

Т. В. Хомяк

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО ВРАЩЕНИЯ СВОБОДНОГО ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА С ЖИДКОСТЬЮ

*Национальный горный университет;
пр. Карла Маркса, 19, 49600, г. Днепрпетровск, Украина
e-mail: khomyak-tanya@rambler.ru*

Abstract. A problem on stability and stabilization of unstable rotation of the Lagrange free top with arbitrary axisymmetric cavity filled by an ideal fluid is considered. Within the framework of necessary conditions of stability, a possibility is shown to stabilize using the rotating rigid bodies. The numerical calculations endorse the analytical results for the top with ellipsoidal and cylindrical cavity

Key words: Lagrange free top, ideal fluid, stability, passive stabilization..

Введение.

Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения твердых тел с жидкостью являются актуальными как с теоретической точки зрения, так и с практической [17 – 19]. Эти задачи возникают в теории движения космических аппаратов, танкеров, железнодорожных цистерн и т. д., где запас жидкого топлива, имеющийся на борту, оказывает существенное влияние на их движение. Такие задачи актуальны и при проектировании быстровращающихся роторов, а также гироскопов, имеющих внутри себя полости, заполненные жидкостью. Во всех случаях относительное движение жидкости оказывает дестабилизирующее влияние на движение твердого тела [13]. В этой связи возникает задача о поиске возможностей стабилизации неустойчивого движения твердого тела с жидкостью.

Одной из возможностей стабилизации является ограничение подвижности жидкости путем введения в полость различных перегородок [3, 5], а в случае частичного заполнения – ограничение подвижности свободной поверхности жидкости. Однако на практике это не всегда удобно. Другой возможностью стабилизации является использование гироскопических сил [14]. Так, в работах [11, 12] был обнаружен эффект стабилизации неуровновешенного гироскопа Лагранжа вторым вращающимся. В работах [6, 7, 15] аналитически показана возможность стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью одним вращающимся твердым телом, а в работах [8, 16] рассмотрена задача о возможности стабилизации двумя твердыми телами.

В данной статье обобщены результаты работы [8] на случай вырождения сферических шарниров в цилиндрические, сравнения областей устойчивости для эллипсоидальной и цилиндрической полостей.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим свободное движение (движение по инерции) вращающегося волчка Лагранжа S , состоящего из твердого тела S^0 и осесимметричной полости, целиком заполненной идеальной однородной и несжимаемой жидкостью плотности ρ . Пусть в невозмущенном движении он равномерно вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ вокруг оси симметрии (рис. 1). Из работ [1, 9, 13] следует, что такое движение является довольно неустойчивым.

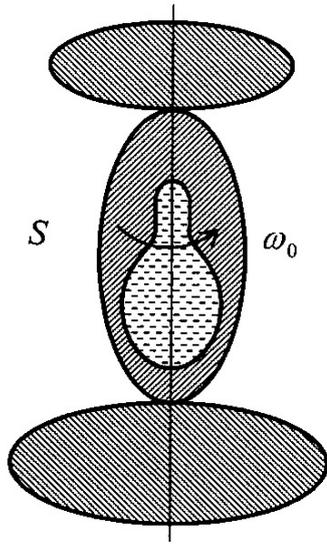


Рис. 1

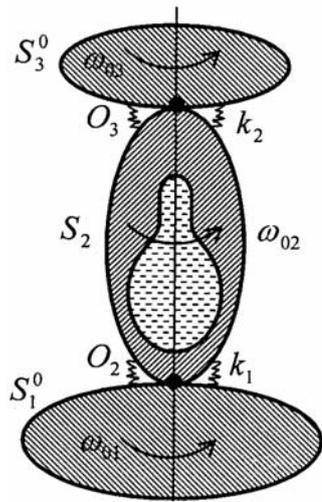


Рис. 2

Для поиска возможностей стабилизации неустойчивого вращения такого волчка представим твердое тело S^0 в виде системы трех твердых тел S_1^0 , S_2^0 и S_3^0 (рис. 2). В точках O_2 и O_3 твердые тела соединены при помощи сферических шарниров с коэффициентами упругости соответственно k_1 и k_2 . Возможно также использование цилиндрических шарниров или комбинация цилиндрического и сферического шарниров в указанных точках.

Пусть в невозмущенном движении твердые тела S_1^0 и S_3^0 вращаются с угловыми скоростями $\bar{\omega}_{01}$ и $\bar{\omega}_{03}$ ($\omega_{01} \neq \omega_0$, $\omega_{03} \neq \omega_0$), соответственно, вокруг общей оси симметрии в одном направлении ($\omega_{01} \cdot \omega_{03} > 0$) или в разных направлениях ($\omega_{01} \cdot \omega_{03} < 0$). Таким образом, исходная механическая система представлена в виде системы трех твердых тел, связанных упругими сферическими или цилиндрическими шарнирами.

