В . Б . Л а р и н

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОТКАЗОВ НАВИГАЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова, 3,
03057, Киев, Украина; e-mail:* model@inmech.kiev.ua

Abstract. The algorithms of identification of faults of navigation measuring elements (sensor) are given. A possibility is shown for using purposely the identification of such a sensor the computing procedures similar to the Kalman filter procedures. The case is considered when five sensors are used to measuring the angular velocity. It is shown that here the computing procedures of sensor fault identification can be simplified. An efficiency of offered algorithms is illustrated by examples.

Key words: identification of faults of navigation measuring elements, Kalman filter, singular value decomposition.

Введение.

Задачи определения нарушений функционирования элементов той или иной системы (отказы, повреждаемость и т. п.) привлекали и продолжают привлекать внимание исследователей [2, 4, 6, 9, 13]. Важное место занимают эти вопросы и в навигационных задачах [4, 8, 10, 11]. В частности, в задаче идентификации отказавшего датчика угловой скорости (ДУС) в навигационной системе [4, 6]. Ниже, базируясь на результатах [7], показана возможность использования для идентификации отказавшего-ся ДУС'а вычислительных процедур, аналогичных процедурам фильтра Калмана [12]. Далее подробно рассматривается случай, когда для измерения угловой скорости объекта используются 5 ДУС'ов [6]. Показано, что в этом случае можно упростить вычислительные процедуры (использовать только процедуры вычисления детерминанта матрицы 4x4 или ее числа обусловленности).

§1. Задача идентификации отказов датчиков [4].

Выход y измерительного блока связан с измеряемой величиной ω и вектором ошибок e следующим линейным стационарным соотношением:

$$y = A\omega + e. \tag{1.1}$$

Здесь векторы $y, e \in R^n$, $\omega \in R^{n-m}$, постоянная матрица $A \in R^{n\times m}$, т. е. m – число избыточных датчиков. Принимаем, что в случае отказа i-го датчика ошибка e_{*i} имеет следующий вид:

$$e_{*i} = [0 \ldots 0 \rho_i 0 \ldots 0]'. \tag{1.2}$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование. Вводим матрицу V (размера $m\times n$), удовлетворяющую условию

$$VA = 0. \tag{1.3}$$

Строим ортогональный проектор G, проектирующий вектор произвольной погрешности e_* в соответствующий вектор минимальной нормы e_0, т. е.

$$e_0 = Ge_*. \tag{1.4}$$

Учитывая, что вектор ошибки имеет структуру (1.2), предложим следующий алгоритм определения i-го номера отказавшего датчика. Столбцы матрицы G обозначим $k=1,\ldots,n$, т. е. $G=\begin{bmatrix} g_1 & \ldots & g_n \end{bmatrix}$. Находим минимальное значение функционала

$$J(k)=\|q_k\|^2; \; q_k=\rho_k g_k - e_0; \tag{1.5}$$

$$\rho_k=\frac{g_k' e_0}{\|g_k\|^2}. \tag{1.6}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ – норма вектора, т. е. $\|x\|^2=x'x$. Значение $k=k_*$, для которого выполняется условие $k_*=\arg\min J(k)$, соответствует номеру отказавшего датчика, ошибка которого ρ_k определяется (1.6). Реализация алгоритма предполагает получение одного из возможных вариантов вектора погрешности e_* (1.2), для определения которого используется значение вектора

$$p=Vy. \tag{1.7}$$

Эту задачу в [4] предлагаем сводить к задаче линейного программирования.

§2. Алгоритм, основанный на сингулярном разложении [3].

