

П. З. Луговой, Ю. А. Мейш

**НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНО  
ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ;  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: desc@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** The problem on the forced vibrations of cylindrical discretely stiffened shell on an elastic foundation is stated for the case of distributed impulse loading. A dynamical behavior of inhomogeneous cylindrical shell is considered in the framework of the theory of shells of Timoshenko type. The method of finite differences by the spatial and time coordinates is used. The numerical results are shown and commented.

**Key words:** cylindrical discretely stiffened shell, theory of shells and rods of Timoshenko type, elastic foundation, forced vibrations, numerical method.

**Введение.**

При исследовании взаимодействия упругих конструкций с окружающей средой существует два основных подхода постановки и решения рассматриваемых задач [1, 5] при моделировании окружающей среды: 1) согласно трехмерных уравнений механики сплошных сред; 2) с использованием некоторых интегральных кинематических и силовых параметров, действующих на упругую конструкцию (упругие основания вида Винклера, Пастернака и т. д.) [1, 3]. Решение задач согласно первого подхода связано с определенными алгоритмическими и вычислительными трудностями [1 – 3, 5]. Согласно второго подхода действие окружающей среды заменяем упругим основанием, что, в свою очередь, приводит к упрощению постановки и решения исходных задач. Задачи определения динамического поведения подкрепленной оболочки на упругом основании условно можно разделить на две части: а) задача о влиянии упругого основания на гладкие пластины и оболочки [4, 6, 10 – 12, 15 – 18, 21, 22]; б) задача о влиянии подкрепляющих элементов на неоднородную конструкцию [3, 7 – 9, 14, 17]. Следует отметить работы, в которых учтено совместное влияние упругой среды и подкрепляющих элементов на напряженно-деформируемое состояние исходных неоднородных конструкций [2, 3, 13, 16, 19, 20].

В данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом двухпараметрическом основании вида Пастернака при действии распределенной импульсной нагрузке. Динамическое поведение подкрепленной неоднородной оболочки рассмотрено согласно варианту геометрически линейной теории оболочек и стержней с учетом гипотез Тимошенко. Для решения поставленной задачи использован метод конечных разностей по пространственным и временной координатам [3]. Приведены численные результаты решения задачи в зависимости от геометрических и физико-механических параметров конструкции и упругого основания.

**§1. Постановка задачи.**

Неоднородная упругая структура с учетом дискретных включений представляет собой непосредственно обшивку и набор дискретных продольно-поперечных подкрепляющих ребер. Принимаем, что напряженно-деформированное состояние обшивки и

ребер может быть определено в рамках геометрически линейной теории оболочек и стержней с учетом гипотез Тимошенко [3]. Деформированное состояние срединной поверхности обшивки определяем через компоненты обобщенного вектора перемещений  $\bar{U} = (u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2)^T$ . Деформированное состояние центра тяжести поперечного сечения ребра, направленного вдоль оси  $x$ , определяем обобщенным вектором перемещения  $\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$ , а для ребра, направленного вдоль оси  $y$ , – вектором  $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$ . Предполагаем также, что оболочка и дискретные подкрепляющие ребра жестко соединены между собой.

Примем, что общая система координат отнесена к срединной поверхности обшивки с толщиной  $h$ , а координату  $z$  отсчитываем в сторону возрастания внешней нормали к исходной поверхности.

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения  $i$ -го ребра, направленного вдоль оси  $x$  и компонентами обобщенного вектора перемещений исходной срединной поверхности записываем в виде [3]:

$$u_{1i}(x) = u_1(x, y_i) + h_{ci}\varphi_1(x, y_i); \quad u_{2i}(x) = u_2(x, y_i) + h_{ci}\varphi_2(x, y_i); \quad (1.1)$$

$$u_{3i}(x) = u_3(x, y_i); \quad \varphi_{1i}(x) = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{2i}(x) = \varphi_2(x, y_i).$$

Аналогично записываем условия контакта  $j$ -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси  $y$ , с обшивкой. В формулах (1.1)  $h_{ci}$  – расстояние от исходной срединной поверхности к линии центра тяжести поперечного сечения  $i$ -го ребра.

Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используем вариационный принцип Гамильтона – Остроградского, согласно которого имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(\Pi - T) - \delta A] dt = 0, \quad (1.2)$$

где  $\Pi$  – потенциальная энергия системы с учетом упругого основания;  $T$  – кинетическая энергия системы;  $A$  – работа внешних сил.

Выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^I \Pi_i + \sum_{j=1}^J \Pi_j + \Pi_{foun},$$

где  $\Pi_0, \Pi_i, \Pi_j$  – потенциальные энергии, соответственно, обшивки,  $i$ -го ребра,  $j$ -го ребра и  $\Pi_{foun}$  – потенциальная энергия упругого основания (модель Пастернака).