Поставим задачу о возможности стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа при помощи вращающихся твердых тел S_1^0 и S_3^0 . В основе уравнений движения такой системы лежат известные уравнения движения n гироскопов, полученные Харламовым П.В. и исследованные его учениками [11]. Уравнения возмущенного движения вращающейся идеальной жидкости приняты согласно работам [1, 4, 9].

Уравнения возмущенного движения свободной системы трех упруго связанных волчков Лагранжа, один из которых содержит полость с жидкостью, имеют вид

$$\begin{aligned} A_1' \dot{\Omega}_1 + iC_1 \omega_{01} \Omega_1 + s_1 (\tilde{a}_2 \dot{\Omega}_2 + \tilde{a}_3 \dot{\Omega}_3) &= -k_1 \gamma_1; \\ A_2' \dot{\Omega}_2 + iC_2 \omega_{02} \Omega_2 + \tilde{a}_2 s_1 \dot{\Omega}_2 + s_2 \tilde{a}_3 \dot{\Omega}_3 + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{S}'_n &= -(k_1 + k_2) \gamma_2; \\ A_3' \dot{\Omega}_3 + iC_3 \omega_{03} \Omega_3 + \tilde{a}_3 (s_1 + s_2) \dot{\Omega}_3 &= \\ = -k_2 \gamma_3, \quad \dot{\gamma}_1 = \Omega_1; \quad \dot{\gamma}_2 = \Omega_2; \quad \dot{\gamma}_3 = \Omega_3; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{S}'_n + i(\omega_{02} - \lambda_n) S'_n + \frac{a_n}{N_n^2} (\dot{\Omega}_2 + i\omega_{02} \Omega_2) = 0 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$(\Omega_j = q'_j - ip'_j, \quad S'_n = e^{-i\omega_{02}t} S_n, \quad \gamma_j = \alpha_{13}^j + i\alpha_{23}^j, \quad s_j = O_j O_{j+1}, \quad c_1 = O_2 C_1, \quad c_j = O_j C_j),$$

где p'_j , q'_j – проекции возмущенной угловой скорости j -го тела; A_j и C_j – соответственно, экваториальный и осевой моменты инерции тел S_1^0 , S_2^0 и S_3^0 относительно их центров масс; m_j – масса тела S_j ($i, j = \overline{1, 3}$); S_n – коэффициенты разложения возмущенной относительной скорости жидкости; α_{13}^j и α_{23}^j – направляющие косинусы j -го тела.

Соответствующее частотное уравнение имеет следующий вид [4, 8]:

$$F_1 F_2 F_3 + 2\mu_2 \left(\mu_1 + \frac{k_1}{\lambda^2} \right) \left(\mu_3 + \frac{k_2}{\lambda^2} \right) - \mu_2^2 F_2 - F_1 \left(\mu_3 + \frac{k_2}{\lambda^2} \right)^2 - F_3 \left(\mu_1 + \frac{k_1}{\lambda^2} \right)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\left(F_i = A'_i + \frac{C_i \omega_{0i}}{\lambda} - \frac{k_{i-1} + k_i}{\lambda^2} \quad (i = 1, 3), \quad k_0 = k_3 = 0; \right.$$

$$F_2 = A'_2 + \frac{C_2 \omega_{02}}{\lambda} - \frac{k_1 + k_2}{\lambda^2} - (\lambda + \omega_{02}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{\lambda + \tilde{\lambda}_n}; \quad \tilde{\lambda}_n = (1 - 2/\kappa_n) \omega_{02};$$

$$A'_1 = A_1 + \frac{m_1 m_{23}}{m} c_1^2; \quad A'_2 = A_2 + \frac{1}{m} (m_2 m_{31} c_2^2 - 2m_2 m_3 c_2 s_2 + m_3 m_{12} s_2^2); \quad (3)$$

$$A'_3 = A_3 + \frac{m_3 m_{12}}{m} c_3^2; \quad \mu_1 = \frac{m_1 c_1}{m} (m_2 c_2 + m_3 s_2); \quad \mu_2 = \frac{m_1 m_3}{m} c_1 c_3;$$

$$\mu_3 = \frac{m_3 c_3}{m} [m_1 s_2 + m_2 (s_2 - c_2)]; \quad m = m_1 + m_2 + m_3; \quad m_{ij} = m_i + m_j \Big).$$

