С . И . Г о л и н ь к о [1], В . И . С л ы н ь к о [2]

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ СИЛ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина, e-mail: [1] *spenspero@mail.ru,* [2] *vitstab@ukr.net*

Abstract. The stability in the linear approximation is studied for the mechanical system with impulse action of the dissipative, potential, and circulation forces as well as the gyroscopic forces of high intensity. The coefficient conditions of stability of equilibrium state in the linear approximation are obtained for the mechanical system under condition that the spectral decomposition of the gyroscopic forces matrix is known. The conditions of parametric resonance onset for the vibrations of plane gyroscopic pendulum are revealed.

Key words: stability in the linear approximation, impulse action, parametric resonance, gyroscopic mechanical system, equilibrium state.

Введение.

Исследование устойчивости равновесия механических систем с конечным числом степеней свободы, в зависимости от структуры действующих сил, является одной из старейших проблем теоретической механики. Наиболее ранние и широкоизвестные результаты составляют суть теорем Тэта – Томпсона. Дальнейшее развитие этой тематики, включая проблему гироскопической стабилизации, связано с работами многих ученых [4 – 8, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 22 – 24, 27 – 29 и др.]. Устойчивость импульсных систем рассмотрена в [18, 21], а применение теории параметрического резонанса представлено в [14, 15, 25, 26].

В данной работе предложено исследование устойчивости по линейному приближению механической системы с импульсным воздействием при действии диссипативных, потенциальных и циркуляционных сил, а также гироскопических сил большой интенсивности. Применяется метод усреднения Н.Н. Боголюбова, который для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием развит в работах [9, 10]. При этом использовано замены переменных, следуя работе [12]. Используя замену А.М. Ляпунова относительно линейных переменных, из линеаризированной системы уравнений возмущённого движения исключаются гироскопические силы. Далее, используя замены Н.Н. Боголюбова, система дифференциальных уравнений возмущённого движения с импульсным воздействием приведена к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Качественное поведение решений последней полностью определяет свойства устойчивости состояния равновесия механической системы с импульсным воздействием. При этом рассмотрение ограничено двумя приближениями по степеням малого параметра.

В данной работе получены коэффициентные условия устойчивости состояния равновесия по линейному приближению механической системы с импульсным воздействием при условии, что известно в явном виде спектральное разложение матрицы гироскопических сил. Определены условия возникновения параметрического резонанса колебаний плоского гироскопического маятника.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим голономную механическую систему с N степенями свободы. Обозначим $q_1, .. , q_N$ – обобщённые координаты этой системы. Предположим, что в фиксированные моменты времени $t = kT$, где $k \in Z$, система подвергается импульсному воздействию. Тогда покажем, что дифференциальные уравнения движения такой механической системы можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n(q, \dot{q}) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) p_{nk}(q) \quad (n = 1, \dots, N),$$

где $L = L(q, \dot{q})$ – функция Лагранжа рассматриваемой механической системы; $Q_n(q, \dot{q})$ – обобщённые силы, действующие на систему; $p_{nk}(q)$ – обобщённые ударные импульсы сил, мгновенно действующих на систему в моменты времени $t = kT$; $\delta(t)$ – функция Дирака; T – период.

Предположим, что рассматриваемая динамическая система имеет состояние равновесия $q = q^*$, т.е.

$$Q_k(q^*, 0) = 0; \quad p_{nk}(q^*) = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_n}\Big|_{q=q^*} = 0,$$

где $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия системы.

Пусть $x = q - q^*$ – вектор переменных возмущённого движения; тогда при условии, что функция Лагранжа трижды непрерывно-дифференцируемая и обобщённые ударные импульсы сил $p_{nk}(q)$ непрерывно-дифференцируемые в окрестности состояния равновесия $q = q^*$, система дифференциальных уравнений возмущённого движения в первом приближении принимает вид

$$A\ddot{x} + (B + \omega G)\dot{x} + Cx = 0, \quad t \neq kT;$$

$$A\dot{x}(t+0) = A\dot{x}(t) + Mx(t), \quad t = kT, \tag{1.1}$$

где $x \in R^N$, A – симметричная положительно-определенная матрица инерционных сил; B – симметричная положительно-определенная матрица диссипативных сил; ωG – кососимметричная матрица гироскопических сил; C – симметричная положительно-определенная матрица потенциальных сил; $\{kT\}_{k \in Z}$ – последовательность моментов импульсного воздействия; M – матрица импульсных сил.

Вопрос об устойчивости системы (1.1) может быть решён на основе теории Флоке [5]. Для этого систему (1.1) необходимо привести к нормальной форме и вычислить матрицу монодромии. Это связано с необходимостью определения матричной экспоненты, что в явном виде не всегда возможно, поскольку сопряжено с необходимостью вычисления корней алгебраического уравнения степени выше $2N$ (для систем с числом степеней свободы больше 1). Поэтому получение таких условий устойчивости системы (1.1), которые позволяют судить об устойчивости непосредственно по матрицам A , B , G , C и M , подобно тому как теоремы Тэта – Томпсона дают возможность утверждать об устойчивости системы без импульсного воздействия ($M = 0$) по структуре матриц A , B , G , и C , не прибегая к самим условиям Рауса – Гурвица, является основной задачей настоящей работы.

Рассмотрим эту задачу для гироскопических механических систем, предполагая ω – большим параметром и принимая известным спектральное разложение матрицы G , которая в частном случае будет невырожденной.

§2. Преобразование уравнений движения.

Введем безразмерное время $\tau = \omega t$, тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &Ax'' + \left(G + \frac{1}{\omega}B\right)x' + \frac{1}{\omega^2}Cx = 0, \quad \tau \neq k\theta \\ &Ax'(\tau+0) = Ax'(\tau) + \frac{1}{\omega}Mx(\tau), \quad \tau = k\theta \end{aligned} \qquad \left(x' = \frac{dx}{d\tau},\ \theta = \omega T\right). \tag{2.1}$$

Определив малый параметр $\varepsilon = 1/\omega$, тогда система (2.1) преобразуется к виду

$$Ax'' + (G + \varepsilon B)x' + \varepsilon^2 Cx = 0, \quad \tau \neq k\theta\ ;$$

$$Ax'(\tau+0) = Ax'(\tau) + \varepsilon Mx(\tau), \quad \tau = k\theta.$$

Поскольку матрица A – положительно-определенная, то существует действительная матрица $A^{1/2}$. Введем замену переменных $z = A^{1/2}x$, тогда в новых переменных систему (2.1) можно представить в виде

$$z'' + A^{-1/2}(G + \varepsilon B)A^{-1/2}z' + \varepsilon^2 A^{-1/2}CA^{-1/2}z = 0, \quad \tau \neq k\theta\ ;$$

$$z'(\tau+0) = z'(\tau) + \varepsilon A^{-1/2}MA^{-1/2}z(\tau), \quad \tau = k\theta. \tag{2.2}$$

Введем обозначения: $\overline{G} = A^{-1/2}GA^{-1/2}$, $\overline{B} = A^{-1/2}BA^{-1/2}$, $\overline{C} = A^{-1/2}CA^{-1/2}$, $\overline{M} = A^{-1/2}MA^{-1/2}$ и отметим, что матрицы $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{G}$ обладают теми же свойствами симметричности, что и матрицы B, C и G. Поэтому в дальнейшем сохраним за ними прежние обозначения (без черты). Для дальнейшего преобразования системы уравнений возмущенного движения рассмотрим линейную замену переменных $(z, z') \to (\eta_1, \eta_2)$:
$z = -G^{-1}e^{-G\tau}\eta_2 + \eta_1$, $\quad z' = e^{-G\tau}\eta_2$.

