

А. Н. Гузь, А. П. Жук, А. М. Багно

**ДИНАМИКА УПРУГИХ ТЕЛ, ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ЧАСТИЦ
В СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: zhuk@inmech.kiev.ua*

Abstract. The results of linearization of the basic relationships for the viscous compressible fluid relative to the theory of small vibrations or motions of solid bodies in this fluid as well as the theory of propagation of small perturbations in elastic bodies that interact with the fluid are shown. The general solutions of equations of the linearized theory are presented.

The results of studying the wave processes in the hydro-elastic systems are considered that are carried out with using the three-dimensional linearized theory of elasticity for finite deformations and theory of viscous compressible fluid.

The results of studying the propagation of acoustic waves of different types in the waveguides with plane and circular cylindrical surfaces of contact of elastic and fluid media as well as influence on acoustic waves of the large (finite) initial deformations, viscosity and compressibility of fluid are given.

The review of study of objects in the compressible perfect and viscous fluids under action of radiation forces due to the acoustic field is carried out. The emphasis is placed on the works, in which the method is used that is based on solving the problems of hydromechanics of compressible fluid with solid particles with following evaluation of forces acting on these particles. The radiation force is determined as the constant component of hydrodynamical force.

The numerical results of studies are given in the form of plots that further are analyzed.

Key words: three-dimensional linearized theory, viscous compressible fluid, elastic compressible and incompressible body, initial stress, radiation force, acoustic field, particle, harmonic wave.

Введение.

Динамика жидкости совместно с взаимодействующими с ней твердыми и деформируемыми телами является одной из фундаментальных и классических проблем механики, физики и прикладной математики. Конкретные результаты, полученные при исследовании этой проблемы, имеют существенное прикладное значение для различных задач естествознания и техники, включая и новейшие технологические процессы.

В настоящее время исследования динамического поведения твердых и упругих тел в вязкой жидкости проведены, в основном, в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости. Имеются лишь отдельные публикации, в которых приведены результаты, полученные с применением более общей модели, учитывающей вязкость и сжимаемость жидкой среды. Обзор работ, посвященных этим исследованиям, выполнен в [31, 76, 78, 91, 95, 171]. Анализ полученных результатов показал, что несмотря на важность исследуемой динамической задачи, вопросы малых колебаний и движений твердых и упругих тел в сжимаемой вязкой жидкости, а также при взаимодействии их с вязкой жидкой средой изучены недостаточно полно.

В данной работе дан обзор результатов, полученных в рамках трехмерной линеаризованной теории при исследовании движения и взаимодействия в жидкости твердых частиц, а также при исследовании распространения волн малой амплитуды в упругих телах, взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью.

В первом разделе приведены линеаризованные соотношения для покоящейся вязкой сжимаемой жидкости для случая нестационарных и гармонических малых

движений (колебаний). При этом использовано точное выражение для определения полной производной от вектора скорости. Применительно к линеаризованной теории для покоящейся сжимаемой вязкой жидкости приведена установленная аналогия с конкретной реологической моделью деформируемого твердого тела. Представлены общие решения основных соотношений линеаризованной теории вязкой сжимаемой жидкости. При этом выражения для них получены через скалярный и векторный потенциалы. Приведены также уравнения, из которых эти потенциалы определяются. Показано, что посредством предельных переходов из предложенных общих решений следуют известные общие решения для более простых моделей жидкости (несжимаемая вязкая, сжимаемая и несжимаемая идеальная жидкость).

Отметим, что разработка новой техники и развитие промышленности требуют при решении современных и важных задач привлечения теорий, более полно охватывающих свойства реальных упругих и жидких сред. В связи с этим весьма актуальным является при исследовании волновых процессов привлечение моделей предварительно напряженного тела и вязкой сжимаемой жидкости. Целесообразность рассмотрения современных задач в рамках указанного подхода обусловлена также тем, что при замене дифференциальных уравнений, содержащих члены, учитывающие начальные напряжения и вязкость жидкости, упрощенными соотношениями, не охватывающими эти свойства, настолько меняется структура дифференциальных уравнений, что многие реально наблюдаемые явления становятся недоступными даже для чисто качественного исследования, а получаемые в рамках приближенных моделей количественные результаты не удовлетворяют все возрастающим требованиям точности. В связи с этим представляет определенный теоретический и прикладной интерес проведение исследований волновых процессов в гидроупругих системах с привлечением для твердого тела уравнений трехмерной линеаризованной теории упругости конечных деформаций и для вязкой сжимаемой жидкости – трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса. Указанные вопросы освещены в разделе 2 данного обзора.

Во *втором разделе* обсуждаются результаты исследования волновых процессов в гидроупругих волноводах с плоскими и криволинейными поверхностями раздела сред. Рассмотрены постановки и метод решения основных классов задач аэрогидроупругости для сжимаемых и несжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) начальным деформациям и взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью. Приведены и дан анализ графиков, полученных в результате численного решения дисперсионных уравнений для ряда конкретных задач и отражающих влияние вязкой сжимаемой жидкости, а также начальных напряжений на величины фазовых скоростей, коэффициентов затухания и дисперсию нормальных волн.

В *третьем разделе* дан анализ результатов исследований проблемы взаимодействия акустической волны с твердыми и гибкими частицами, находящимися в сжимаемой (вязкой и идеальной) жидкости, мерой которого являются радиационные (средние во времени) силы. Радиационные силы обусловлены независимыми от времени радиационными напряжениями, возникающими в акустическом поле. В отличие от давления они характеризуются тензорной величиной [162, 163], следовательно, по тензору напряжения можно определить компоненты вектора силы, действующей на единичную площадку тела, как внутреннее произведение тензора напряжения и орты нормали к площадке. В случае скалярного давления такой зависимости нет. Однако, по установившейся в акустической литературе традиции для обозначения этой векторной величины все же используется термин «радиационное давление» [48, 137, 145]. В появлении радиационных напряжений при прохождении акустической волны основную роль играет изменение среднего по времени потока импульса в некотором объеме жидкости (в литературе описана полемика, связанная с вопросами о «импульсе» и о «потоке импульса» в волнах различных типов [48, 137, 145]). Изменения эти определяются эффектами второго порядка, обусловленными рассеянием звука на препятствии, поглощением звука при его прохождении через среду и т.д. Поэтому радиационное давление есть квадратичная величина относительно переменных акустического поля. В лагранжевых координатах давление звукового излучения определяется как среднее во времени значение звукового давления на поверхность препятствия. В связи с этим линейное приближение в случае гармонической волны при вычислении звукового давления оказывается недостаточным, так как в этом приближении

звуковое давление является периодической функцией времени [136] и усредненное по времени за период волны равно нулю. Поэтому при вычислении звукового давления в жидкости необходимо учитывать эффекты второго порядка, обусловленные отклонением профиля волны в окрестности препятствия от гармонического закона изменения во времени. Радиационное давление существенно изменяет движение твердой частицы, находящейся в жидкости. В результате его действия частица получает однонаправленное перемещение в пространстве, занятом жидкостью. При наличии в жидкости нескольких частиц интерференция первичной и отраженных от частиц волн создает акустическое поле сложной структуры, которое определяет действие на частицы различных по величине и направлению радиационных сил, что обуславливает относительный дрейф частиц. Это обстоятельство широко используется для интенсификации многих технологических процессов, основанных на применении акустического воздействия [147, 152].

Различают два вида радиационного давления звука [48, 49, 137, 141]: рэлеевское и ланжевенновское или ланжевен-бриллюэновское. К рэлеевскому давлению относятся случаи распространения волн, при которых отсутствует взаимодействие звукового поля с невозмущенной средой. Эти случаи характерны для замкнутых объемов, когда масса среды, в которой происходят колебания, остается неизменной. Соответствующим примером является рассмотренный Рэлеем случай плоских стоячих волн между двумя неподвижными плоскими твердыми поверхностями. Выражение для рэлеевского давления звука зависит от коэффициента, учитывающего нелинейные свойства среды.

В случаях, для которых характерно ланжевенновское давление звука, имеет место взаимодействие акустического поля с невозмущенной звуком средой, которая оказывает влияние на величину среднего во времени давления. Соответствующими этому случаю будут волновые процессы, в которых волны затухают на бесконечности. Анализ ланжевенновского давления звука в одномерных звуковых полях посвящены работы [48, 144, 161, 179 и др.].

В обзоре обсуждаются результаты проведенных в Институте механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины исследований взаимодействия акустических волн с твердыми и гибкими частицами, находящимися в вязкой и идеальной неограниченной и ограниченной жидкостях, мерой которых являются радиационные силы.

1. Основные соотношения линеаризованной теории сжимаемой вязкой жидкости.

Для адекватного описания динамики твердых и упругих тел в жидкости необходимо использовать соответствующие модели жидкости, поскольку модели твердого или упругого тела predetermined исходной постановкой конкретной проблемы. Модель сжимаемой вязкой жидкости является наиболее общей из классических моделей жидкости, так как она призвана объединить свойство сжимаемости, которое в рамках идеальной сжимаемой жидкости позволяет описать волновой характер распространения возмущений, и свойство вязкости, которое в рамках модели несжимаемой вязкой жидкости позволяет описать затухание динамических процессов. В случае применения модели вязкой жидкости для описания динамики твердых и упругих тел в жидкости наиболее полную информацию можно получить при применении уравнений Навье – Стокса. Однако, в этом случае при решении соответствующих задач возникают существенные математические трудности, которые преодолеваются в настоящее время в каждом конкретном случае с привлечением современных численных методов и компьютеров (ЭВМ). Существует класс проблем для вязкой жидкости, когда уравнения Навье – Стокса могут быть существенно упрощены. Это случаи динамических процессов, когда возмущения являются малыми и можно произвести последовательную линеаризацию уравнений Навье – Стокса с учетом точного выражения для полной производной от вектора скорости по времени; эти случаи также полностью соответствуют теории малых колебаний механических систем с учетом обычно принятой в механике терминологии. В монографии [144] рассматриваемый случай трактуется как движение объекта в жидкости, когда амплитуда колебаний объекта значительно меньше его размера. Таким образом, к вышеуказанному классу проблем относятся вопросы динамики (малых колебаний или движений) твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости и вопросы о распространении малых возмущений (распространение волн малой амплитуды) в упругих телах, взаимодействующих со сжимаемой вязкой жидкостью.

Для получения основных соотношений в наиболее простой и компактной форме при описании движения сплошной среды применительно к различным ее моделям используют различные координаты. В механике жидкости и газа применяют эйлеровы координаты и эйлеров способ описания движения, а в механике деформируемого твердого тела обычно используют лагранжевы координаты и лагранжев способ описания движения. В связи с этим при исследовании совместных движений жидкости, газа, деформируемых и твердых тел возникает вопрос о выборе координат, при помощи которых основные соотношения указанной связанной (общей) задачи можно было бы представить также в простой форме. Отмеченная проблема решается наиболее успешно, если применительно к рассматриваемому классу задач можно ввести общие координаты, которые применительно к жидкости или газу переходят в эйлеровы координаты и которые применительно к деформируемому телу переходят в лагранжевы координаты.

В рамках вышеизложенных соображений при линеаризованной постановке в [75, 76, 78] рассмотрены вопросы об отождествлении специальным образом выбранных лагранжевых и эйлеровых координат применительно к динамике жидкости (в том числе и сжимаемой вязкой жидкости) и деформируемых тел для следующих классов задач: покоящаяся жидкость и упругое тело без начальных напряжений; движущаяся жидкость при однородном потоке «на бесконечности» и упругое тело без начальных напряжений; покоящаяся жидкость и упругое тело с начальными напряжениями; движущаяся жидкость при однородном потоке «на бесконечности» и упругое тело с начальными напряжениями.

В механике вязкой жидкости, основываясь на статистической механике необратимых процессов, полагают, что тензор напряжений можно разложить на два слагаемых: тензор консервативных напряжений и тензор вязких (диссипативных) напряжений. Обычно это – сумма давления и тензора вязких напряжений. При установлении определяющих соотношений для жидкостей принимают, что тензор вязких напряжений является функцией тензора скоростей деформации. В дальнейшем будем предполагать, что вязкие напряжения и скорости деформации связаны между собой линейными соотношениями (справедлив закон Навье – Стокса). Определяющее уравнение для таких жидкостей имеет следующий вид [75, 171]:

$$\hat{\sigma} = (-p' + \lambda^* \nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{E} + 2\mu^* \hat{e}, \quad (1.1)$$

где p' – давление в жидкости; \mathbf{v} – скорость частицы жидкости; \hat{E} – единичный тензор; $\hat{\sigma}$ и \hat{e} – тензоры напряжений и скоростей деформации; λ^* и μ^* – кинематический и динамический коэффициенты вязкости.

В рассматриваемых исследованиях жидкость принимается нетеплопроводной, а протекающие в ней процессы медленно развивающимися, в результате чего коэффициент объемной вязкости принимался равным нулю [75] $\zeta^* = \lambda^* + 1/3\mu^* = 0$. Это равносильно тому, что давление p' определяется как среднее нормальное напряжение в покоящейся вязкой сжимаемой жидкости. При решении задач о адиабатическом движении сжимаемой вязкой жидкости используют уравнения движения, которые с учетом (1.1) принимают такой вид [75, 144]:

$$\rho' \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p' + \mu^* \Delta \mathbf{v} + (\lambda^* + \mu^*) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}); \quad (1.2)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho' \mathbf{v}) = 0 \quad (1.3)$$

и уравнение состояния для случая нетеплопроводной жидкости

$$p' = p'(\rho'), \quad (1.4)$$

где ρ' – плотность жидкости. Приведенные уравнения гидромеханики нелинейные. Для задач, которые рассмотрены ниже, принимаются предположения, что исследуемые движения и процессы имеют характер малых возмущений некоторых состояний равновесия или основного движения, считающихся известными. Принимая тогда искомые функции в качестве величин первого порядка и отбрасывая слагаемые, содержащие величины второго порядка и выше, соотношения (1.2) – (1.4) можно записать в виде линейных уравнений [64, 75]

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mu^* \Delta \mathbf{v} + \nabla p - (\lambda^* + \mu^*) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (1.6)$$

$$p = p(\rho). \quad (1.7)$$

Определяющее уравнение (1.1) после упрощений имеет следующий вид [75]:

$$\hat{\sigma} = (-p + \lambda^* \nabla \cdot \mathbf{v}) \hat{E} + 2\mu^* \hat{e}; \quad 2\hat{e} = \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T. \quad (1.8)$$

При исследовании малых колебаний жидкости около положения равновесия в качестве замыкающего уравнения можно принять уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_0^2. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.5) – (1.9) представляют линеаризованную теорию вязкой сжимаемой нетеплопроводной жидкости. В них ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука для жидкости в равновесном состоянии; p и ρ – возмущения давления и плотности в жидкости; $p' = p_0 + p$, $\rho' = \rho_0 + \rho$.

Представления общих решений уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости, впервые полученные в работе [64], имеют следующий вид:

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi; \quad \nabla \cdot \Psi = \text{div} \Psi = 0; \quad (1.10)$$

$$p = \left[(\lambda^* + 2\mu^*) \Delta - \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi; \quad (1.11)$$

$$\rho = \left(\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{a_0^2} \Delta - \frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi, \quad (1.12)$$

где скалярный Φ и векторный Ψ потенциалы удовлетворяют уравнениям

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{a_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi = 0; \quad (1.13)$$

$$\left(\nu^* \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi = 0. \quad (1.14)$$

В приведенных соотношениях $\nu^* = \mu^* / \rho_0$ – кинематический коэффициент вязкости.

Наряду с линеаризацией основных соотношений гидромеханики проводят линеаризацию и граничных условий. В случае движения твердого тела в жидкости линеаризация граничных условий возможна при малых смещениях тела относительно некоторого положения. В этом случае граничные условия на поверхности движущегося тела сносятся по нормали к поверхности тела в указанном состоянии покоя. Для вязкой сжимаемой жидкости на поверхности S тела должны выполняться условия прилипания. Это значит, что в случае неподвижного тела вектор скорости (1.10) равен нулю. Сво-

бодное тело под действием гидродинамических сил будет находиться в состоянии движения [67, 77]. Для него условия прилипания имеют следующий вид:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_S; \quad \mathbf{v}_S = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (1.15)$$

где $\dot{\mathbf{u}}$ и \mathbf{v}_S – векторы скорости соответственно центра инерции и произвольной точки поверхности S тела; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости вращения тела; \mathbf{r} – радиус-вектор произвольной точки поверхности S тела относительно центра инерции. Величины \mathbf{u} и $\boldsymbol{\omega}$ определяются из уравнений движения твердого тела под действием гидродинамических сил и моментов

$$\mathbf{F}_r = \int_S \hat{\sigma} \cdot \mathbf{N} dS; \quad \mathbf{M}_r = \int_S \mathbf{r}_S \times (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{N}) dS. \quad (1.16)$$

Для составления уравнений движения твердого тела в жидкости используется теорема о движении центра масс и теорема моментов:

$$\rho_1 V \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F}_r; \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_r, \quad (1.17)$$

где V и ρ_1 – объем и плотность тела; $\mathbf{L} = \rho_1 \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV$ – кинематический момент твердого тела при движении тела относительно подвижной системы координат.

2. Волны в предварительно напряженных упругих телах, взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью.

В большинстве работ результаты для предварительно деформированных упругих тел, взаимодействующих с жидкостью, получены, в основном, в рамках подхода, основанного на использовании для тел с начальными напряжениями упрощенных прикладных двумерных теорий, а для жидкости – моделей идеальной или вязкой несжимаемой жидкой среды.

Однако этот подход имеет существенные недостатки, которые в значительной мере проявляются в задачах динамики. Введение дополнительных упрощающих гипотез сильно сужает область применимости полученных результатов.

Подход, лишенный этих недостатков и основанный на использовании уравнений трехмерной линеаризованной теории упругости конечных деформаций для твердых тел и трехмерных линеаризованных уравнений Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости, был впервые предложен в работах [57 – 59, 62 – 68, 71 – 79, 168, 170, 171]. Указанный подход является более общим и позволяет значительно полнее описывать волновые процессы в реальных гидроупругих системах.

В связи с этим в дальнейшем сосредоточим внимание лишь на исследованиях, выполненных в рамках указанного подхода, ориентируясь, в основном, на работы, выполненные в Институте механики им. С.П. Тимошенко Национальной академии наук Украины.

2.1. Постановка трехмерных задач гидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой сжимаемой жидкости. В публикациях [55 – 73, 75, 76, 78, 79] сформулирована общая постановка задач о взаимодействии сжимаемых и несжимаемых упругих тел, подверженных большим (конечным) предварительным деформациям, с покоящейся вязкой сжимаемой жидкой средой.

В этих работах также предложен метод исследования и представлены основные соотношения линеаризованной теории аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой сжимаемой жидкости.

Следуя этому методу, относительно свойств упругих тел предположим, что они являются изотропными гиперупругими средами с произвольной структурой упругого потенциала. Функция, описывающая упругий потенциал нелинейно-упругого тела, может быть любой произвольной дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина. Примем также, что жидкая среда, которая находится в состоянии покоя, является ньютоновской и имеет произвольную вязкость. При этом, следуя Мизесу, тепловые эффекты не учитываются. В работах рассмотрены

только такие динамические процессы в гидроупругих системах, при которых, возникающие дополнительные деформации, т.е. возмущения деформаций, значительно меньше начальных деформаций.

Введенные допущения позволяют применять соотношения линеаризованной теории упругости для упругих тел, а малость возмущений – использовать линеаризованные уравнения Навье – Стокса для вязкой сжимаемой жидкости. Такая постановка дает возможность исследовать влияние начальных напряжений в упругом теле и вязкости жидкой среды на величины параметров, характеризующих волновой процесс: фазовую скорость распространения возмущений, коэффициенты затухания мод, частоты зарождения и дисперсию волн, а также и другие. При этом рассмотрен общий случай, когда начальное состояние определяется в рамках теории больших (конечных) деформаций. Модели, основанные на различных вариантах теории малых начальных деформаций; на уравнениях приближенных прикладных двумерных теорий как для предварительно напряженных, так и для тел без начальных деформаций; на линейных соотношениях классической теории упругости; приближенные модели для жидкости являются частными случаями рассмотренных в указанных работах и следуют из него при введении дополнительных упрощающих предположений.

Показано, что с учетом введенных допущений в рамках принятых моделей система исходных соотношений линеаризованной теории аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, взаимодействующими с вязкой сжимаемой жидкой средой, имеет вид [55 – 73, 75, 76, 78, 79, 168, 170, 171]:

1) сжимаемые упругие тела –

$$\left(\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \tilde{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha = 0, \quad z_k \in V_1;$$

$$\tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3};$$

2) несжимаемые упругие тела –

$$\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_\beta} - \delta_{j\alpha} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_\alpha + \tilde{q}_j \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0; \quad z_k \in V_1;$$

$$\tilde{q}_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} = 0; \quad z_k \in V_1; \quad \tilde{Q}_j \equiv N_i^0 \left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta} + \tilde{q}_{ij} f \right);$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_\beta \kappa_{ij\alpha\beta}; \quad \tilde{q}_{ij} = \lambda_i q_{ij}; \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1;$$

3) вязкая сжимаемая жидкость –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{3} \nu^* \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad z_k \in V_2;$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = a_0^2; \quad a_0 = \text{const}; \quad z_k \in V_2;$$

$$p_{ij} = -\delta_{ij} p - \frac{2}{3} \delta_{ij} \mu^* \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right).$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические

$$\tilde{Q}_j = p_{ij} N_i^0; \quad z_k \in S$$

и кинематические

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad z_k \in S$$

условия, задаваемые на поверхности контакта упругих тел и жидкости S .

Введенные здесь тензоры $\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta}$, $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ и \tilde{q}_{ij} зависят от вида начального состояния и типа упругого потенциала материала твердого тела. Выражения для вычисления составляющих этих тензоров приведены в работе [61]. Там же предложены упрощения для различных вариантов теории малых начальных деформаций.

Представленные уравнения для упругих тел записаны в лагранжевых координатах z_i начального состояния и справедливы как при однородных, так и неоднородных деформациях.