Если упругие сферические шарниры вырождаются в цилиндрические ($k_1 = k_2 = \infty$), то уравнение (2) существенно упрощается

$$\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 + \tilde{F}_3 + 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) = 0 \quad (4)$$

$$\left(\tilde{F}_2 = A'_2 + \frac{\tilde{C}_2}{\lambda} - (\lambda + \omega_{02}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_{2n}}{\lambda + \tilde{\lambda}_{2n}}; \quad \tilde{F}_j = A'_j + \frac{C_j \omega_{0j}}{\lambda}; \quad K_j = \frac{k_j}{\lambda^2}, \quad (j = 1, 3) \right).$$

Как известно, в большинстве случаев основной эффект влияния жидкости на движение твердого тела можно учесть, рассматривая только основной тон колебания жидкости ($n = 1$). В работе [1] оценено влияние более высоких тонов на устойчивость вращения твердого тела на примере цилиндрической полости. Показано, что добавление новых тонов колебаний жидкости приводит к появлению дополнительной области неустойчивости. В случае эллипсоидальных полостей и полостей, образованных софокусными эллипсоидами из бесконечного спектра собственных частот λ_n на движение волчка оказывает влияние только основная частота λ_n ($E_n = 0$ при $n \neq 1$).

Так, с учетом основного тона колебания жидкости ($n = 1$) уравнение (2) записывается в виде полинома 6-ой степени

$$b_0 \lambda^6 + b_1 \lambda^5 + b_2 \lambda^4 + b_3 \lambda^3 + b_4 \lambda^2 + b_5 \lambda + b_6 = 0 \quad (5)$$

$$(b_0 = b_0^*(E_1); \quad b_0^*(E_1) = A'_1 A'_2 A'_3 - A'_1 \mu_3^2 - A_2^* \mu_2^2 - A_3^* \mu_1^2 + 2\mu_1 \mu_2 \mu_3;$$

$$b_j = b_{j-1}^*(0) \tilde{\lambda}_1 + b_j^* \quad (j = \overline{1, 6}); \quad b_1^*(E_1) = (A_2^* A'_3 - \mu_3^2) \tilde{C}_1 + (A'_1 A'_3 - \mu_2^2) C_2^* + (A'_1 A'_2 - \mu_1^2) \tilde{C}_3;$$

$$b_2^*(E_1) = [(\mu_2 + \mu_3)^2 - (A'_1 + A_2^* + 2\mu_1) A'_3] k_1 + [(\mu_1 + \mu_2)^2 - (A_2^* + A_3^* + 2\mu_3) A'_1] k_2 +$$

$$+ \tilde{C}_1 C_2^* A'_3 + \tilde{C}_1 \tilde{C}_3 A_2^* + C_2^* \tilde{C}_3 A'_1; \quad b_3^*(E_1) = \tilde{C}_1 C_2^* \tilde{C}_3 - [(A'_1 + A_2^* + 2\mu_1) \tilde{C}_3 + (\tilde{C}_1 + C_2^*) A'_3] k_1 -$$

$$\begin{aligned}
& -[(A_2^* + A_3' + 2\mu_3)\tilde{C}_1 + (C_2^* + \tilde{C}_3)A_1']k_2; \quad b_4^*(E_1) = (A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \quad (6) \\
& + 2\mu_3)k_1k_2 - (\tilde{C}_1 + C_2^*)\tilde{C}_3k_1 - (C_2^* + \tilde{C}_3)\tilde{C}_1k_2; \quad b_5^*(E_1) = (\tilde{C}_1 + C_2^* + \tilde{C}_3)k_1k_2; \\
& b_6^*(E_1) = 0; \quad \tilde{E}_1 = E_1\omega_{01}; \quad A_2^* = A_2' - E_1; \quad C_2^* = \tilde{C}_2 - \tilde{E}_1; \quad \tilde{C}_j = C_j\omega_{0j} \quad (j = \overline{1, 3}).
\end{aligned}$$

2. Метод исследования.

Необходимым условием устойчивости и пассивной стабилизации механической системы является условие действительности всех корней полученных уравнений. В настоящее время известен ряд критериев действительности всех корней уравнений n -ой степени [2, 10, 20]. Однако для поставленной задачи стабилизации из-за многопараметричности и сложности коэффициентов характеристических уравнений наиболее удобным является критерий, предложенный в работе [2].

Стабилизировать неустойчивое вращение волчка Лагранжа с жидкостью можно при помощи угловых скоростей вращающихся твердых тел ω_{01} и ω_{03} , параметров твердых тел $C_1, C_3, m_1, m_3, c_1, c_3$, а также при помощи коэффициентов упругости шарниров k_1, k_2 [8, 16].