Нетрудно убедиться, что эта замена является преобразованием Ляпунова. Запишем систему уравнений возмущенного движения в новых переменных $\eta = (\eta_1^T, \eta_2^T)^T$ на интервалах времени $(k\theta, (k+1)\theta)$:

$$\eta_1' = -\varepsilon G^{-1}Be^{-G\tau}\eta_2 - \varepsilon^2(-G^{-1}CG^{-1}e^{-G\tau}\eta_2 + G^{-1}C\eta_1)\ ;$$

$$\eta_2' = -\varepsilon e^{G\tau}Be^{-G\tau}\eta_2 - \varepsilon^2(-e^{G\tau}CG^{-1}e^{-G\tau}\eta_2 + e^{G\tau}C\eta_1).$$

В моменты времени $\tau = k\theta$ выполняются условия сопряжения

$$\eta_1(\tau+0) = \eta_1(\tau) + \varepsilon(-G^{-1}M\,G^{-1}e^{-Gk\theta}\eta_2(\tau) + G^{-1}M\eta_1(\tau))\ ;$$

$$\eta_2(\tau+0) = \eta_2(\tau) + \varepsilon(-G^{-1}e^{Gk\theta}M\,e^{-Gk\theta}\eta_2(\tau) + e^{Gk\theta}M\eta_1(\tau)).$$

Определим блочные матрицы: $D_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -G^{-1}Be^{-G\tau} \\ 0 & -e^{G\tau}Be^{-G\tau} \end{pmatrix}$;

$$D_2(\tau) = \begin{pmatrix} -G^{-1}C & G^{-1}CG^{-1}e^{-G\tau} \\ -e^{G\tau}C & e^{G\tau}CG^{-1}e^{-G\tau} \end{pmatrix};\ F_k = \begin{pmatrix} G^{-1}M & -G^{-1}MG^{-1}e^{-Gk\theta} \\ e^{Gk\theta}M & -e^{Gk\theta}MG^{-1}e^{-Gk\theta} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений представим в виде

$$\frac{d\eta}{d\tau} = (\varepsilon(D_1(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty}F_k\delta(\tau - k\theta)) + \varepsilon^2 D_2(\tau))\eta(\tau)\,. \tag{2.3}$$

Производную функции $\eta(\tau)$ следует понимать в смысле теории обобщённых функций [3]. Далее исследуем эту систему, применяя классические асимптотические методы Н.Н. Боголюбова, развитые для этого класса систем в работе [9].

§3. Метод усреднения.

Основная идея асимптотического метода Н.Н. Боголюбова [1] состоит в отыскании формальной замены переменных

$$\zeta(\tau) = (I + \varepsilon R_1(\tau) + \varepsilon^2 R_2(\tau) + ...)\eta(\tau), \tag{3.1}$$

где $R_1(\tau)$ – кусочно-дифференцируемая функция, имеющая в точке $\tau = k\theta$ разрывы первого рода, которую принимаем непрерывной справа, т.е. $R_1(\tau+0) = R_1(\tau)$, приводящей систему уравнений (2.3) к виду

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = (\varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + ...)\zeta, \tag{3.2}$$

где G_1, G_2 – некоторые постоянные матрицы. При этом ограничимся двумя приближениями по степеням малого параметра ε. Матрицы $R_1(\tau)$, $R_2(\tau)$ удовлетворяют матричным дифференциальным уравнениям

$$R_1'(\tau) = G_1 - D_1(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta(\tau - k\theta); \quad R_1(0) = 0; \tag{3.3}$$

$$R_2'(\tau) = G_2 + G_1 R_1(\tau) - R_1(\tau) D_1(\tau) - D_2(\tau) - R_1(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta(\tau - k\theta); \;\; R_2(0) = 0. \tag{3.4}$$

Здесь в (3.3) и (3.4) производные также понимаем в смысле теории обобщённых функций. Постоянные матрицы G_1 и G_2 необходимо подобрать так, чтобы матрицы $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$ были ограниченными функциями при $\tau \in R$. В этом случае, преобразование (3.1) будет преобразованием Ляпунова, по крайней мере для достаточно малых по модулю ε.

§4. Первое приближение.

Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$R_1(\tau) = \int_0^{\tau} (G_1 - D_1(s) - \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta(s - k\theta)) ds = G_1 \tau - \int_0^{\tau} D_1(s) ds - \sum_{k=1}^{[\tau^*]} F_k \quad \left(\tau^* = \frac{\tau}{\theta}\right). \tag{4.1}$$

Действительно, в момент времени при $\tau \neq k\theta$ из (4.1) следует, что классическая производная функции $R_1(\tau)$ почти везде равна $G_1 - D_1(\tau)$ и скачок функции $R_1(\tau)$ определяется как $[R_1]_{\tau=k\theta} = F_k$. Используя формулу, аналогичную формуле для производной кусочно-дифференцируемой функции $f(x)$ из [3], $f' = f'_{kl}(x) + \sum_{k=1} [f]_{x_k} \delta(x - x_k)$, где $f'_{kl}(x)$ – классическая производная функции $f(x)$, равная $f'(x)$ при $x \neq x_k$, и не определена в точках x_k, а $[f]_{x_k}$ – скачок функции $f(x)$ в точке x_k, приходим к выводу, что $R_1(\tau)$ удовлетворяет (3.3).

Обозначив g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ – блочные элементы матрицы G_1, а $r_{ij}(\tau)$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ – блочные элементы матрицы $R_1(\tau)$, тогда получим соотношения для блочных элементов матрицы $R_1(\tau)$ в таком виде:

$$r_{11}(\tau) = \tau g_{11} - \sum_{k=1}^{[\tau^*]} G^{-1} M; \tag{4.2}$$

$$r_{12}(\tau) = \tau g_{12} + \int_0^\tau G^{-1} B e^{-Gs}\, ds + \sum_{k=1}^{[\tau^*]} G^{-1} M G^{-1} e^{-Gk\theta}; \tag{4.3}$$

$$r_{21}(\tau) = \tau g_{21} - \sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{Gk\theta} M; \tag{4.4}$$

$$r_{22}(\tau) = \tau g_{22} + \int_0^\tau e^{Gs} B_{22} e^{-Gs}\, ds + \sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{Gk\theta} M G^{-1} e^{-Gk\theta}. \tag{4.5}$$

Из условий ограниченности элементов матрицы $R_1(\tau)$ можно определить элементы матриц G_1 и $R_1(\tau)$. Для этого, предварительно, рассмотрим вопросы, связанные с вычислением некоторых сумм и интегралов.