Пусть сингулярное разложение [1] матрицы A в (1.1) имеет вид

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma \\ 0\end{bmatrix}W'. \tag{2.1}$$

Здесь U,W – ортогональные матрицы, соответственно, размеров $n\times n$ и $(n-m)\times$ $\times(n-m)$; Σ – диагональная матрица размера $(n-m)\times(n-m)$, диагональные элементы которой больше нуля. Разобьем матрицу U на блоки $U=\begin{bmatrix}U_1 U_2\end{bmatrix}$, причем размер блока U_2 равен $n\times m$. Приняв во внимание ортогональность матрицы U, т. е.

$$U'U=\begin{bmatrix}U_1' \\ U_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1 U_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & 0 \\ 0 & E\end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

после умножения слева матрицы A в (2.1) на U_2' получим аналог (1.3)

$$U_2'A=0. \tag{2.3}$$

В (2.2) и далее E – единичная матрица соответствующего размера. Умножив левую и правую части уравнения (1.1) на U_2 и приняв во внимание (2.3), получим аналог (1.7)

$$p=U_2'y=U_2'e. \tag{2.4}$$

Вектор e_0, имеющий минимальную норму и удовлетворяющий (2.4), выражается следующим образом через векторы y,e [5]:

$$e_0=U_2U_2'y=U_2U_2'e. \tag{2.5}$$

Согласно (2.5), проектор G, фигурирующий в (1.4), имеет вид

$$G=U_2U_2'. \tag{2.6}$$

Если обозначить U'_{2k}, $k=\overline{1,n}$, столбцы матрицы U'_2, т.е. $U'_2=\left[U'_{21}U'_{22}\ldots U'_{2n}\right]$, то столбцы проектора G в (2.6) можно записать так:

$$g_k=U_2U'_{2k}. \tag{2.7}$$

Следовательно, $\|g_k\|^2=U_{2k}U'_2U_2U'_{2k}=U_{2k}U'_{2k}$ и далее получим

$$\rho_k=\frac{U_{2k}U'_2U_2U'_2y}{U_{2k}U'_{2k}}=\frac{U_{2k}U'_2y}{U_{2k}U'_{2k}}. \tag{2.8}$$

Таким образом, после подстановки выражений (2.5), (2.7), (2.8) в (1.5) имеем

$$J(k)=\|g_k\|^2=y'U_2(\alpha_kU'_{2k}U_{2k}-E)^2U'_2y=y'U_2(E-\alpha_kU'_{2k}U_{2k})U'_2y,\ \alpha_k^{-1}=U_{2k}U'_{2k}. \tag{2.9}$$

Использование сингулярного разложения (2.1) позволяет в соответствии с соотношениями (2.8), (2.9) выразить в явном виде (через результаты наблюдения $-y$) функционал (1.5) и оценку погрешности датчика (1.6).

Таким образом, использование сингулярного разложения матрицы существенно упрощает вычислительную процедуру идентификации отказов.

Отметим, что для получения ортогональной матрицы U можно использовать не только сингулярное разложение (2.1), но и более простую вычислительную процедуру, а именно QR-разложение [5].

§3. Фильтр Калмана.

Обратимся к системе (1.1), однако примем, как и в [6], что измерения угловой скорости сопровождаются случайными помехами w, а именно:

$$y=A\omega+e+w, \tag{3.1}$$

где вектор w является вектором случайных величин с такими характеристиками: $<w>=0$, $<ww'>=\sigma^2E$. Здесь и далее $<\ >$ – символ математического ожидания.

Таким образом, вектор y можно рассматривать как доступный вектор фактических (содержащих ошибки) измерений.

Известно, что решение переопределенной системы

$$Ax=b \tag{3.2}$$

можно записать в виде

$$\overline{x}=(A'A)^{-1}A'b. \tag{3.3}$$

Рассмотрим рекуррентную схему построения решений (3.3) системы (3.2). Пусть в результате использования первых k уравнений системы (3.2) получена оценка решения $\overline{x}_k$:

$$\overline{x}_k=(A'_kA_k)^{-1}A'_kb_k,$$

где матрицы A_k и вектор b_k определяются первыми k уравнениями (3.2).

В данном случае для получения последовательности решений x_k можно использовать рекуррентную процедуру [12].