Выражения для  $\delta\Pi$  и  $\delta T$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 &= \iint_S \int_z [\sigma_{11}^z \delta\varepsilon_{11}^z + \sigma_{22}^z \delta\varepsilon_{22}^z + \sigma_{12}^z \delta\varepsilon_{12}^z + \sigma_{13}^z \delta\varepsilon_{13}^z + \sigma_{23}^z \delta\varepsilon_{23}^z] dS; \\ \delta\Pi_i &= \int_x \sum_{i=1}^I \int_{S_i} [\sigma_{11}^{yz} \delta\varepsilon_{11}^{yz} + \sigma_{12}^{yz} \delta\varepsilon_{12}^{yz} + \sigma_{13}^{yz} \delta\varepsilon_{13}^{yz}] dS_i dx; \\ \delta\Pi_j &= \int_y \sum_{j=1}^J \int_{S_j} [\sigma_{22}^{xz} \delta\varepsilon_{22}^{xz} + \sigma_{21}^{xz} \delta\varepsilon_{21}^{xz} + \sigma_{23}^{xz} \delta\varepsilon_{23}^{xz}] dS_j dy; \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\delta\Pi_{foun} = \iint_S \left[ C_1 u_3 \delta u_3 + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} \delta \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} \delta \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \right] dS;$$

$$\begin{aligned}
\delta T = & - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iint_S \sum_z \rho \int_z \left( \frac{\partial^2 u_1^z}{\partial t^2} \delta u_1^z + \frac{\partial^2 u_2^z}{\partial t^2} \delta u_2^z + \frac{\partial^2 u_3^z}{\partial t^2} \delta u_3^z \right) dz dS + \right. \\
& + \int_x \sum_{i=1}^I \rho_i \int_{S_i} \left( \frac{\partial^2 u_{1i}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{1i}^{yz} + \frac{\partial^2 u_{2i}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{2i}^{yz} + \frac{\partial^2 u_{3i}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{3i}^{yz} \right) dS_i dx + \\
& \left. + \int_y \sum_{j=1}^J \rho_j \int_{S_j} \left( \frac{\partial^2 u_{1j}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{1j}^{yz} + \frac{\partial^2 u_{2j}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{2j}^{yz} + \frac{\partial^2 u_{3j}^{yz}}{\partial t^2} \delta u_{3j}^{yz} \right) dS_j dy \right\} dt.
\end{aligned}$$

В формулах (1.3)  $S, S_i, S_j$  – соответственно, области интегрирования по срединной поверхности гладкой оболочки, поперечного сечения  $i$ -го и  $j$ -го ребер;  $\rho, \rho_i, \rho_j$  – плотности материалов оболочки и ребер;  $C_1$  – коэффициент постели упругого основания, который характеризует работу упругого основания на растяжение – сжатие по оси  $z$ ;  $C_2$  – коэффициент постели, характеризующий работу упругого основания на поперечный сдвиг.

При выводе уравнений колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании используем, кроме условий контакта (1.1), также интегральную форму условий контакта оболочка – ребро согласно [3].

После стандартных преобразований в функционале (1.2) и с учетом интегральных характеристик напряжений оболочки и ребер, получим три группы уравнений:

уравнения колебаний собственно гладкой цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{T_{23}}{R} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \\
C_2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \quad (1.4)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

– уравнения колебания  $i$ -го ребра вдоль линии центра тяжести поперечного сечения центра ребра

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\
\frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \quad \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [T_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
\frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H] = \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right]; \quad (1.5) \\
\frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right];
\end{aligned}$$

– уравнения колебания  $j$ -го ребра вдоль линии центра тяжести поперечного сечения центра ребра

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{21i}}{\partial y} + [T_{11}] = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\
& \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \quad \frac{\partial T_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\
& \frac{\partial M_{21j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial y} + [M_{11}] = \rho_i F_i \left[ \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{kij}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right]; \\
& \frac{\partial M_{22j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H] = \rho_j F_j \left[ \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].
\end{aligned} \tag{1.6}$$

В уравнениях (1.5), (1.6) величины в квадратных скобках соответствуют усилиям-моментам, которые действуют на соответствующий дискретный  $i$ -й (или  $j$ -й) подкрепляющий элемент, который расположен вдоль оси  $OX$  (соответственно, оси  $OY$ ):  $[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-$ ,  $[\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-$ .

Связь между величинами усилий-моментов и соответствующими величинами деформаций для оболочки в уравнениях (1.4) имеет вид

$$\begin{aligned}
T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}); \quad T_{22} = B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}); \quad S = B_{12}\varepsilon_{12}; \quad T_{13} = B_{13}\varepsilon_{13}; \quad T_{23} = B_{23}\varepsilon_{23}; \\
M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}); \quad M_{22} = D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11}); \quad H = D_{13}\kappa_{12}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\left[ B_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad B_{12} = G_{12} h; \quad B_{13} = G_{13} h k^2; \quad B_{23} = G_{23} h k^2; \right.$$

$$\left. D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}; \quad D_{12} = G_{12} h^3 / 12, \right.$$

$k^2$  – интегральный коэффициент сдвига по толщине в теории пластин и оболочек при учете гипотез Тимошенко].