Отметим, что матрица $e^{Gk\theta}$ является унитарной, поэтому, с учетом теоремы о спектральном разложении, существуют проекционные матрицы P_l такие, что $e^{Gk\theta} = P + \sum_{l=-r}^{r}{}' e^{i\omega_l k\theta} P_l$, где P – матрица проекционного оператора на неподвижное подпространство H линейного оператора $e^{Gk\theta}$ т.е. $H = \{x : e^{Gk\theta} x = x\}$; P_l – матрицы проекционных операторов на собственное подпространство оператора G, соответствующее собственному значению $i\omega_l$, $\omega_l \neq 0$. Штрих возле знака суммирования означает, что суммирование происходит по l, для которых $\omega_l \overline{\in} (2\pi/\theta) Z$. При этом имеем равенства $\omega_0 = 0,\ P_l = \overline{P}_{-l},\ \omega_{-l} = -\omega_l$.

С учетом известных формул

$$\sum_{k=1}^{N} x^k = \frac{x(x^N - 1)}{x - 1}; \quad \sum_{k=1}^{N} k\, x^k = \frac{N x^{N+2} - (N+1) x^{N+1} + x}{(x-1)^2};$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 x^k = \frac{N^2 x^{N+3} - (2N^2 + 2N - 1) x^{N+2} + (N+1)^2 x^{N+1} - x^2 - x}{(x-1)^3}$$

нетрудно установить такое равенство:

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{-Gk\theta} = \left[\tau^*\right] P + \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1 - e^{-i\omega_l \theta [\tau^*]}}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l.$$

Аналогично, имеем равенства:

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{Gk\theta} = \left[\tau^*\right] P + \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{e^{i\omega_l \theta}(e^{i\omega_l \theta [\tau^*]} - 1)}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l;$$

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{Gk\theta} M e^{-Gk\theta} = \sum_{k=1}^{[\tau^*]} \sum_{m=-r}^{r} e^{i\omega_m k\theta} P_m M \sum_{l=-r}^{r} e^{-i\omega_l k\theta} P_l = \sum_{m=-r}^{r} \sum_{l=-r}^{r} \Big(\sum_{k=1}^{[\tau^*]} e^{i\theta k(\omega_m - \omega_l)}\Big) P_m M P_l =$$

$$= \left[\tau^*\right] \sum_{(m,l)\in I} P_m M P_l + \sum_{(m,l)\in II} \frac{e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)}\big(e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)[\tau^*]} - 1\big)}{e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)} - 1} P_m M P_l$$

$$\left[I = \{(m,l) | m,l = \overline{-r,r}, \omega_m - \omega_l \in \frac{2\pi}{\theta} Z\},\ II = \{(m,l) | m,l = \overline{-r,r}, \omega_m - \omega_l \in \frac{-2\pi}{\theta} Z\} \right].$$

Теорема о спектральном разложении унитарной матрицы позволяет также вычислить следующий интеграл:

$$\int_0^{\tau} e^{Gs} B e^{-Gs} ds = \int_0^{\tau} \sum_{m=-r}^{r} e^{i\omega_m s} P_m B \sum_{l=-r}^{r} e^{-i\omega_l s} P_l ds = \sum_{m,l=-r}^{r} \int_0^{\tau} e^{i(\omega_m - \omega_l)s} ds P_m B P_l =$$

$$= \tau \sum_{(m,l)\in III} P_m B P_l + \sum_{(m,l)\in IV} \frac{e^{i(\omega_m - \omega_l)\tau} - 1}{i(\omega_m - \omega_l)} P_m B P_l$$

$$\left[III = \{(m,l) | m,l = \overline{-r,r}, \omega_m - \omega_l = 0\},\ IV = \{(m,l) | m,l = \overline{-r,r}, \omega_m - \omega_l \neq 0\} \right].$$

Рассмотрим далее последовательно равенства (4.2) – (4.5). Из равенства (4.2) получим $r_{11}(\tau) = \tau g_{11} - \left[\tau^*\right] G^{-1} M$.

Выбор $g_{11} = (1/\theta) G^{-1} M$ обеспечивает ограниченность функции $r_{11}(\tau)$: $r_{11}(\tau) = \left\{\tau^*\right\} G^{-1} M$.

Из равенства (4.3) определим

$$r_{12}(\tau) = \tau g_{12} - G^{-1} B G^{-1} (e^{-G\tau} - I) + G^{-1} M G^{-1} \left[\tau^*\right] P + G^{-1} M G^{-1} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1 - e^{-i\omega_l \theta \left[\tau^*\right]}}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l.$$

Выбор $g_{12} = (-1/\theta) G^{-1} M G^{-1} P$ обеспечивает ограниченность функции $r_{12}(\tau)$:

$$r_{12}(\tau) = -G^{-1} B G^{-1} (e^{-G\tau} - I) - \left\{\tau^*\right\} G^{-1} M G^{-1} P + G^{-1} M G^{-1} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1 - e^{-i\omega_l \theta \left[\tau^*\right]}}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l.$$

Из равенства (4.4) определим $r_{21}(\tau) = \tau g_{21} - \left[\tau^*\right] PM - \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{e^{i\omega_l \theta} (e^{i\omega_l \theta \left[\tau^*\right]} - 1)}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l M.$

Выбор $g_{21} = (1/\theta) PM$ обеспечивает ограниченность $r_{21}(\tau)$:

$$r_{21}(\tau) = \left\{\tau^*\right\} PM - \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{e^{i\omega_l \theta} (e^{i\omega_l \theta \left[\tau^*\right]} - 1)}{e^{i\omega_l \theta} - 1} P_l M.$$

Выбор матрицы $g_{22} = (-1/\theta) \sum_{(m,l)\in I} P_m M G^{-1} P_l - \sum_{(m,l)\in III} P_m B P_l$ обеспечивает ограниченность функции

$$r_{22}(\tau) = -\left\{\tau^*\right\} \sum_{(m,l)\in I} P_m M G^{-1} P_l + \sum_{(m,l)\in II} \frac{e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)} (e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)\left[\tau^*\right]} - 1)}{e^{i\theta(\omega_m - \omega_l)} - 1} P_m M G^{-1} P_l +$$

$$+ \sum_{(m,l)\in IV} \frac{e^{i\tau(\omega_m - \omega_l)} - 1}{i(\omega_m - \omega_l)} P_m B P_l.$$

§5. Второе приближение.

