

А. М. Багно

ДИСПЕРСИОННЫЙ СПЕКТР ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА В СИСТЕМЕ СЛОЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ – СЖИМАЕМЫЙ УПРУГИЙ СЛОЙ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Abstract. The propagation of acoustic waves in pre – deformed compressible elastic layer that interacts with a layer of an ideal compressible fluid is considered. The study is carried out basing on the three – dimensional linearized equations of elasticity theory at finite strains. The dispersion curves are constructed for the modes in a wide frequency range. An effect of initial stresses, the thickness of elastic layer and the thickness of fluid layer on the frequency spectrum of normal waves in the hydroelastic system is analyzed. The numerical results are presented in the form of graphs.

Key words: compressible elastic layer, layer of ideal compressible fluid, initial stresses, harmonic waves.

Введение.

Волны, распространяющиеся вдоль границы контакта упругого слоя и слоя жидкости, являются обобщением основательно исследованных основных типов акустических волн Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Интерес к таким задачам связан с тем, что указанные волновые процессы являются определяющими и широко используются в таких областях как сейсмология, акустоэлектроника, гидроакустика, дефектоскопия, нетравматические и неразрушающие ультразвуковые методы контроля и диагностики, а также и в других. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости, приведены в [2]. Однако, значительное практическое использование поверхностных волн ставит задачу более полного учета реальных свойств сред. К числу таких факторов принадлежат начальные напряжения. Созданные целенаправленно или, возникшие в результате технологических операций при изготовлении они оказывают существенное влияние на волновые процессы. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом в телах начальных напряжений, приведены в [11, 14]. В последнее время получили развитие новые направления в теории волн. Среди них отметим направления, связанные с усложнением структуры сред, контактных граничных условий, свойств материалов, типов волн, а также с разработкой ультразвуковых неразрушающих методов определения напряжений. Им посвящены работы [7 – 10, 12 – 13, 15 – 18 и др.]. В статьях [8 – 10] рассмотрен волновой процесс в предварительно напряженных слое и стратифицированной полуплоскости. Анализ распространения акустических волн вдоль границы контакта предварительно деформированного несжимаемого упругого тела и вязкой жидкой среды выполнен в [14]. Изучению дисперсии волн в слоистых композитных материалах с учетом проскальзывания слоев посвящена работа [15]. Исследование закономерностей распространения волн в новых материалах из нанокompозитов выполнено в [7, 13]. В работах [16 – 18] приведены результаты анализа распространения нелинейных поверхностных упругих волн в рамках модели Мурнагана с учетом геометрической и физической нелинейностей. Развитию ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в

приповерхностных слоях материалов в рамках трехмерной линеаризованной теории упругости конечных деформаций посвящена работа [12].

В данной работе исследовано в рамках уравнений трехмерной линеаризованной теории упругости при конечных деформациях влияние начальных напряжений на скорости акустических волн в предварительно деформированном сжимаемом упругом слое, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости.

§1. Постановка задачи.

Воспользуемся подходом и постановками задач аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, предложенными в работах [3 – 5]. Заметим, что в отличие от твердых тел, соотношения которых записаны в лагранжевых координатах, уравнения для жидкой среды записываются в эйлеровых координатах, которые введены в естественном состоянии жидкости. Следует отметить, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкости и системе в целом. Поскольку в дальнейшем исследуем распространение малых возмущений, то, как известно, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому в дальнейшем не принимаются различия между лагранжевыми и эйлеровыми координатами, а характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают.

С учетом указанных допущений в рамках принятых моделей система исходных соотношений линеаризованной теории аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, взаимодействующими с идеальной сжимаемой жидкой средой, имеет такой вид:

1) сжимаемые упругие тела –

$$\left(\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha = 0 \quad (z_k \in V)_1;$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3};$$

2) идеальная сжимаемая жидкость –

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p = 0, \quad z_k \in V_2;$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2 \quad (a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2); \quad p_{ij} = -\delta_{ij} p.$$

При этом специфика взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические $\tilde{Q}_j = p_{ij} N_i^0$ ($z_k \in S$) и кинематические $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}$ ($z_k \in S$) граничные условия, задаваемые на поверхности контакта твердых тел и жидкости.