В дальнейшем исследованы гармонические волновые процессы малой амплитуды в упругих телах, находящихся в начальном состоянии. В отличие от твердых тел равенства для жидкой среды записаны в эйлеровых координатах, введенных в естественном состоянии жидкости. Следует отметить, что начальное состояние упругого тела при рассмотрении гидроупругой задачи является естественным состоянием по отношению к жидкой среде и системе в целом. Заметим, что поскольку исследуем распространение малых возмущений, то, как показано в первом разделе, в этом случае подходы Эйлера и Лагранжа в описании поведения сред совпадают. Поэтому далее не введены различия между лагранжевыми и эйлеровыми координатами и характерные для нелинейных задач трудности при записи граничных условий при указанных двух подходах не возникают. В дальнейшем исследованы волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых упругих телах, взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью, начальное состояние которых является однородным. При этом перемещения в начальном состоянии определяются выражениями

$$u_j^0 = \lambda_j^{-1}(\lambda_j - 1)z_j; \quad \lambda_j = \text{const},$$

где λ_j – коэффициенты удлинений вдоль координатных осей. В случае однородного начального напряженно-деформированного состояния для сжимаемых и несжимаемых упругих тел получены общие решения в [57 – 59, 71, 72, 75, 79, 168, 170].

Для предварительно деформированных сжимаемых тел эти представления принимаем в виде

$$u_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z_1 \partial z_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z_2 \partial z_3}; \quad z_k \in V_1;$$

$$u_3 = (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^{-1} \left(\tilde{\omega}_{1111} \Delta_1 + \tilde{\omega}_{3113} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_2$$

$$\left\{ \left(\Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} - \frac{\rho}{\tilde{\omega}_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi_1 = 0; \quad z_k \in V_1; \right.$$

$$\left[\left(\Delta_1 + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \xi_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) - \rho \left(\frac{\tilde{\omega}_{1111} + \tilde{\omega}_{1331}}{\tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331}} \Delta_1 + \frac{\tilde{\omega}_{3333} + \tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331}} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^2}{\tilde{\omega}_{1111} \tilde{\omega}_{1331}} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] \psi_2 = 0; \quad z_k \in V_1; \quad \tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \text{const};$$

$$\tilde{\omega}_{ij\alpha\beta} = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} a_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{j\alpha} \delta_{i\beta}) \mu_{ij} + \frac{\delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}}{\lambda_j \lambda_\alpha} s_{\beta\beta}^0 \right];$$

$$\xi_1^2 = \frac{\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1221}}; \quad \xi_{2,3}^2 = g \pm \left(g^2 - \frac{\tilde{\omega}_{3333}\tilde{\omega}_{3113}}{\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1331}} \right)^{1/2};$$

$$2\tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{1331}g = \tilde{\omega}_{1111}\tilde{\omega}_{3333} + \tilde{\omega}_{1331}\tilde{\omega}_{3113} - (\tilde{\omega}_{1133} + \tilde{\omega}_{1313})^2 \Big\}.$$

В случае несжимаемых упругих тел решения имеют вид

$$u_1 = \frac{\partial x_1}{\partial z_2} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_2 \partial z_3}; \quad u_2 = -\frac{\partial x_1}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_2 \partial z_3}; \quad u_3 = \Delta_1 x_2, \quad z_k \in V_1$$

$$\left\{ \left(\Delta_1 + \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} - \frac{\rho}{\tilde{\kappa}_{1221}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) x_1 = 0; \quad \tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \text{const}; \quad z_k \in V_1; \right.$$

$$\left[\left(\Delta_1 + \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \left(\Delta_1 + \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) - \frac{\rho}{\tilde{\kappa}_{1331}} \left(\Delta_1 + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] x_2 = 0; \quad z_k \in V_1;$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta} = \lambda_i \lambda_j \lambda_\alpha \lambda_\beta \left[\delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} a_{i\beta} + (1 - \delta_{ij})(\delta_{i\alpha} \delta_{j\beta} + \delta_{j\alpha} \delta_{i\beta}) \mu_{ij} + \frac{\delta_{i\beta} \delta_{j\alpha}}{\lambda_j \lambda_\alpha} s_{\beta\beta}^0 \right];$$

$$\eta_1^2 = \frac{\tilde{\kappa}_{3113}}{\tilde{\kappa}_{1221}}; \quad \eta_{2,3}^2 = m \pm \left(m^2 - \frac{\tilde{\kappa}_{3113}}{\tilde{\kappa}_{1331}} \right)^{1/2};$$

$$2\tilde{\kappa}_{1331}m = \tilde{\kappa}_{3333} + \tilde{\kappa}_{1111} - 2(\tilde{\kappa}_{1133} + \tilde{\kappa}_{1313}); \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \Big\}.$$

Представления общих решений линеаризованных уравнений гидродинамики покоящейся ньютоновской вязкой сжимаемой жидкости, записанные через скалярный и векторный потенциалы, полученные в первом разделе, имеют следующий вид [62 – 65, 71, 72, 75, 76, 78, 171]:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi), \quad z_k \in V_2; \quad p^* = \rho_0 \left(\frac{4}{3} v^* \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi, \quad z_k \in V_2;$$

$$\rho^* = \frac{\rho_0}{a_0^2} \left(\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi, \quad z_k \in V_2$$

$$\left\{ \left[\left(1 + \frac{4v^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi = 0, \quad z_k \in V_2; \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - v^* \Delta \right) \Psi = 0, \quad z_k \in V_2; \right.$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}; \quad v^* = \frac{\mu^*}{\rho_0}; \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Big\}.$$

Здесь и ниже введены следующие обозначения: \mathbf{u} – вектор смещений в упругом теле; ρ – плотность материала упругого тела; a_{ij} и μ_{ij} – коэффициенты уравнений состояния упругих тел; $s_{\beta\beta}^0$ – начальные напряжения; \mathbf{v} – вектор возмущения скорости

жидкой среды; p^* и ρ^* – возмущения соответственно давления и плотности жидкости; ρ_0 и a_0 – плотность и скорость звука в жидкости, находящейся в состоянии покоя; μ^* и ν^* – динамический и кинематический коэффициенты вязкости жидкой среды; V_1 – объем, занимаемый упругим телом; V_2 – объем, занимаемый жидкостью; S – поверхность контакта сред.

Заметим, что применяемые решения являются наиболее общими и из них, как частные случаи при введении дополнительных упрощающих предположений, следуют решения, справедливые для более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых использована ранее другими исследователями.

В работах приведены также: предельные переходы, которые необходимо совершить; частные случаи сред и соответствующие им модели, которые в результате этого могут быть получены из рассматриваемого общего подхода.

Представленная система уравнений, по существу, исчерпывает в рамках трехмерной линеаризированной теории постановку задач гидроупругости для упругих тел с однородными начальными деформациями и покоящейся ньютоновской вязкой сжимаемой жидкой средой без учета тепловых эффектов. При этом, как частные случаи, имеют место более простые модели жидкости (несжимаемая вязкая, идеальная сжимаемая и идеальная несжимаемая жидкие среды) и упругого тела (различные варианты теории малых начальных деформаций, классическая теория упругости, прикладные двумерные теории как для предварительно деформированных, так и для тел без начальных напряжений).

Заметим, что для упругих тел приведенные соотношения относительно возмущений являются линейными, но в то же время величины начального состояния, входящие в них, определяются из общих нелинейных уравнений. В связи с этим, несмотря на то, что основные соотношения приведены в координатах начального деформированного состояния z_i и все величины отнесены к размерам тела в этом состоянии (поэтому общая постановка задач гидроупругости для сред с начальными напряжениями в координатах z_i по форме аналогична формулировке линейных задач классической теории гидроупругости), имеются и существенные различия, которые относятся к структуре входящих в нее уравнений и граничных условий.

В рамках указанных моделей и с учетом введенных допущений в ряде работ получено решение конкретных задач.

2.2 Волновые процессы в гидроупругих системах с плоскими границами раздела сред.

2.2.1. Волны Стоунли на границе раздела предварительно напряженных упругих и вязких сжимаемых жидких полупространств.

Исследованию закономерностей распространения поверхностных волн вдоль границы контакта предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых упругих и вязких сжимаемых жидких полупространств посвящены публикации [9, 12, 28, 30, 31, 71, 72, 75, 79, 80, 171, 190 и др.].

Интерес к указанным задачам вызван возможностью возникновения в гидроупругих системах такой структуры эффектов резонансного свойства, приводящих к существованию волн, локализующихся в окрестности поверхности раздела сред. Влияние начальных деформаций на фазовые скорости поверхностных волн Стоунли при взаимодействии упругого тела с идеальной жидкой средой исследовано в статьях [3, 11, 31, 71, 72, 75, 79, 106, 107 и др.]. В работах [9, 12, 28, 30, 31, 71, 72, 75, 79, 80, 171, 190 и др.] рассмотрены волны такого типа с учетом начальных напряжений и вязкости жидкости.

2.2.1.1. *Сжимаемое упругое тело и вязкая сжимаемая жидкость.* Задача для сжимаемого упругого и вязкого сжимаемого жидкого полупространств характеризуется следующими динамическими

$$\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0} \quad (2.1)$$

и кинематическими

$$v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (2.2)$$

граничными условиями.

Далее применяются представления общих решений, которые для рассматриваемого плоского случая имеют вид [57, 62 – 65, 71, 72, 75, 79]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 x_1}{\partial z_1 \partial z_2};$$

$$u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] x_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 x_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы x_i определяются из следующих уравнений [57, 62 – 65, 71, 72, 75, 79]:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] x_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] x_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] x_3 = 0.$$

Далее параметры, характеризующие процесс распространения поверхностных волн, определяем в классе бегущих волн, выбираемых в виде $x_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$, $j = \overline{1, 3}$, где k ($k = \beta + i\gamma$) – волновое число; γ – коэффициент затухания; ω – круговая частота ($i^2 = -1$).

Заметим, что принятый в данной работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общности полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена посредством гармонических составляющих.

Ниже приведены решения двух задач Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определены соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (2.1) и (2.2) получена система линейных однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных. Исходя из условия существования нетривиального решения этой системы получено дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{lm}(c, \gamma, \rho, \mu, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}). \quad (2.3)$$

Дисперсионное равенство (2.3) является более общим и из него при введении дополнительных предположений следуют соотношения, описывающие параметры волн для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрена ранее другими исследователями [43, 45, 46].

Совершены предельные переходы и приведены характеристические выражения, которые в результате этого следуют из (2.3) и справедливы для моделей вязкой несжимаемой, идеальной сжимаемой и несжимаемой жидкостей, а также при отсутствии

жидкой среды, как для предварительно деформированных, так и для тел без начальных напряжений. Отметим, что при выводе уравнения (2.3) налагалось единственное ограничение на функцию, описывающую упругий потенциал. Это условие ее дважды непрерывно-дифференцируемости. Какие-либо другие дополнительные требования к виду функции не предъявлялись и поэтому уравнение (2.3) имеет общий характер и справедливо для предварительно напряженных сжимаемых тел, упругие свойства которых описываются упругими потенциалами произвольной формы. Показано, что при устремлении коэффициента вязкости жидкости μ^* и начальных напряжений s_{ii}^0 к нулю дисперсионное уравнение (2.3) переходит в известное характеристическое соотношение Стоунли [43, 45, 46, 197], а, если дополнительно положить и плотность жидкой среды равной нулю, то (2.3) перейдет в соотношение, впервые полученное Рэлеем [41, 43, 45, 151, 193]. Отметим, что оба эти характеристические уравнения в настоящее время основательно исследованы применительно к сейсмологии в рамках классической теории упругости и гидродинамики идеальной жидкости.

Далее дисперсионное уравнение (2.3) для общего случая решено численно. При этом принято, что упругая полуплоскость загружена в направлении оси oz_1 . При такой загрузке нет аналогии между линеаризованной и линейной задачами и поэтому результаты для предварительно деформированных тел не могут быть получены из решений соответствующей линейной задачи [68, 169]. В результате вычислений для жестких сжимаемых материалов (органическое стекло), упругие свойства которых описываются трехинвариантным упругим потенциалом Мурнагана, получены зависимости величин фазовых скоростей и коэффициентов затухания поверхностных волн от начальных напряжений. При этом числовые результаты получены для жидкостей (воды и глицерина), контактирующих с органическим стеклом. Анализ полученных графиков показал, что начальные напряжения $\bar{\sigma}_{11}^0$ ($\bar{\sigma}_{11}^0 = \lambda_1 \bar{s}_{11}^0 / (\lambda_2 \lambda_3 \mu)$, где μ – модуль сдвига в упругом теле без начальных напряжений), повышают величины фазовых скоростей \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$) и уменьшают величины коэффициентов затухания $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$, где k_s – волновое число волны сдвига в материале упругого тела) поверхностных волн, а влияние вязкости жидкости имеет обратный характер.

Полученные численно зависимости фазовой скорости \bar{c} и коэффициента затухания $\bar{\gamma}$ поверхностных волн Стоунли от безразмерной скорости звука в жидкости \bar{a}_0 , приведены в работах [9, 12, 72, 75, 79].

Заметим, что \bar{a}_0 , равное отношению скорости волны звука в жидкости к скорости волны сдвига в бесконечном упругом теле ($\bar{a}_0 = a_0/c_s$), характеризует сжимаемость жидкой среды. Поэтому указанные зависимости иллюстрируют влияние сжимаемости жидкости на параметры поверхностных волн.

Общей закономерностью, характерной для величин скорости и коэффициентов затухания волн Стоунли как в случае воды, так и глицерина, является существенное их изменение при увеличении сжимаемости (уменьшении \bar{a}_0) жидкостей. При \bar{a}_0 , стремящемся к «бесконечности», получаем случай вязкой несжимаемой жидкой среды. Таким образом, приведенный анализ позволяет предположить, что при рассмотрении волновых процессов в гидроупругих системах, состоящих из сжимаемых упругих тел и жидкости, применение модели несжимаемой жидкой среды может привести к получению весьма неточных количественных результатов.

2.2.1.2. Несжимаемое упругое тело и вязкая сжимаемая жидкость. В отличие от жестких сжимаемых тел высокоэластичные несжимаемые материалы типа каучука и резины допускают, не разрушаясь, большие начальные деформации. Исследование влияния конечных начальных деформаций на параметры волнового процесса является актуальным и представляет определенный интерес. Такая задача рассмотрена в работах [11, 30, 31, 38, 72, 75, 79, 190].

Далее применяются представления общих решений линеаризованных уравнений для несжимаемых тел, взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью, которые для рассматриваемого плоского случая имеют вид [58, 62 – 65, 71, 72, 75, 79]

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \psi_1;$$

$$p = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} (a_{12} + \mu_{12}) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \psi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 x_3}{\partial z_1 \partial t},$$

где введенные потенциалы ψ_1 , x_2 и x_3 определяются из следующих уравнений [58, 62 – 65, 71, 72, 75, 79]:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_1 q_2^{-1} (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0) + q_1^{-1} q_2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) - 2 \lambda_1 \lambda_2 (a_{12} + \mu_{12})}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \psi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] x_2 = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] x_3 = 0.$$

Для высокоэластичного несжимаемого предварительно напряженного упругого полупространства, взаимодействующего с вязкой сжимаемой жидкостью, методом, аналогичным для сжимаемого материала, получено дисперсионное уравнение, имеющее следующий вид:

$$\det \left\| \tilde{\epsilon}_{lm} \left(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_i, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 4}). \quad (2.4)$$

Отметим, что дисперсионное соотношение (2.4) является, как и в предыдущей задаче, также более общим и из него (при введении дополнительных упрощающих предположений) следуют характеристические уравнения, описывающие параметры волн для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрена ранее другими исследователями.

В дальнейшем равенство (2.4) решено численно для высокоэластичных несжимаемых тел, упругие свойства которых описываются упругим потенциалом Трелоара [55, 56, 61, 69 – 72, 75, 79]. В результате вычислений получены зависимости величин фазовых скоростей волн Рэлея и Стоунли от начальных деформаций для гидроупругих систем, идеальная жидкая среда которых характеризуется различной плотностью и скоростью звука. Исследованы также особенности влияния вязкости жидкости и конечных предварительных деформаций на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания поверхностных волн.

Из полученного графического материала следует, что при сжатии и $\lambda_1 \approx 0,54$ (более точное значение равно $\lambda_1 = 0,543694$), т. е. при уменьшении длины высокоэла-

стичного несжимаемого тела на 46% величина фазовой скорости поверхностной волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s$) обращается в нуль. Это свидетельствует о том, что в условиях плоского напряженно-деформированного начального состояния для высокоэластичного несжимаемого неогуковского тела при $\lambda_1 \approx 0,54$ возникает явление поверхностной неустойчивости. Отмечено, что это значение совпадает с ранее полученным в теории устойчивости [55, 56, 61, 69 – 72, 75, 79] и соответствует значению параметра критического укорочения $\lambda_{кр}$. Анализ числовых результатов также показал, что для гидроупругой системы величина фазовой скорости поверхностной волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s$) обращается в нуль при сжатии упругого полупространства равном $\lambda_1 = 0,543695$, т. е. для упруго-жидкостной системы поверхностная неустойчивость наступает несколько раньше. Из анализа графиков также следует, что вязкая жидкость так же, как и идеальная, способствует возникновению поверхностной неустойчивости гидроупругой системы при меньшем сжатии упругого тела. Таким образом, развитая линеаризованная теория волн применительно к высокоэластичным несжимаемым телам позволяет исследовать волновые процессы не только в общем и ряде частных случаев, но и возможность и условия возникновения явления поверхностной неустойчивости упругого тела и гидроупругой системы.

2.2.2. Волновые процессы в предварительно напряженных упругих полупространствах, взаимодействующих со слоем вязкой сжимаемой жидкости.

Исследованию закономерностей распространения возмущений в упругом полупространстве, взаимодействующем с жидким слоем, которые также относятся к числу основных типов поверхностных волн, посвящены работы [13 – 16, 31, 33, 34]. Характерным отличием гидроупругих волноводов такой структуры является то, что в формировании поля в них весьма существенную роль играет не только взаимодействие волн с границей контакта упругих и жидких сред, но и наличие свободной поверхности и их взаимовлияние.

В указанных работах было проведено исследование закономерностей распространения поверхностных волн такого типа с учетом начальных напряжений и вязкости жидкости. Для данной задачи, характеризующейся следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1|_{z_2=h} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h} = 0; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \\ \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \end{aligned}$$

с использованием предложенного подхода были получены дисперсионные уравнения, которые для сжимаемых тел имеют вид

$$\det \| b_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}),$$

а для несжимаемых, соответственно –

$$\det \| \tilde{b}_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_i, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}).$$

Показано, что эти уравнения являются наиболее общими и из них при введении дополнительных упрощающих предположений следуют соотношения, описывающие параметры волн для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрено ранее другими исследователями.

В дальнейшем дисперсионные уравнения для общего случая были решены численно. Получены результаты вычислений для сжимаемых и несжимаемых упругих полупространств, взаимодействующих со слоем вязкой сжимаемой жидкости, характеризующейся различной плотностью и скоростью звука в ней. При проведении конкретных численных экспериментов принято, что упругие свойства жестких сжимаемых тел описываются трехинвариантным упругим потенциалом Мурнагана, а высокоэластичных несжимаемых – потенциалом Трелоара.

2.2.2.1. *Сжимаемые упругие тела и вязкая сжимаемая жидкость.* В работах [13 – 15, 31, 34] приведены дисперсионные кривые для жидких сред, характеризующихся разной скоростью звука. Анализ полученных графиков показал, что сжимаемость жидкой среды при взаимодействии жидкости с сжимаемым упругим телом оказывает существенное влияние на дисперсионные свойства волнового процесса. При этом с увеличением сжимаемости жидкости возрастает число распространяющихся мод и весьма существенно изменяются величины их фазовых скоростей. Это свидетельствует о том, что применение в расчетах гидроупругих волноводов, состоящих из сжимаемых упругих материалов и жидкого слоя, модели несжимаемой жидкой среды, может привести к получению весьма неточных как количественных, так и качественных результатов.

Исследовано влияние начального растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на величины фазовых скоростей поверхностных волн. Анализ полученных графиков показал, что несмотря на то, что расщепление единственной поверхностной волны, характерной для сжимаемого упругого полупространства, на множество мод связано с наличием слоя жидкости, тем не менее существующие начальные напряжения в упругом теле оказывают влияние на все моды. Влияние предварительных деформаций особенно значительно на фазовые скорости мод в окрестности частот их зарождения. С увеличением частоты (толщины жидкого слоя) влияние начальных напряжений уменьшается. При этом величины фазовых скоростей мод высокого порядка, начиная со второй, асимптотически стремятся к скорости волны звука в жидкой среде и влияние упругого тела ослабевает.

Получены также зависимости, отражающие особенности влияния вязкости жидкости, толщины жидкого слоя и начальных напряжений на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания поверхностных волн. При этом рассматривались материалы двух типов: сталь и органическое стекло. Сравнительный анализ результатов для стали и оргстекла показал, что в отличие от волн Стоунли, возникающих при любых соотношениях между параметрами упругих и жидких сред, явление расщепления единственной поверхностной волны Рэлея, характерной для упругого полупространства на множество мод, обусловленное слоем жидкости, имеет место лишь тогда, когда скорость волны сдвига в упругом полупространстве превышает величину скорости волны звука в жидкости [33, 34]. В противном случае в системе распространяется лишь одна волна, скорость которой монотонно уменьшается от величины скорости волны Рэлея до величины скорости волны Стоунли. Полученные числовые результаты показывают, что начальные напряжения, вязкость жидкости, ее плотность и скорость звука в ней оказывают влияние на частоты зарождения волн, а также на величины фазовых скоростей мод в окрестности этих частот.

2.2.2.2. *Несжимаемые упругие тела и вязкая сжимаемая жидкость.* Влияние больших (конечных) начальных деформаций и вязкости жидкости на распространение волн исследовано в работе [16]. При этом были получены зависимости фазовых скоростей \bar{c} мод от толщины вязкого жидкого слоя \bar{h} ($\bar{h} = \omega h / c_s$) как для предварительно сжатого ($\lambda_1 = 0,8$), так и для растянутого ($\lambda_1 = 1,5$) несжимаемого полупространства. Также построены графики зависимостей $\bar{\gamma} = f(\bar{h})$, отражающие влияние начальных напряжений на величины коэффициентов затухания волн.