Решение уравнения (3.4) имеет вид

$$R_2(\tau)=\int_0^{\tau}(G_2+G_1R_1(s)-R_1(s)D_1(s)-D_2(s)-R_1(s)\sum_{k=1}^{[\tau^*]}F_k\delta(s-k\theta))ds=$$

$$=G_2\tau+\int_0^{\tau}(G_1R_1(s)-R_1(s)D_1(s)-D_2(s))ds-\sum_{k=1}^{[\tau^*]}R_1(k\theta)F_k.$$

Обозначим $\overline{g}_{ij}$ $(i,j=1,2,3,4)$ – блочные элементы матрицы G_2, а $\overline{r}_{ij}(\tau)$ $(i,j=1,2,3,4)$ – блочные элементы матрицы $R_2(\tau)$; тогда

$$\overline{r}_{11}(\tau)=\tau\overline{g}_{11}+\int_0^{\tau}(g_{11}r_{11}(s)+g_{12}r_{21}(s))ds+\tau G^{-1}C-\sum_{k=1}^{[\tau^*]}r_{12}(k\theta)e^{Gk\theta}M; \qquad (5.1)$$

$$\overline{r}_{12}(\tau)=\tau\overline{g}_{12}+\int_0^{\tau}(g_{11}r_{12}(s)+g_{12}r_{22}(s))ds++\int_0^{\tau}(r_{11}(s)G^{-1}Be^{-Gs}+r_{12}(s)e^{Gs}Be^{-Gs})ds-$$

$$-\int_0^{\tau}G^{-1}CG^{-1}e^{-Gs}ds+\sum_{k=1}^{[\tau^*]}r_{12}(k\theta)e^{Gk\theta}MG^{-1}e^{-Gk\theta}; \qquad (5.2)$$

$$\overline{r}_{21}(\tau)=\tau\overline{g}_{21}+\int_0^{\tau}(g_{21}r_{11}(s)+g_{22}r_{21}(s))ds+\int_0^{\tau}e^{-Gs}C\,ds-$$
$$-\sum_{k=1}^{[\tau^*]}(r_{21}(k\theta)G^{-1}M+r_{22}(k\theta)e^{Gk\theta}M); \qquad (5.3)$$

$$\overline{r}_{22}(\tau)=\tau\overline{g}_{22}+\int_0^{\tau}(g_{21}r_{12}(s)+g_{22}r_{22}(s))ds++\int_0^{\tau}(r_{21}(s)G^{-1}Be^{-Gs}+r_{22}(s)e^{Gs}Be^{-Gs})ds-$$

$$-\int_0^{\tau}e^{Gs}CG^{-1}e^{-Gs}ds+\sum_{k=1}^{[\tau^*]}(r_{21}(k\theta)G^{-1}MG^{-1}e^{-Gk\theta}+r_{22}(k\theta)e^{Gk\theta}MG^{-1}e^{-Gk\theta}). \qquad (5.4)$$

Для дальнейшего используем вспомогательную формулу $\int_0^{\tau}\{s^*\}ds=\frac{\theta}{2}[\tau^*]+\frac{\theta}{2}\{\tau^*\}^2$ с целью вычисления элементов матрицы $\int_0^{\tau}R_1(s)ds$, т.е. $\int_0^{\tau}r_{11}(s)ds=\frac{\theta}{2}G^{-1}M[\tau^*]+\{\ldots\}$.

Здесь и далее выражение $\{\ldots\}$ обозначает некоторую ограниченную функцию, вид которой в дальнейшем не используется;

$$\int_0^{\tau}r_{12}(s)ds=G^{-1}BG^{-1}\tau+G^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_l\tau-\frac{\theta}{2}G^{-1}MG^{-1}P[\tau^*]+\{\ldots\};$$

$$\int_0^{\tau}r_{21}(s)ds=\frac{\theta}{2}PM[\tau^*]+\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lM\tau+\{\ldots\};$$

$$\int_0^\tau r_{22}(s)ds = -\frac{1}{2}\sum_{(m,l)\in I} P_m M G^{-1} P_l \tau - \sum_{(m,l)\in II} \frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1} P_m M G^{-1} P_l \tau -$$

$$-\sum_{(m,l)\in IV} \frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)} P_m B P_l \tau + \{\ldots\}; \quad \int_0^\tau r_{11}(s) G^{-1} B e^{-Gs}\, ds = \{\ldots\};$$

$$\int_0^\tau r_{12}(s) e^{Gs} B e^{-Gs}\, ds = \tau G^{-1} B G^{-1} \sum_{(m,l)\in III} P_m B P_l + +\tau G^{-1} M G^{-1} \sum_{(q,l)\in VII} \frac{e^{-i\omega_q\theta}}{e^{-i\omega_q\theta}-1} P_q B P_l + \{\ldots\};$$

$$\int_0^\tau r_{21}(s) G^{-1} B e^{-Gs}\, ds = \{\ldots\};$$

$$\int_0^\tau r_{22}(s) e^{Gs} B e^{-Gs}\, ds = -\tau \sum_{(m,l)\in II}\sum_{(l,q)\in III} \frac{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}}{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}-1} P_m M G^{-1} P_l B P_q -$$

$$-\tau \sum_{(m,l)\in IV}\sum_{(l,q)\in III} \frac{1}{i(\omega_l-\omega_q)} P_m B P_l B P_q + \{\ldots\};$$

$$V = \left\{(q,l)\in I \middle| q,l = \overline{-r,r}, \omega_q \in \frac{-2\pi}{\theta} Z\right\},\ VII = \left\{(q,l)\in III \middle| q,l = \overline{-r,r}, \omega_q \in \frac{-2\pi}{\theta} Z\right\}.$$

Ненулевые блоки матрицы $R_1(k\theta)$ имеют вид:

$$r_{12}(k\theta) = -G^{-1} B G^{-1}(e^{-Gk\theta} - I) + G^{-1} M G^{-1} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1-e^{-ik\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1} P_l;$$

$$r_{21}(k\theta) = -\sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{e^{i\omega_l\theta}(e^{i\omega_l k\theta}-1)}{e^{i\omega_l\theta}-1} M P_l;$$

$$r_{22}(k\theta) = \sum_{(m,l)\in II} \frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}(e^{ik\theta(\omega_m-\omega_l)}-1)}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1} P_m M G^{-1} P_l + \sum_{(m,l)\in IV} \frac{e^{ik\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}{i(\omega_m-\omega_l)} P_m B P_l.$$

Последние формулы с учетом свойства ортогональности соответствующих проекционных матриц $PP_l = 0$, $P_l P_m = P_l \delta_{ml}$ (δ_{ml} – символ Кронекера) позволяют вычислить некоторые конечные суммы, необходимые в дальнейшем:

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]} r_{12}(k\theta) e^{Gk\theta} M = \left(-G^{-1} B G^{-1}(I-P)M - G^{-1} M G^{-1} \sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1} P_l M\right)\left[\tau^*\right] + \{\ldots\};$$

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]} r_{12}(k\theta) e^{Gk\theta} M G^{-1} e^{-Gk\theta} = \left(G^{-1} B G^{-1} \sum_{(l,q)\in M_1} P_l M G^{-1} P_q - G^{-1} B G^{-1}(I-P) M G^{-1} P - \right.$$

$$-G^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}' \frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}P+G^{-1}MG^{-1}\sum_{(l,q)\in M_1}\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}P_q\Bigg)\left[\tau^*\right]+\{\ldots\}\;;$$

$$M_1=\left\{(l,q)|l,q=\overline{-r,r},\ \omega_l-\omega_q\in\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_l\bar{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_q\bar{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]}r_{21}(k\theta)G^{-1}M=\left(\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}M\right)\left[\tau^*\right]+\{\ldots\};$$

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]}r_{22}(k\theta)e^{Gk\theta}M=\Bigg(\sum_{(m,\,l)\in M_3}\frac{e^{i\theta(\omega_l-\omega_m)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_l+\sum_{(m,\,l)\in M_7}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_l-$$

$$-\sum_{(m,\,l)\in M_5}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_l-\sum_{(m,\,l)\in M_9}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_l\Bigg)\left[\tau^*\right]+\{\ldots\};$$

$$M_3=\left\{(m,l)\in II|m,l=\overline{-r,r},\ \omega_m\in\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_l\bar{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_5=\left\{(m,l)\in II|m,l=\overline{-r,r},\ \omega_l\in\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_m\bar{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_7=\left\{(m,l)\in IV|m,l=\overline{-r,r},\ \omega_m\in\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_9=\left\{(m,l)\in IV|m,l=\overline{-r,r},\ \omega_l\in\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$\sum_{k=1}^{[\tau^*]}r_{22}(k\theta)e^{Gk\theta}MG^{-1}e^{-Gk\theta}=\Bigg(\sum_{(m,\,l)\in M_3}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_m\,MG^{-1}P_lMG^{-1}P+$$

$$+\sum_{(m,\,l,\,q)\in M_2}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q+\sum_{(m,\,l)\in M_7}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P+$$

$$+\sum_{(m,\,l,\,q)\in M_6}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P_q-\sum_{(m,\,l)\in M_5}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P-$$

$$-\sum_{(m,\,l,\,q)\in M_4}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q-\sum_{(m,\,l)\in M_9}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P-$$

$$-\sum_{(m,\,l,\,q)\in M_8}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P_q\Bigg)\left[\tau^*\right]+\{\ldots\};$$

$$M_2=\left\{(m,l,q)|\,(m,l)\in II,\ q=\overline{-r,r},\ \omega_m-\omega_q\in\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_m\overline{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_q\overline{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_4=\left\{(m,l,q)|\,(m,l)\in II,\ q=\overline{-r,r},\ \omega_l-\omega_q\in\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_l\overline{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z,\ \omega_q\overline{\in}\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_6=\left\{(m,l,q)|\,(m,l)\in IV,\ q=\overline{-r,r},\ \omega_m-\omega_q\in\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$M_8=\left\{(m,l,q)|\,(m,l)\in IV,q=\overline{-r,r},\omega_l-\omega_q\in\frac{2\pi}{\theta}Z\right\};$$

$$\sum_{k=1}^{\left[\tau^*\right]}r_{21}(k\theta)G^{-1}MG^{-1}e^{-Gk\theta}=\left(-\sum_{(l,\,q)\in M_1}\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}MG^{-1}P_q+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}MG^{-1}P\right)\left[\tau^*\right]+\{\ldots\}.$$

Из условий ограниченности матрицы $R_2(\tau)$ можно определить элементы матриц G_2 и $R_2(\tau)$. Рассмотрим теперь последовательно равенства (5.1) – (5.4); из них следует, что

$$\overline{g}_{11}=-\frac{1}{2\theta}G^{-1}MG^{-1}M+\frac{1}{2\theta}G^{-1}MG^{-1}PM-G^{-1}C-\frac{1}{\theta}G^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lM-$$

$$-\frac{1}{\theta}G^{-1}BG^{-1}(I-P)M;$$

$$\overline{g}_{12}=-\frac{1}{\theta}G^{-1}MG^{-1}BG^{-1}+\frac{1}{2\theta}G^{-1}MG^{-1}MG^{-1}P-\frac{1}{\theta}G^{-1}MG^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_l-$$

$$-G^{-1}BG^{-1}\sum_{(m,\,l)\in III}P_mBP_l-G^{-1}MG^{-1}\sum_{(q,\,l)\in VII}\frac{1}{e^{i\omega_q\theta}-1}P_qBP_l-$$

$$-\frac{1}{\theta}G^{-1}BG^{-1}\sum_{(l,q)\in M_1}P_lMG^{-1}P_q+\frac{1}{\theta}G^{-1}BG^{-1}(I-P)MG^{-1}P+$$

$$+\frac{1}{\theta}G^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}P-\frac{1}{\theta}G^{-1}MG^{-1}\sum_{(l,q)\in M_1}\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}P_q;$$

$$\overline{g}_{21}=-\frac{1}{2\theta}PMG^{-1}M+\sum_{(l,q)\in VII}\frac{e^{i\omega_q\theta}}{e^{i\omega_q\theta}-1}P_lBP_qM+\frac{1}{\theta}\sum_{(l,q)\in V}\frac{e^{i\omega_q\theta}}{e^{i\omega_q\theta}-1}P_lMG^{-1}P_qM+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}M+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_3}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_l+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_7}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_l-$$

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_5}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_l-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_9}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_l;$$

$$\overline{g}_{22}=-\frac{1}{\theta}PMG^{-1}BG^{-1}+\frac{1}{2\theta}PMG^{-1}MG^{-1}P-\frac{1}{\theta}PMG^{-1}MG^{-1}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{1}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_l-$$

$$-\sum_{(m,l)\in III}\sum_{(l,q)\in IV}\frac{1}{i(\omega_l-\omega_q)}P_mBP_lBP_q-\frac{1}{2}\sum_{(m,l)\in III}\sum_{(l,q)\in I}P_mBP_lMG^{-1}P_q-\sum_{(m,l)\in III}\sum_{(l,q)\in II}\frac{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}}{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}-1}*$$

$$*P_mBP_lMG^{-1}P_q-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in I}\sum_{(l,q)\in IV}\frac{1}{i(\omega_l-\omega_q)}P_mMG^{-1}P_lBP_q-\frac{1}{2\theta}\sum_{(m,l)\in I}\sum_{(l,q)\in I}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q-$$