Стабилизация при помощи угловой скорости вращения и осевого момента инерции твердых тел. Так как данные величины в коэффициенты уравнения (5) входят в виде произведения (кинетического момента), то для простоты записи введем следующие обозначения: $\omega_{10} = C_1\omega_{01}$, $\omega_{30} = C_3\omega_{03}$. Для исследования влияния основных параметров ω_{10} и ω_{30} на возможность стабилизации представим коэффициенты (6) в виде

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}\omega_{10} + a_{13}\omega_{30} + \tilde{b}_1; \quad b_2 = a_{21}\omega_{10} + a_{23}\omega_{30} + a_{213}\omega_{10}\omega_{30} + \tilde{b}_2; \\
b_3 &= a_{31}\omega_{10} + a_{33}\omega_{30} + a_{313}\omega_{10}\omega_{30} + \tilde{b}_3; \quad b_4 = a_{41}\omega_{10} + a_{43}\omega_{30} + a_{413}\omega_{10}\omega_{30} + \tilde{b}_4; \\
b_5 &= a_{51}\omega_{10} + a_{53}\omega_{30} + a_{513}\omega_{10}\omega_{30} + \tilde{b}_5; \quad b_6 = a_{61}\omega_{10} + a_{63}\omega_{30} + \tilde{b}_6.
\end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в условия для уравнения 6-ой степени [2], получим систему пяти неравенств 2-ой, 4-ой, 6-ой, 8-ой и 10-ой степеней относительно ω_{10} и ω_{30} . Ввиду громоздкости полученных неравенств рассмотрим частный случай, когда $\omega_{10} = \omega_{30} = \omega_0$, $k_1 = k_2 = k$, тогда условия устойчивости принимают вид

$$\begin{aligned}
& d_{12}\omega_0^2 + d_{11}\omega_0 + d_{10} > 0; \\
& d_{26}\omega_0^6 + d_{25}\omega_0^5 + \dots + d_{21}\omega_0 + d_{20} > 0; \\
& d_{310}\omega_0^{10} + d_{39}\omega_0^9 + \dots + d_{31}\omega_0 + d_{30} > 0; \quad (7) \\
& d_{414}\omega_0^{14} + d_{413}\omega_0^{13} + \dots + d_{41}\omega_0 + d_{40} > 0; \\
& d_{518}\omega_0^{18} + d_{517}\omega_0^{17} + \dots + d_{51}\omega_0 + d_{50} > 0 \\
& (d_{12} = 5a_{11}^2 - 12a_{22}b_0; \quad d_{26} = 24a_{22}^2(a_{11}^2 - 4a_{22}b_0); \quad d_{310} = \tilde{d}_{31}k + \tilde{d}_{30}, \quad \tilde{d}_{31} = 24a_{22}d_{26}; \\
& d_{414} = \tilde{d}_{43}k^3 + \tilde{d}_{42}k^2 + \tilde{d}_{41}k + \tilde{d}_{40}; \quad \tilde{d}_{43} = 576a_{22}d_{26}; \quad a_{22} = A_2^*; \\
& d_{518} = \tilde{d}_{55}k^5 + \tilde{d}_{54}k^4 + \dots + \tilde{d}_{51}k + \tilde{d}_{50}; \quad \tilde{d}_{55} = 6912a_{22}\tilde{\lambda}_1^2d_{26}; \\
& b_0 = A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3; \quad a_{11} = A_2^*A_3' - \mu_3^2 + A_1'A_2^* - \mu_1^2).
\end{aligned}$$

В обозначении d_{ij} индексы имеют следующий смысл: i – номер неравенства; j – степень параметра ω_0 ($i = \overline{1, 5}$; $j = \overline{1, 18}$). Коэффициенты d_{12} и d_{26} будут положительными при выполнении неравенств

$$5a_{11}^2 - 12a_{22}b_0 > 0; \quad a_{11}^2 - 4a_{22}b_0 > 0. \quad (9)$$

Из второго неравенства (9) следует выполнение первого. Подставив во второе неравенство (9) значения a_{11} , a_{22} , b_0 из соотношений (8), получим неравенство

$$(A_2^* A_3' - \mu_3^2 + A_1' A_2^* - \mu_1^2)^2 - 4(A_1' A_2^* A_3' - A_1' \mu_3^2 - A_2^* \mu_2^2 - A_3' \mu_1^2 + 2\mu_1 \mu_2 \mu_3) A_2^* > 0, \quad (10)$$