Соотношения связи величин деформаций с компонентами обобщенного вектора перемещений имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{u_3}{R}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}; \\
\varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - \frac{u_2}{R}; \quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x};
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\kappa_{22} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}; \quad \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \quad \theta_2 = \frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \theta_1 = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R}.$$

Соотношения между усилиями (моментами) и соответствующими деформациями  $i$ -го дискретного ребра, расположенного вдоль оси  $OX$ , имеют вид

$$T_{11i} = E_i F_i \varepsilon_{11i}; \quad T_{12i} = G_i F_i \varepsilon_{12i}; \quad T_{13i} = G_i F_i k^2 \varepsilon_{13i}; \quad M_{11i} = E_i I_{1i} \kappa_{11i}; \quad M_{12i} = G_i I_{kri} \kappa_{12i} \tag{1.9}$$

$$\left( \varepsilon_{11i} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \varepsilon_{12i} = \theta_{2i}; \quad \varepsilon_{13i} = \varphi_1 + \theta_{1i}; \right. \tag{1.10}$$

$$\theta_{2i} = \frac{\partial u_2}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}; \quad \theta_{1i} = \frac{\partial u_3}{\partial x}; \quad \kappa_{11i} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}; \quad \kappa_{12i} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}.$$

Соотношения между усилиями-моментами и соответствующими деформациями  $j$ -го дискретного ребра, расположенного вдоль оси  $OY$ , имеют вид

$$T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j}; \quad T_{21j} = G_j F_j \varepsilon_{21j}; \quad T_{23j} = G_j F_j k_j^2 \varepsilon_{23j}; \quad M_{22j} = E_j I_{2j} \kappa_{22j}; \quad M_{21j} = G_j I_{kj} \kappa_{21j} \quad (1.11)$$

$$\left[ \varepsilon_{22i} = \frac{\partial u_2}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{u_3}{R_j}; \quad \varepsilon_{21j} = \theta_{1j}; \quad \varepsilon_{23j} = \varphi_2 + \theta_{2j}; \right. \quad (1.12)$$

$$\left. \theta_{1j} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}; \quad \theta_{2j} = \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{1}{R} (u_2 \pm h_{cj} \varphi_2); \quad \kappa_{22j} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}; \quad \kappa_{21j} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right].$$

Уравнения колебаний (1.4) – (1.12) следует дополнить соответствующими граничными и начальными условиями.

В случае жесткого заземления одного из торцов ( $x = 0$  или  $x = L$ ) имеем равенства

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \quad (1.13)$$

## §2. Численный алгоритм.

Рассмотрим область  $D$ , которая имеет такой вид:

$$D = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq t \leq T\}.$$

В области  $D$  вводим разностную сетку  $\Omega = \Omega_{\Delta x \Delta y} \cdot \Omega_\tau$ , где принято:

$$\Omega_{\Delta x \Delta y} = \{(x_k, y_l) = (k\Delta x, l\Delta y), \Delta x = L/K, \Delta y = 2\pi R/M; k = \overline{0, K}; l = \overline{0, M}\};$$

$$\Omega_\tau = \{t_n = n\tau, \tau = T/N, n = \overline{0, N}\}.$$

Наряду с основной разностной сеткой, используем вспомогательные разностные сетки в дискретных точках  $(x_{k\pm 1/2}, y_l)$ ,  $(x_k, y_{l\pm 1/2})$ ,  $(x_{k\pm 1/2}, y_{l\pm 1/2})$ , где  $x_{k\pm 1/2} = (k \pm 1/2)\Delta x$ ,  $y_{l\pm 1/2} = (l \pm 1/2)\Delta y$ .

Разностную сетку строим таким образом, чтобы точки разрывов совпали с целыми узлами. Используя вспомогательные разностные сетки, применяем интегро-интерполяционный метод построения разностных уравнений в области  $\Omega_1 = \{x_{k-1/2} \leq x \leq x_{k+1/2}, y_{l-1/2} \leq y \leq y_{l+1/2}\}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ :

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{T_{23}}{R} + P_2 \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \quad (2.1) \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left[ C_2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T_{13}}{\partial x} + \frac{\partial T_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3 \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \\ \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} \right] d\Omega_1 dt &= \int_t \int_{\Omega_1} \left[ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt; \end{aligned}$$

$$\int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} \right] d\Omega_1 dt = \int_t \iint_{\Omega_1} \left[ \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_1 dt .$$

После стандартных преобразований в (2.1), получим разностные соотношения, которые аппроксимируют исходные уравнения (1.4) в гладкой области:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{11k+1/2,l} - T_{11k-1/2,l}}{\Delta x} + \frac{S_{k,l+1/2} - S_{k,l-1/2}}{\Delta y} + P_{1k,l}^n = \rho h(u_{1k,l}^n)_{\bar{n}} ; \\ & \frac{S_{k+1/2,l} - S_{k-1/2,l}}{\Delta x} + \frac{T_{22k,l+1/2} - T_{22k,l-1/2}}{\Delta y} + \frac{T_{23k,l+1/2} + T_{23k,l-1/2}}{2R} + P_{2k,l}^n = \rho h(u_{2k,l}^n)_{\bar{n}} ; \\ & C_2 \left[ \frac{u_{3k+1,l}^n - 2u_{3k,l}^n + u_{3k-1,l}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{3k,l+1}^n - 2u_{3k,l}^n + u_{3k,l-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + \frac{T_{13k+1/2,l} - T_{13k-1/2,l}}{\Delta x} + \\ & + \frac{T_{23k,l+1/2} - T_{23k,l-1/2}}{\Delta y} - \frac{T_{22k,l+1/2} + T_{22k,l-1/2}}{2R} - C_1 u_{3k,l}^n + P_{3k,l}^n = \rho h(u_{3k,l}^n)_{\bar{n}} ; \quad (2.2) \\ & \frac{M_{11k+1/2,l} - M_{11k-1/2,l}}{\Delta x} + \frac{H_{k,l+1/2} - H_{k,l-1/2}}{\Delta y} - \frac{T_{13k+1/2,l} + T_{13k-1/2,l}}{2} + m_{1k,l}^n = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{n}} ; \\ & \frac{H_{k+1/2,l} - H_{k-1/2,l}}{\Delta x} + \frac{M_{22k,l+1/2} - M_{22k,l-1/2}}{\Delta y} - \frac{T_{23k,l+1/2} + T_{23k,l-1/2}}{2} + m_{2k,l}^n = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{n}} , \end{aligned}$$

где обозначения разностных производных введены согласно [3].