2.2.3. *Волновые процессы в предварительно напряженном упругом слое, находящемся на вязком сжимаемом жидком полупространстве.*

Для такого класса волн обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости с привлечением модели идеальной жидкости, приведен в статьях и монографических изданиях [41, 43, 45, 53, 54]. Вместе с тем, как уже отмечалось, ряд факторов, присущих реальным средам и способных оказать существенное влияние на волновой процесс, не может быть описан классической теорией упругости и гидродинамикой идеальной жидкой среды.

Исследованию закономерностей распространения нормальных волн в упругом слое, взаимодействующем с вязким сжимаемым жидким полупространством, которые также относятся к числу основных типов акустических волн, посвящены работы [31, 37, 39, 71, 72, 75, 79, 81]. Характерным отличием гидроупругих волноводов такой структуры является то, что в формировании поля в них весьма существенную роль играет не только взаимодействие волн с границей контакта упругих и жидких сред, но и наличие свободной поверхности твердого слоя и их взаимовлияние.

В указанных работах проведено исследование закономерностей распространения нормальных волн такого типа с учетом начальных напряжений, а также вязкости и сжимаемости жидкости.

Для данной задачи, характеризующейся следующими динамическими $\tilde{Q}_1|_{z_2=h} = 0$, $\tilde{Q}_2|_{z_2=h} = 0$, $\tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}$, $\tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}$ и кинематическими $v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}$, $v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}$ граничными условиями, получены дисперсионные уравнения, которые для сжимаемых тел имеют вид $\det \left\| \tilde{\mathfrak{A}}_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0$ ($l, m = \overline{1, 6}$), а для несжимаемых, соответственно – $\det \left\| \tilde{\mathfrak{A}}_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_i, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h/c_s) \right\| = 0$ ($l, m = \overline{1, 6}$).

Заметим, что они имеют более общий характер и из них при введении дополнительных упрощающих предположений следуют соотношения, описывающие параметры мод для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрены ранее другими исследователями [41, 43, 45, 53, 54]. Оба эти дисперсионные уравнения (для общего случая) решены численно. Получены зависимости, отражающие влияние скорости звука в жидкости, ее плотности и вязкости, а также начальных напряжений и толщины упругого слоя на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания квазилэмбовских волн.

Построены также графики зависимостей относительного изменения величин фазовых скоростей мод c_ε от толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} , иллюстрирующие характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на величины фазовых скоростей нормальных волн. Анализ графиков показал, что влияние начальных напряжений ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) тесно связано со сжимаемостью жидкой среды. Для менее сжимаемых жидкостей ($a_0 = 2000$ м/с) наличие начальных напряжений приводит к уменьшению величин фазовых скоростей высших мод в окрестности частот (толщин) их зарождения. В дальнейшем, с ростом толщины упругого слоя (частоты) предварительные деформации повышают фазовую скорость. Анализ также показал, что в гидроупругих волноводах указанной структуры существуют моды определенных номеров и частот, на величины фазовых скоростей которых начальные напряжения не оказывают влияния. Отметим, что эта, качественно новая закономерность, отсутствующая в случае распространения волн в неограниченных и полугораниченных телах, впервые была обнаружена и описана в работе [98] для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью.

Исследовано также воздействие вязкой жидкости на закономерности волнового процесса. При этом были получены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей волн \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h} . Сравнение расположения дисперсионных кривых, полученных ранее для упругого слоя, находящегося в вакууме [98], с графиками, характерными для гидроупругой системы, показало, что наличие вязкой сжимаемой жидкости приводит к смещению критических частот волн. Было показано, что движения в модах, распространяющихся в упругом слое, начиная с четвертой для жесткого материала, с возрастанием толщины удаляются от поверхностей и локализуются в его толще. Это является основным фактором, приводящим к ослаблению влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и к уменьше-

нию величин коэффициентов затухания этих мод. В противоположность модам высокого порядка движения в моде 1 с возрастанием толщины устремляются к границе раздела сред. При этом мода 1 становится квазиповерхностной волной типа Стоунли. Этим объясняется характер влияния вязкости жидкости, проявляющийся в уменьшении величин фазовых скоростей и увеличением коэффициентов затухания этой моды. Движения в квазиповерхностной моде 2 (волна типа Рэлея) в случае системы с упругим слоем из жесткого материала с ростом толщины, распространяясь в упругом слое, устремляются к поверхности раздела сред. Этим обусловлено влияние вязкости жидкости на кинематические характеристики этой моды во всем диапазоне частот.

Получены также зависимости коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ от толщины слоя \bar{h} . При этом особенностью их поведения является значительный рост затухания первой моды при ее зарождении. Для высших мод характерным является первоначальное увеличение коэффициентов затухания после возникновения волн, а затем, с ростом толщины слоя, существенное уменьшение их величин.

Из анализа результатов, полученных в упомянутых работах, следует, что в случае сжимаемых упругих тел, взаимодействующих с жидкой средой, сжимаемость жидкости весьма существенно сказывается на волновых свойствах гидроупругого волновода. Показано, что с ростом толщины упругого слоя (частоты) уменьшаются коэффициенты затухания высших мод. Увеличение вязкости жидкости приводит к уменьшению величин фазовых скоростей и росту коэффициентов затухания волн.

Влияние вязкости жидкого полупространства на фазовые скорости волн при взаимодействии с предварительно деформированным несжимаемым упругим слоем исследовалось в работах [31, 39, 71, 72, 75, 79]. При этом были получены зависимости относительного изменения величин фазовых скоростей мод c^* ($c^* = (c_i - c_v)/c_i$, c_i – скорость волн при взаимодействии упругого слоя с идеальной жидкой средой; c_v – скорость волн в системе «упругий слой – вязкая жидкость») от толщины упругого слоя (частоты) \bar{h} . Также получены графики, отражающие влияние частоты (толщины упругого слоя) \bar{h} , вязкости жидкости $\bar{\mu}^*$ и предварительных деформаций λ_1 на величины коэффициентов затухания различных мод.

Анализ графиков показал, что с ростом частоты (толщины упругого слоя) снижается проявление вязкости жидкой среды, приводящее к уменьшению коэффициентов затухания и величин фазовых скоростей высших мод.

Для высокоэластичного несжимаемого неогуковского упругого слоя, взаимодействующего с жидким полупространством, показано также, что в случае тонкого слоя совместное влияние вязкости жидкости и начальных напряжений, в основном, сказывается на низшей изгибной моде и с ростом предварительных деформаций это влияние увеличивается. Скорость этого изменения наибольшая в окрестности изгибной формы потери устойчивости.

2.2.4. Волновые процессы в системе «предварительно напряженный упругий слой – вязкий сжимаемый жидкий слой».

Особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом теле и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем.

Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе весьма существенную роль играет не только взаимодействие продольных и поперечных волн с границей упругого тела, контактирующей с жидкой средой, но и наличие свободных поверхностей и их взаимовлияние. Взаимодействие волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругой системе волн, распространяющихся с дисперсией.

Волны, распространяющиеся в указанной упруго-жидкостной системе, относятся к числу обобщений основательно исследованных основных типов поверхностных волн: Рэлея, Стоунли, Лява и Лэмба. Обзор работ и анализ результатов, полученных в рамках классической теории упругости и модели идеальной сжимаемой жидкости, приведены в [41, 43, 45]. Вместе с тем, значительное практическое использование по-

верхностных волн требует учета свойств, которые присущи реальным средам. Это вызвано также тем, что отмеченные свойства, способные оказать существенное влияние на волновой процесс, не могут быть описаны в рамках классической теории гидроупругости. К числу таких факторов относятся начальные напряжения в упругом теле, а также вязкость и сжимаемость жидкости. Рассмотренные задачи и результаты, полученные с учетом этих свойств, приведены в [17 – 25].

Для данной задачи, характеризующейся следующими динамическими и кинематическими

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1|_{z_2=0} = \tilde{P}_1|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=0} = \tilde{P}_2|_{z_2=0}; \quad \tilde{Q}_1|_{z_2=-h_2} = 0; \quad \tilde{Q}_2|_{z_2=-h_2} = 0; \\ \tilde{P}_1|_{z_2=h_1} = 0; \quad \tilde{P}_2|_{z_2=h_1} = 0; \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \end{aligned}$$

граничными условиями, получено дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$\det \|r_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1/c_s, \omega h_2/c_s)\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 8}).$$

Отмечено, что оно имеют более общий характер и из него при введении дополнительных упрощающих предположений следуют соотношения, описывающие параметры мод для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрена ранее другими исследователями [41, 43, 45, 143, 182, 198]. В дальнейшем это дисперсионное уравнение для общего случая решено численно. При этом для упругого тела использован трехинвариантный потенциал Мурнагана [71, 72, 74, 100, 101, 170, 172, 173]. Получены зависимости, отражающие влияние вязкости жидкости, а также начальных напряжений и толщин упругого слоя и жидкости на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания квазилэмбовских волн. Числовые расчеты проведены для двух гидроупругих систем. *Первая* (органическое стекло – вода) характеризовалась следующими параметрами: упругий слой – $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$; $\lambda = 3,96 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $a = -3,91 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $b = -7,02 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $c = -1,41 \cdot 10^9 \text{ Па}$ [98, 100, 101, 172, 173]; слой жидкости – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$; $\bar{\mu}^* = 0,001$; $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$. *Вторая* система представляла собой волновод из стали марки 09Г2С и воды. При этом параметры выбирались такими: упругий слой – $\rho = 7800 \text{ м/с}$; $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\mu = 7,75 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $a = -319 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $b = -303 \cdot 10^9 \text{ Па}$; $c = -78,4 \cdot 10^9 \text{ Па}$ [98, 100, 101, 172, 173]; слой жидкости – $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$; $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$.

Результаты вычислений представлены на рис. 2.1 – 2.30.

На рис. 2.1 – 2.14 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла и воды.

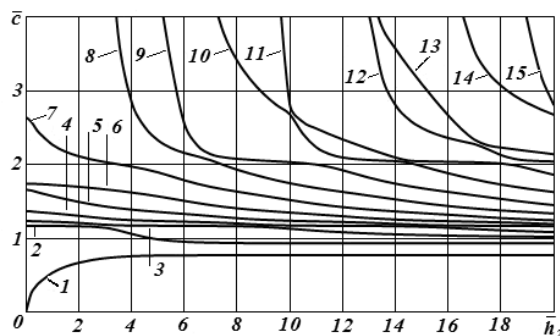


Рис. 2.1

На рис. 2.1 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$) для толстого вязкого сжимаемого жидкого слоя с толщиной \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$), равной 20, и $\bar{\mu}^* = 0,001$ при отсутствии начальных деформаций.

На рис. 2.2 – 2.5 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s, k_s$ – волновое число волны сдвига в материале упругого слоя) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для слоя вязкой жидкости с толщиной \bar{h}_1 , равной 20, и $\bar{\mu}^* = 0,001$ при отсутствии начальных деформаций.

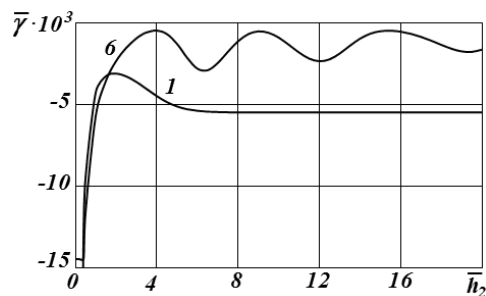


Рис. 2.2

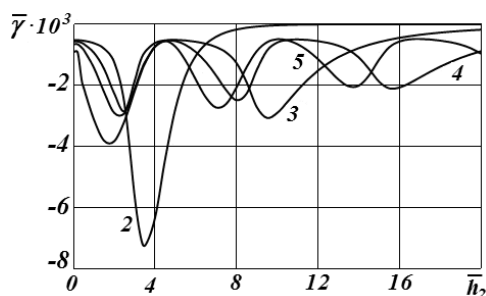


Рис. 2.3

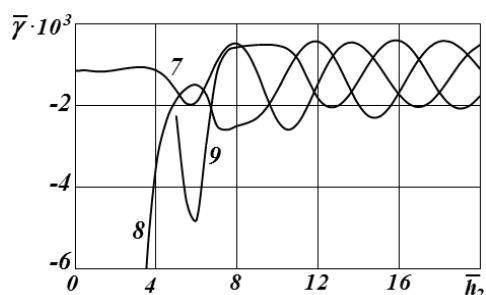


Рис. 2.4

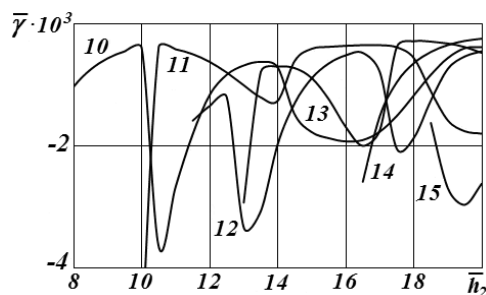


Рис. 2.5

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в упруго-жидкостной системе иллюстрируют графики на рис. 2.6 – 2.8, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε ($c_\varepsilon = (c_\sigma - c)/c$, c_σ – фазовая скорость мод в предварительно напряженном слое, c – фазовая скорость нормальных волн в упругом слое при отсутствии начальных деформаций) от толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках представлены кривые для гидроупругого волновода, толщина вязкого жидкого слоя которого \bar{h}_1 равняется 20 и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

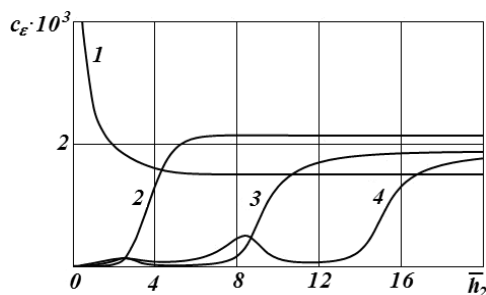


Рис. 2.6

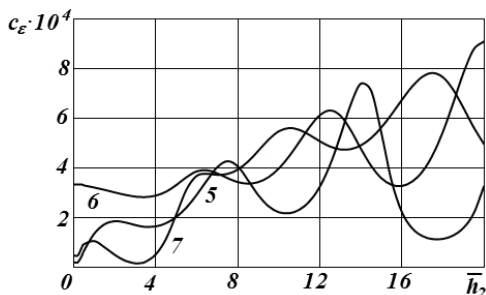


Рис. 2.7

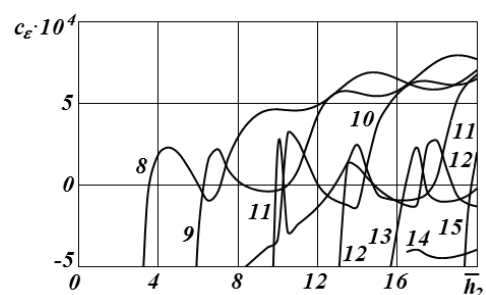


Рис. 2.8

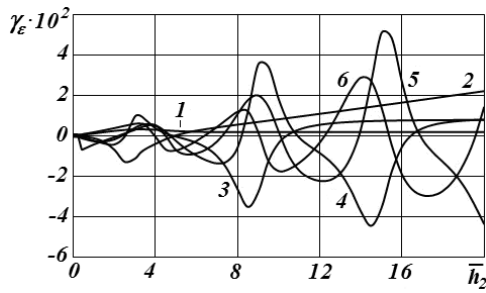


Рис. 2.9

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на коэффициенты затухания мод в упругом слое, взаимодействующем со слоем вязкой сжимаемой жидкости, иллюстрируют графики на рис. 2.9 – 2.11, на которых представлены зависимости относительных изменений величин коэффициентов затухания мод γ_ϵ ($\gamma_\epsilon = (\gamma_\sigma - \gamma)/\gamma$, γ_σ – коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе, упругий слой которой подвержен начальным деформациям, γ – коэффициенты затухания мод в гидроупругой системе при отсутствии начальных деформаций) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках представлены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого \bar{h}_1 равна 20 и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

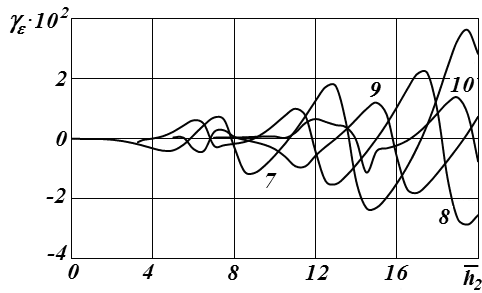


Рис. 2.10

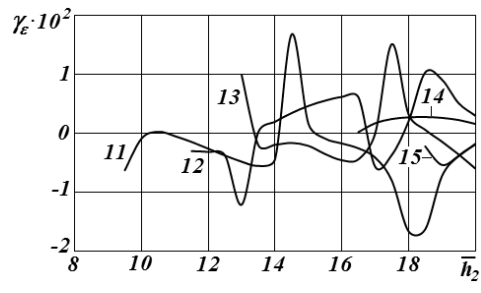


Рис. 2.11

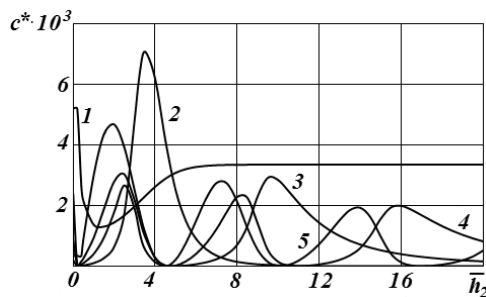


Рис. 2.12

Характер влияния вязкости жидкости ($\bar{\mu}^* = 0,001$) на скорости мод в гидроупругой системе иллюстрируют графики на рис. 2.12 – 2.14, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей мод c^* ($c^* = (c_i - c_v)/c_i$, c_i – фазовая скорость волн в гидроупругой системе с идеальной жидкостью; c_v – фазовая скорость мод в системе с вязкой жидкостью) от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках представлены графики для гидроупругого волновода, толщина вязкого жидкого слоя которого \bar{h}_1 равна 20 и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

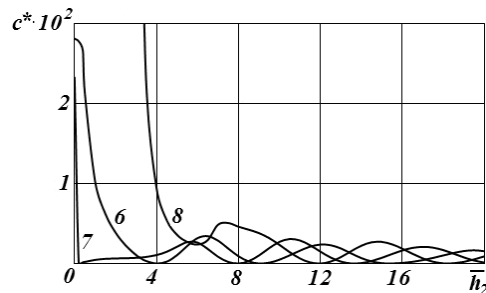


Рис. 2.13

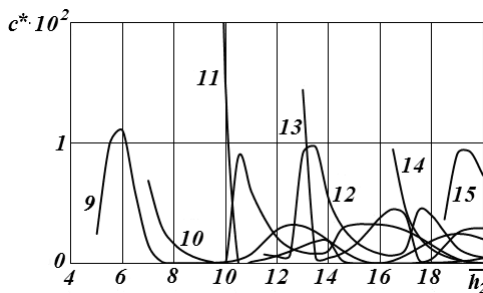


Рис. 2.14

Графики для гидроупругой системы, которые приведены на рис. 2.1, показывают, что при росте толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,769121$) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,933558$) сверху. Заметим, что квазиповерхностная мода 1 при выбранных механических параметрах системы $\bar{a}_0 = 1,152595 > \bar{c}_R = 0,933558$, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области твердого тела [46]. Квазирэлеевская мода 2 распространяется вдоль свободной поверхности упругого слоя. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s . При этом с ростом толщины они локализируются в толще упругого слоя [45]. Отметим, что наличие жидкости приводит к увеличению числа нормальных квазилэмбовских волн в гидроупругой системе. При этом возникающие низшие моды имеют нулевые частоты записания.

Из графического материала, представленного на рис. 2.2 – 2.5, непосредственно следует, что для всех мод существуют упругие слои определенной толщины, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием. С ростом толщины упругого слоя для квазилэмбовских мод (кроме первой) характерно уменьшение их величин коэффициентов затухания и общего влияния вязкой жидкости на них.

Из графиков, приведенных на рис. 2.6 – 2.8, следует, что начальное растяжение упругого слоя ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению фазовых скоростей мод 1 – 7. Скорости всех высших мод 8 – 15 в окрестности толщин упругих слоев, при которых они зарождаются, становятся меньше соответствующих скоростей в слое без начальных напряжений. Нетрудно видеть, что для мод, начиная с восьмой и дальше для всех последующих, существуют упругие слои определенных толщин, при которых предварительные деформации не влияют на их фазовые скорости. В рассматриваемом здесь случае гидроупругой системы с толстым жидким слоем для каждой моды 8 – 10 имеются упругие слои трех таких толщин. Для следующих нормальных волн высокого порядка существуют упругие слои пяти таких толщин.

Из графиков, приведенных на рис. 2.9 – 2.11, следует, что для мод, начиная со второй и дальше для всех последующих, существуют толщины упругого слоя, при которых предварительное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) не влияет на их коэффициенты затухания.

Из графического материала, представленного на рис. 2.12 – 2.14, непосредственно следует, что для всех мод существуют упругие слои определенных толщин, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости мод является минимальным и небольшим. Вместе с тем в случае толстого жидкого слоя для ряда мод существуют упругие слои определенных толщин, при которых влияние вязкости жидкости на фазовые скорости этих мод значительно. С возрастанием толщины упругого слоя общей закономерностью для всех мод, начиная со второй, является уменьшение влияния вязкости жидкого слоя на величины их фазовых скоростей.

Графический материал результатов численных вычислений для гидроупругой системы «сталь – вода» представлен на рисунках 2.15 – 2.30.

На рис. 2.15 – 2.17 приведены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей мод \bar{c} от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для толстого слоя вязкой жидкости

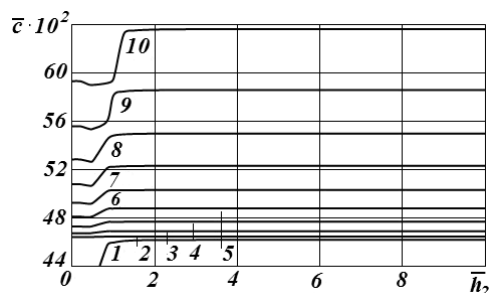


Рис. 2.15

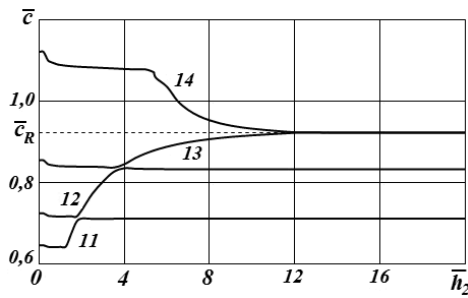


Рис. 2.16

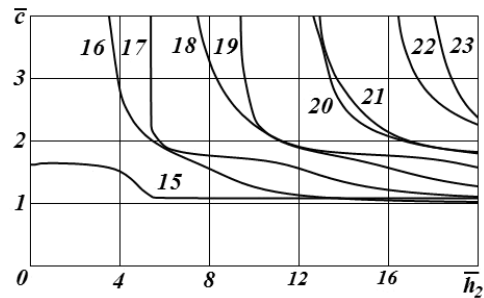


Рис. 2.17

($\bar{\mu}^* = 0,001$) с толщиной \bar{h}_1 , равной 20, при отсутствии начальных деформаций. При этом на рис. 2.15 приведены дисперсионные кривые для первых 10 мод. Дисперсионные кривые для мод с 11 по 23 показаны на рис. 2.16 и 2.17.