которое с учетом значений A_1' , A_2^* , A_3' , μ_1 , μ_2 , μ_3 из формул (3) принимает вид

$$\frac{A_2^{*2} u_2 + A_2^* u_1 + u_0}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} > 0 \quad (11)$$

$$(u_2 = y_2^2 m_2^2 + y_1 m_2 + y_0; \quad u_1 = 2c_2^2 (y_2 y_3 m_2^2 + y_3 m_2 + y_6); \quad u_0 = c_2^4 (y_0 m_2^2 + 2y_6 m_2 + y_7);$$

$$y_2 = A_1 - A_3 + m_1 c_1^2 - m_3 c_3^2; \quad y_1 = 2y_2 y_3; \quad y_3 = (A_1 - A_3)(m_1 + m_3) + m_1 m_3 (c_1^2 - c_3^2);$$

$$y_0 = (A_1 - A_3)^2 (m_1 + m_3)^2 + m_1^2 m_3^2 (c_1^2 + c_3^2)^2 + y_4; \quad y_4 = 2m_1 m_3 (m_1 + m_3) (c_1^2 - c_3^2) (A_1 - A_3);$$

$$y_5 = (A_1 - A_3)^2 (m_1^2 + 6m_1 m_3 + m_3^2) + 2m_1 m_3 (c_1^2 - 3c_3^2) (m_1 + m_3) (A_1 - A_3) +$$

$$+ m_1^2 m_3^2 (c_1^2 + 2c_1 c_3 - c_3^2) (c_1^2 - 2c_1 c_3 - c_3^2); \quad y_6 = 4m_1 m_3 (A_1 - A_3) y_3; \quad y_7 = 16m_1^2 m_3^2 (A_1 - A_3)^2).$$

При $c_1 = c_3 = c$, $m_1 = m_3 = m$ и $A_1 = A_3 = A$ неравенство (11) справедливо, так как

$$\frac{4m^4 c^4 (A_2 - E_1 - m_2 c_2^2)^2}{(2m + m_2)^2} > 0, \quad (12)$$

и в этом случае неравенства (9) выполнены.

Коэффициенты d_{310} , d_{414} и d_{518} являются многочленами относительно параметра k с положительными коэффициентами при старшей степени, так как $a_{22} > 0$ и неравенства (9) выполнены. При достаточно больших значениях k коэффициенты d_{310} , d_{414} и d_{518} будут положительными. Таким образом, все коэффициенты при старших степенях в системе неравенств (7) положительные, откуда следует, что при достаточно больших ω_0 эти неравенства всегда будут верными.

Следовательно, при достаточно больших значениях ω_0 и k аналитически показана возможность стабилизации неустойчивого вращения волчка Лагранжа с жидкостью при помощи двух вращающихся твердых тел. Количественная оценка величин ω_0 и k , при которых наблюдается эффект стабилизации, будет определена при численных расчетах.

Влияние коэффициентов упругости сферических шарниров на возможность стабилизации. Для исследования влияния коэффициентов упругости шарниров k_1 и k_2 на возможность стабилизации неустойчивого вращения свободного волчка Лагранжа с жидкостью представим коэффициенты уравнения (5) следующим образом: $b_2 = a_{21} k_1 + a_{22} k_2 + \tilde{b}_2$; $b_3 = a_{31} k_1 + a_{32} k_2 + \tilde{b}_3$; $b_4 = a_{41} k_1 + a_{42} k_2 + a_{412} k_1 k_2 + \tilde{b}_4$; $b_5 = a_{51} k_1 + a_{52} k_2 + a_{512} k_1 k_2$; $b_6 = a_{612} k_1 k_2$. Подставив эти соотношения в условия действитель-

ности корней для уравнения 6-ой степени [2], получим систему пяти неравенств 1-ой, 3-й, 5-ой, 7-ой и 9-ой степени относительно k_1 и k_2 . Ввиду громоздкости полученных неравенств рассмотрим частный случай, когда $k_1 = k_2 = k$ и $\omega_{10} = \omega_{30} = \omega_0$; тогда условия устойчивости принимают вид

$$\begin{aligned} d_{11}k + d_{10} &> 0; \\ d_{23}k^3 + d_{22}k^2 + d_{21}k + d_{20} &> 0; \\ d_{36}k^6 + d_{35}k^5 + \dots + d_{31}k + d_{30} &> 0; \\ d_{410}k^{10} + d_{49}k^9 + \dots + d_{41}k + d_{40} &> 0; \\ d_{514}k^{14} + d_{513}k^{13} + \dots + d_{51}k + d_{50} &> 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$(d_{11} = -12a_{21}b_0; \quad d_{23} = -96a_{21}b_0(a_{21}^2 - 3b_0a_{42}); \quad d_{36} = 1152a_{42}b_0(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})(a_{21}^2 - 3b_0a_{42});$$

$$d_{410} = 6912a_{42}^3b_0(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})^2; \quad d_{514} = \tilde{d}_{52}\omega_0^2 + \tilde{d}_{51}\omega_0 + \tilde{d}_{50}; \quad \tilde{d}_{52} = 82944a_{42}^3b_0(a_{21}^2 - 4b_0a_{42})^2;$$