Таким образом, в разностных уравнениях компоненты обобщенного вектора перемещений отнесены к целым узлам разностной сетки, а усилия-моменты – к разностной сетке с дробными индексами  $(x_{k\pm 1/2}, y_l)$  или  $(x_k, y_{l\pm 1/2})$ . Для согласования величин усилий-моментов в (2.2) проинтегрируем уравнения (1.7) в областях  $\Omega_2 = \{x_{k-1} \leq x \leq x_k, y_{l-1/2} \leq y \leq y_{l+1/2}\}$  и  $\Omega_3 = \{x_{k-1/2} \leq x \leq x_{k+1/2}, y_{l-1} \leq y \leq y_l\}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

В области  $\Omega_2$  имеем равенства:

$$\begin{aligned} \int_t \iint_{\Omega_2} [T_{11}] d\Omega_2 dt &= \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22})] d\Omega_2 dt ; \quad \int_t \iint_{\Omega_2} [S] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{12}\varepsilon_{12}] d\Omega_2 dt ; \\ \int_t \iint_{\Omega_2} [\bar{T}_{13}] d\Omega_2 dt &= \int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}] d\Omega_2 dt ; \quad \int_t \iint_{\Omega_2} [T_{13}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [B_{13}\varepsilon_{13}] d\Omega_2 dt ; \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\int_t \iint_{\Omega_2} [M_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22})] d\Omega_2 dt ; \quad \int_t \iint_{\Omega_2} [H] d\Omega_2 dt = \int_t \iint_{\Omega_2} [D_{12}\kappa_{12}] d\Omega_2 dt .$$

В области  $\Omega_3$  имеем формулы:

$$\begin{aligned} \int_t \iint_{\Omega_3} [S] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} [B_{12}\varepsilon_{12}] d\Omega_3 dt ; \quad \int_t \iint_{\Omega_3} [T_{22}] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11})] d\Omega_3 dt ; \\ \int_t \iint_{\Omega_3} [T_{23}] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} [T_{23}] d\Omega_3 dt ; \quad \int_t \iint_{\Omega_3} [H] d\Omega_3 dt = \int_t \iint_{\Omega_3} [D_{12}\kappa_{12}] d\Omega_3 dt ; \quad (2.4) \\ \int_t \iint_{\Omega_3} [M_{22}] d\Omega_3 dt &= \int_t \iint_{\Omega_3} [D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11})] d\Omega_3 dt . \end{aligned}$$

После стандартных преобразований в (2.3) и (2.4) получаем следующие разностные соотношения, которые связывают величины усилий-моментов с соответствующими величинами деформаций:

$$T_{11k\pm 1/2, l} = B_{11}(\varepsilon_{11k\pm 1/2, l}^n + \nu_{21}\varepsilon_{22k\pm 1/2, l}^n); \quad S_{k\pm 1/2, l} = B_{12}\varepsilon_{12k\pm 1/2, l}^n; \quad T_{13k\pm 1/2, l} = T_{13k\pm 1/2, l}^n;$$

$$T_{13k\pm 1/2, l} = B_{13}\varepsilon_{13k\pm 1/2, l}^n; \quad M_{11k\pm 1/2, l} = D_{11}(\kappa_{11k\pm 1/2, l}^n + \nu_{21}\kappa_{22k\pm 1/2, l}^n); \quad H_{k\pm 1/2, l} = D_{13}\kappa_{12k\pm 1/2, l}^n; \quad (2.5)$$

$$T_{22k, l\pm 1/2} = B_{22}(\varepsilon_{22k, l\pm 1/2}^n + \nu_{12}\varepsilon_{11k, l\pm 1/2}^n); \quad T_{23k, l\pm 1/2} = T_{23k, l\pm 1/2}^n; \quad T_{23k, l\pm 1/2} = B_{13}\varepsilon_{13k, l\pm 1/2}^n;$$

$$M_{22k, l\pm 1/2} = D_{22}(\kappa_{22k, l\pm 1/2}^n + \nu_{12}\kappa_{11k, l\pm 1/2}^n); \quad H_{k, l\pm 1/2} = D_{12}\kappa_{12k, l\pm 1/2}^n. \quad (2.6)$$