На рис. 2.18 – 2.22 приведены зависимости безразмерных величин коэффициентов затухания мод $\bar{\gamma}$ от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 для слоя вязкой жидкости с толщиной \bar{h}_1 , равной 20, и $\bar{\mu}^* = 0,001$ при отсутствии начальных деформаций.

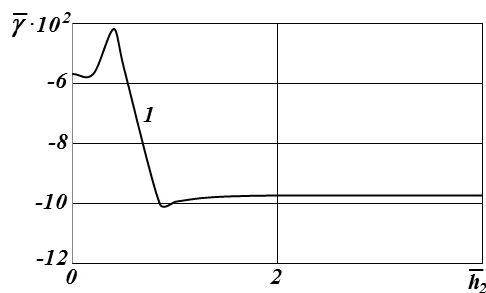


Рис. 2.18

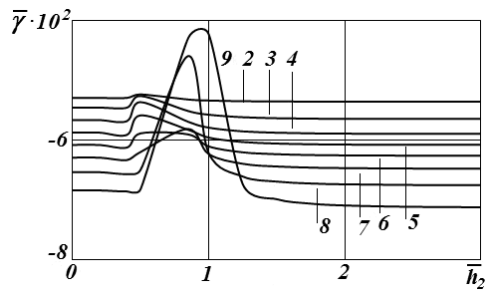


Рис. 2.19

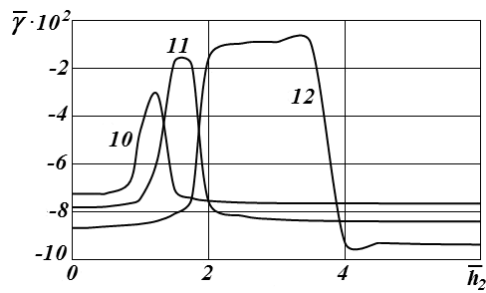


Рис. 2.20

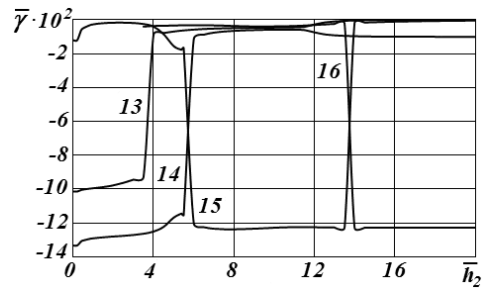


Рис. 2.21

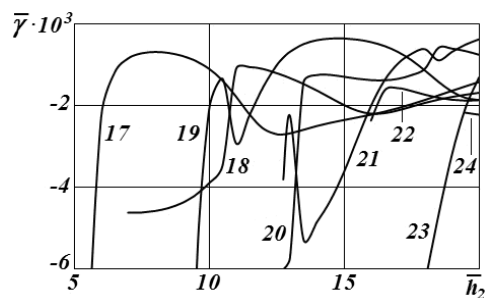


Рис. 2.22

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на скорости нормальных волн в гидроупругой системе, иллюстрируют графики на рис. 2.23 – 2.26, где представлены зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ϵ от толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках приведены кривые для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого \bar{h}_1 равняется 20 и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

Зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε от толщины упругого слоя \bar{h}_2 при действии начального растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) для мод 1, 7 – 10 приведены на рис. 2.23. Влияние начальных напряжений на скорости мод со второй по шестую отражают графики на рис. 2.24. Зависимости относительных изменений величин фазовых скоростей c_ε мод 11 – 24 от толщины упругого слоя представлены на рис. 2.25 и 2.26.

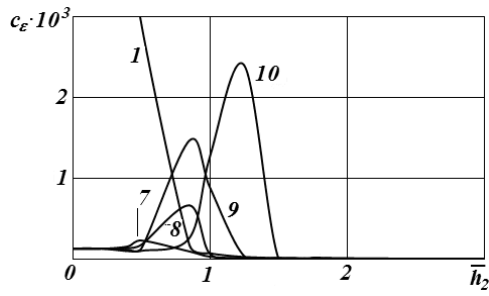


Рис. 2.23

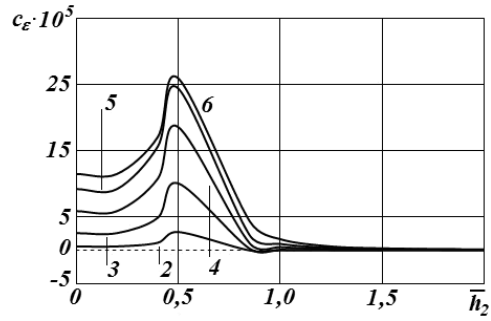


Рис. 2.24

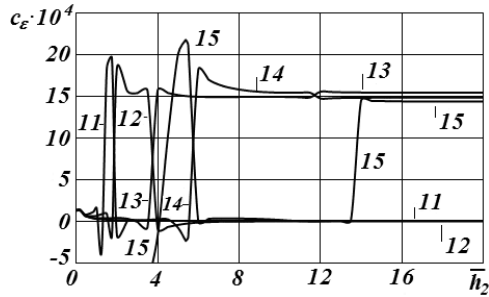


Рис. 2.25

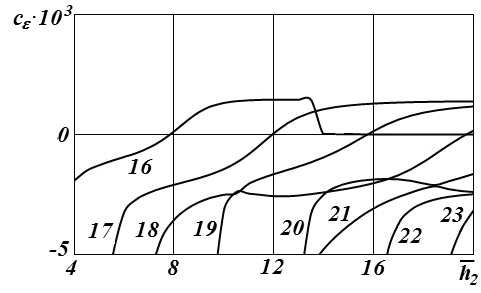


Рис. 2.26

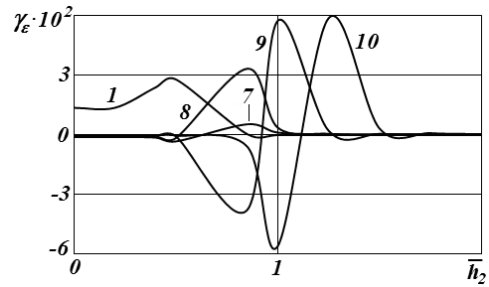


Рис. 2.27

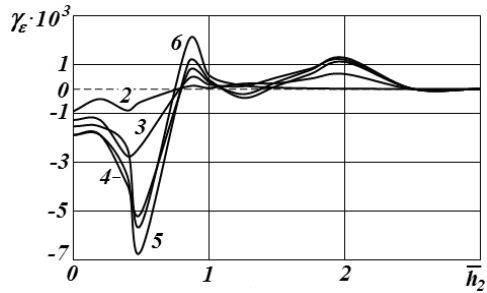


Рис. 2.28

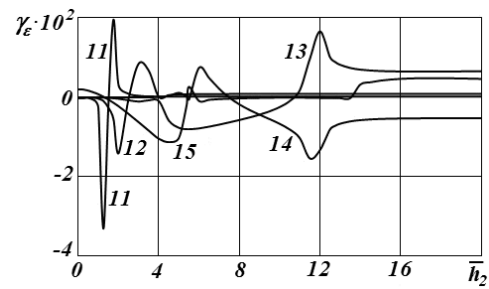


Рис. 2.29

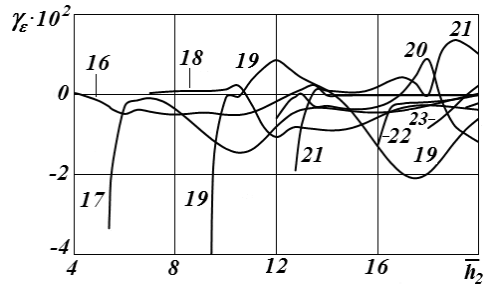


Рис. 2.30

Характер влияния предварительного растяжения ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) на коэффициенты затухания мод в упругом слое, взаимодействующем со слоем вязкой сжимаемой жидкости, иллюстрируют графики на рис. 2.27 – 2.30, на которых представлены зависимости относительных изменений величин коэффициентов затухания мод γ_ε от безразмерной величины толщины упругого слоя \bar{h}_2 . На этих рисунках приведены дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, толщина жидкого слоя которого \bar{h}_1 равна 20 и $\bar{\mu}^* = 0,001$.

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 2.15, показывает, что при возрастании толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды стремится снизу к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,461819$), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$). Величины фазовых скоростей мод 2 – 10 стремятся к скоростям волн, величины которых больше скорости звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$), но меньше скорости квазирэлееской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$). Характерной особенностью дисперсионных кривых этих нормальных волн является наличие у них нулевых частот запертия. Кроме того, по мере уменьшения длины волны и удаления от частот запертия они становятся практически бездисперсионными.

Из графиков рис. 2.16 следует, что скорость моды 13 с увеличением толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) снизу, а фазовая скорость моды 14 – к скорости волны Рэлея \bar{c}_R сверху. Фазовые скорости всех последующих мод высокого порядка с возрастанием толщины стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела \bar{c}_s (рис. 2.16 и 2.17).

Из графического материала, представленного на рис. 2.18 – 2.22, непосредственно следует, что для всех мод существуют упругие слои определенной толщины, при которых моды распространяются как с наименьшим, так и с наибольшим затуханием. С ростом толщины упругого слоя для квазилэмбовских мод, начиная с 13, характерно уменьшение их величин коэффициентов затухания и общего влияния вязкой жидкости на них.

Из графиков, приведенных на рис. 2.23 – 2.26, следует, что начальное растяжение упругого слоя ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к повышению фазовых скоростей мод 1 – 10. Скорости всех высших мод 11 – 24 в окрестности толщин упругих слоев, при которых они зарождаются, становятся меньше скоростей соответствующих волн в слое без начальных напряжений. Как видно, для второй моды, а также для мод, начиная с 11, и дальше для всех последующих, существуют толщины упругого слоя, при которых предварительное деформирование не влияет на их фазовые скорости. В рассматриваемом здесь случае гидроупругой системы с толстым жидким слоем ($\bar{h}_1 = 20$) для второй моды, а также для каждой моды 11 – 24 имеются упругие слои одной такой толщины.

Из графиков, приведенных на рис. 2.27 – 2.30, следует, что для всех мод существуют толщины упругого слоя, при которых предварительное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) не влияет на их коэффициенты затухания.

2.2.4.1. Влияние вязкости жидкости на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.

В гидроупругом волноводе жидкость для ряда мод вызывает изменение критических частот, смещение дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, изменение их конфигурации, а также появление новых мод. Это приводит к тому, что в окрестности толщин, при которых моды зарождаются, влияние жидкости на величины их фазовых скоростей становится значительным.

Влияние вязкости жидкости связано с ее взаимодействием со смещениями, возникающими в упруго-жидкостной системе при распространении волновых возмущений. В тех точках мод, где преобладающими являются сдвиговые смещения на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей принимают максимальное значение. В точках волны с малыми поверхностными сдвиговыми смещениями, соответственно, и влияние вязкости наименьшее. Как отмечалось ранее, моды высокого порядка распространяются с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом толщины к скорости волны сдвига в материале упругого тела. При этом с возрастанием толщины, как известно [45], в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т.е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализируются в его толще. Следствием этого является уменьшение влияния вязкости жидкости на фазовые скорости и коэффициенты затухания этих мод с возрастанием толщины упругого слоя в коротковолновой части спектра.

2.2.4.2. Особенности влияния начальных напряжений на дисперсию квазилэмбовских волн в гидроупругих волноводах.

Как показано в работе [98], в упругом волноводе, невзаимодействующем с жидкостью, начальные растяжения вызывают изменение частот зарождения мод и смещение их дисперсионных кривых. Это приводит к тому, что в окрестности критических частот величины фазовых скоростей мод в предварительно деформированном слое могут быть как меньше, так и больше величин фазовых скоростей соответствующих мод в теле без начальных напряжений. Этим обусловлено также то, что в упругом волноводе появляются частоты (толщины), при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины фазовых скоростей ряда нормальных волн Лэмба.

В гидроупругих волноводах предварительное деформирование (растяжение) вызывает изменение критических частот и сдвиг дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра, приводящее к появлению для ряда квазилэмбовских мод упругих слоев определенных толщин, при которых начальные напряжения не оказывают влияния на величины их фазовых скоростей.

В гидроупругой системе «оргстекло – вода» начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) вызывает смещение дисперсионных кривых мод в длинноволновую часть спектра и изменение их конфигурации. Масштаб этих изменений зависит от номера моды. Для мод более высокого порядка эти изменения становятся более значительными. Это приводит к тому, что для низших мод существует по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от начального растяжения. У мод более высокого порядка количество упругих слоев с такими толщинами возрастает.

В случае гидроупругой системы «сталь – вода» предварительное растяжение также приводит к сдвигу дисперсионных кривых в длинноволновую часть спектра и изменению их конфигурации. В отличие от оргстекла и воды в этой гидроупругой системе начальное растяжение ($\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$) приводит к «растягиванию» дисперсионных кривых мод. Поэтому у мод, начиная с 16 моды и дальше для всех последующих мод высокого порядка, независимо от их номера имеется по одному упругому слою с толщиной, при которой их фазовые скорости не зависят от предварительного деформирования.

2.2.4.3. Локализационные свойства низших мод в гидроупругих волноводах.

Графики, приведенные на рис. 2.1, для упруго-жидкостной системы «органическое стекло – вода» показывают, что в гидроупругом волноводе при увеличении толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,769121$) снизу. Относительно поведения этой моды в коротковолновой части спектра необходимо отметить следующее. Как известно [46], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических пара-

метров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом волноводе, как отмечено ранее, механические параметры гидроупругой системы «оргстекло – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 1,152595$) больше скорости квазиРэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$). Согласно работе [46], это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области упругого слоя. Скорость моды 2, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,933558$) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s . При этом с ростом толщины упругого слоя, как указано выше, эти моды локализируются в его толще [45].

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. Этим объясняется влияние начальных напряжений на фазовые скорости всех мод. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

Графики, приведенные на рис. 2.15 – 2.17 для упруго-жидкостной системы «сталь – вода», показывают, что в гидроупругом волноводе при увеличении толщины упругого слоя \bar{h}_2 скорость первой моды 1, распространяющейся вдоль границы контакта сред, стремится к скорости волны Стоунли \bar{c}_{st} ($\bar{c}_{st} = 0,461819$) снизу. При этом в рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «сталь – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости \bar{a}_0 ($\bar{a}_0 = 0,463021$) меньше скорости квазиРэлеевской волны \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$). Согласно работы [46], это приводит к тому, что в коротковолновой части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого слоя. Это относится и к модам 2 – 12, которые также распространяются в жидкости. Вследствие того, что ни одна из низших мод не проникает в твердое тело, поверхность упругого слоя, граничащая с жидкостью, остается свободной от них. Эту область занимает мода 13. Скорость этой моды, распространяющейся вдоль границы контакта сред в приповерхностной области упругого слоя, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) снизу, как и в случае твердого слоя, невзаимодействующего с жидкостью. Скорость моды 14, распространяющейся в упругом слое вдоль его свободной границы, стремится к скорости волны Рэлея \bar{c}_R ($\bar{c}_R = 0,923008$) сверху. Скорости всех мод более высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела \bar{c}_s и, как указано выше, их движения локализируются в толще упругого слоя.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе не только первая мода, но и низшие моды 2 – 12, возникающие в результате взаимодействия упругого слоя с жидким слоем, не проникают в твердое тело и распространяются вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. Этим объясняется незначительное влияние упругого слоя и начальных напряжений на фазовые скорости, а также дисперсию этих мод. Все остальные моды более высокого порядка, как отмечалось ранее, распространяются в упругом слое в его толще. В этом случае волноводами для распространения нормальных волн и переноса волновой энергии служат как упругий, так и жидкий слои.

Отметим также, что наличие жидкого слоя приводит к появлению новых нормальных волн. Возникающие моды имеют нулевые частоты запираания. Воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Жидкость оказывает влияния на распределение мод среди сред. Локализация низших мод в системе «слой жидкости – упругий слой» зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием распределения низших нормальных волн в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в слое жидкости и квазиэлевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

2.3. Волновые процессы в гидроупругих волноводах с цилиндрическими поверхностями раздела упругих и вязких сжимаемых жидких сред.

Интерес к таким объектам обусловлен широким использованием гидроупругих волноводов с такой геометрией на практике. В связи с этим возникает насущная необходимость в теоретическом исследовании влияния таких факторов как геометрия, кривизна, толщина стенок полого цилиндра, начальные напряжения, наличие жидкости и ее свойств, а также типа симметрии движений на параметры волновых процессов. Трехмерная линеаризованная теория аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями и вязкой сжимаемой жидкости позволяет это сделать.

Отметим, что в последние годы с этой целью в ряде работ [5 – 8, 10, 26, 27, 29, 31, 32, 35, 62, 63, 66, 71, 72, 75, 82, 99, 155, 171] получила дальнейшее развитие линеаризованная теория аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями, созданная и предложенная в работах [55 – 66, 69 – 79, 168 – 171] применительно к решению пространственных динамических задач о распространении малых возмущений в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых полых цилиндрах, содержащих вязкую сжимаемую покоящуюся жидкость.

Для данной задачи, характеризующейся следующими динамическими

$$\tilde{Q}_r|_{r=R+h} = 0; \quad \tilde{Q}_\theta|_{r=R+h} = 0; \quad \tilde{Q}_z|_{r=R+h} = 0;$$

$$\tilde{Q}_r|_{r=R-h} = P_{rr}|_{r=R-h}; \quad \tilde{Q}_\theta|_{r=R-h} = P_{r\theta}|_{r=R-h}; \quad \tilde{Q}_z|_{r=R-h} = P_{rz}|_{r=R-h}$$

и кинематическими

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}|_{r=R-h} = v_r|_{r=R-h}; \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial t}|_{r=R-h} = v_\theta|_{r=R-h}; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}|_{r=R-h} = v_z|_{r=R-h}$$

граничными условиями, используя предложенный подход, получены дисперсионные уравнения, которые для сжимаемых материалов имеют вид [8, 29, 71, 72, 75]

$$\det \left\| T_{lm} \left(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega, h \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 9}),$$

а для несжимаемых [26, 27, 71, 72, 75, 79], соответственно –

$$\det \left\| \tilde{T}_{lm} \left(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_i, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega, h \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 9}).$$

Заметим, что эти соотношения являются наиболее общими и из них при введении дополнительных упрощающих предположений следуют уравнения, описывающие параметры мод для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассматривалась ранее другими исследователями.

2.3.1. Частные случаи.

2.3.1.1. Волны в изотропной оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью (модель Кирхгофа – Лява). Частным случаем общей задачи является задача о распространении нормальных волн в изотропной цилиндрической оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Такая задача в рамках двумерной оболочечной модели Кирхгофа – Лява с использованием предложенного подхода была рассмотрена в работах [66, 71, 72, 75, 99]. При этом было получено дисперсионное уравнение, которое с учетом гипотез Кирхгофа – Лява имеет вид:

$$\det \|\alpha_{lm}\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 3}), \quad (2.5)$$

где элементы детерминанта α_{ij} определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{h^2}{12} \left(k^2 - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 + \frac{1}{R^2} - \frac{1-\nu^2}{Eh} \rho h \omega^2 - \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{1m} \gamma_{m1}; \\ \alpha_{12} &= \frac{n}{R^2} - \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{1m} \gamma_{m2}; \quad \alpha_{13} = \frac{ik\nu}{R} - \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{1m} \gamma_{m3}; \\ \alpha_{21} &= -\frac{n}{R^2} + \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{2m} \gamma_{m1}; \quad \alpha_{22} = -\frac{k^2(1-\nu)}{2} - \frac{n^2}{R^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} \rho h \omega^2 + \\ &+ \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{2m} \gamma_{m2}; \quad \alpha_{23} = -\frac{(1+\nu)nik}{2R} + \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{2m} \gamma_{m3}; \\ \alpha_{31} &= \frac{ik\nu}{R} + \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{3m} \gamma_{m1}; \quad \alpha_{32} = \frac{(1+\nu)nik}{2R} + \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{3m} \gamma_{m2}; \\ \alpha_{33} &= -k^2 - \frac{(1-\nu)n^2}{R^2} + \frac{(1-\nu^2)\rho h \omega^2}{Eh} + \frac{i\omega(1-\nu^2)}{Eh} \beta_{3m} \gamma_{m3} \quad (m = \overline{1, 3}). \end{aligned}$$

Здесь введены такие обозначения: ν и E – коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала оболочки; R и h – радиус кривизны срединной поверхности и толщина оболочки.

Дисперсионное уравнение (2.5) описывает распространение неосесимметричных волн в круговой цилиндрической оболочке, заполненной покоящейся вязкой сжимаемой жидкостью. Из этого соотношения при определенных условиях можно получить ряд ранее исследованных, а также неисследованных частных случаев.

В работах [66, 71, 72, 75, 99] совершены предельные переходы, подробно рассмотрены и приведены дисперсионные уравнения для следующих частных случаев более простых моделей жидкости и мод движения гидроупругой системы: несжимаемая вязкая жидкость; сжимаемая идеальная жидкость; несжимаемая идеальная жидкость; крутильные колебания и осесимметричные волны.

Показано, что для волн кручения в случае малой вязкости при $\varepsilon = \sqrt{\nu^*/(\omega R^2)} \ll 1$ аналитические выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания с точностью до ε имеют следующий вид: $c_1 \approx \sqrt{\mu/\rho} \left(1 - \varepsilon (\rho_0 R) / (2\sqrt{2}\rho h) \right)$, $\gamma \approx \frac{\varepsilon \omega \rho_0 R}{2\sqrt{2}\rho h} \sqrt{\rho/\mu}$.