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in I}\sum_{(l,q)\in II}\frac{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}}{e^{i\theta(\omega_l-\omega_q)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q+\sum_{(m,l)\in II}\sum_{(l,q)\in III}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lBP_q+$$

$$+\sum_{(m,l)\in IV}\sum_{(l,q)\in III}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lBP_q+\sum_{(m,l)\in III}P_mCG^{-1}P_l+\frac{1}{\theta}\sum_{(l,q)\in M_1}\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}MG^{-1}P_q-$$

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{l=-r}^{r}{}'\frac{e^{i\omega_l\theta}}{e^{i\omega_l\theta}-1}P_lMG^{-1}MG^{-1}P-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_3}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P-$$

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l,q)\in M_2}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_7}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P-$$

$$-\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l,q)\in M_6}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P_q+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_5}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l,q)\in M_4}\frac{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}}{e^{i\theta(\omega_m-\omega_l)}-1}P_mMG^{-1}P_lMG^{-1}P_q+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l)\in M_9}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P+$$

$$+\frac{1}{\theta}\sum_{(m,l,q)\in M_8}\frac{1}{i(\omega_m-\omega_l)}P_mBP_lMG^{-1}P_q$$

обеспечивает ограниченность функции $\overline{r}_{ij}(\tau)$ при $\tau\in R$.

§6. Условия устойчивости.

Условия устойчивости и неустойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (3.2) при достаточно малых значениях параметра ε, установленные в теоремах III и IV из работы [12], позволяют сформулировать следующие результаты.

Теорема 6.1. Если в разложениях по степеням ε детерминантов Гурвица, относящихся к системе уравнений (3.2), все первые не исчезающие коэффициенты положительны, то можно указать такое столь малое $\varepsilon_m>0$, что при $0<\varepsilon\le\varepsilon_m$ любое решение системы (1.1) стремится к нулю, когда $t\to+\infty$.

Теорема 6.2. Если в разложениях по степеням ε детерминантов Гурвица, относящихся к системе уравнений (3.2), хотя бы один из первых не исчезающих коэффициентов оказался отрицательным, то можно указать такое $\varepsilon_m^*>0$, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству $0 < \varepsilon \le \varepsilon_m^*$, исходная система (1.1) допускает, при $t \to +\infty$, неограниченное решение.

§7. Пример.

В качестве приложения общих результатов рассмотрим вопрос об устойчивости положения равновесия плоского гироскопического маятника при импульсном воздействии на него в фиксированные моменты времени $t = kT$, предполагая, что на кожух гироскопа действует специальный момент, создаваемый с помощью асинхронного мотора [2]. Пусть α – угол отклонения маятника от вертикального положения, β – угол поворота кожуха, ω – собственная угловая скорость гироскопа. Установим линеаризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия, $\alpha = \beta = 0$. Кинетическая энергия может быть представлена в виде $T = 0{,}5 I_0 \dot\alpha^2 + 0{,}5 I_1 \dot\beta^2 - I\omega\beta\dot\alpha$, где I_0 – момент инерции маятника относительно оси вращения; I_1 – экваториальный момент инерции гироскопа и кожуха; I – полярный момент инерции гироскопа; $\dot\alpha = \dfrac{d\alpha}{dt}$, $\dot\beta = \dfrac{d\beta}{dt}$. Выражения для обобщенных сил при тех же предположениях имеют вид $Q_\alpha = -Pl_1\alpha - \gamma'\dot\alpha, Q_\beta = -c\beta - \gamma''\dot\beta,$ где l – расстояние от оси вращения до центра масс гироскопа и кожуха; P – вес всей системы; l_1 – расстояние от оси вращения до центра масс всей системы; c – коэффициент, характеризующий жесткость пружины, которой соединены кожух и маятник; γ' и γ'' – коэффициенты вязкого трения. Используя уравнение Лагранжа второго рода, приходим к уравнению движения маятника

$$I_0\ddot\alpha + \gamma'\dot\alpha - I\omega\dot\beta + Pl_1\alpha = 0, \quad t \ne kT;\ I_1\ddot\beta + \gamma''\dot\beta + I\omega\dot\alpha + c\beta = 0, \quad t \ne kT;$$

$$I_0\dot\alpha(t+0) = I_0\dot\alpha(t) - p_0 l\alpha(t), \quad t = kT;\ I_1\dot\beta(t+0) = I_1\dot\beta(t), \quad t = kT, \tag{7.1}$$

где p_0 – импульс, сообщенный системе. Далее используем результаты разделов 2 – 6. Определим вектор $x = (\alpha, \beta)^T$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} \gamma' & 0 \\ 0 & \gamma'' \end{pmatrix};\ G = I\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = IJ;\ C = \begin{pmatrix} Pl_1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix};\ M = \begin{pmatrix} -p_0 l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения: $\tilde G = A^{-1/2}GA^{-1/2}$, $\tilde B = A^{-1/2}BA^{-1/2}$, $\tilde C = A^{-1/2}CA^{-1/2}$, $\tilde M = A^{-1/2}MA^{-1/2}$.

Принимая $\omega = \dfrac{\omega_0 I}{\sqrt{I_0 I_1}}$, $\theta = \dfrac{\omega_0 IT}{\sqrt{I_0 I_1}}$, предположим, что $\dfrac{\sqrt{I_0 I_1}}{\omega_0 I} \ll 1$. Тогда получим такие равенства:

$$\tilde B = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma'}{I_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{\gamma''}{I_1} \end{pmatrix};\quad \tilde G = J;\quad \tilde C = \begin{pmatrix} \dfrac{Pl_1}{I_0} & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{I_1} \end{pmatrix};\quad \tilde M = \begin{pmatrix} \dfrac{-p_0 l}{I_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\omega_{+1} = 1, \quad \omega_{-1} = -1;\ P_{+1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[I=\left\{(m,l)|m,l=-1,+1,\omega_m-\omega_l\in\frac{2\pi}{\theta}Z\right\},\ II=\left\{(m,l)|m,l=-1,+1,\omega_m-\omega_l\in\frac{-2\pi}{\theta}Z\right\}\right],$$

$$\left[III=\{(m,l)|m,l=-1,+1,\omega_m-\omega_l=0\},\ IV=\{(m,l)|m,l=-1,+1,\omega_m-\omega_l\neq 0\}\right].$$

Рассмотрим систему вблизи резонанса. Приближенное равенство $\theta\approx\pi$ соответствует главному параметрическому резонансу данной системы. Исследуем вопрос об условиях такого резонанса, полагая $\theta=\varepsilon\delta+\pi$, где δ – ширина резонансной зоны и $\varepsilon\neq 0$. Введя обозначения $a={p_0 l}/{I_0}$, $b={\gamma'}/{I_0}+{\gamma''}/{I_1}$ и $d={\gamma'}/{I_0}-{\gamma''}/{I_1}$, блочные элементы матрицы G_1 примут вид:

$$g_{11}=\frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}0&0\\a&0\end{pmatrix};\quad g_{12}=0;\quad g_{21}=0;\quad g_{22}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-b&\dfrac{a}{\theta}\\-\dfrac{a}{\theta}&-b\end{pmatrix},$$