В соотношениях (2.5), (2.6) величины с индексами  $(k+1/2, l)$  и  $(k, l+1/2)$  получены интегрированием уравнений (1.7) в областях  $\{x_{k1} \leq x \leq x_{k+1}, y_{l-1/2} \leq y \leq y_{l+1/2}\}$  и  $\{x_{k-1/2} \leq x \leq x_{k+1/2}, y_l \leq y \leq y_{l+1}\}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Для получения согласованных величин деформаций в соотношениях (2.5), (2.6) проинтегрируем соотношения (1.8) по областям  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , соответственно, при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ . Соотношения по области  $\Omega_2$  имеют следующий вид:

$$\int_t \int_{\Omega_2} [\varepsilon_{11}] d\Omega_2 dt = \int_t \int_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] d\Omega_2 dt; \quad \int_t \int_{\Omega_2} [\varepsilon_{22}] d\Omega_2 dt = \int_t \int_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{w_3}{R} \right] d\Omega_2 dt;$$

$$\int_t \int_{\Omega_2} [\varepsilon_{12}] d\Omega_2 dt = \int_t \int_{\Omega_2} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] d\Omega_2 dt; \quad (2.7)$$

.....

Аналогично записываем соотношения для области  $\Omega_3$ .

После стандартных преобразований в (2.7) получены следующие разностные соотношения, которые связывают деформации с компонентами обобщенного вектора перемещений:

$$\varepsilon_{11k+1/2, l}^n = \frac{u_{1k+1, l}^n - u_{1k, l}^n}{\Delta x}; \quad \varepsilon_{11k-1/2, l}^n = \frac{u_{1k, l}^n - u_{1k-1, l}^n}{\Delta x};$$

$$\varepsilon_{22k+1/2, l}^n = \frac{u_{2k+1/2, l+1/2}^n - u_{2k+1/2, l-1/2}^n}{\Delta y} + \frac{u_{3k+1, l}^n + u_{3k, l}^n}{2R};$$

$$\varepsilon_{22k-1/2, l}^n = \frac{u_{2k-1/2, l+1/2}^n - u_{2k-1/2, l-1/2}^n}{\Delta y} + \frac{u_{3k, l}^n + u_{3k-1, l}^n}{2R};$$

$$\varepsilon_{12k, l+1/2}^n = \frac{u_{1k, l+1}^n - u_{1k, l}^n}{\Delta y} + \frac{u_{2k+1/2, l+1/2}^n - u_{2k-1/2, l+1/2}^n}{\Delta x}; \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{12k, l-1/2}^n = \frac{u_{1k, l}^n - u_{1k, l-1}^n}{\Delta y} + \frac{u_{2k+1/2, l-1/2}^n - u_{2k-1/2, l-1/2}^n}{\Delta x};$$

.....

Учитывая, что линии разрывов попадают в целые точки разностной сетки, разностный алгоритм для  $i$ -го продольного ребра строим следующим образом: по аналогии

с разностной сеткой для гладкой области вводим разностную сетку в областях  $\Omega_{1i} = \{x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}\}$ ,  $\Omega_{2i} = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ ,  $\Omega_{3i} = \{x_i \leq x \leq x_{i+1}\}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ .

Проинтегрируем уравнения колебаний (1.5) по области  $\Omega_{1i}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ ; тогда имеем равенства:

$$\begin{aligned} \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial T_{13i}}{\partial x} + [T_{23}] \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left[ \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right] d\Omega_{1i} dt; \quad (2.9) \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13} + [H] \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left[ h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right] \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt; \\ \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{12i}}{\partial x} + [M_{22}] \right\} d\Omega_{1i} dt &= \rho_i F_i \int_t \int_{\Omega_{1i}} \left\{ \pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left[ h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right] \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right\} d\Omega_{1i} dt. \end{aligned}$$

После стандартных преобразований в (2.9), получим следующие разностные соотношения для уравнений (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{T_{11ik+1/2}^n - T_{11ik-1/2}^n}{\Delta x} + [S]_i^n &= \rho_i F_i \left[ \left( u_{1k,l}^n \right)_{\bar{i}} \pm h_{ci} \left( \varphi_{1k,l}^n \right)_{\bar{i}} \right]; \\ \frac{T_{12ik+1/2}^n - T_{12ik-1/2}^n}{\Delta x} + [T_{22}]_i^n &= \rho_i F_i \left[ \left( u_{2k,l}^n \right)_{\bar{i}} \pm h_{ci} \left( \varphi_{2k,l}^n \right)_{\bar{i}} \right]; \\ \frac{T_{13ik+1/2}^n - T_{13ik-1/2}^n}{\Delta x} + [T_{23}]_i^n &= \rho_i F_i \left( u_{3k,l}^n \right)_{\bar{i}}; \quad (2.10) \\ \frac{M_{11ik+1/2}^n - M_{11ik-1/2}^n}{\Delta x} \pm h_{ci} \frac{T_{11ik+1/2}^n - T_{11ik-1/2}^n}{\Delta x} - \frac{T_{13ik+1/2}^n - T_{13ik-1/2}^n}{\Delta x} + [S]_i^n &= \\ &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \left( u_{1k,l}^n \right)_{\bar{i}} + \left[ h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right] \left( \varphi_{1k,l}^n \right)_{\bar{i}} \right]; \\ \frac{M_{21ik+1/2}^n - M_{21ik-1/2}^n}{\Delta x} \pm h_{ci} \frac{T_{12ik+1/2}^n - T_{12ik-1/2}^n}{\Delta x} + [M_{22}]_i^n &= \\ &= \rho_i F_i \left[ \pm h_{ci} \left( u_{2k,l}^n \right)_{\bar{i}} + \left[ h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right] \left( \varphi_{2k,l}^n \right)_{\bar{i}} \right]. \end{aligned}$$