Заметим, что при исследовании волн кручения в случае взаимодействия упругих тел с вязкой жидкостью результаты для сжимаемой и несжимаемой жидкости будут совпадать. Это связано с тем, что при распространении волн кручения сжатие вязкой жидкой среды не происходит и параметры, характеризующие сжимаемость жидкости, в уравнения не входят.

Отметим, что осесимметричная задача рассмотрена в работе [160]. При этом подробно обсуждался лишь случай длинноволнового приближения.

2.3.1.2. Волны в ортотропной оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью (модель С.П. Тимошенко). Частным случаем общей задачи является также задача о распространении нормальных волн в ортотропной цилиндрической оболочке, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Такая задача в рамках двумерной оболочечной модели, в которой учитываются сдвиговые деформации (гипотезы С.П. Тимошенко) с использованием предложенного подхода рассмотрена в работах [31, 35, 71, 72, 75, 82, 99, 153].

Для данного волнового процесса было получено дисперсионное уравнение, которое имеет вид

$$\det \|\tilde{\alpha}_{ij}\| = 0 \quad (i, j = \overline{1, 5}), \quad (2.6)$$

где элементы определителя $\tilde{\alpha}_{ij}$ определяются по следующим формулам [99]:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{11} &= \frac{b_1 \omega^2}{\varepsilon_1 c^2} + b_2 + \frac{b_2 n^2}{\varepsilon_2} - b_1 \omega^2 - \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{1m} \gamma_{m1}; \\ \tilde{\alpha}_{12} &= b_2 n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{1m} \gamma_{m2}; \quad \tilde{\alpha}_{13} = \frac{b_{12} i \omega}{c} - \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{1m} \gamma_{m3}; \quad \tilde{\alpha}_{14} = -\frac{b_2 n}{\varepsilon_2}; \\ \tilde{\alpha}_{15} &= -\frac{i b_1 \omega}{c \varepsilon_1}; \quad \tilde{\alpha}_{21} = -b_2 n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{2m} \gamma_{m1}; \\ \tilde{\alpha}_{22} &= b_1 \omega^2 - \frac{b_2}{\varepsilon_2} - b_2 n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{2m} \gamma_{m2}; \quad \tilde{\alpha}_{23} = -\frac{i \omega n}{c} (1 + b_{12}) + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{2m} \gamma_{m3}; \\ \tilde{\alpha}_{24} &= \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \quad \tilde{\alpha}_{25} = \tilde{\alpha}_{34} = \tilde{\alpha}_{35} = \tilde{\alpha}_{42} = \tilde{\alpha}_{43} = \tilde{\alpha}_{53} = 0; \quad \tilde{\alpha}_{31} = \frac{b_{12} i \omega}{c} + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{3m} \gamma_{m1}; \\ \tilde{\alpha}_{32} &= \frac{i \omega n}{c} (1 + b_{12}) + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{3m} \gamma_{m2}; \quad \tilde{\alpha}_{33} = b_1 \omega^2 - n^2 - \frac{b_1 \omega^2}{c^2} + \frac{b_1 i \omega}{k_0} \beta_{3m} \gamma_{m3}; \\ \tilde{\alpha}_{41} &= -\frac{b_1 i \omega}{c \varepsilon_1}; \quad \tilde{\alpha}_{44} = \frac{i \omega k_0^2}{12 c} (1 + b_{12}); \quad \tilde{\alpha}_{45} = \frac{k_0^2}{12} \left(b_1 \omega^2 - n^2 - \frac{b_1 \omega^2}{c^2} \right) - \frac{b_1}{\varepsilon_1}; \\ \tilde{\alpha}_{51} &= \frac{b_2 n}{\varepsilon_2}; \quad \tilde{\alpha}_{52} = \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \quad \tilde{\alpha}_{54} = \frac{k_0^2}{12} \left(b_1 \omega^2 - b_2 n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{b_2}{\varepsilon_2}; \quad \tilde{\alpha}_{55} = -\frac{i \omega n k_0^2}{12 c} (1 + b_{12}). \end{aligned}$$

Здесь производится суммирование по m от 1 до 3, а также введены обозначения: $b_n = E_n / G_{12} (1 - \nu_{12} \nu_{21})$; $\varepsilon_n = E_n / k' G_{13} (1 - \nu_{12} \nu_{21})$, $n = 1, 2$; $b_{12} = b_1 \nu_{21} = b_2 \nu_{12}$; $k_0 = 2h/a$; ν_{ij} , E_i и G_{ij} – коэффициенты Пуассона, модули Юнга и модули сдвига материала оболочки; a и $2h$ – радиус срединной поверхности и толщина оболочки; k' – коэффициент сдвига, вводимый в теории оболочек, построенной с привлечением гипотезы Тимошенко [99].

Заметим, что это дисперсионное соотношение в рамках выбранной модели также имеет более общий характер. Из него при введении дополнительных упрощающих предположений, следуют уравнения, описывающие параметры мод для ряда частных случаев волновых процессов и более простых моделей упругих и жидких сред (вязкая несжимаемая жидкость, идеальная жидкость, пустая оболочка, крутильные моды, осесимметричные и неосесимметричные волны, изотропная оболочка, модель Кирхгофа – Лява). В монографиях [71, 72, 75, 99] рассмотрены указанные частные случаи, совершены необходимые предельные переходы и получены соответствующие дисперсионные уравнения. Отметим также, что отдельные частные случаи рассмотрены ранее другими исследователями.

Дисперсионное уравнение (2.6) для общего случая решено численно. При этом числовые результаты были получены для изотропных и ортотропных боропластиковых оболочек, заполненных глицерином и водой. Исследовалось влияние параметров

и свойств оболочек (инерции вращения, деформации сдвига, ортотропии, коэффициента Пуассона) и жидкости (вязкости, сжимаемости, плотности), а также типов симметрии движений (крутильные, осесимметричные, неосесимметричные) на закономерности рас-

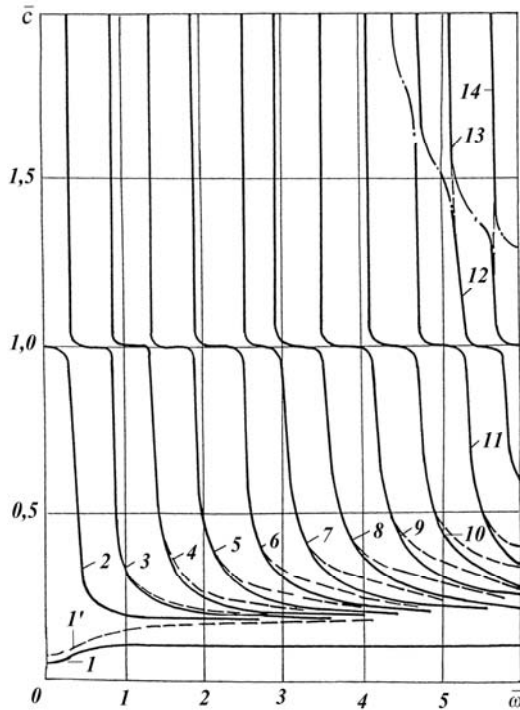


Рис. 2.31

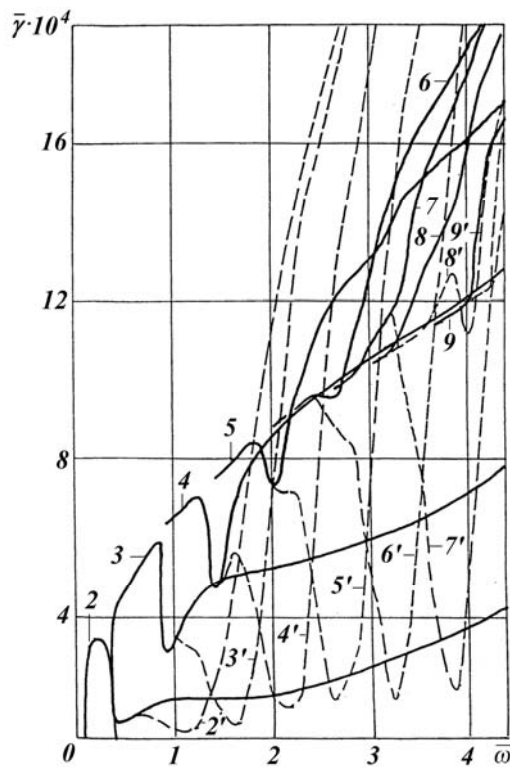


Рис. 2.32

пространения продольных волн (дисперсию, фазовые скорости, коэффициенты затухания). При этом получено большое количество числовых результатов, которые представлены в работах [35, 71, 72, 75, 82, 99, 153] в виде многочисленных графиков.

Из них следует, что результаты, получаемые в рамках модели, не учитывающей сдвиг, будут для первой моды завышенными, для второй моды – совпадать, а третья мода вообще не может быть определена. Это согласуется с физическими представлениями о данном процессе, так как увеличение модуля сдвига G_{13} эквивалентно увеличению жесткости материала оболочки, приводящему к повышению значений скоростей волн. Третью моду можно получить лишь на основании уравнений теории оболочек, построенной с использованием гипотез С.П. Тимошенко. Анализ показал, что для более полного качественного и количественного исследования волновых процессов в ортотропных оболочках, а также в изотропных оболочках, материал которых имеет пониженную сдвиговую жесткость, необходимо привлекать модели, основанные на использовании уравнений, учитывающих деформации поперечного сдвига и инерцию вращения.

На рис. 2.31, 2.32 приведены результаты исследования влияния деформации сдвига и инерции вращения на дисперсионные кривые системы «ортотропная оболочка – вязкая жидкость». Частотно-фазовые характеристики для этого случая представлены на рис. 2.31. Зависимости коэффициентов затухания от частоты приведены на рис. 2.32. Штрих-пунктирной линией на рис. 2.31 показаны участки дисперсионных кривых для гидроупругой системы, которые при отсутствии жидкости соединяются и превращаются в третью дисперсионную кривую, характерную для «пустой» оболочки. Численное исследование влияния деформации сдвига и инерции вращения

на характеристики гидроупругого волновода показало, что, если пренебречь этими факторами, то части дисперсионных кривых, обозначенные на рис. 2.31 штрихпунктирной линией, будут отсутствовать. Частотно-фазовые кривые в этой области будут совпадать со сплошными линиями (участки соединения обозначены штриховыми линиями). Кроме того, при $G_{13} \rightarrow \infty$ наблюдается также увеличение значений фазовых скоростей первой моды и мод высших порядков по сравнению с системой, учитывающей деформацию сдвига (штриховые линии на рис. 2.31 соответствуют случаю $E_1/G_{13} = 2,6$). Так, при уменьшении E_1/G_{13} в 20 раз фазовая скорость седьмой моды при частоте $\bar{\omega} = 4$ увеличивается на 20%, а первой – на 45%. Этот результат, по-видимому, подтверждает тот факт, что для исследования волновых процессов в оболочках, изготовленных из материала с пониженной сдвиговой жесткостью, заполненных вязкой жидкостью, весьма желательно использовать уравнения движения, полученные с привлечением модели, основанной на гипотезе С.П. Тимошенко.

Как и в случае распространения осесимметричных волн в системе «оболочка – жидкость», так и в общем случае неосесимметричных ($n \geq 1$) мод наличие в оболочке жидкой среды существенно изменяет качественную картину расположения дисперсионных кривых. На рис. 2.33 представлены графики зависимостей $\bar{c} = f(\bar{\omega})$ для оболочки с жидкостью при $n = 2$ (сплошные линии отвечают боропластиковой оболочке, заполненной глицерином). Видно, что наличие вязкой жидкости приводит к значительному росту числа мод, первые 14 из которых представлены на этом рисунке.

Зависимости коэффициентов затухания $\bar{\gamma}$ от частоты $\bar{\omega}$ для случая $n = 2$ приведены на рис. 2.34 (сплошные линии). При этом для $n = 2$ в отличие от осесимметричных волн монотонный рост величин коэффициентов затухания мод с частотой наблюдается только для первой моды. Для всех последующих мод в зависимости от значения частоты $\bar{\omega}$ имеются как интервалы монотонного возрастания $\bar{\gamma}$, так и интервалы монотонного убывания $\bar{\gamma}$ при ее изменении.

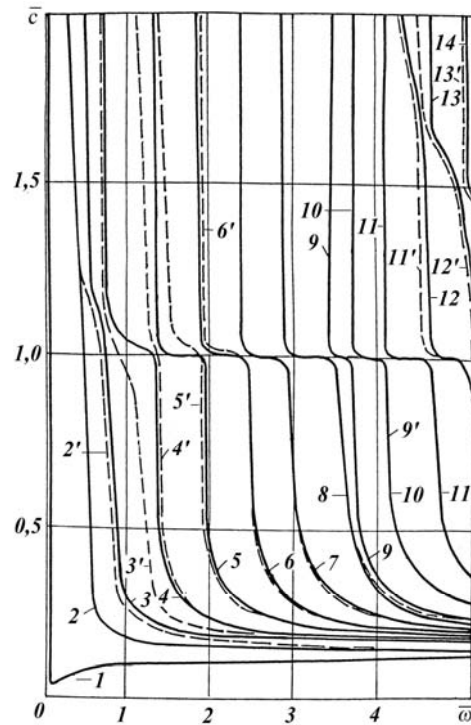


Рис. 2.33

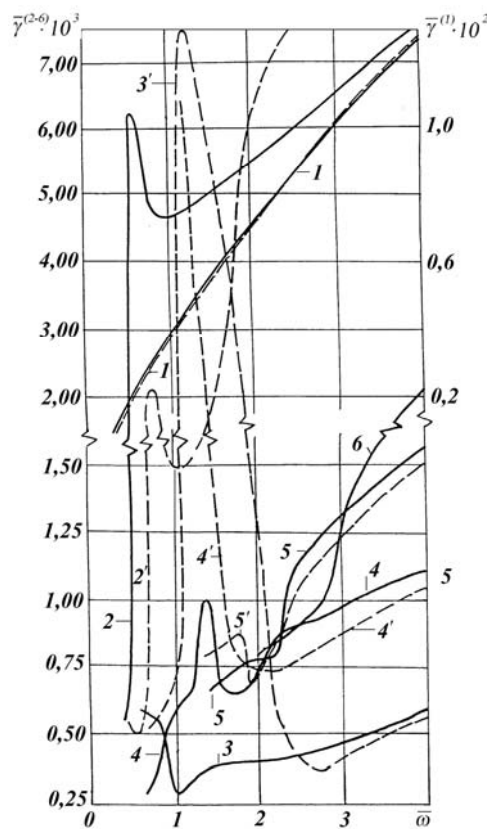


Рис. 2.34

На рис. 2.33 и 2.34 показано также влияние коэффициента Пуассона на поведение частотно-фазовых кривых. Здесь графики, обозначенные штриховыми линиями, получены при $\nu_{12} = 0,28$ и $\nu_{21} = 0,1$.

Отметим, что в упомянутых работах исследовано также влияние ряда других параметров оболочек, жидкости и типов симметрии движений на закономерности волновых процессов в гидроупругих системах. Эти зависимости получены численно и представлены в виде многочисленных графиков.

2.3.1.3. *Волны в предварительно деформированных упругих цилиндрах, содержащих идеальную сжимаемую жидкость (трехмерная линеаризованная теория).* Частным случаем является также волновой процесс в предварительно напряженных сжимаемых и несжимаемых полых цилиндрах, заполненных идеальной жидкостью. Такая задача в рамках трехмерной линеаризованной теории рассмотрена в работах [5 – 7, 10, 26, 29, 31, 71, 72, 75, 99, 155].

При этом получены дисперсионные уравнения для сжимаемых и несжимаемых полых упругих цилиндров, подверженных большим (конечным) начальным деформациям и заполненным идеальной сжимаемой жидкостью.

2.3.1.3.1. *Сжимаемые упругие тела и идеальная сжимаемая жидкость.* Волновой процесс в предварительно напряженных сжимаемых полых цилиндрах, заполненных идеальной сжимаемой жидкостью, рассмотрен в работах [6, 7, 10, 29, 31, 71, 72, 75, 99, 155]. Исследовано распространение волн как в тонкостенных ($\bar{h} = h/R = 0,05$), так и в толстостенных ($\bar{h} = 0,75$) полых цилиндрах как содержащих, так и не содержащих идеальную сжимаемую жидкость. Рассмотрены цилиндры из жестких сжимаемых материалов типа стали, упругие свойства которых описаны трехинвариантным упругим потенциалом Мурнагана. Показано, что жидкость оказывает заметное влияние на дисперсионную картину, в основном, в случае тонкостенных полых цилиндров. На

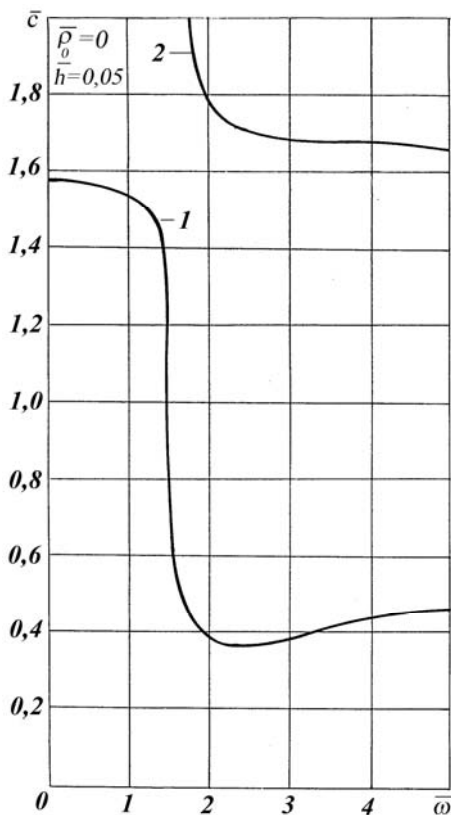


Рис. 2.35

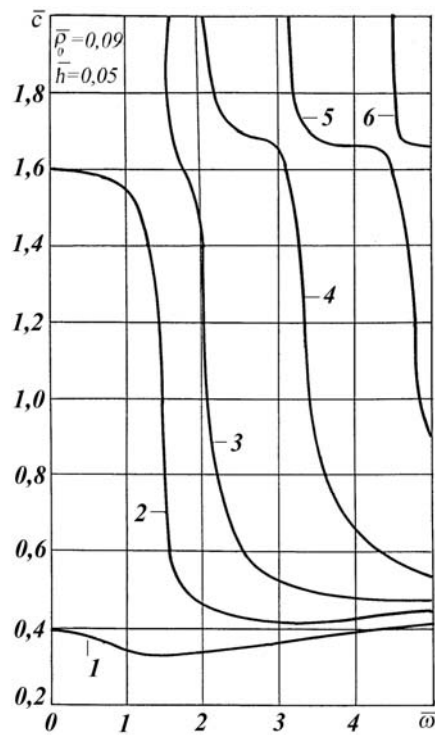


Рис. 2.36

рис. 2.35 и 2.36 приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$, $c_s^2 = \mu/\rho$ – скорость волны сдвига в материале незагруженного тела) от величины безразмерной частоты $\bar{\omega}$ ($\bar{\omega} = \omega R/c_s$) для тонкостенных цилиндров с толщиной $\bar{h} = 0,05$.

При этом на рис. 2.35 представлены дисперсионные кривые для полого цилиндра без жидкости. Сравнение графиков, приведенных на рисунках 2.35 и 2.36, показывает, что наличие жидкости приводит к значительному увеличению количества мод, распространяющихся в гидроупругой системе.

В отличие от жидкости начальные напряжения влияют на величины фазовых скоростей мод как в случае тонкостенных, так и толстостенных цилиндров преимущественно в области частот их зарождения.

Изменение относительных скоростей c_ε различных мод в зависимости от изменения частоты $\bar{\omega}$ в предварительно сжатых ($\bar{\sigma}_{33}^0 = -0,004$) толстостенных полых цилиндрах

толщиной $\bar{h} = 0,75$, заполненных жидкой средой, показано на рис. 2.37 и 2.38. Из графиков следует, что для указанных гидроупругих волноводов, как и в случае цилиндров без жидкости, возможно существование мод определенных номеров и частот, на величины фазовых скоростей которых начальные напряжения не оказывают влияния.

Влияние предварительных деформаций и жидкости на явление «обратной волны» в полом сжимаемом цилиндре, заполненном покоящейся идеальной жидкой средой, исследовано в работах [7, 31, 71, 72, 75, 79].

Как известно [54, 31, 71, 72, 75, 148], «обратной» волной названо волновое движение в упругом теле, распространяющееся с групповой и фазовой скоростями противоположных знаков, по аналогии с модами, имеющими место в определенных электромагнитных волноводах.

Отметим, что впервые возможность возникновения таких волн была обоснована Г. Лэмбом при рассмотрении им волновых процессов в некоторых одномерных средах [182]. Позднее при изучении прохождения волн через кристаллические решетки Л. Мандельштамом [146] было обращено внимание на наличие областей частот, при которых моды распространяются с отрицательной групповой скоростью. В дальнейшем это явление было подробно исследовано в упругих слоях [198], пластинах и сплошных цилиндрах [186]. Возможность распространения нормальных волн с аномальной дисперсией в цилиндре с жидкостью обсуждалась в работах [7, 31, 72, 75, 140].