$$a_{21} = -[(A_1' + A_2^* + 2\mu_1)A_3' - (\mu_2 + \mu_3)^2] - [(A_2^* + A_3' + 2\mu_3)A_1' - (\mu_1 + \mu_2)^2];$$

$$a_{42} = A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3).$$

Так как $a_{21} < 0$ и $a_{42} > 0$, то коэффициенты $d_{11} > 0$ и $d_{410} > 0$, а d_{23} и d_{36} будут положительными при выполнении неравенств

$$a_{21}^2 - 3b_0a_{42} > 0, \quad a_{21}^2 - 4b_0a_{42} > 0. \quad (14)$$

Выполнение первого неравенства следует из второго неравенства (14), которое, в свою очередь, эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} &((A_1' + A_2^* + 2\mu_1)A_3' - (\mu_2 + \mu_3)^2 + (A_2^* + A_3' + 2\mu_3)A_1' - (\mu_1 + \mu_2)^2)^2 - \\ &- 4(A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3)(A_1'A_2^*A_3' - A_1'\mu_3^2 - A_2^*\mu_2^2 - A_3'\mu_1^2 + 2\mu_1\mu_2\mu_3) > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом значений A_1' , A_2^* , A_3' , μ_1 , μ_2 , μ_3 из формул (3) неравенство (15) принимает вид неравенства (11), которое выполнено, так как его числитель является квадратным многочленом с положительным старшим коэффициентом и отрицательным дискриминантом. Таким образом, неравенства (14) выполнены. Коэффициент d_{514} является квадратным многочленом относительно ω_0 с положительным коэффициентом при старшей степени и при достаточно больших значениях ω_0 будет положительным. Таким образом, согласно рассуждениям, аналогичным приведенным ранее, аналитически устанавливаем возможность стабилизации.

Случай цилиндрических шарниров. При вырождении двух сферических шарниров в цилиндрические ($k_1 = \infty$, $k_2 = \infty$) уравнение (4) записываем в виде

$$b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \quad (16)$$

$$(b_0 = A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3;$$

$$b_1 = [A_1' + A_2^* + A_3' + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3]\tilde{\lambda}_1 + \tilde{C}_1 + C_2^* + \tilde{C}_3; \quad b_2 = [\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3]\tilde{\lambda}_1).$$

Условие действительности корней уравнения (16) определяет положительность дискриминанта

$$\begin{aligned}
& ([A'_1 + A'_2 + A'_3 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3] \tilde{\lambda}_1 + \tilde{C}_1 + C_2^* + \tilde{C}_3)^2 - \\
& - 4(A'_1 + A_2^* + A'_3 + 2\mu_1 + 2\mu_2 + 2\mu_3)(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3) \tilde{\lambda}_1 > 0.
\end{aligned}
\tag{17}$$

Левая часть неравенства (17) представляет собой квадратный многочлен относительно параметров ω_{10} и ω_{30} ($\omega_{10} = \tilde{C}_1 = C_1\omega_{01}$, $\omega_{30} = \tilde{C}_3 = C_3\omega_{03}$) с положительными коэффициентами при старших степенях. При вращении твердых тел в сторону, противоположную вращению волчка ($\omega_{10} = -\tilde{C}_1 = -C_1\omega_{01}$, $\omega_{30} = -\tilde{C}_3 = -C_3\omega_{03}$) или в разные стороны ($\omega_{10} \cdot \omega_{30} < 0$) неравенство (17) также записывается в виде квадратного многочлена относительно параметров ω_{10} и ω_{30} с положительными коэффициентами при старших степенях. Таким образом, при достаточно больших ω_{10} и ω_{30} стабилизация будет возможна. При проведении численных исследований будет показано при каком направлении вращения твердых тел быстрее наступает эффект стабилизации.

Аналогично утверждается возможность стабилизации при наличии сферического и цилиндрического шарниров.

4. Численные расчеты.

Аналитические исследования свидетельствуют, что при достаточно больших значениях k и ω_0 стабилизация волчка Лагранжа с жидкостью возможна. Однако представляет интерес проведение количественных оценок этого качественного результата для конкретных полостей. В качестве примера рассмотрим случаи эллипсоидальной и цилиндрической полостей. Твердое тело S_2^0 представим безмассовой ($m_{20} = 0$) и безинерционной оболочкой ($A_{20} = C_{20} = 0$), а вращающиеся твердые тела выберем в виде тонких круговых дисков с центром масс, совпадающим с общими точками ($c_1 = c_3 = 0$). Области устойчивости представлены для эллипсоидальной полости зависимостью параметров ω_{02} и β ($\beta = c/a$, где a и c – полуоси эллипсоидальной полости, причем c – величина полуоси, направленной вдоль оси вращения твердого тела с жидкостью), а для цилиндрической полости – ω_{02} и H ($H = h/r$, где $2h$ и r – высота и радиус цилиндрической полости). На рис. 3 и 4 показаны области устойчивости для волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, соответственно ($k_1 = k_2 = 10^2$) (области устойчивости затемнены).