Для получения согласованных разностных величин усилий-моментов проинтегрируем уравнения (1.9), соответственно, в областях  $\Omega_{2i}$ ,  $\Omega_{3i}$  при  $t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}$ . Тогда имеем формулы:



$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i F_i \varepsilon_{11i}] d\Omega_{2i} dt; \int_t \int_{\Omega_{2i}} [T_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i F_i \varepsilon_{12i}] d\Omega_{2i} dt; \quad (2.11)$$

$$\int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{11i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [E_i I_i \kappa_{11i}] d\Omega_{2i} dt; \int_t \int_{\Omega_{2i}} [M_{12i}] d\Omega_{2i} dt = \int_t \int_{\Omega_{2i}} [G_i I_{kri} \kappa_{12i}] d\Omega_{2i} dt.$$

После стандартных преобразований в (2.11) получим следующие разностные соотношения:

$$T_{11ik\pm 1/2}^n = E_i F_i \varepsilon_{11ik\pm 1/2}^n; \quad T_{12ik\pm 1/2}^n = G_i F_i \varepsilon_{12ik\pm 1/2}^n; \quad T_{13ik\pm 1/2}^n = k_1^2 G_i F_i \varepsilon_{13ik\pm 1/2}^n;$$

$$M_{11ik\pm 1/2}^n = E_i I_i \kappa_{11ik\pm 1/2}^n; \quad M_{12ik\pm 1/2}^n = G_i I_{kri} \kappa_{12ik\pm 1/2}^n.$$

.....

Аналогичным образом строится разностный алгоритм для  $j$ -го подкрепляющего ребра [3].

### §3. Числовой пример.

Рассмотрена задача динамического поведения дискретно подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на упругом основании типа Винклера (в уравнениях (1.4) полагалось  $C_2 = 0$ ) под действием распределенной внутренней импульсной нагрузки. Принято, что торцы оболочки при  $x = 0, x = L$  жестко защемлены. Поперечные ребра расположены в сечениях  $x_i = 0,25Li$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). Продольные ребра расположены в сечениях  $y_j = \pi R(j-1)/2$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) (оболочка подкреплена тремя поперечными ребрами и четырьмя продольными). Распределенная импульсная нагрузка  $P_3(s_1, s_2, t)$  задана таким образом:  $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)]$ , где  $A$  и  $T$  – амплитуда и длительность нагрузки. В расчетах принято  $E_1 / A = 7 \cdot 10^4$ ;  $T = 2,5R / c$ ;  $c = \{E_1 / [\rho(1 - \nu_1 \nu_2)]\}^{1/2}$ .

Задача решена при следующих геометрических и физико-механических параметрах:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $R / h = 10$ ;  $L / R = 4$ . Для подкрепляющего ребра принято:  $E_i = E_j = E$ ;  $F_i = F_j = a_j h_j$ ;  $a_i = a_j = h$ ;  $h_i = h_j = 2h$ . Расчеты проведены для трех значений коэффициента упругого основания Винклера: 1)  $C_1 = 1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>; 2)  $C_1 = 2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>; 3)  $C_1 = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup> на временном интервале  $0 < t \leq 40T$ .

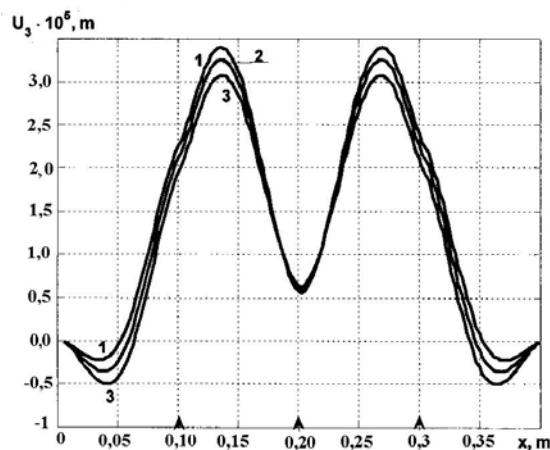


Рис. 1

На рис. 1, 2 представлены зависимости прогиба  $u_3$  по длине конструкции. Рис. 1 соответствует зависимости прогиба  $u_3$  от пространственной координаты  $x$  в сечении  $y = \pi R/4$  (сечение между ребрами) в момент времени  $t = 8,5T$  (время достижения максимального значения  $u_3$  для случая  $C_1 = 1 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>). Кривые 1 – 3 соответствуют случаям расчетов при  $C_1 = [(1 \cdot 10^9); (2 \cdot 10^9); (3 \cdot 10^9)]$  Н/м<sup>3</sup>.