Введенный выше тензор $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$, зависящий от вида начального состояния и типа упругого потенциала материала твердого тела, представлен в работах [3 – 5].

Далее предположим, что нелинейно упругое твердое тело, упругий потенциал которого является произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина, заполняет объем ($-\infty < z_1 < \infty$; $-h_2 \leq z_2 \leq 0$; $-\infty < z_3 < \infty$) и контактирует со слоем идеальной сжимаемой жидкости, занимающей объем ($-\infty < z_1 < \infty$; $0 \leq z_2 \leq h_1$; $-\infty < z_3 < \infty$). Примем, что внешние силы, действующие на отмеченные среды, распределены равномерно вдоль оси oz_3 . В этом слу-

чае во всех плоскостях, параллельных плоскости oz_1z_2 , явления будут происходить тождественным образом. Поэтому задача является плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости oz_1z_2 .

Воспользуемся представлениями общих решений, полученными в работах [3 – 5]. Для плоского случая, который рассматривается, общие решения имеют вид

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции χ_1 и χ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Данная задача характеризуется динамическими и кинематическим граничными условиями

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h_2} = 0; \quad P_2|_{z_2=h_1} = 0; \quad (1.1)$$

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}. \quad (1.2)$$

Здесь введены следующие обозначения: u_i – компоненты вектора перемещений упругого тела; λ_i – удлинения упругого слоя в направлениях координатных осей; a_{ij} и μ_{ij} – величины, которые определяются из уравнений состояния и зависят от вида упругого потенциала [3 – 5]; $\bar{\sigma}_{ii}^0$ – начальные напряжения ($s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$); ρ – плотность материала упругого слоя; v_i – компоненты вектора возмущений скорости жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя; \tilde{Q}_j и P_i – составляющие напряжений в твердом теле и жидкости.

Параметры, характеризующие процесс распространения волн, разыскиваем в классе бегущих волн и выбираем в виде: $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$ ($j = 1, 2$), где k – волновое число, ω – круговая частота.

Заметим, что выбранный выше класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общность полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Было получено решение двух задач Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движе-

ния жидкости и упругого тела, а также определены соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (1.1), (1.2) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения и приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \left\| e_{lm} \left(c_\sigma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (1.3)$$

где c_σ – фазовая скорость нормальных волн в предварительно напряженном слое; c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – скорость волны сдвига в упругом теле; μ – модуль сдвига; h_1 – толщина слоя жидкости; h_2 – толщина упругого слоя.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется только продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхностях контакта сред, порождают сложное волновое поле в гидроупругой системе.

Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом теле и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что при формировании поля в гидроупругой системе существенное значение имеет не только наличие жидкости, а также взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных границ и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе довольно сложного спектра мод.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (1.3) не зависит от формы упругого потенциала. Оно является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев. В частности, если a_0 устремить к бесконечности, то (1.3) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия упругого слоя с идеальной несжимаемой жидкостью. При $\rho_0 = 0$ равенство (1.3) перейдет в уравнение для определения скоростей волн Лэмба [6]. Если дополнительно устремить h_2 к бесконечности, получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ и $h_1 \rightarrow \infty$ равенство перейдет в уравнение Стоунли [1]. Указанные частные случаи учитывают наличие начальных деформаций в упругом слое. Задачи, которые были рассмотрены в рамках этой модели, приведены в [1, 3 – 6, 11, 14]. Если принять $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$, то получим равенства для подробно исследованных в рамках классической теории упругости волн Рэлея, Стоунли и Лэмба [2].

§2. Числовые результаты.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (1.3) решено численно. При этом числовые результаты получены для системы (органическое стекло – вода), которая характеризовалась следующими параметрами: упругий слой – $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; слой жидкости – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$; $\bar{a}_0 = a_0 / c_s = 1,1526$.