а элементы матрицы G_2 принимают такой вид

$$\bar g_{11}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\gamma'' a}{\theta I_1}&-\dfrac{c}{I_1}\\\dfrac{Pl_1}{I_0}-\dfrac{a^2}{2\theta}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}&0\end{pmatrix};\quad \bar g_{21}=\begin{pmatrix}-\dfrac{ab}{4}-\dfrac{a^2}{4\theta}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}&0\\\dfrac{ab}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{a^2}{4\theta}&0\end{pmatrix};$$

$$\bar g_{12}=\begin{pmatrix}\dfrac{\gamma'' b}{2I_1}&-\dfrac{a\gamma'}{2\theta I_0}\\\dfrac{3a\gamma''}{2\theta I_1}+\dfrac{ab}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{a^2}{4\theta}&b\left(\dfrac{a}{4}+\dfrac{\gamma'}{2I_0}\right)-\dfrac{a^2}{4\theta}\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix};$$

$$\bar g_{22}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3ad}{8\theta}&\dfrac{a}{8\theta}\left(b+a\operatorname{ctg}\theta\right)+\dfrac{cI_0+Pl_1I_1}{2I_1I_0}\\\dfrac{a}{8\theta}\left(3a\operatorname{ctg}\theta-b\right)-\dfrac{cI_0+Pl_1I_1}{2I_1I_0}&\dfrac{a^2}{4\theta}+\dfrac{ad}{8\theta}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, вопрос об устойчивости состояния равновесия гироскопического маятника сводится к исследованию устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами ${ds}/{dt}=(\varepsilon G_1+\varepsilon^2 G_2)s$ $\left(s\in R^4\right)$. Для этой системы условия устойчивости могут быть выписаны на основе теоремы Рауса – Гурвица.

Разложим функции θ, ${\theta}/{2}$ и ${1}/{\theta}$ в ряды Маклорена по степеням параметра ε , а именно: $\theta=(\pi+\varepsilon\delta)=\varepsilon\delta=\dfrac{\cos\varepsilon\delta}{\sin\varepsilon\delta}\approx\dfrac{1}{\varepsilon\delta},\ \dfrac{\theta}{2}=\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\varepsilon\delta}{2}\right)=0,\ \dfrac{1}{\theta}=\dfrac{1}{\pi+\varepsilon\delta}=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{\delta\varepsilon}{\pi^2}.$

В этом случае задача об устойчивости равновесия гиромаятника сводится к исследованию линейной системы $\dfrac{d\xi}{dt}=(\varepsilon G_1+\varepsilon^2 G_2)\xi$. Соответствующие элементы матриц G_1 и G_2 после преобразования принимают такой вид:

$$g_{11}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{a}{\pi} & 0\end{pmatrix};\ g_{22}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-b & \frac{a}{\pi}+\frac{a^2}{8\pi\delta}\\ \frac{3a^2}{8\pi\delta}-\frac{a}{\pi} & -b\end{pmatrix};\ \bar{g}_{11}=\begin{pmatrix}-\frac{\gamma'' a}{\pi I_1} & -\frac{c}{I_1}\\ \frac{Pl_1}{I_0}-\frac{a\delta}{\pi^2} & 0\end{pmatrix};$$

$$\bar{g}_{12}=\begin{pmatrix}\frac{\gamma'' b}{2I_1} & -\frac{a\gamma'}{2\pi I_0}\\ \frac{3a\gamma''}{2\pi I_1}+\frac{a^2}{4\pi} & b\left(\frac{a}{4}+\frac{\gamma'}{2I_0}\right)\end{pmatrix};$$

$$\bar{g}_{21}=\begin{pmatrix}-\frac{ab}{4} & 0\\ -\frac{a^2}{4\pi} & 0\end{pmatrix};\ \bar{g}_{22}=\begin{pmatrix}-\frac{3ad}{8\pi} & \frac{ab}{8\pi}+\frac{cI_0+Pl_1I_1}{2I_1I_0}-\frac{a\delta}{2\pi^2}-\frac{a^2}{8\pi^2}\\ -\frac{ab}{8\pi}-\frac{cI_0+Pl_1I_1}{2I_1I_0}+\frac{a\delta}{2\pi^2}-\frac{3a^2}{8\pi^2} & \frac{a^2}{4\pi}+\frac{ad}{8\pi}\end{pmatrix}.$$

Далее представим условия устойчивости, используя теорему 6.1:

$$a_0=1>0;\ a_1=2\varepsilon b>0;\ a_2=\frac{\varepsilon^2(-3a^4+64a^2\delta^2-16a^3\delta+64\delta^2\pi^2b^2)}{64\pi^2\delta^2}>0;$$

$$a_3=\frac{\varepsilon^4 a(-3a^4\gamma''-16a^3\delta\gamma''+64a^2\delta^2\gamma''+128\pi^2\delta^2bc+64\delta^2\pi^2b^2\gamma'')}{64I_1I_0\pi^3\delta^2}>0;$$

$$a_4=\frac{\varepsilon^5 ca(-3a^4+64a^2\delta^2-16a^3\delta+64\delta^2\pi^2b^2)}{64I_1\pi^3\delta^2}>0;$$

$$\Delta_3=a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4=\frac{\varepsilon^7 ba\gamma''(-3a^4+64a^2\delta^2-16a^3\delta+64\delta^2\pi^2b^2)^2}{2048\pi^5\delta^4I_1I_0}>0\,.$$

Условия возникновения резонанса имеют такой вид:

$$\frac{\frac{p_0^3l^3}{I_0^3}-\frac{p_0^2l^2}{I_0^2}\sqrt{\frac{4p_0^2l^2}{I_0^2}+3\pi^2\left(\frac{\gamma'}{I_0}+\frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}}{\frac{8p_0^2l^2}{I_0^2}+8\pi^2\left(\frac{\gamma'}{I_0}+\frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}<\omega^2T-$$

$$-\omega\pi<\frac{\frac{p_0^3l^3}{I_0^3}+\frac{p_0^2l^2}{I_0^2}\sqrt{\frac{4p_0^2l^2}{I_0^2}+3\pi^2\left(\frac{\gamma'}{I_0}+\frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}}{\frac{8p_0^2l^2}{I_0^2}+8\pi^2\left(\frac{\gamma'}{I_0}+\frac{\gamma''}{I_1}\right)^2}\,. \qquad (7.2)$$

На рис. 1 представлена область параметрического резонанса для $I_0 = 0{,}08\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_1 = 0{,}03\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $l = 0{,}15\,\text{м}$, $\gamma' = 0{,}3$, $\gamma'' = 0{,}7$, $\omega = 500\,\text{Гц}$. На рис. 2 показана область параметрического резонанса для $I_0 = 0{,}08\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $I_1 = 0{,}03\,\text{кг}\cdot\text{м}^2$, $l = 0{,}15\,\text{м}$, $\gamma' = 0$, $\gamma'' = 0$, $\omega = 500$ Гц.