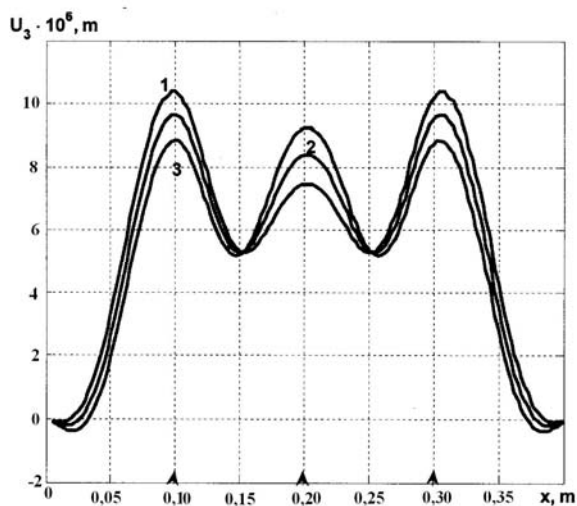


Рис. 2

На рис. 2 приведены соответствующие зависимости в тот же момент времени в сечении  $y = 0$ .

На рис. 3 – 6 приведены зависимости величин деформаций  $\varepsilon_{22}$  и напряжений  $\sigma_{22}$  по пространственной координате  $x$  в сечениях  $y = 0$  (на ребре – рис. 3, 5) и  $y = \pi R/4$  (между ребрами – рис. 4, 6) в момент времени  $t = 8,5T$ . Кривые 1 – 4 на рисунках соответствуют следующим случаям:  $C_1 = \{0; 1 \cdot 10^9; 2 \cdot 10^9; 3 \cdot 10^9\}$  Н/м<sup>3</sup>.

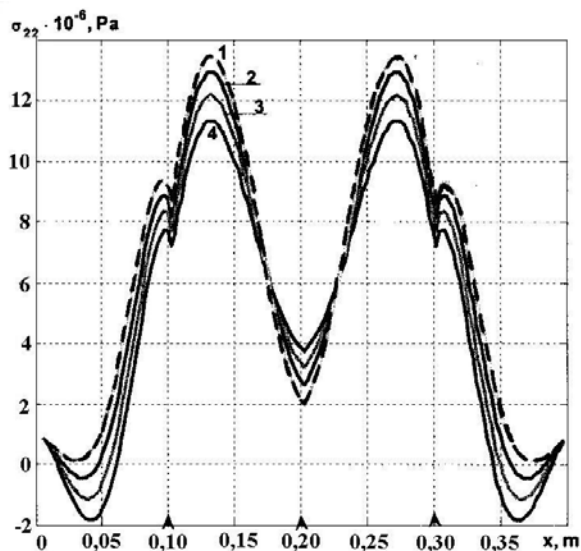
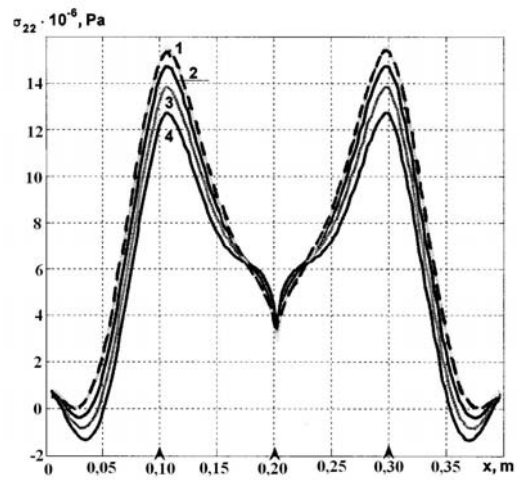
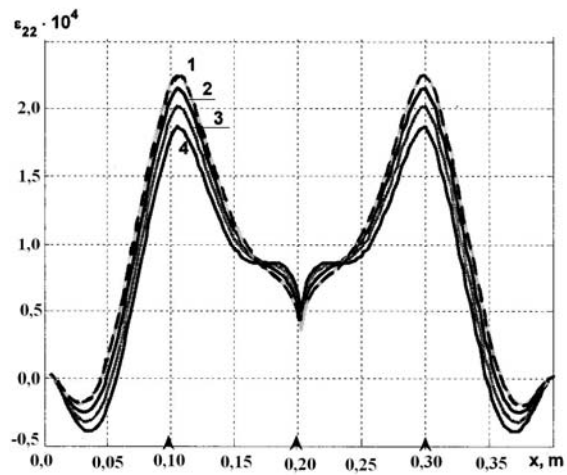


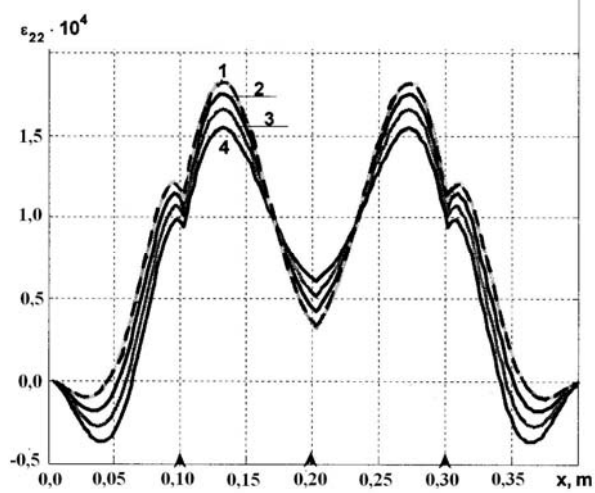
Рис. 3



*Puc. 4*



*Puc. 5*



*Puc. 6*

Влияние ребер по пространственной координате  $x$ , исходя из представленных графиков, определяется визуально. Для величин деформаций  $\varepsilon_{22}$  и напряжений  $\sigma_{22}$  наблюдаются пространственные разрывы по линиям расположения поперечных ребер. В сечениях между ребрами эти зависимости имеют более выраженный характер. Учет упругого основания при приведенных значениях коэффициентов  $C_1$  приводит к незначительным изменениям напряженно-деформируемого состояния неоднородной оболочки по отношению к величинам без упругого основания (максимальные отличия по величинам деформаций  $\varepsilon_{22}$  составляют 14 – 16%, а по величинам напряжений  $\sigma_{22}$  – 25%).