Рассмотрим задачу получения $k+1$ оценки вектора x, следуя [12, п. 3]. Итак, предположим, что доступно новое $k+1$ измерение сигнала, т. е. система пополнится еще одним уравнением

$$A_{k+1}x=b_{k+1},\quad A_{k+1}=\begin{bmatrix}A_k\\ \alpha'\end{bmatrix},\ b_{k+1}=\begin{bmatrix}b_k\\ z_{k+1}\end{bmatrix}.$$

Согласно [12, ур-я (3.45), (3.46), (3.48)] оптимальная оценка $\overline{x}_{k+1}$ вектора x, полученная в результате $k+1$ измерения сигнала, связана с оптимальной оценкой $\overline{x}_k$, полученной в результате использования k измерений, следующим образом:

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k + \tilde{P}_k \alpha (\alpha' \tilde{P}_k \alpha + \sigma^2)^{-1} (z_{k+1} - \alpha' \overline{x}_k) ;$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \tilde{P}_k - \tilde{P}_k \alpha (\alpha' \tilde{P}_k \alpha + \sigma^2)^{-1} \alpha' \tilde{P}_k , \qquad (3.4)$$

где $\overline{x}_k = (A_k' A_k)^{-1} A_k' b_k$, $P_k = (A_k' A_k)^{-1}$, $\tilde{P}_k = P_k \sigma^2$.

Отметим, что эти соотношения, по сути, описывают алгоритм фильтра Калмана.

Как отмечено в [7, п. 8.3.1.2], рассмотренный выше фильтр Калмана позволяет вычислить и такие параметры, которые дают возможность выявить «отказ». Обозначим

$$Y_{\nu k} = (\alpha' \tilde{P}_k \alpha + \sigma^2)^{-1}, \ \nu_k = z_{k+1} - \alpha' \overline{x}_k .$$

Здесь обозначения совпадают с принятыми в (3.4).

В этом случае функция правдоподобия имеет вид (соотношение [7, ф-ла (8.25)]:

$$S(\nu_k) = \exp\left(-\frac{1}{2} \nu_k' Y_{\nu k} \nu_k \right) .$$

Этой функции сопоставляется статистика (соотношение [7, ур-е (8.27)]):

$$k_s = \frac{\nu_k' Y_{\nu k} \nu_k}{\ell} . \qquad (3.5)$$

В (3.5) ℓ – размерность вектора ν_k. В [7] отмечено, что если в алгоритме фильтрации правильно выбраны модели, помехи являются центрированными нормальными случайными процессами, то k_s имеет χ^2 -распределение.

В связи с тем, что на практике эти предположения не всегда выполняются, для определения отказов в [7] предлагаем следующую процедуру. Выбираем некоторое значение $k_{s\max}$, которое определяет интервал изменения k_s, отвечающий нормальной работе системы. Если $k_s > k_{s\max}$, то принимаем, что в системе произошел отказ.

Покажем, каким образом соотношение (3.5) можно использовать в задаче определения номера отказавшего ДУС'а, т.е. в случае, когда в (1.1) $n-m=3$. Пополним процедуру (3.4) вычислением (определяемой (3.5)) величины k_s. Таким образом, получим последовательность значений $k_{s1}, k_{s2}, \ldots, k_{s,n-3}$. Эта последовательность позволяет определить значения $\mu_1 = k_{s2} / k_{s1}$, $\mu_2 = k_{s3} / k_{s2}$, … . Для демонстрации сути подхода предположим, что в соотношении (1.2), $i = n$, т.е. уравнение, соответствующее отказавшему ДУС'у, стоит на последнем месте в системе (3.1). Очевидно, что в этом случае, при достаточно малом уровне шума w в (3.1) последнее значение в последовательности μ_j будет максимальным. В свою очередь это будет указывать на то, что отказавший ДУС имеет номер n. В общем случае, когда номер отказавшего ДУС'а есть $i \ (i \le n)$, можно обобщить описанную выше процедуру, включив в нее следующие шаги. На каждом шаге выполняется циклическая перестановка уравнений в системе (3.1): последнее уравнение становится первым, первое вторым и т.д. После этой перестановки, на этом же шаге (номер которого $r \, (0 \le r \le n-1)$) вычисляется соответствующее значение последовательности μ_j. Последнее значение в этой последовательности обозначим μ_r^*. Номер шага r, на котором получено максимальное значение μ_r^*, связан с номером i отказавшего ДУС'а следующим образом:

$$i = n - r. \tag{3.6}$$

Проиллюстрируем на примере эту процедуру.