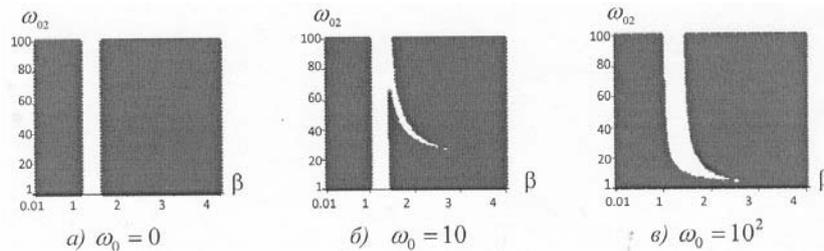


Рис. 3

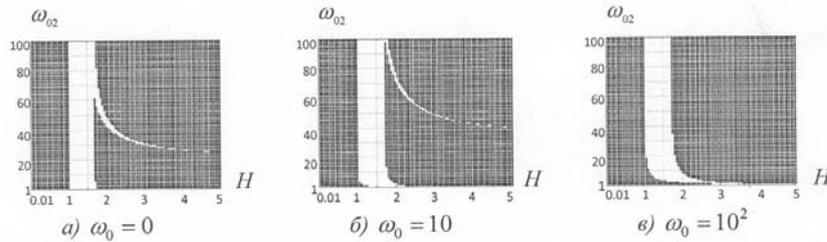


Рис. 4

Из рис. 3 и 4 следует, что для волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостями с одновременным увеличением угловой скорости вращения твердых тел ($\omega_{01} = \omega_{03} = \omega_0$) и коэффициентов упругости в шарнирах ($k_1 = k_2 = 10^2$) область устойчивости увеличивается.

При замене сферических шарниров на цилиндрические ($k_1 = k_2 = \infty$) увеличение угловой скорости вращения твердых тел ($\omega_0 = 0, \dots, 10^3$) приводит к смещению области неустойчивости вправо и вверх (рис. 5, 6), а при $\omega_0 \geq 10^4$ – к ее полному исчезновению. На рис. 5 и 6 показаны области устойчивости для волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостями, соответственно.

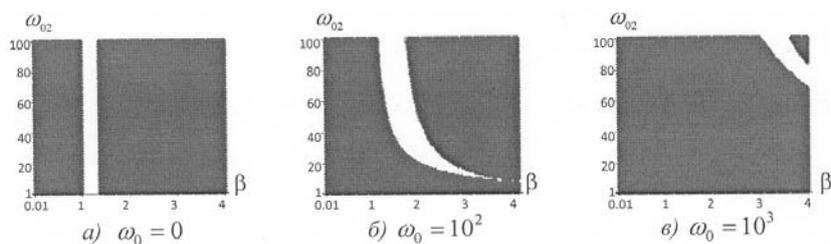


Рис. 5

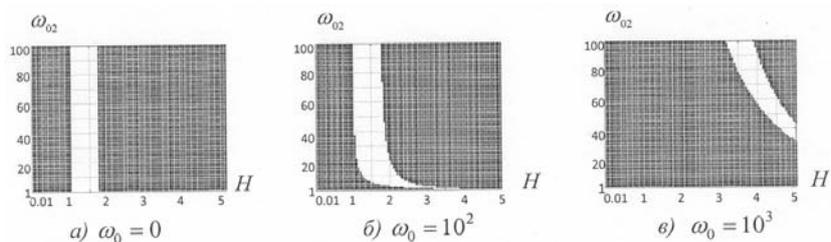


Рис. 6

Вращение твердых тел в разные стороны ($\omega_{01} = -\omega_{03} = 0, \dots, 10^5$) не приводит к уменьшению и смещению области неустойчивости. Область неустойчивости в этом случае будет аналогичной области, показанной на рис. 5, а, 6, а. При вырождении сферических шарниров в цилиндрические и вращении твердых тел в сторону, противоположную вращению волчка с жидкостью, область неустойчивости смещается вертикально вверх. При $\omega_0 \geq 360$ область неустойчивости полностью исчезает и система стабилизируется. Таким образом, при использовании цилиндрических шарниров эффективность стабилизации повышается.

Заключение.