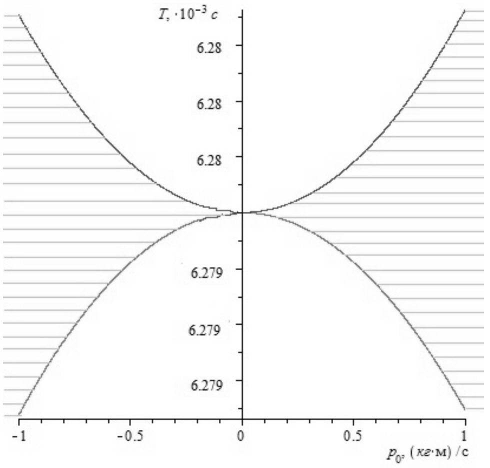

Рис. 1

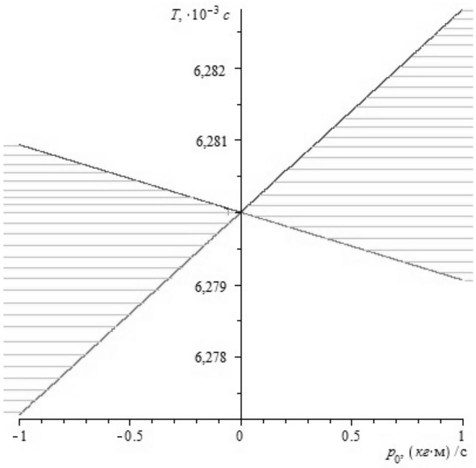

Рис. 2

Заключение.

Таким образом, задача об устойчивости положений равновесия механической системы с импульсным воздействием при действии гироскопических, потенциальных и диссипативных сил сведена к исследованию линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для построения этой системы необходимо знать спектральное разложение матрицы гироскопических сил. Для плоского гироскопического маятника определена область главного параметрического резонанса.

Р Е З Ю М Е . Досліджено стійкість при лінійному наближенні механічної системи з імпульсною дією під впливом дисипативних, потенціальних, циркуляційних сил, а також гіроскопічних сил великої інтенсивності. Отримано коефіцієнтні умови стійкості стану рівноваги при лінійному наближенні механічної системи з імпульсною дією за умови, якщо відомий в явному вигляді спектральний розклад матриці гіроскопічних сил. Виявлено умови виникнення параметричного резонанса коливань плоского гіроскопічного маятника.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1955. – 448 с.
2. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний, 2–е изд., испр. – М.: Наука, 1987. – 384 с.
3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. *Меркин Д.Р.* Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 344 с.
5. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
6. *Метелицын И.И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 1. – С. 31 – 34.
7. *Румянцев В.В., Скимель В.М.* Устойчивость гироскопов, гиростатов и гироскопических систем / Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – М.: Наука, 1964. – Вып. 2. – С. 199 – 216.
8. *Румянцев В.В.* О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения // Прикл. матем. механика. – 1975. – **39**. – Вып. 6. – С. 963 – 973.

9. *Самойленко А.М.* Метод усреднения в системах с толчками // Матем. физика. – 1971. – Вып. 9. – С. 101 – 117.
10. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
12. *Штокало И.З.* Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Матем. сб. – 1946. – **19**. – Вып. 2. – С. 263 – 286.
13. *Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A.* On stability of gyroscopic systems // Vestnik of S.-Petersburg Univ. – 2013. – **10**, N 2. – P. 3 – 13.
14. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Identifying the Domains of Dynamic Instability for Inhomogeneous Shell Systems under Periodic Loads // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, N 2. – P. 186 – 194.
15. *Bespalova E.I., Urusova G.P.* Dynamic Instability of Shells of Revolution with Alternating Curvature under Periodic Loading // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 521 – 527.
16. *Bruno A.D., Batkhin A.B., Varin V.P.* The stability set of a gyroscopic problems // Keldysh Institute preprints. – 2010. – 004. – 30 p.
17. *Chaikin S.V., Banshchikov A.V.* On gyroscopic stabilization of the relative equilibriums of oblate axisymmetric gyrostat // Matem. Mod. – 2013. – **25**, N 5. – P. 109 – 122.
18. *Denisenko V.S., Slyn'ko V.I.* Fuzzy Impulsive Stabilization of the Upper Equilibrium Position of a Pendulum on a Moving Foundation // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 5. – P. 576 – 587.
19. *Filimonikhin G.B., Filimonikhina I.I., Pirogov V.V.* Stability of Steady-State Motion of an Isolated System Consisting of a Rotating Body and Two Pendulums // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 459 – 469.
20. *Goncharenko V.I.* Stabilization of the Motion of Linear Systems // Int. Appl. Mech. – 1991. – **27**, N 5. – P. 523 – 525.
21. *Ivanov I.L., Slyn'ko V.I.* A Stability Criterion for Autonomous Linear Time – Lagged Systems Subject to Periodic Impulsive Force // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 732 – 742.
22. *Koshlyakov V.N.* On structural transformations of dynamical systems with gyroscopic forces // J. Appl. Math. Mech. – 1997. – **61**, N 5. – P. 774 – 780.
23. *Koshlyakov V.N., Makarov V.L.* The theory of gyroscopic systems with non-conservative forces // J. Appl. Math. Mech. – 2001. – **65**, N 4. – P. 681 – 687.
24. *Kozlov V.V.* Gyroscopic stabilization and parametric resonance // J. Appl. Math. Mech. – 2001. – **65**, N 5. – P. 715 – 721.
25. *Kubenko V.D., Koval'chuk P.S.* Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 12 – 63.
26. *Ocheretnyuk Ye.V., Slyn'ko V.I.* The conditions for loss of stability of the rotation of a dynamically symmetrical rigid body suspended on a string with parametric perturbations // J. Appl. Math. Mech. – 2013. – **77**, N 2. – P. 145 – 150.
27. *Pakniyat A., Salarieh H., Alasty A.* Stability analysis of a new class of MEMS gyroscopes with parametric resonance // Acta Mech. – 2012. – **223**, N 6. – P. 1169 – 1185.
28. *Tai X., Ma H., Liu F., Liu Y., Wen B.* Stability and steady-state response analysis of a single rub-impact rotor system// Arch. Appl. Mech. – 2015. – **85**, N 1. – P. 133 – 148.
29. *Zakrzhevskii A.E., Khoroshilov V.S.* Dynamics of an Unstabilized Spacecraft During the Deployment of an Elastic Pantograph Structure // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 341 – 351

Поступила 26.05.2015 Утверждена в печать 31.03.2016