Отметим, что в приведенных выше работах [54, 146, 182, 186, 198] рассмотрение указанного явления проведено в рамках классической теории упругости без учета влияния начальных напряжений. Вместе с тем, получение количественной информации необходимо для воз-

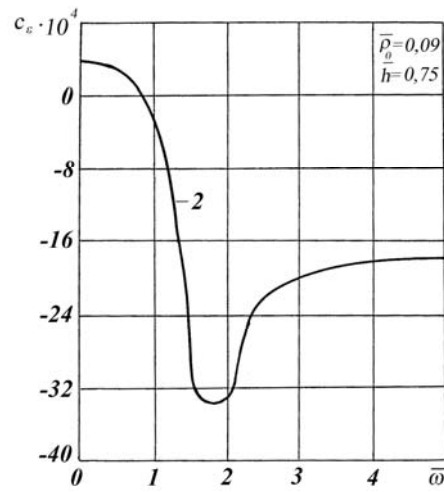


Рис. 2.37

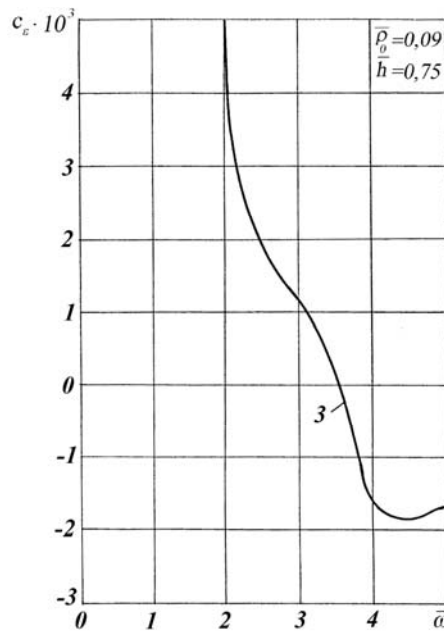


Рис. 2.38

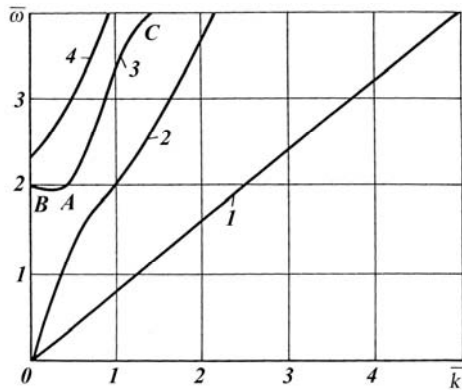


Рис. 2.39

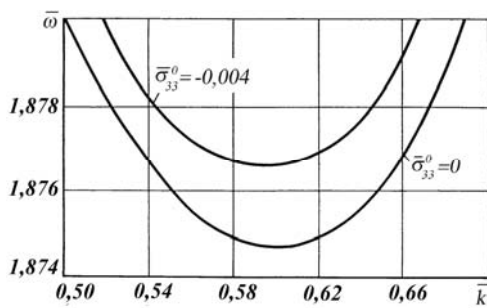


Рис. 2.40

возможности реального продолжения дисперсионных кривых после прохождения ими точек пересечения ветвей различных семейств при изучении частотных спектров, а также при исследовании неустановившихся волновых процессов в волноводах разной структуры, подверженных предварительным деформациям.

С учетом жидкости и начальных напряжений явление «обратной» волны в гидроупругих волноводах исследовано в работах [7, 31, 72, 75].

Результаты численного решения трансцендентного дисперсионного уравнения приведены на рис. 2.39 и рис. 2.40. Здесь представлены зависимости $\bar{\omega} = f(\bar{k})$ для толстостенного полого цилиндра с безразмерной толщиной стенки \bar{h} , равной 0,75, заполненного идеальной сжимаемой жидкостью.

Из графиков, приведенных в указанных работах, а также представленных на рисунках 2.39 и 2.40, следует, что явление «обратной волны» (участок ВА кривой 3 на рис. 2.39) носит пространственный характер и существует только для толсто-

стенных полых цилиндров как содержащих, так и не содержащих жидкость. Установлено, что в тонкостенных полых цилиндрах, заполненных жидкой средой, распространение волн происходит без аномальной дисперсии и явление «обратной волны» для них не наблюдается. Показано (рис. 2.40), что для сжимаемого жесткого полого цилиндра из низколегированной стали марки 09Г2С, упругие свойства материала которой описываются трехинвариантным упругим потенциалом Мурнагана, осевое сжатие ($\bar{\sigma}_{33}^0 = -0,004$) и жидкость повышают величину фазовой скорости «обратной волны».

2.3.1.3.2. Несжимаемые упругие тела и идеальная сжимаемая жидкость. Влияние больших (конечных) начальных деформаций на величины фазовых скоростей осесимметричных продольных волн, распространяющихся в высокоэластичных резиноподобных несжимаемых полых цилиндрах, заполненных покоящейся идеальной сжимаемой жидкостью, исследовано в работах [5, 26, 27, 31, 71, 72].

На рис. 2.41 показаны зависимости $\bar{c} = f(\lambda_3)$ для случая, когда $\bar{h} = h/R = 0,002$, а $\bar{\omega} = \omega R/c_s = 0,1$. Кривая 1 (первая мода) получена для полого цилиндра без жидкости. Линии 2 (вторая мода) и 3 (первая мода) отражают влияние начальных деформаций на величины фазовых скоростей в системе «оболочка – жидкость». Графики, представленные на этом рисунке, соответствуют случаю распространения низкочастотных волн в тонкостенной оболочке, содержащей жидкую среду. Графики на рис. 2.42 получены при

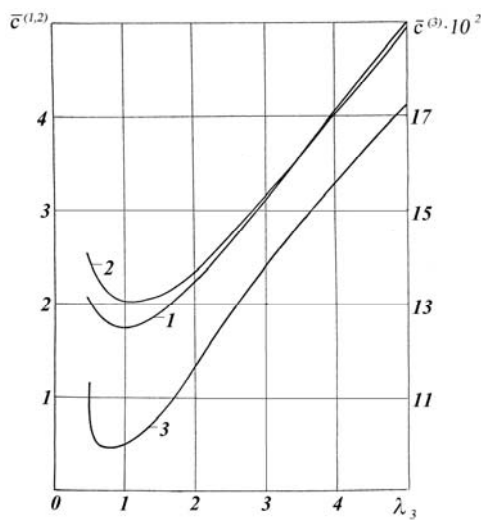


Рис. 2.41

$\bar{\omega} = 18$ и $\bar{h} = 0,1$. Закономерности поведения низших мод (кривые 1 и 2 на рис. 2.42) обусловлены увеличением податливости материала цилиндра при сжатии ($\lambda_3 < 1$) и уменьшением ее при растяжении ($\lambda_3 > 1$). Характер поведения величин фазовых скоростей третьей, четвертой и всех высших мод связан с тем, что при повышении λ_3 происходит снижение частот запираания, приводящее к некоторому уменьшению скоростей осесимметричных продольных волн, а дальнейший рост скоростей вызван уменьшением податливости стенок цилиндра вследствие растяжения.

Из графиков, приведенных в упомянутых работах, а также представленных на рис. 2.41 и 2.42, следует, что начальные деформации оказывают существенное влияние на частоты зарождения мод, а также на величины фазовых скоростей волн в окрестности этих частот.

2.3.1.4. Волны в предварительно напряженных упругих средах с цилиндрическими полостями, содержащими вязкую сжимаемую жидкость (трехмерная линеаризованная теория). Частными случаями являются также волновые процессы в предварительно деформированных сжимаемых и несжимаемых бесконечных телах с цилиндрическими полостями, заполненными вязкой сжимаемой покоящейся жидкостью.

Заметим, что впервые такая задача в более простой постановке (в рамках классической теории упругости и гидродинамики идеальной жидкости) была рассмотрена М.А. Бiot [159].

Указанные задачи в пространственной постановке в рамках трехмерной линеаризованной теории, учитывающей начальные напряжения в упругом теле, а также вязкость и сжимаемость жидкой среды, рассмотрены в работах [31, 72, 75]. Для данных задач получены дисперсионные соотношения, которые для сжимаемых материалов имеют вид

$$\det \| H_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega, R) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}), \quad (2.7)$$

а для несжимаемых –

$$\det \| \tilde{H}_{lm}(c, \gamma, a_{ij}, \mu_{ij}, \lambda_i, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega, R) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 6}). \quad (2.8)$$

Заметим, что эти уравнения являются более общими и из них, как частные случаи, следуют характеристические соотношения, справедливые для более простых волновых процессов и моделей упругих и жидких сред, часть из которых рассмотрена ранее другими исследователями. Дисперсионные уравнения (2.7) и (2.8) решены численно для случая высокочастотных волн.

Влияние начальных напряжений для жидкостей, характеризующихся различной сжимаемостью, иллюстрируют графики на рис. 2.43 и 2.44. Все числовые результаты получены для сжимаемого упругого тела, предварительно растянутого вдоль оси цилиндрической полости oz ($\bar{\sigma}_{33}^0 = \sigma_{33}^0 / \mu = 0,004$). При этом принято, что упругие свойства материала сжимаемого тела описываются трехинвариантным упругим потенциалом Мурнагана.

На рис. 2.43 показаны зависимости относительного изменения величин фазовых скоростей c_ε от безразмерной величины скорости распространения звука в жидкости \bar{a}_0 . Кривая 1 соответствует системе «органическое стекло – вода», а 2 – «оргстекло – глицерин».

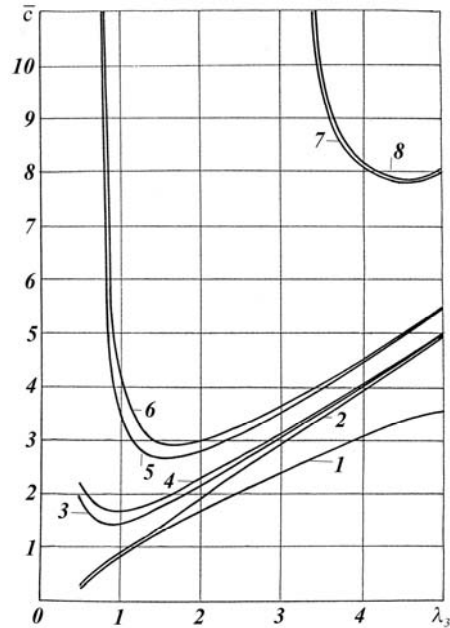


Рис. 2.42

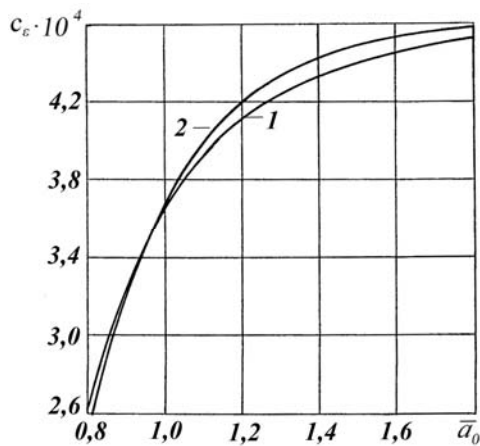


Рис. 2.43

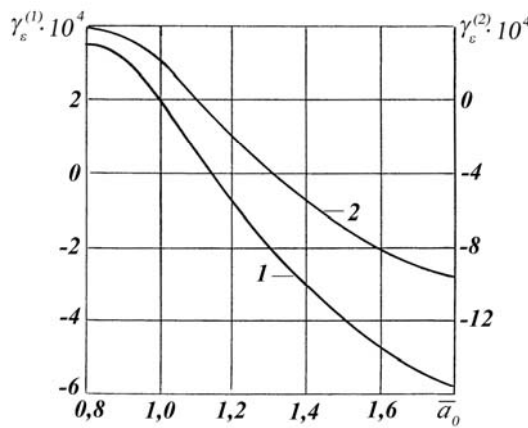


Рис. 2.44

Зависимости относительных изменений коэффициентов затухания γ_ε [$\gamma_\varepsilon = (\gamma_\sigma - \gamma) / \gamma$] от безразмерной скорости звука в жидкости \bar{a}_0 показаны на рис. 2.44. Здесь левая ось ординат соответствует системе «органическое стекло – вода» (кривая 1), а правая – системе «оргстекло – глицерин» (кривая 2). Из графиков, изображенных на рис. 2.43 и 2.44, видно, что с уменьшением сжимаемости жидкой среды влияние начальных напряжений возрастает. Это соответствует соображениям физического характера. Для глицерина это влияние более значительное, чем для воды. Кроме того, наличие точек пересечения графиков с осью абсцисс (рис. 2.44) показывает, что в гидроупругих волноводах указанной структуры возможно, при определенных значениях сжимаемости жидкости, существование волн, величины коэффициентов затухания которых не зависят от начальных напряжений.

Результаты вычислений, приведенные в указанных работах, отражают влияние сжимаемости и вязкости жидкости на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания высокочастотных волн. Из них следует, что уменьшение сжимаемости жидкой среды приводит к увеличению фазовой скорости и снижению величин коэффициентов затухания высокочастотных волн.

Решение дисперсионного уравнения (2.8) для гидроупругого волновода из несжимаемого материала в случае высокочастотных волн также осуществлялось численно. При этом расчеты проведены для высокоэластичного резиноподобного тела, упругие свойства которого описывались упругим потенциалом Трелоара. Параметры сред выбирали следующими: упругое тело – $E = 2,5 \cdot 10^6$ Па, $\rho = 1200$ кг/м³; жидкость – $\rho_0 = 1000$ кг/м³, $a_0 = 1459,5$ м/с, $\bar{\mu}^* = 0,00002$. Результаты вычислений представлены на рис. 2.45 и 2.46. Графики, приведенные на рис. 2.45, отражают влияние предварительного сжатия на величину фазовой скорости \bar{c} высокочастотной волны. Для сравнения на этом рисунке представлена кривая высокочастотной квазирэлеевской волны, обозначенная \bar{c}_R , полученная для полости, не содержащей жидкость.

В работах исследовано также влияние больших (конечных) предварительных деформаций на коэффициенты затухания высокочастотных волн. Из анализа, полученных результатов (рис. 2.46), следует, что при сжатиях, близких к потере поверхностной устойчивости упругих тел, происходит значительное возрастание величины коэффициента затухания волн.

Из графиков, приведенных на рис. 2.45, следует, что при сжатии и λ_3 равном 0,44, величины фазовых скоростей высокочастотных волн как в чисто упругом, так и в гидроупругом волноводе, обращаются в нуль. Это свидетельствует о том, что для высокоэластичных несжимаемых неогуковских тел как взаимодействующих, так и невзаимо-

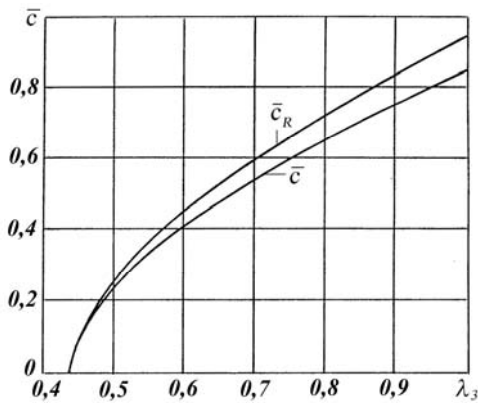


Рис. 2.45

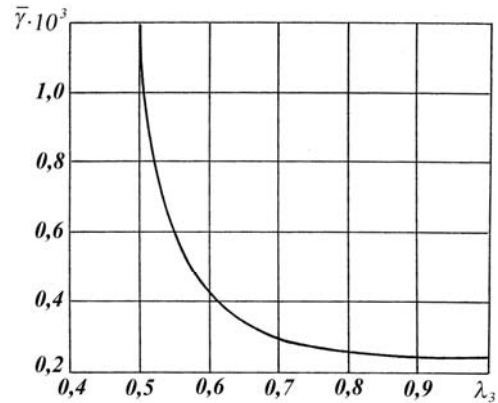


Рис. 2.46

действующих с жидкостью, в условиях пространственного напряженно-деформированного начального состояния явление поверхностной неустойчивости возникает при осевом сжатии и λ_3 равном 0,44. Кроме того, сравнительный анализ для плоского и пространственного случаев показывает, что поверхностная неустойчивость при одноосном сжатии для пространственных волноводов возникает при более сильных начальных деформациях ($\lambda_3 \approx 0,44$), чем для плоских тел ($\lambda_1 \approx 0,54$). Заметим, что указанные значения λ_1 и λ_3 совпадают с ранее полученными в теории трехмерной устойчивости и соответствуют величинам параметров критического укорочения [55, 56, 61, 69, 70]. Это свидетельствует о том, что развитая трехмерная линеаризованная теория волн применительно к высокоэластичным несжимаемым упругим телам позволяет как в плоском, так и в пространственных случаях, определять значения параметров критического укорочения, при которых возникает явление поверхностной неустойчивости упругих тел и гидроупругих систем.

2.3.1.5. Волны в предварительно напряженном сплошном цилиндре, находящемся в вязкой сжимаемой жидкости (трехмерная линеаризованная теория). С использованием представлений общих решений задач аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями в рамках трехмерной линеаризованной теории в работах [62, 63, 66, 72, 75] рассмотрена внешняя волновая задача.

2.3.1.5.1. Волны кручения в круговом цилиндре, находящемся в вязкой сжимаемой жидкости (трехмерная линеаризованная теория). Анализ закономерностей распространения крутильных мод в сплошном круговом цилиндре, помещенном в вязкую сжимаемую покоящуюся жидкую среду, посвящены работы [62, 63, 66, 72, 75].

Определяя решения в классе бегущих волн вида $\chi_1 = AZ_0(\eta_1 r) \exp[i(kz_3 - \omega t)]$; $\varphi = BJ_0(\xi_1 r) \exp[i(kz_3 - \omega t)]$, где J_0 – функция Бесселя I рода нулевого порядка; $H_0^{(1,2)}$ – функции Ханкеля; $Z_0(\eta_1 r) \equiv H_0^{(1)}(\eta_1 r)$ при $\text{Im } \eta_1 > 0$ и $Z_0(\eta_1 r) \equiv H_0^{(2)}(\eta_1 r)$ при $\text{Im } \eta_1 < 0$, в результате обычной процедуры после ряда преобразований получено следующее дисперсионное соотношение:

$$\alpha_1 \beta_1 [i\omega \mu^* \beta_1 Z_2(\beta_1) J_1(\alpha_1) + \lambda_3^{-1} \lambda_1^2 \mu_{12} \alpha_1 J_2(\alpha_1) Z_1(\beta_1)] = 0. \quad (2.9)$$

Здесь введены обозначения: $\alpha_1 = \xi_1 R$; $\beta_1 = \eta_1 R$.

В работах [62, 63, 72, 75] уделено внимание рассмотрению частных случаев, которые следуют из общей постановки. При этом подробно рассмотрены следующие частные случаи.

Цилиндр в вакууме. Для указанной задачи получено дисперсионное уравнение, которое для $\varepsilon \ll 1$ имеет вид

$$\lambda_3^{-1} \lambda_1^2 \mu_{12} \alpha_1^* J_2(\alpha_1^*) = 0. \quad (2.10)$$

Обозначив через α_m m -й – корень уравнения $J_2(\alpha_m) = 0$, после ряда преобразований для определения фазовой скорости распространения m -й моды кручения в цилиндре, находящемся в вакууме, получено следующее аналитическое выражение: $c_m = c_s \omega R (R^2 \omega^2 - \alpha_m^2 \lambda_1^4 \rho^{-1} \mu_{12})^{-1/2}$.

Цилиндр в жидкости (приближенное решение). Учитывая разложение в ряд функций Бесселя I рода в виде $J_n(\alpha_1^*) = (\alpha_1^*/2)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} (\alpha_1^*/2)^{2k}$ были получены следующие аналитические выражения для фазовой скорости и коэффициента затухания:

$$c_1 \approx c_s \left(1 - (\rho_0/\rho) \sqrt{2} \varepsilon \lambda_3 \lambda_1^2\right); \quad \gamma_1 \approx \sqrt{2} \varepsilon \lambda_3 \lambda_1^2 \frac{\omega \rho_0}{c_s \rho}. \quad (2.11)$$

Цилиндр в жидкости (более строгое решение). Решение в виде (2.11) получено в результате разложения функций Бесселя, входящих в дисперсионное соотношение (2.9), в ряды, ограничиваясь при этом только первыми членами. Таким способом определено лишь одно значение скорости, хотя уравнение (2.9) дает возможность определять скорости всех мод, как это видно на примере волнового процесса в цилиндре, находящемся в вакууме (2.10). В работах [63, 72, 75] получены аналитические выражения для определения величин фазовой скорости и коэффициента затухания m -й моды, которые имеют вид

$$c_m \approx c_s D \left(1 - \frac{\varepsilon \rho_0 \lambda_3 \lambda_1^2}{\sqrt{2} \rho} \frac{J_1(\alpha_m)}{J_2(\alpha_m)} D\right); \quad \gamma_m \approx \frac{\varepsilon \omega \rho_0 \lambda_3 \lambda_1^2}{\sqrt{2} c_s} \frac{J_1^*(\alpha_m)}{J_2(\alpha_m)}.$$

2.3.1.5.2. *Продольные волны в предварительно напряженном сплошном цилиндре, находящемся в идеальной жидкости.* Закономерности распространения осесимметричных продольных мод в несжимаемом сплошном цилиндре, подверженном начальному деформациям и погруженным в идеальную сжимаемую жидкую среду, исследовались в работах [32, 75]. Для цилиндра, загруженного вдоль оси oz , было получено следующее дисперсионное соотношение:

$$\det \|c_{ij}\| = 0 \quad (i, j = \overline{1, 3}). \quad (2.12)$$

Решение уравнения (2.12) осуществлялось численно. При этом предполагалось, что упругие свойства высокоэластичного, резиноподобного, несжимаемого материала описаны упругим потенциалом Трелоара. Получены зависимости безразмерной величины фазовой скорости \bar{c} от безразмерной величины частоты $\bar{\omega}$ для предварительно сжатого ($\lambda_3 = 0,8$) и растянутого ($\lambda_3 = 1,5$) цилиндров. Исследовано также влияние больших (конечных) начальных деформаций на величины фазовых скоростей волн различной длины. При этом показано, что для волн с частотой близкой к частоте зарождения, характерно увеличение значений фазовых скоростей как при сжатии ($\lambda_3 < 1$), так и растяжении ($\lambda_3 > 1$) высокоэластичного цилиндра. Моды, распространяющиеся с частотами, значительно отличающимися от критических, имеют иную закономерность изменения величины фазовой скорости от начальной деформации. Для них характерно уменьшение скорости при сжатии ($\lambda_3 < 1$) и рост ее при растяжении ($\lambda_3 > 1$). Показано, что жидкая среда понижает величины фазовых скоростей мод.

Заметим также, что обзор исследований распространения различных типов волн в предварительно деформированных упругих телах, взаимодействующих с жидкостью, выполненных с привлечением линеаризированной теории, приведен в [3, 59, 71, 72, 79].

Анализ и систематизация многочисленных результатов, полученных также по ряду других направлений, охватывающих широкий спектр теоретических и экспериментальных исследований особенностей влияния начальных напряжений на поведение упругих тел, выполнены в обзорных статьях [3, 59, 168, 170, 173].