Заметим, что уравнение (1.3) получено без введения каких-либо дополнительных ограничений относительно вида функции упругого потенциала (поэтому оно справедливо для упругих потенциалов произвольной формы). При численной реализации вопрос относительно выбора конкретной формы упругого потенциала имеет самостоятельное и важное значение и существенным образом может повлиять на конечный результат. Как показано в работах [1, 3 – 6], для предварительно напряженных сжимаемых жестких материалов (сталь, оргстекло) закономерности, наблюдаемые экспериментально, могут быть правильно описаны теоретически лишь в рамках трехинвариан-

нтных упругих потенциалов. В связи с этим в данной работе для оргстекла использован простейший трехинвариантный потенциал в форме Мурнагана [1, 3 – 6]. С учетом этого постоянные Мурнагана для оргстекла, через которые определяются величины уравнений состояния a_{ij} и μ_{ij} , выбираем в таком виде: $a = -3,91 \cdot 10^9$ Па; $b = -7,02 \cdot 10^9$ Па; $c = -1,41 \cdot 10^9$ Па [1, 3 – 6].

Результаты вычислений представлены на рис. 1 – 6. На рис. 1 для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерных величин толщин упругого слоя (частоты) \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) при отсутствии начальных деформаций. Номерами n_a обозначены антисимметричные моды, а n_s – соответственно, симметричные моды.

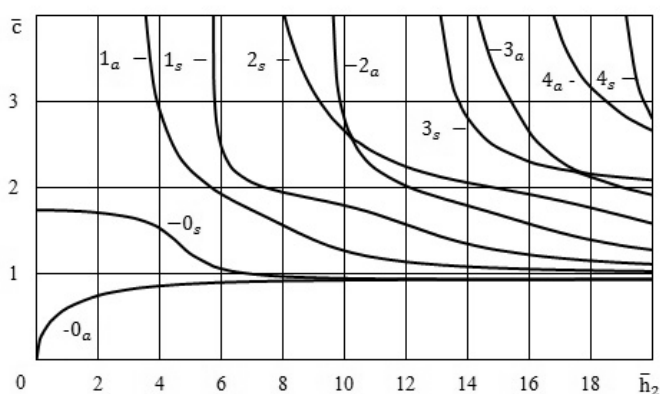


Рис. 1

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода (зависимости безразмерных величин фазовых скоростей \bar{c} нормальных волн от безразмерных величин толщин слоя жидкости \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$) для упругого слоя с толщиной $\bar{h}_2 = 2$, также при отсутствии начальных деформаций).

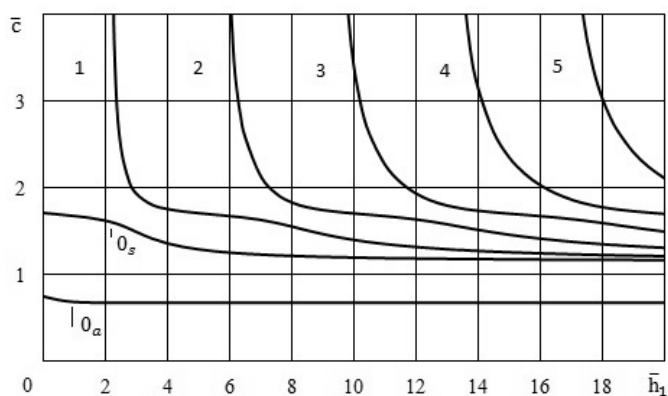


Рис. 2

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости мод в упругом слое, который взаимодействует со слоем жидкости, иллюстрируют графики на рис. 3, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых

скоростей c_ε ($c_\varepsilon = (c_\sigma - c) / c$, c_σ – фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое, c – фазовая скорость нормальных волн в системе при отсутствии начальных деформаций) от толщины слоя жидкости \bar{h}_1 для первых 7 мод, (здесь дисперсионные кривые представлены для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого $\bar{h}_2 = 2$).