Представленный графический материал позволяет детально анализировать напряженно – деформируемое состояние неоднородной упругой структуры в зависимости от ее физико-механических и геометрических параметров упругого основания.

#### **Выводы.**

В работе дана постановка задачи о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом основании при распределенной нагрузке. Динамическое поведение неоднородной цилиндрической оболочки рассмотрено в рамках теории оболочек и стержней с учетом гипотез Тимошенко. Для решения данной задачи использован метод конечных разностей по пространственным и временной координатам. Приведены числовые результаты решения задачи и дан их анализ.

**РЕЗЮМЕ.** Наведено постановку задачі про вимушені коливання циліндричної дискретно підкріпленої оболонки на пружній основі при розподіленому імпульсному навантаженні. Динамічну поведінку неоднорідної циліндричної оболонки розглянуто в рамках теорії оболонок з врахуванням гіпотез Тимошенка. Для розв'язання даної задачі використано метод скінченних різниць за просторовою та часовою координатами. Наведено числові результати та проведено їх аналіз.

1. Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарные взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техн.: Мех. деф. тверд. тела. Т. 15. – М.: ВИНТИ, 1983. – С. 69 – 148.20.
2. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. О решении осесимметрических задач динамики цилиндрических оболочек на упругом основании // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 12. – С. 85 – 94.
3. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Головки К.Г. О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 99 – 106.
5. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – К.: Сталь, 2000. – 600 с.
6. Akgoz B., Civalek O. Nonlinear vibration analysis of laminated plates resting on nonlinear two – parameters elastic foundations // Steel and Composite Structures. – 2011. – **11**, N 5. – P. 403 – 421.
7. Bayat M., Pakar I, Bayat M. Analytical solution for nonlinear vibration of an eccentrically reinforced cylindrical shell // Steel and Composite Structures. – 2013. – **14**, N 5. – P. 511 – 521.
8. Birman V., Bert C.W. Dynamic stability of reinforced composite cylindrical shells in thermal fields // J. of Sound and Vibrations. – 1990. – **142**, N 2. – P. 183 – 190.
9. Carrera E., Zappino E., Filippi M. Free Vibration Analysis of Thin – Walled Cylinders Reinforced With Longitudinal and Transversal Stiffeners // J. of Vibration and Acoustics. – 2013. – **135**, N 1. – P. 177 – 188.
10. Civalek Ö. Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2014. – **113**. – P. 1 – 9.
11. Gupta A.P., Vibration of rectangular orthotropic elliptic plates on quadratically varying thickness on elastic foundation // Trans. ASME J. Vibr. and Acoust. – 2004. – **126**, N 1. – P. 132 – 140.

12. Güler K. Circular Elastic Plate Resting on Tensionless Pasternak Foundation // J. Eng. Mech., ASCE. – 2004. – **130**, N 10. – P. 1251 – 1254.
13. Lugovoi P.Z., Prpokopenko N.Ya. Effects of Elastic Foundation on Dispersion of Harmonic Waves in Cylindrical Shells Stiffened Longitudinally // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P.116 – 124.
14. Mustafa B.A.J., Ali R. Prediction of Natural Frequency of Vibration of Stiffened Cylindrical Shells and Orthogonally Stiffened Curved Panels // J. Sound and Vibration. – 1987. – **43**. – P. 317 – 327.
15. Nam M. H., Lee K.H. Unsymmetrically Loaded Cylindrical Tank on Elastic Foundation // J. Eng. Mech., ASCE. – 2000. – **126**, N 12. – P. 1257 – 1261.
16. Paliwad D.N. Free vibrations of orthotropic cylindrical shell on elastic foundation // AIAA J. – 1999. – **37**, N 9. – P. 1135 – 1139.
17. Qatu M.S. Vibration of Laminated Shells and Plates. – Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004. – 430 p.
18. Sathyamoorthy Muthukrishnan. Nonlinear Analysis of Structures. – New York: CRC Press, 1998. – 621 p.
19. Skosarenko Yu.V. Free Vibrations of Ribbed Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 575 – 581.
20. Skosarenko Yu.V. The Stress-Strain State of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting with Elastic Foundation under Short-Term Loads // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P.92 – 101.
21. Soeded W. Vibrations of Shells and Plates. – New York: Marcel Dekken, Inc. – 2004. – 532 p.
22. Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J.N. Winkler-Pasternak Foundation Effect on the Static and Dynamic Analyses of Laminated Doubly-Curved and Degenerate Shells and Panels // Composites. Part B. Engineering. – 2014. – **57**, N 1. – P. 269 – 296.

Поступила 17.12.2012

Утверждена в печать 22.12.2015

---