Отметим, что в этом разделе рассмотрены лишь некоторые результаты исследований волновых процессов в гидроупругих системах. При отборе материала отдавалось предпочтение только тем, которые были получены в рамках трехмерной линеаризованной теории и учитывали наличие начальных напряжений в упругих телах, а также вязкость и сжимаемость жидкой среды.

3. Действие давления звукового излучения в жидкости на твердые и жидкие частицы.

Исследования при распространении звуковой волны в жидкости движения и взаимодействия твердых частиц, а также капель жидкости с другими свойствами, имеют как теоретическое, так и прикладное значение. Эти исследования проводились по следующим трем направлениям: одиночная частица в жидкости под действием акустического давления; взаимодействие двух частиц в жидкости, обусловленное распространяющейся волной; движение совокупности большого числа частиц при колебаниях несущей среды. В последнем случае использованы многофазные подходы [47]. Выполненные по этим направлениям исследования и обзоры с анализом методов и полученных результатов приведены в работах [2, 40, 47, 147, 152 и др.].

Следует отметить, что определенный технологический интерес представляет изучение движения твердых частиц и капель жидкости под действием постоянного во времени радиационного давления [147, 152], называемого также давлением звукового излучения. Вычисление радиационной силы, обусловленной действующим на препятствие давлением акустического излучения, усложняется в случае препятствия конечных размеров. В связи с тем, что давление акустического излучения определяется звуковым полем, сформированным в результате интерференции первичной и рассеянной волн, оно зависит от формы препятствия – для определения отраженной от препятствия волны необходимо решить задачу о рассеянии падающей волны на препятствии. При ее решении необходимо принимать во внимание ряд обстоятельств: перемещение частицы, колеблющейся под действием акустической волны; форму частицы и ее размеры по сравнению с длиной волны; свойства среды и границы пространства, в котором волна распространяется, а также ряд других условий. В связи с этим при решении указанной задачи исследователями вводились различные упрощающие задачи ограничения: предположение о нетеплопроводности жидкости, о малых линейных размерах частицы по сравнению с длиной волны и величиной ее амплитуды, использование модели несжимаемой жидкости и другие.

Принимаемые при исследовании указанные ограничения позволяют использовать различные подходы, которые упрощают решение задачи рассеяния на частице падающей звуковой волны и последующее вычисление действующей на нее гидродинамической силы [139]. Постоянная составляющая гидродинамической силы (сила радиационного давления) вычисляется усреднением ее по периоду волны.

Результаты одного из первых исследований действия радиационной силы на сферическую частицу в идеальной жидкости опубликованы в работе [180], в которой приведены формулы для вычисления радиационных сил, действующих на сферу в поле стоячей и бегущей плоских звуковых волн. В работе установлено, что радиационная сила в поле стоячей звуковой волны имеет пространственную периодичность с периодом, равным длине полуволны, и по величине больше, чем в случае бегущей волны. Выражение для радиационной силы было использовано при составлении уравнения дрейфа малой сферы в поле стоячей волны. На основе решения этого уравнения исследован характер движения частицы.

Для вычисления давления в звуковой волне с точностью до квадратичных слагаемых используется также обобщенный интеграл Бернулли [200, 1]. Радиационная сила представлена интегралом по поверхности сферической частицы от давления, среднего по периоду звукового поля.

В ряде работ [144, 199] применен метод, при котором величина радиационной силы определяется из условия, что эта сила равна среднему по времени потоку импульса через замкнутую поверхность, окружающую частицу. Возможность выбора поверхности, окружающей сферическую частицу, на произвольно большом расстоянии от ее центра (рассмотрена идеальная жидкость), позволила авторам отказаться от решения задачи рассеяния, воспользовавшись асимптотическими выражениями для рассеянной

волны. Аналогичный подход для вычисления радиационной силы, действующей на сферическую частицу в идеальной жидкости был использован в работах [136, 154, 195 и др.]. В более общей постановке (с учетом сжимаемости частицы) эта же задача рассмотрена в работах [50, 184] для произвольного акустического поля. В этих работах потенциал рассеянной на сфере волны представлен в виде ряда по мультиполям, а коэффициенты в разложении определены из решения задачи потенциального обтекания сферы потоком несжимаемой жидкости.

Метод определения радиационной силы, основанный на вычислении среднего во времени импульса, обобщен в [104, 199, 165] на случай вязкой жидкости. Радиационная сила принята равной интегралу от усредненного по периоду волны тензора плотности потока импульса, взятому по произвольной поверхности, охватывающей частицу. Вычисление средней силы проведено в квадратичном приближении для случая твердой закрепленной сферической частицы, малого по сравнению с длиной волны радиуса. Авторы установили, что учет вязкости приводит к значительному увеличению силы радиационного давления на частицу.

В работе [102] при вычислении радиационной силы, действующей на закрепленную сферическую частицу, учтено акустическое течение, развивающееся около частицы в акустических полях большой интенсивности и оказывающее влияние на величину радиационной силы. В связи с этим автор предложил различать понятия «средняя во времени» и «радиационная» сила. Для вычисления средней во времени силы применялся метод, основанный на определении полного потока импульса через достаточно удаленную замкнутую поверхность, окружающую сферическую частицу. Решение задачи проведено в квадратичном приближении для случая сферической частицы, малого по сравнению с длиной волны радиуса.

Авторам известна только одна работа [141], в которой исследование взаимодействия двух частиц проведено на основе радиационных сил. В работе рассмотрена система из двух неподвижных близкорасположенных в идеальной жидкости частиц, размеры и расстояние между которыми приняты малыми по сравнению с длиной волны. Для определения возмущения давления в жидкости использован обобщенный интеграл Бернулли. При этом рассеяние предполагалось однократным и волновое поле в окрестности частицы представлено как суперпозиция первичной волны без учета соседней частицы и волны, рассеянной на соседней частице. К определению этой волны фактически и была сведена задача. Потенциал рассеянного поля представлен в виде ряда по сферическим волновым функциям, в котором сохранены только первые три слагаемые. Постоянные коэффициенты в разложении определены из граничных условий на поверхностях сфер. Для записи потенциалов на поверхностях сфер использованы разложения их в ряды Тейлора в окрестности центров сфер.

Продолжающиеся на протяжении многих лет публикации в научных изданиях работ по данной тематике [44, 103, 138, 156 – 158, 167, 178, 185 – 190, 196 и др.] свидетельствуют о неослабевающем интересе исследователей к ней. Цель данного обзора – представить работы, выполненные в Институте механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, посвященные исследованиям радиационных сил, в которых используется модель кусочно-однородной среды при строгом удовлетворении всем граничным условиям. При этом учитываются инерционные члены в уравнениях движения среды, используется модель сжимаемой жидкости, а длины волн могут быть сопоставимы с расстояниями между объектами в жидкости и размерами самих объектов.

3.1. Вязкая жидкость. Постановка задач и основные соотношения. В настоящем разделе приведены основные соотношения, используемые при исследовании действия давления акустического излучения на твердые и гибкие частицы в сжимаемой вязкой жидкости при распространении акустической волны. Используется подход, при котором постоянная во времени (радиационная) сила, действующая в акустическом поле на объект в жидкости, отфильтровывается осреднением по времени результирующей силы, обусловленной действием жидкости на объект. В связи с этим при вычислении напряжений в жидкости необходимо принимать во внимание величины второго порядка малости относительно параметров звукового поля, не обращающиеся в нуль при осреднении по времени, т. е. исходить из нелинейных соотношений гидромеханики. В работах [85, 86, 108] предложен метод вычисления акусти-

ческого давления в сжимаемой вязкой жидкости с точностью до слагаемых величин второго порядка относительно числа Маха, исходя из потенциала поля скоростей, определенного из уравнений, полученных с такой же точностью из нелинейных соотношений гидродинамики. При этом упрощение нелинейных соотношений проведено применительно к волновым движениям жидкости в предположении, что возмущения слабо затухают на расстояниях порядка длины волны и величины диссипативных коэффициентов имеют порядок амплитуд относительных возмущений давления и плотности [150]. В результате полученное с точностью до слагаемых второго порядка соотношение для вычисления возмущений давления в сжимаемой вязкой жидкости при прохождении акустической волны [85] имеет следующий вид:

$$p = \rho_0 \left(\frac{\lambda^* + 2\mu^*}{\rho_0} \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \Phi)^2 - \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{a_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta \Phi, \quad (3.1)$$

где ρ_0 – плотность жидкости в состоянии равновесия; μ^* и λ^* – динамический и кинематический коэффициенты вязкости; a_0 – адиабатическая скорость звука, а полученное с той же точностью уравнение для определения потенциала Φ имеет такой вид:

$$\left[\left(1 + \frac{\lambda^* + 2\mu^*}{a_0^2 \rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \Phi = 0. \quad (3.2)$$

Полученное уравнение (3.2) совпадает с соответствующим уравнением линеаризованной теории сжимаемой вязкой жидкости (1.13). Наличие в жидкости, в которой распространяется акустическая волна, твердого тела приводит за счет отраженных волн к появлению дополнительного волнового поля. В вязкой жидкости оно имеет потенциальную и вихревую компоненты. Искомое напряжение в жидкости определяется волновым полем, представляющим интерференцию известной первичной и неизвестных рассеянных на теле волн. Потенциалы этих волн определяются из решения задачи рассеяния первичной волны на теле (частице). Так как потенциал Φ первичной волны удовлетворяет линейному уравнению (3.2), для определения потенциалов рассеянных волн достаточно ограничиться решением линейной дифракционной задачи рассеяния, воспользовавшись линеаризованной теорией сжимаемой вязкой жидкости [171]. В этой теории потенциалы Φ и Ψ , описывающие движение жидкости, являются решениями уравнений (1.13) и (1.14). Потенциалы используются для вычисления поля скоростей \mathbf{v} (1.10) и поля тензора напряжений $\hat{\sigma}$ (1.8).

В математической постановке задача рассеяния состоит в получении решений уравнений (1.13) и (1.14), удовлетворяющих граничным условиям на поверхности S объекта в жидкости

$$\mathbf{V}_S = \mathbf{v} \quad (3.3)$$

и условиям на бесконечности. Для вычисления скорости \mathbf{V}_S точек поверхности S объекта применен метод составления уравнений его движения в жидкости (1.17), при котором используется теорема о движении центра масс и теорема моментов относительно подвижного центра. В соответствии с линеаризованной теорией [64, 67, 75, 76] давление в жидкости в этом случае вычисляется по формуле (1.11), а сила, действующая на объект в жидкости, равна поверхностному интегралу от внутреннего произведения тензора напряжений (1.8) и орта нормали \mathbf{N} к поверхности S объекта, т.е.

$$\mathbf{F} = \iint_S \hat{\sigma} \cdot \mathbf{N} dS. \quad (3.4)$$

Определением потенциалов поля скоростей с использованием линеаризованной теории сжимаемой вязкой жидкости завершается первый этап решения задачи. На втором этапе решения задачи вычисляется с точностью до величин второго порядка

сила, действующая на объект в жидкости (3.4). При этом давление p в выражении для тензора напряжений $\hat{\sigma}$ (1.8) необходимо вычислять теперь по формуле (3.1). Постоянное во времени слагаемое силы \mathbf{F} (радиационная сила) определяется усреднением ее за период звукового поля.

При вычислении средней силы в случае свободного объекта учитывается его перемещение в колебательном движении в жидкости, так как учет изменения положения объекта в пространстве приводит к появлению в (3.1) слагаемых, имеющих такой же порядок, какой имеют второе, третье и четвертое слагаемые. Это связано с тем, что частную производную по времени от скалярного потенциала Φ необходимо вычислять в неподвижной системе координат, относительно которой рассматривается движение объекта при определении потенциала поля скоростей. В системе координат, связанной (из-за необходимости удовлетворять граничным условиям) с движущимся объектом, эту производную необходимо вычислять по формуле [108]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt} - \mathbf{V}_S \cdot \nabla \Phi. \quad (3.5)$$

Завершающим этапом исследования является изучение движения объекта в жидкости под действием постоянной (радиационной) силы.

В работе [118] установлена аналогия между задачей о малых гармонических колебаниях сжимаемой вязкой жидкости, описываемых линеаризованной теорией, и задачей о стационарном состоянии гармонических колебаний линейного вязкоупругого твердого тела [42] (другая интересная аналогия установлена в [68]). На основе этой аналогии задача рассеяния первичной волны в сжимаемой вязкой жидкости может быть сформулирована как задача рассеяния изотермической волны в линейном вязкоупругом твердом теле. Это обстоятельство позволило при определении потенциалов поля скоростей в сжимаемой вязкой жидкости воспользоваться подходами, разработанными в механике деформируемого твердого тела [84] для решения задач дифракции упругих волн в многосвязных телах.

В математической постановке задача дифракции в этом случае сведена к поиску решения уравнений

$$\Delta L + \alpha^2 L = 0; \quad \Delta \mathbf{X} + \beta^2 \mathbf{X} = 0, \quad (3.6)$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad (3.7)$$

и условиям на бесконечности. Вектор \mathbf{u} поля смещений в твердом теле удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{u} = \nabla L + \nabla \times \mathbf{X}, \quad \nabla \cdot \mathbf{X} = 0, \quad (3.8)$$

а \mathbf{U} – вектор смещения точек поверхности S жесткого тела (объекта в жидкости). В (3.6) α и β – комплексные волновые числа

$$\alpha = \omega \sqrt{\rho_0 / [\lambda^*(i\omega) + 2\mu^*(i\omega)]}; \quad \text{Im } \alpha^2 > 0; \quad \beta = \omega \sqrt{\rho_0 / \mu^*(i\omega)}; \quad \text{Im } \beta^2 > 0.$$

Здесь $\lambda^*(i\omega)$ и $\mu^*(i\omega)$ – комплексные модули [42, 142].

При решении задач дифракции компоненты тензора напряжений определяются соотношениями

$$\sigma_{ij}(x_k, t) = \delta_{ij} \lambda^*(i\omega) \varepsilon_{mn}(x_k, t) + 2\mu^*(i\omega) \varepsilon_{ij}(x_k, t), \quad (3.9)$$

которые используются при составлении уравнений движения жесткого тела в вязкоупругой твердой среде

$$m \ddot{\mathbf{U}} = \iint_S \sigma_{ij} N_j dS. \quad (3.10)$$

Переход к потенциалам поля скоростей в сжимаемой вязкой жидкости определяется следующими соотношениями:

$$\Phi = \frac{\partial L}{\partial t}, \quad \Psi = \frac{\partial X}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Предложенные подходы использованы для решения конкретных задач [94, 95].

3.2. Действие радиационной силы на одиночный объект в вязкой жидкости.

В основном исследованы случаи действия радиационных сил на одиночные объекты, находящиеся в поле плоской акустической волны

$$\Phi_0 = A \exp[i(kx_3 - \omega t)], \quad (3.12)$$

распространяющейся вдоль оси ox_3 выбранной системы координат $ox_1x_2x_3$. В качестве объектов, находящихся в вязкой жидкости, рассмотрены цилиндр и сфера, соответственно цилиндрически и сферически изотропные, и сферическая капля жидкости с отличными от окружающей жидкости свойствами. В случае цилиндра направление распространения волны принималось перпендикулярным к оси цилиндра. При определении потенциалов поля скоростей постановка задачи рассеяния первичной волны на свободном объекте в жидкости формулировалась как в рамках линеаризированной теории сжимаемой вязкой жидкости [87, 108, 109, 115, 175], так и на основе теории линейной вязкоупругости [118, 121, 125]. Затухание волны учитывалось введением комплексного волнового числа $\kappa = k + ik_1$.

Случай свободной сферической частицы изучен в работах [87, 108, 109, 175]. Потенциалы отраженных от сферы волн, являющиеся решениями уравнений движения вязкой жидкости, представлены обобщенными рядами Фурье по сферическим волновым функциям. Коэффициенты в разложениях в ряды определены из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничным условиям на поверхности свободной сферы. Вычисление радиационной силы проведено как в длинноволновом приближении [87, 108, 109, 175], так и на основе строгих решений [125], полученных с помощью компьютера. В длинноволновом приближении ($\alpha = ka \ll 1$) использованы асимптотические представления для сферических функций малого аргумента, а жидкость принималась маловязкой ($\varepsilon = \left[\frac{\sqrt{\mu^*}}{a^2 \rho_0 \omega} \right] \ll 1$), в результате для вычисления радиационной силы, действующей на сферу радиуса a , получено следующее соотношение:

$$\langle F_w \rangle = \langle F_{id} \rangle + \varepsilon \cdot 2\sqrt{2}\pi\rho_0 f(\eta) \alpha^3; \quad f(\eta) = \frac{13\eta^2 - 14\eta + 1}{(2 + \eta)^2}, \quad (3.13)$$

в котором первое слагаемое равно радиационной силе, приведенной в [180] для случая сферы в идеальной жидкости

$$\langle F_{id} \rangle = 2A^2\pi\rho_0 \frac{1 + \frac{2}{9}(1 - \eta)^2}{(2 + \eta)^2} \alpha^6. \quad (3.14)$$

Второе слагаемое в (3.13) учитывает влияние вязкости на величину радиационной силы. При выводе выражения (3.13) принят только первый член в разложениях по параметру ε , поэтому влияние вязкости на среднюю силу удалось охарактеризовать отношением η . Параметр η имеет критическое значение $\eta_{кр} = 5/11$, при котором учет вяз-

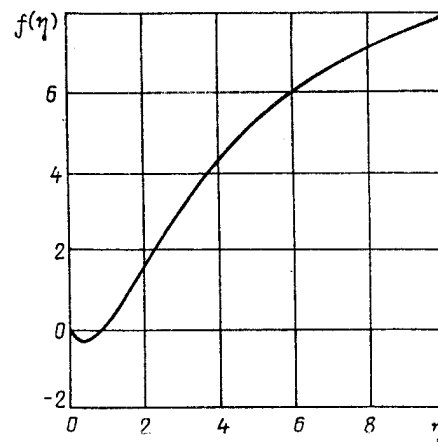


Рис. 3.1

кости максимально уменьшает радиационную силу (рис. 3.1). Существуют значения η , при которых учет вязкости не оказывает влияния на величину этой силы.

Характер воздействия акустической волны на сферу в пропаноле ($\rho_0 = 785,4 \text{ кг/м}^3$, $a_0 = 1247 \text{ м/с}$), исследованный на основе результатов численных расчетов, показан на рис. 3.2 и 3.3. На рис. 3.2 результаты расчетов приведены для жидкости без учета ($1 - \mu^* = 0$) и с учетом вязкости ($2 - \mu^* = 0,004 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$), а на рис. 3.3 – для жидкости с различными значениями динамического коэффициента вязкости ($1 - \mu^* = 0,0046 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$); ($2 - \mu^* = 0,00239 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$). При этом плотность потока энергии принята равной $I = 175,5 \text{ Вт/м}^2$, что соответствует умеренной мощности излучателя. Учет вязкости приводит к значительному увеличению радиационной силы. В отличие от случая идеальной жидкости [180] направление ее действия на сферу в вязкой жидкости зависит от параметра $\eta = \rho_0/\rho$ и может как совпадать с направлением распространения волны ($\eta = 1,2$), так и быть ему противоположным ($\eta = 0,8$). Аналогичное явление наблюдается при падении звукового луча на границу раздела двух жидкостей. Направление прогиба поверхности раздела, обусловленное действием радиационной силы, не зависит от направления распространения луча, а всегда направлено в сторону жидкости, имеющей меньшую плотность акустической энергии [48].

Задача о действии в сжимаемой вязкой жидкости радиационной силы на сферическую каплю идеальной жидкости рассмотрена в работе [96]. Наличие в вязкой жидкости капли жидкости с другими свойствами является причиной появления дополнительного (отраженного от капли) волнового поля, которое имеет потенциальную и вихревую компоненты. Первый этап предполагает для определения потенциалов дополнительного волнового поля решение линейной задачи рассеяния волны (3.12) на жидкой сфере.

В рассматриваемой осесимметричной задаче потенциалы потенциальной Φ_d и вихревой Ψ_d компонент дополнительного волнового поля удовлетворяют уравнениям линеаризованной теории сжимаемой вязкой жидкости (1.13) и (1.14). Потенциал скорости жидкости в капле $\bar{\Phi}$ удовлетворяет уравнению (акустическое приближение)

$$\Delta \bar{\Phi} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.15)$$

Под действием падающей волны жидкая сфера испытывает периодические сжатия и разрежения. При формулировке граничных условий на поверхности сферы предполагается, что амплитуда колебаний поверхности капли очень мала, поэтому можно принять радиус капли $a = \text{const}$

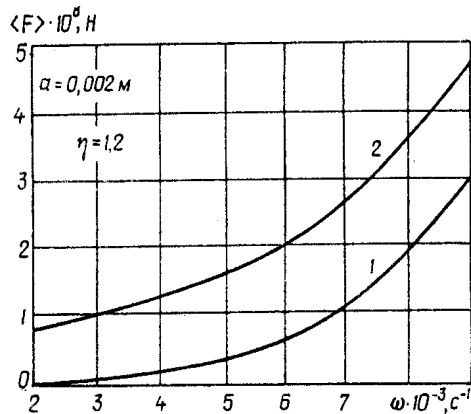


Рис. 3.2

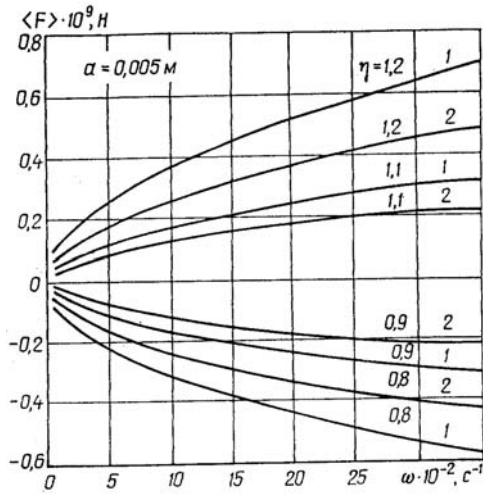


Рис. 3.3

(для жидкой сферы такое предположение оправдано). Также не будем учитывать влияние на сферу давления поверхностного натяжения. Тогда граничные условия на поверхности жидкой сферы можно сформулировать следующим образом. При переходе через поверхность сферы нормальные составляющие скорости жидкостей и нормальные напряжения в жидкостях являются непрерывными величинами, а касательные напряжения равны нулю. На бесконечности потенциалы рассеянных волн удовлетворяют условиям излучения Зоммерфельда. Внутри капли волновые возмущения жидкости ограничены.