В работе получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения свободной системы трех волчков Лагранжа, один из которых содержит идеальную жидкость. Аналитически показана возможность стабилизации при помощи вращающихся твердых тел неустойчивого вращения свободного волчка Лагранжа с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. Результаты аналитических исследований подтверждены проведенными численными расчетами для эллипсоидальной и цилиндрической полостей, что дало возможность более точно оценить влияние основных параметров вращающихся твердых тел на стабилизацию волчка Лагранжа с жидкостью. Установлено, что эффективность стабилизации возрастает при замене сферических шарниров на цилиндрические, а также в случае вращения волчка с жидкостью и твердых тел в противоположные стороны.

РЕЗЮМЕ. Розглянуто задачу про стійкість та стабілізацію нестійкого обертання вільного вовчка Лагранжа з довільною осесиметричною порожниною, що містить ідеальну рідину. В рамках необхідних умов стійкості аналітично показано можливість стабілізації за допомогою твердих тіл, що обертаються. Числові розрахунки підтвердили результати аналітичних досліджень для вовчка з еліпсоїдальною та циліндричною порожнинами.

1. Докучаев Л.В., Рвалов Р.В. Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 2. – С. 6 – 14.
2. Коваль В.И. О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1999. – 28. – С. 130 – 145.
3. Кононов Ю.Н. О влиянии перегородок в цилиндрической полости на устойчивость равномерного вращения волчка Лагранжа // Матем. физ. и нелиней. механика. – 1992. – 17 (51). – С. 33 – 37.
4. Кононов Ю.Н. О движении системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость // Механика твердого тела. – 2000. – 30. – С. 207 – 216.
5. Кононов Ю.Н., Дрынь С.В. Об устойчивости вращения волчка Лагранжа с многослойной жидкостью, разделенной цилиндрическими перегородками // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2001. – № 1. – С. 34 – 39.
6. Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В. Об эффекте стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом // Механика твердого тела. – 2004. – 34. – С. 161 – 169.
7. Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В. О стабилизации неустойчивого вращения твердого тела с жидкостью вращающимся твердым телом // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. – 2003. – 2. – С. 180 – 185.
8. Кононов Ю.Н., Хомяк Т.В. Стабилизация неустойчивого движения по инерции твердого тела с жидкостью вращающимися твердыми телами // Механика-2007, Научн. труды III Беларус. конгр. по теор. и прикл. механике (16 – 18 октября 2007 г.). – Минск: ОИМ НАН Беларуси, 2007. – С. 332 – 337.
9. Рвалов Р.В., Роговой В.М. О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15 – 20.
10. Ручкин К.А. Устойчивость равномерных вращений и стабилизация движений системы двух твердых тел // Дис... канд. физ.-матем. наук: 01.02.01. – Донецк, 1999. – 146 с.
11. Савченко А.Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. – К.: Наук. думка, 1977. – 160 с.
12. Светличная Н.В. Об эффекте стабилизации покоящегося неуравновешенного гироскопа вторым вращающимся / Н. В. Светличная // Механика твердого тела. – 1989. – 21. – С. 74 – 76.
13. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1960. – № 3. – С. 20 – 55.
14. El-Gohary A. Optimal stabilization of a rigid body motion using rotors systems // Appl. Math. and Comput. – 2003. – 136, N 2 – 3. – P. 229 – 239.
15. Kononov Y.N., Khomyak T.V. On the rotation stabilization of the unstable gyroscope containing fluid by rotating the rigid body // Facta Universitatis. Ser. Mechanics, Automatic Control and Robotics. – 2005. – 4, N 17. – P. 195 – 201.
16. Kononov Y.N., Khomyak T.V. Stabilization by Rotating Rigid Bodies for Unstable Rotation of a Rigid Body with Cavities Containing a Fluid // Abstract and CD-ROM Proc. 21-st Int. Congr. of Theor. and Appl. Mech. (ICTAM04). – Warsaw: Poland. Published by IPPT PAN, 2004. – P. 320.
17. Koval'chuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. Stability of Composite Cylindrical Shells with Added Mass Interacting with the Internal Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 5. – P. 566 – 575.
18. Koval'chuk P.S., Kruk L.A., Pelykh V.A. Stability of Differently Fixed Composite Cylindrical Shells Interacting with Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 6. – P. 664 – 676.
19. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Sil'chenko O.L. Stability of a Cylindrical Shell Made of a Shape-Memory Alloy // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 2. – P. 171 – 178.
20. Yang L. Recent Advances on Determining the Number of Real Roots of Parametric Polynomials // J. Symb. Comput. – 1999. – 28. – P. 225 – 242.

Поступила 27.02.2013

Утверждена в печать 19.02. 2015