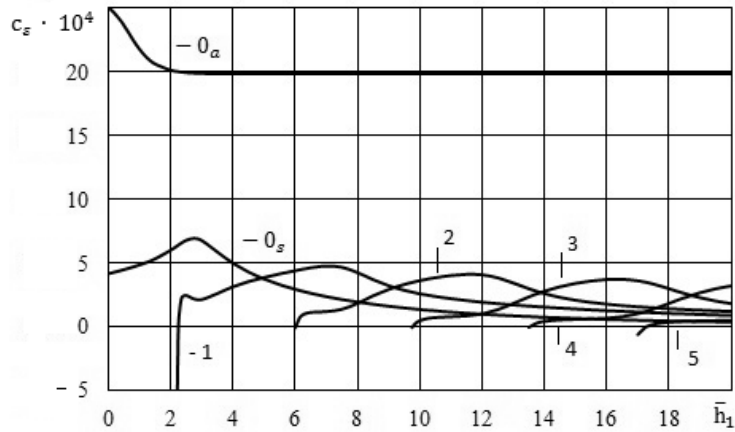


Рис. 3

На рис. 4 представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода; показаны зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн от безразмерных величин толщин слоя жидкости \bar{h}_1 для упругого слоя с толщиной $\bar{h}_2 = 10$ при отсутствии начальных деформаций.

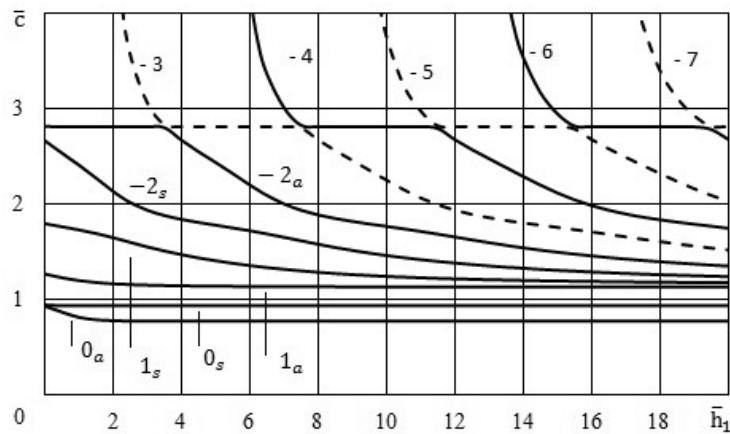


Рис. 4

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости мод в упругом слое, контактирующем со слоем жидкости, отображают графики на рис. 5 – 6, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε от толщины слоя жидкости \bar{h}_1 для первых 11 мод (дисперсионные кривые представлены для гидроупругого волновода, толщина упругого слоя которого $\bar{h}_2 = 10$).