Пример 1 [6]. Матрица A в (1.1) имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,97204 & -0,60075 & 0 & 0 & -0,60075 \\ 0 & -0,77653 & 0,47992 & -0,47992 & 0,77653 \\ -0,23482 & -0,18997 & 0,87731 & 0,87731 & -0,18997 \end{bmatrix}'.$$

Угловая скорость $\omega = [1\ 2\ 3]'$, величина ρ_i в (1.2) принята равной 1. Для генерации вектора w в (3.1) используется процедура rand.m пакета MATLAB, величина $\sigma = 0{,}1$. Результаты моделирования приведены в табл. 1.

Таблица 1

i	μ_0^*	μ_1^*	μ_2^*	μ_3^*	μ_4^*
1	0,2849	0,0303	0,3440	1,4821	367,6578
2	0,0091	0,2664	1,1265	24,3626	0,6189
3	0,6098	3,5288	5,7698	0,0232	0,1194
4	2,8948	10,2930	0,0438	0,0988	0,5483
5	58,3723	0,1144	0,0634	0,4445	2,0705

Как следует из табл. 1, результаты эксперимента подтверждают соотношения (3.6), т.е. рассмотренный выше алгоритм, базирующийся на вычислительных процедурах фильтра Калмана, позволяет указать номер отказавшего ДУС'а. Так, например, в случае отказа первого ДУС'а $(i = 1)$ максимальное из чисел, стоящих в первой строке табл. 1, соответствует столбцу μ_4^*. Следовательно, полученное значение $r = 4$ и, согласно (3.6), $i = 1$.

§4. Случай 5 ДУС'ов.

Рассмотрим более подробно случай, когда для измерения угловой скорости используются 5 ДУС'ов, т.е., когда в системе (1.1) $n = 5$, $m = 2$. При такой избыточности измерительной системы $(m = 2)$ можно существенно упростить процедуру определения отказавшего датчика. Так, рассмотрим соответствующую системе (1.1) матрицу размера 5×4

$$\tilde{A} = [y - e \quad A]. \tag{4.1}$$

Если в матрице $\tilde{A}$ вычеркнуть одну строку, то ранг полученной матрицы будет равен 4, если номер вычеркнутой строки не равен i и будет равен 3, если вычеркнута строка с номером i, т.е. содержащая ρ_i^* согласно (1.2). Приняв это во внимание, рассмотрим соответствующую процедуру. Так, вычеркивая поочередно строки матрицы $\tilde{A}$, получим s матриц $\tilde{A}_j$, $j = 2,\ldots,5$, размера, 4×4. Детерминанты этих матриц обозначим $D_j = \det(\tilde{A}_j)$. Очевидно, что если $j = i$, то $D_j = 0$; в противном случае, $D_j \neq 0$. Если рассматривается не система (1.1), а система (3.1), то при достаточно малой величине σ, можно утверждать, что среди последовательности $d_j = |D_j|$ минимальное значение d_j будет при $j = i$. Таким образом, в рассматриваемом случае 5 датчиков; процедура определения номера отказавшего датчика сводится к построению последовательности d_j, $j = 1,\dots, 5$, и определения минимального члена этой последовательности d_j^*. Значения индекса этого члена соответствует номеру отказавшего датчика.

В общем, можно построить аналогичный алгоритм, в котором для определения номера отказавшего датчика используется последовательность не детерминантов матриц, а чисел обусловленности матриц $\tilde{A}_j$ (эти числа можно определить, используя сингулярное разложение [5, ф-ла (2.1)]). Однако, представляется, что такая процедура, связанная с вычислением сингулярного разложения каждой из матриц $\tilde{A}_j$, будет более трудоемкой, чем описанная выше процедура, связанная с вычислением определителей.

Проиллюстрируем описанную процедуру на примере.

Пример 2. Исходные данные совпадают с принятыми в примере 1. Результаты численного моделирования описанной выше процедуры сведены в табл. 2.

