аналіз напружено-деформованого стану гнучких ортотропних циліндричних оболонок з підкріпленням круговим отвором при дії статичного навантаження. Використано процедуру покрокового навантаження, модифікований метод Ньютона – Канторовича і метод скінченних елементів. Для оболонки, навантаженої рівномірним внутрішнім тиском, досліджено вплив геометричної нелінійності, ортотропії матеріалу і жорсткості підкріплення на розподіл напружень, деформацій і переміщень вздовж контуру отвору та в зоні їх концентрації.

1. Жилин П.А. Общая теория ребристых оболочек // Прочность гидротурбин / Тр. ЦКТИ. – 1968 – Вып. 88. – С. 46 – 70.
2. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: Физматлит. 2010. – 288 с.
3. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инж.-строит. журн. – 2013. – № 5. – С. 100 – 106.
4. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А.Н.Гузь, И.С.Чернышенко, В.Н.Чехов и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 636 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.1).
5. Areias P.M.A., Song J.-H., Belytschko T. A finite-strain quadrilateral shell element based on discrete Kirchhoff – Love constraints // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2005. – **64**. – P. 1166 – 1206.
6. Bushnell D. Analysis of Ring-stiffened Shells of Revolution under Combined Thermal and Mechanical Loading // AIAA J. – 1971. – **9**, N 3. – P. 401 – 410.
7. Guz A.N., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Two-Dimensional Static Problems for Thin Shells with Reinforced Curvilinear Holes // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1269 – 1300.
8. Herrmann L.R., Campbell D.M. A finite-element analysis for thin shells // AIAA J. – 1968. – N 6. – P. 1842 – 1847.
9. Hilburger M.W., Starnes J.H. Buckling behavior of compression-loaded composite cylindrical shells with reinforced cutouts // Int. J. Non-Linear Mech. – 2005. – **40**, N 7. – P. 1005 – 1021.
10. Kaufman A., Spera D. Investigation of the elastic-plastic stress state around reinforced opening in a spherical shell // NASA Scientific and Technical Publications / Washington, 1965. – P. 1–27.
11. Kharat A., Kulkarni V.V. Stress Concentration at Openings in Pressure Vessels – A Review // Int. J. Innov. Res. in Sci., Eng. and Tech. – 2013. – **2**, N3. – P. 670 – 678.
12. Maiborodina N.V., Meish V.F. Forced Vibrations of Ellipsoidal Shells Reinforced with Transverse Ribs Under a Nonstationary Distributed Load // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 693 – 701.
13. Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 685 – 692.
14. Maximyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Stress State of Flexible Composite Shells with Stiffened Holes // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P.558 – 565.
15. Murthy S.S., Gallagher R.H. Anisotropic cylindrical shell element based on discrete Kirchhoff theory // Int. J. Numer. Meth. in Eng. – 1983. – **19**, N 12. – P. 1805 – 1823.
16. Pilkey W.D., Pilkey D.D. Peterson's Stress Concentration Factors. – New York: John Wiley & Sons, – 2008. – 560 p.
17. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of Recent Literature on Static Analyses of Composite Shells: 2000 – 2010 // Open Journal of Composite Materials.– 2012.– **2**. – P. 61 – 86.
18. Senocak E., Waas A.M. Optimally reinforced cutouts in laminated circular cylindrical shells // Int. J. Mech. Sci. – 1996. – **38**, N 2. – P. 121 – 140.
19. Shi S., Sun Z., Ren M., Chen H., Hu X. Buckling response of advanced grid stiffened carbon-fiber composite cylindrical shells with reinforced cutouts // Composites Part B: Engineering. – 2013. – **44**, N 1. – P. 26 – 33.
20. Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Reinforcement of the Contour of a Hole in an Inelastic Shell // Int. Appl. Mech. – 1988. – **24**, N 11. – P. 1064 – 1068.

Поступила 28.12.2013

Утверждена в печать 19.02.2015