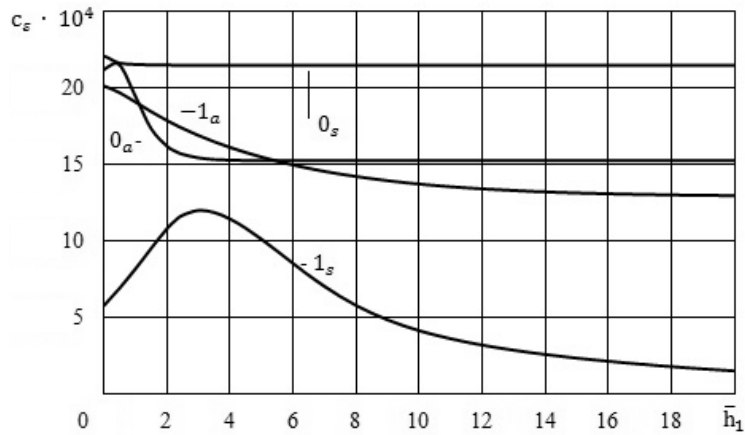


Рис. 5

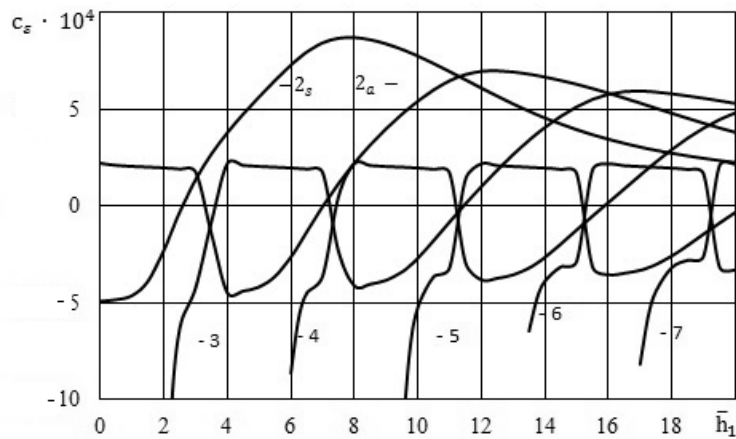


Рис. 6

§3. Анализ числовых результатов.

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды Лэмба, распространяющейся вдоль нижней свободной поверхности слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты) стремится к скорости волны Рэлея ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9336$) снизу, а скорость нулевой симметричной моды, распространяющейся вдоль верхней свободной поверхности слоя, стремится к скорости волны Рэлея сверху. Скорости всех высших нормальных волн Лэмба при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s .

Из графиков (рис. 2), отражающих влияние слоя жидкости на дисперсионную картину волнового процесса при взаимодействии тонкого ($\bar{h}_2 = 2$) упругого слоя с жидкой средой, следует, что скорость нулевой антисимметричной моды с ростом толщины жидкого слоя \bar{h}_1 стремится к величине, равной 0,6708, которая меньше скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,7717$). Скорости нулевой симметричной моды и всех высших мод, порождаемых слоем жидкости, стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,1526$). При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, что $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$.

Из графиков (рис. 3) видим, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению скоростей нулевых антисимметричной и симметричной мод. Скорости высших мод, возникновение которых обусловлено действием слоя жидкости, в окрестности критических частот в случае тонкого ($\bar{h}_2 = 2$) упругого слоя ниже, чем при отсутствии предварительного растяжения. В дальнейшем с ростом толщины слоя жидкости для скоростей всех мод характерно уменьшение влияния начального растяжения. Для мод 1 – 5, порождаемых жидкостью, существуют жидкие слои определенной толщины и определенные частоты, при которых начальные напряжения не оказывают влияния на их фазовые скорости. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полубограниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [6] для упругого слоя, не взаимодействующего с жидкостью.

Графики для гидроупругой системы (рис. 4 для случая толстого слоя с $\bar{h}_2 = 10$) показывают, что при росте толщины жидкого слоя скорость нулевой антисимметричной моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,7717$), а скорость нулевой симметричной моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,9336$). При увеличении толщины жидкого слоя скорость первой антисимметричной моды стремится к скорости волны, величина которой (1,1318) меньше скорости распространения звука в жидкости $\bar{a}_0 = 1,1526$. Фазовые скорости всех последующих высших мод стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде $\bar{a}_0 = 1,1526$. При этом механические параметры гидроупругого волновода такие, что $\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$.

Из графиков (рис. 5 – 6) следует, что начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) упругого слоя приводит к повышению фазовых скоростей нулевой и первой антисимметричной и симметричной мод, а также второй антисимметричной моды. Скорости второй симметричной моды и всех последующих высших мод 3 – 7, порождаемых слоем жидкости, в окрестности частот их зарождения становятся меньше соответствующих скоростей в слое без начальных напряжений. С увеличением толщины жидкого слоя (частоты) для всех мод характерно уменьшение влияния начального растяжения упругого слоя на их фазовые скорости. Отметим, что для мод, начиная со второй и далее для всех последующих, существуют жидкие слои определенной толщины и определенные частоты, при которых предварительное деформирование не оказывает влияния на их фазовые скорости. В отличие от тонкого слоя для толстого упругого слоя каждая мода, порождаемая жидкостью, имеет три такие частоты. Кроме того, из представленных графиков следует, что для ряда мод существуют области частот, где начальное растяжение упругого слоя приводит как к повышению величин фазовых скоростей волн, так и к их понижению.