Таблица 2

i	j				
	1	2	3	4	5
1	0,0814	0,6730	1,0075	0,9572	0,5413
2	0,4245	0,1671	0,6949	0,9572	0,8539
3	0,7371	0,3388	0,1890	0,6446	0,8539
4	0,8999	0,9857	0,6949	0,1387	0,4705
5	0,5873	0,9857	1,0075	0,6446	0,0354

В этой таблице приведены значения d_j, номер строки (i), как и в табл. 1, соответствует номеру отказавшего датчика. Номера столбцов (j) соответствует номеру вычеркнутой строки в матрице $\tilde{A}$, определяемой (4.1). Как видно, минимальное (в каждой строке) значение элементов этой таблицы расположено на диагонали, т.е., когда $j = i$. Другими словами, минимальное значение d_j имеет место при $i = j$. Таким образом, описанный выше алгоритм позволяет определить номер отказавшего датчика.

Отметим, что, как и в примере 1, в этом примере результаты измерений полезного сигнала сопровождаются случайными погрешностями (вектор $w \neq 0$ в (3.1)).

Заключение.

Приведены алгоритмы идентификации отказавшего датчика. Показана возможность использования для идентификации отказавшего датчика вычислительных процедур, аналогичных процедурам фильтра Калмана. Рассмотрен случай, когда для измерения угловой скорости объекта используются 5 датчиков. Показано, что в этом случае можно упростить вычислительные процедуры идентификации отказавшего датчика. Эффективность предлагаемых алгоритмов иллюстрируется примерами.

Р Е З Ю М Е . Наведено алгоритми ідентифікації датчика, що відмовив. Показана можливість використання для ідентифікації такого датчика обчислювальних процедур, аналогічних процедурам фільтру Калмана. Розглянуто випадок, коли для вимірювання кутової швидкості об'єкту використано п’ять датчиків. Показано, що в цьому випадку можна спростити обчислювальні процедури ідентифікації датчика, що відмовив. Ефективність запропонованих алгоритмів ілюструється прикладами.

1. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 318 с.
2. *Кузнецов Н.Ю., Шумская А.А.* Оценка опасности отказа резервированной системы методом ускоренного моделирования // Проблемы управления и информатики. – 2013. – № 3. – С. 50 – 62.
3. *Ларин В.Б.* Сингулярное разложение матрицы в задаче определения отказов // Кибернетика и вычислительная техника. – 1994. – Вып. 101. – С. 86 – 88.
4. *Лебедев Д. В.* Идентификация отказов в блоке чувствительных элементов инерциальной навигационной системы // Автоматика. – 1992. – № 2. – С. 39 – 44.
5. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 230 с.
6. *Deyst J.J., Harrison J.V., Gai E., Daly K.C.* Fault Detection, Identification and Reconfiguration for Spacecraft Systems // J. Astron. Sci. – 1981. – **29**, N 2. – P. 113 – 126.
7. *Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P.* Global Positioning Systems, Inertial Navigation and Integration. – New York: John Wiley&Sons, Inc., 2001. – 392 p.
8. *Grip H.F., Fossen T.I., Johansen T.A., Saberi A.* Attitude Estimation Using Biased Gyro and Vector Measurements With Time-Varying Reference Vectors // IEEE Trans. on Automat. Control. – 2012. – **57**, N 5. – P. 1332 – 1338.
9. *Khoroshun A.S., Nazarenko L.V.* Deformation and Damage of Composites with Anisotropic (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 388 – 455.
10. *Larin V.B., Tunik A.A.* On Inertial Navigation System Error Correction // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 2. – P. 213 – 223.
11. *Larin V.B., Tunik A.A.*. On Inertial Navigation System without Angular-Rate Sensors // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 4. – P. 488 – 500.
12. *Lee R.C.K.* Optimal Estimation, Identification, and Control. – Cambridge: The M.I.T. Press. – 1964. – N 28. – 176 p.
13. *Tanaka S., Muller J, C.* Fault detection in linear discrete dynamic systems by a pattern recognation of generalized-likelihood-ratio // Trans. ASME. J. Dynamic Systems. Measurement and Control. – 1990. – **112.** – P. 276 – 292.

Поступила 16.03.2014 Утверждена в печать 26.05.2015