Заключение.

В данной работе в рамках линеаризованной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости дана постановка и решение задачи о распространении акустических волн в предварительно напряженном сжимаемом упругом слое, взаимодействующем со слоем идеальной сжимаемой жидкости. С использованием представлений общих решений получено дисперсионное уравнение в общем виде, независящем от вида упругого потенциала. Численно с привлечением трехинвариантного упругого потенциала Мурнагана дан анализ влияния начальных напряжений, толщин слоев упругого тела и жидкости на фазовые скорости нормальных волн в широком диапазоне частот как для тонкого, так и для толстого упругих слоев. Показано, что в гидроупругом волноводе с выбранными механическими параметрами системы ($\bar{a}_0 = 1,1526 > \bar{c}_s$) и твердым слоем произвольной заданной фиксированной толщины \bar{h}_2 при увеличении толщины жидкого слоя \bar{h}_1 высшие моды локализуются и распространяются в упругом слое. При этом

фазовые скорости мод высокого порядка с ростом частоты стремятся к скорости распространения звука в жидкой среде.

Установлено существование жидких слоев определенной толщины и определенных частот, а также ряда мод, для которых предварительное деформирование не оказывает влияния на их фазовые скорости. Полученные результаты позволяют устанавливать для волновых процессов пределы применимости моделей упругого тела, основанных на различных вариантах теории малых начальных деформаций.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та розв'язок задачі про поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливному пружному шарі, який взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності при скінченних деформаціях. Побудовано дисперсійні криві для мод у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив початкових напружень, товщини пружного шару та товщини шару рідини на частотний спектр нормальних хвиль у гідропружній системі. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Жук А.П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 4. – С. 3 – 23.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
3. Гузь А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 3. – С. 3 – 21.
4. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. – К.: Наук. думка, 1986. – 376 с. (т. 1); 536 с. (т. 2).
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
6. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
7. Гузь А.Н., Рушчицкий Я.Я., Гузь И.А. Введение в механику нанокompозитов. – К.: Ин-т механики им. С.П.Тимошенко, 2010. – 398 с.
8. Akbarov S. D., Emiroglu I., Tasci F. The Lamb's problem for a half – space covered with the pre – stretched layer // Int. J. Mech. Sci. – 2005. – N 9. – P. 1326 – 1349.
9. Akbarov S.D., Ozaydin O. The effect of initial stresses on harmonic stress fields within the stratified half – plane // European J. Mech. – A/Solids. – 2001. – **20**, N 3. – P. 385 – 396.
10. Akbarov S.D., Ozisik M. The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre – stressed stratified half – plane // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – **41**, N 17. – P. 2047 – 2061.
11. Bagno A.M., Guz A.N. Elastic Waves in Prestressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 6. – P. 435 – 463.
12. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non – destructive determination of stresses in near – the – surface layers of materials. Review // J. Phys. Sci. and Appl. – 2011. – **1**, N 1. – P. 1 – 15.
13. Guz I.A., Rushchitsky J. J. Computational simulation of harmonic wave propagation in fibrous micro – and nanocomposites // Compos. Sci. and Techn. – 2007. – **67**, N 5. – P. 861 – 866.
14. Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W. Acoustic waves at the interface of a pre – stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. Non-Lin. Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310 – 320.
15. Panasyuk O.N. Influence of Interface Conditions on Wave Propagation in Composite Laminates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 399 – 406.
16. Rushchitsky J. J. On a Nonlinear Description of Love Waves // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 629 – 640.
17. Rushchitsky J. J. Nonlinear elastic waves in materials. – Berlin: Springer, 2014. – 453 p.
18. Rushchitsky J. J., Sinchilo S.V. On Two-Dimensional Nonlinear Wave Equations for the Murnaghan Model // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 512 – 520.

Поступила 29.04. 2014

Утверждена в печать 26.05.2015