Определение потенциалов полей скорости во внешней вязкой жидкости Φ_d , Ψ_d и $\bar{\Phi}$ в идеальной жидкости капли состоит в получении решений многосвязной задачи для уравнений (1.13), (1.14) и (3.15), удовлетворяющих граничным условиям, заданным на поверхности жидкой сферы, на бесконечности и в центре сферы. Решения уравнений получены методом разделения переменных в сферической системе координат в виде обобщенных рядов Фурье по сферическим волновым функциям. Коэффициенты в разложениях потенциалов в ряды определены методом редукции из бесконечной системы алгебраических уравнений, полученной при удовлетворении граничным условиям.

На втором и третьем этапах решения задачи рассматривался случай жидкости малой вязкости. Радиационная сила вычислена осреднением по периоду первичной волны гидродинамической силы

$$F_{x_3} = \iint_S \mathbf{e}_3 \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi a^2 \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{\theta r} \sin \theta) \sin \theta d\theta, \quad (3.16)$$

действующей со стороны внешней вязкой жидкости на сферическую каплю идеальной жидкости вдоль оси ox_3 . В (3.16) \mathbf{n} – единичная нормаль к поверхности S жидкой сферы. На поверхности жидкой сферы компонента $\sigma_{\theta r}$ тензора напряжений $\hat{\sigma}$ (3.16) равна нулю. При этом в выражении для тензора напряжений (1.8) давление p следует определять с точностью до слагаемых второго порядка из соотношения (3.1).

Задача о действии радиационной (средней) силы на свободный твердый цилиндр исследована в [115, 121, 176]. Потенциалы отраженных от цилиндра волн, являющиеся решениями линеаризованных уравнений движения вязкой жидкости, представлены обобщенными рядами Фурье по цилиндрическим волновым функциям. Коэффициенты в разложениях в ряды определены из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничным условиям на поверхности цилиндра, методом редукции. Решение задачи получено как в длинноволновом приближении для слабовязкой жидкости [115], так и на основе строгих решений [121], требующих применения компьютера. В первом случае использованы асимптотические представления цилиндрических функций для малых значений аргумента. Радиационная сила, действующая на длине цилиндра, равной его радиусу, представляется выражением

$$\langle F_w \rangle = \langle F_{id} \rangle + \varepsilon \pi \rho_0 A^2 \frac{\sqrt{2}}{4} \varphi(\eta) \alpha^3; \quad \varphi(\eta) = \frac{1 - 8\eta + 7\eta^2}{(1 + \eta)^2}, \quad (3.17)$$

где $\langle F_{id} \rangle$ равно радиационной силе, действующей на цилиндр в идеальной жидкости. Функция $\varphi(\eta)$ характеризует влияние параметра η на величину средней силы. Ее график представлен на рис. 3.4. Как и в случае сферы с увеличением значения η учет вязкости приводит к увеличению средней силы для цилиндра,

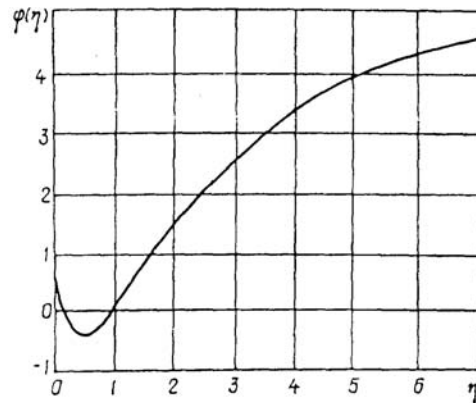


Рис. 3.4

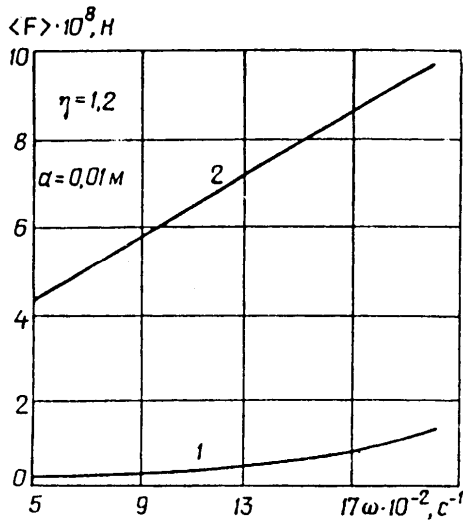


Рис. 3.5

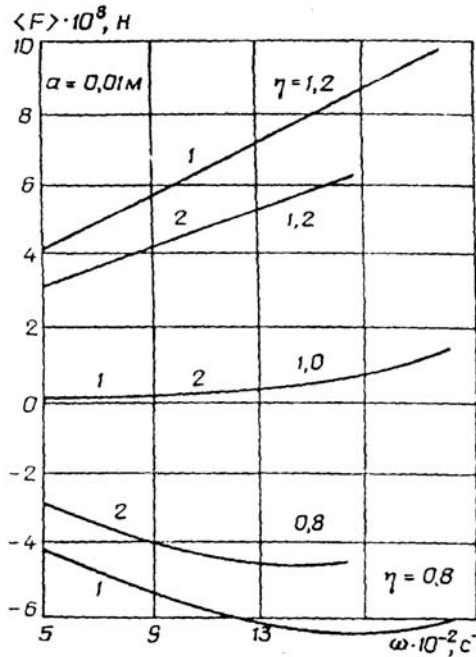


Рис. 3.6

который легче жидкости. Для цилиндра, который тяжелее жидкости, существует критическое значение параметра η , которое совпадает с его критическим значением $\eta_{кр}$ для сферы. В рамках длинноволнового приближения учет вязкости при $\eta = 1,0$ не изменяет величину радиационной силы, действующей на сферу и цилиндр в случае идеальной жидкости.

На рис. 3.5 и 3.6 приведены результаты численных расчетов радиационной силы для цилиндра в пропаноле при плотности потока энергии в первичной волне $I = 175,5 \text{ Вт}/\text{м}^2$. На рис. 3.5 приведены результаты расчетов для жидкости без учета ($1 - \mu^* = 0$) и с учетом вязкости ($2 - \mu^* = 0,0046 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$), а на рис. 3.6 – для жидкости с различными значениями динамического коэффициента вязкости ($1 - \mu^* = 0,0046 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$;

$2 - \mu^* = 0,00239 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$). Из анализа графиков на рис. 3.5 и 3.6 следует, что характер влияния вязкости на величину радиационной (средней во времени) силы аналогичен случаю сферы.

3.3. Действие радиационной силы на систему двух объектов в вязкой жидкости.

При распространении акустической волны в жидкости, содержащей несколько твердых объектов из-за интерференции падающей и отраженных волн происходит взаимное нарушение их полей обтекания. Поэтому силы воздействия жидкости на соседние объекты, а также и постоянные слагаемые этих сил (радиационные силы) будут различны. В результате под действием радиационных сил свободные объекты будут совершать относительное перемещение (дрейф), которое приводит к изменению расстояния между ними. При произвольном расположении объектов в жидкости фундаментальное значение имеет взаимодействие именно двух объектов. В качестве конкретных объектов рассмотрены системы двух сферических и двух цилиндрических частиц.

Действие плоской акустической волны (3.12) на систему двух твердых сферических частиц исследовано в работе [127]. Рассмотрен случай, когда волна распространяется вдоль линии, проходящей через центры сферически изотропных свободных частиц № 1 и № 2. На первом этапе при определении потенциалов отраженных волн решение задачи рассеяния первичной волны на системе двух сферических частиц проведено на основе теории линейной вязкоупругости [42, 142]. Для решения уравнений движения использован метод разделения переменных в сферической системе координат. Для этого с каждой частицей связывалась локальная сферическая система координат. Потенциалы отраженных от частиц волн, являющиеся решениями уравнений

(3.6) в соответствующих локальных системах координат, представлены в виде обобщенных рядов Фурье по сферическим волновым функциям. Постоянные коэффициенты в разложениях потенциалов в ряды определены из решения бесконечных систем алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничным условиям на поверхностях частиц, методом редукции. При этом для записи потенциалов в каждой из локальных сферических систем координат использованы теоремы сложения сферических волновых функций. Граничные условия сформулированы, как требование равенства на поверхности сферы перемещения частиц среды и частиц поверхности твердой сферы. В результате симметрии волнового поля относительно оси, проходящей через центры сфер, силы, действующие на сферы, направлены вдоль этой оси. Перемещения сфер определены интегрированием их уравнений движения (1.17). Радиационные силы вычислены осреднением по времени сил, действующих на сферические частицы и определенных с точностью до величин второго порядка.

Были исследованы системы двух сфер одинаковых и различных радиусов при их возможном расположении в системе относительно направления распространения волны.

На рис. 3.7 – 3.9 показан характер взаимодействия сфер в акустическом поле, определяемый действующими на них средними во времени силами. Вычисления проведены для сфер, находящихся в пропаноле, при плотности потока энергии в первичной волне $I = 175,5 \text{ Вт/м}^2$ (измеренном в точке на линии центров, равноудаленной от центров сфер). Радиус сфер во всех случаях принят равным $a = 0,001 \text{ м}$. Кривые 1, 2 на рис. 3.7 и 3.8 характеризуют действие средней во времени силы соответственно на сферы № 1 и № 2. Кривая 3 относится к одиночной сфере. Динамический коэффициент вязкости принят равным $\mu^* = 0,0046 \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. В зависимости от значения параметра η средняя во времени сила, действующая на каждую из сфер, изменяется как по величине, так и по направлению. В рассмотренном диапазоне частот средние силы увеличиваются с увеличением частоты. При значении параметра $\eta = 1,2$ действие второй сферы на первую (отклонение кривой 1 от кривой 3) более существенно, чем действие первой сферы на вторую (отклонение кривой 2 от кривой 3). При значении параметра $\eta = 0,8$ средние силы изменяют направление действия. При $\eta = 1,2$ сфера

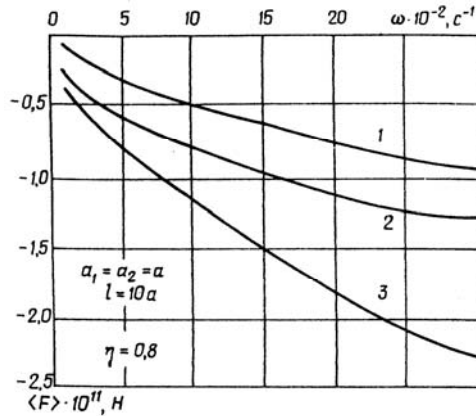


Рис. 3.7

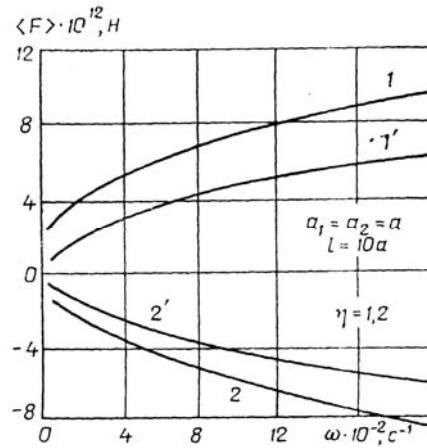


Рис. 3.8

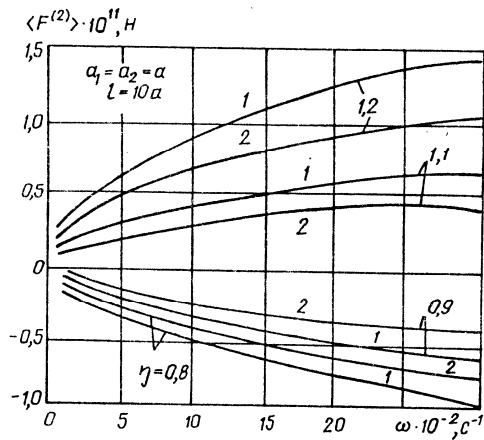


Рис. 3.9

№ 1 подталкивает сферу № 2 и они расходятся, при $\eta = 0,8$ сфера № 1 притягивает сферу № 2 и сферы сближаются.

На рис. 3.9 приведены кривые, характеризующие действие средней во времени силы на сферу № 2 в зависимости от частоты, динамического коэффициента вязкости μ^* и параметра $\eta = \rho_0/\rho$. Средняя во времени сила вычислена при $\mu^* = 0,0046 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ (кривые 1) и при $\mu^* = 0,00239 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ (кривые 2). В более вязкой жидкости акустическая волна создает большую по величине среднюю силу, направление которой зависит от параметра η . При $\eta = 1,2$ и $\eta = 1,1$ средняя сила направлена в сторону распространения волны. При $\eta = 0,9$ и $\eta = 0,8$ средняя во времени сила имеет направление, противоположное направлению волнового вектора.

В работах [89, 122, 126] исследовано действие плоской акустической волны (3.12) на систему двух свободных параллельных и цилиндрически изотропных круговых цилиндров № 1 и № 2. Рассмотрен случай расположения цилиндров один за другим вдоль направления распространения волны. При этом цилиндры принимались как одинаковых радиусов, так и различных – при возможных относительно волнового вектора расположениях их в системе. При определении потенциалов рассеянных волн использована как линеаризованная теория сжимаемой вязкой жидкости [89], так и теория линейной вязкоупругости [122, 126]. Сформулированные задачи решены численно на компьютере.

На первом этапе решения задачи при определении потенциалов рассеянных волн использован метод разделения переменных в цилиндрических системах координат. Для этого с каждым цилиндром связывалась локальная цилиндрическая система координат. Потенциалы отраженных волн, являющиеся решениями уравнений движения среды в соответствующих локальных системах координат, представлены в виде обобщенных рядов Фурье по цилиндрическим волновым функциям. Постоянные коэффициенты в разложениях потенциалов в ряды определены из бесконечных систем алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничным условиям на поверхностях цилиндров, методом редукции. При этом для записи потенциалов в каждой из локальных цилиндрических систем координат использованы теоремы сложения цилиндрических волновых функций. Граничные условия сформулированы как требование равенства на поверхности цилиндра перемещения частиц среды и частиц поверхности цилиндра. Перемещения цилиндров в среде определены интегрированием их уравнений движения (1.17). Радиационные силы вычислены осреднением по времени сил, действующих на цилиндры, и определенных с точностью до величин второго порядка.

Были исследованы системы двух цилиндрических частиц одинаковых и различных радиусов при их возможном расположении в системе относительно направления распространения волны.

Кривые на рис. 3.10, 3.11 иллюстрируют зависимость взаимодействия цилиндров от частоты ω и параметра η , обусловленного радиационными силами. Представленные результаты расчетов радиационных сил относятся к цилиндрам в пропаноле при плотности потока энергии в волне $I = 175,5 \text{ Вт}/\text{м}^2$ (измеренной в срединной плоскости системы цилиндров, перпендикулярной плоскости их осей). При этом средняя сила вычислена для длины цилиндра, равной его радиусу, который для обоих цилиндров принят равным $a = 0,001 \text{ м}$. Кривые 1 и 2 относятся, соответственно, к цилиндрам № 1 и № 2, а кривая 3 характеризует среднюю силу, действующую на одиночный цилиндр. Во всех случаях $\mu^* = 0,0046 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$. В рассмотренном диапазоне частот для случая, представленного на рис. 3.10, действие первого цилиндра на второй (отклонение кривой 2 от кривой 3) более существенно, чем действие второго цилиндра на первый (отклонение кривой 1 от кривой 3). Изменение параметра η (на рис. 3.11 $\eta = 1,2$) существенно влияет на характер взаимодействия цилиндров. При $\eta = 0,8$ (рис. 3.10) цилиндры имеют тенденцию удаляться, а при $\eta = 1,2$ (рис. 3.11) – сближаться. В пер-

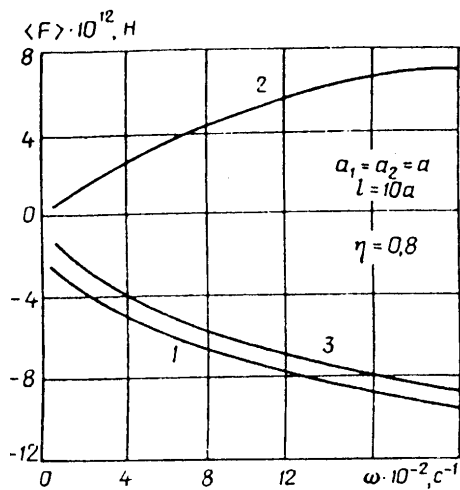


Рис. 3.10

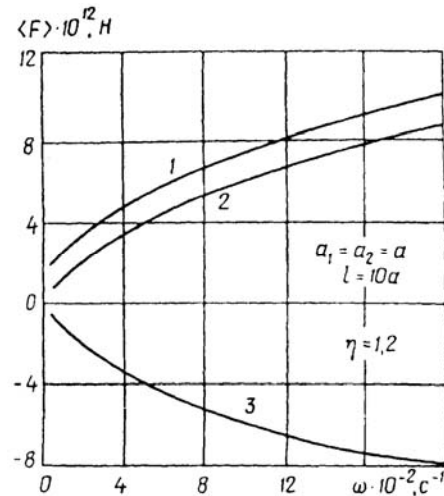


Рис. 3.11

вом случае второй цилиндр отталкивается первым, а во втором – притягивается. В зависимости от параметра η средняя сила, действующая на первый цилиндр, изменяется как по величине, так и по направлению.

На рис. 3.12 приведены результаты исследований влияния вязкости жидкости на величину средней силы, которая вычислена при $\mu^* = 0,0046 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ (кривые 1 и 2) и при $\mu^* = 0,00239 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ (кривые 1' и 2'). Цифра у кривой указывает на номер цилиндра. Анализ поведения кривых показывает, что в более вязкой жидкости при равных условиях акустическая волна создает большую по величине среднюю во времени (радиационную) силу.

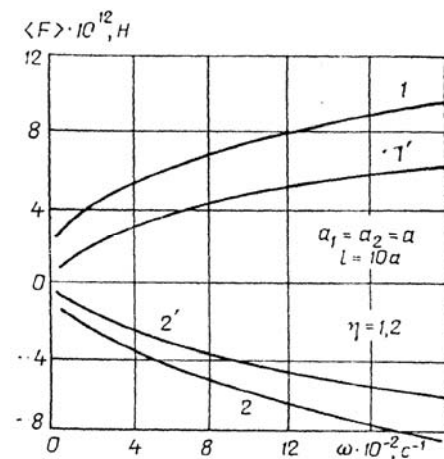


Рис. 3.12

3.4. Идеальная жидкость. Основные соотношения и постановка задач. Предложенный в [85, 86, 108] метод для определения средних сил в вязкой сжимаемой жидкости после предельных переходов ($\lambda^* \rightarrow 0$, $\mu^* \rightarrow 0$) в соответствующих уравнениях применим к случаю идеальной жидкости [88, 110 – 114, 116, 119, 120, 123, 124 и др.]. В результате предельного перехода формула (3.1) принимает следующий вид:

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho_0}{2a_0^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \Phi)^2, \quad (3.18)$$

что соответствует полученной ранее с такой же точностью для вычисления возмущений давления в идеальной жидкости в работе [180].

На первом этапе исследования задача рассеяния волны на объекте формулируется в акустическом приближении, при котором потенциалы Φ первичной и рассеянных волн должны быть решениями уравнения

$$\Delta \Phi - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.19)$$

Соотношение (3.4) для вычисления гидродинамической силы принимает вид

$$\mathbf{F} = -\iint_S p \mathbf{N} dS, \quad (3.20)$$

в котором давление p в звуковой волне при определении перемещения объекта вычисляется по формуле

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Для составления граничных условий на поверхности свободного объекта скорости частиц его поверхности определяются при решении уравнения движения объекта в жидкости под действием силы (3.20)

$$m \dot{\mathbf{V}} = -\iint_S p \mathbf{N} dS. \quad (3.22)$$

Здесь m – масса объекта; \mathbf{V} – вектор скорости объекта; p – давление в жидкости (3.21); \mathbf{N} – орт нормали к поверхности S объекта.

На втором этапе вычисляется гидродинамическая сила (3.20) с учетом величин второго порядка (3.18). Постоянная составляющая гидродинамической силы (радиационная сила) на третьем этапе определяется осреднением (3.20) по времени.

3.5. Действие радиационной силы на одиночный объект в идеальной жидкости.

В качестве объектов, находящихся в жидкости, рассматривались круговой цилиндр, сфера и сферическая капля жидкости. В работе [112] действие радиационной силы на свободный круговой цилиндр исследовано при распространении акустической волны

$$\Phi_0 = A \exp[i(kx_3 - \omega t)] \quad (3.23)$$

перпендикулярно осевой линии цилиндра. Потенциал отраженной от цилиндра волны, являющийся решением уравнения (3.19), представлен в виде обобщенного ряда Фурье по цилиндрическим волновым функциям. Постоянные коэффициенты в разложении в ряд определены из решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, которая получена при удовлетворении граничным условиям на поверхности свободного цилиндра. Система алгебраических уравнений является регулярной и имеет единственное решение, которое находится численно методом редукции. Радиационная сила вычислена осреднением по времени выражения (3.20) при условии, что давление p в волне определяется соотношением (3.18), в котором Φ суммарный потенциал первичной и рассеянной на цилиндре волн. В результате радиационная сила, действующая на единицу длины цилиндра, определяется выражением

$$\langle F \rangle = \frac{8A^2 \rho_0}{\pi^2 a} \left\{ \frac{\alpha^7}{\Omega_0^2 \Omega_1^2} + \frac{\alpha^3 [\alpha^2 - 2(1-\eta)]^2}{\Omega_1^2 \Omega_2^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^3 [\alpha - n(n+1)]^2}{\Omega_n^2 \Omega_{n+1}^2} \right\}. \quad (3.24)$$

В (3.24) a – радиус цилиндра; $\eta = \rho_0 / \rho$ – отношение плотности жидкости к плотности материала цилиндра; k – волновое число первичной волны; A – амплитуда волны. Выражение (3.24) получено в предположении, что тело цилиндрически изотропно. В длинноволновом приближении ($\alpha = ka \ll 1$) в результате использования асимптотических представлений для цилиндрических функций малого аргумента соотношение (3.24) преобразовано к виду

$$\langle F \rangle = \frac{A^2 \pi^2 \rho_0}{8a} \cdot \frac{4 + (1-\eta)^2}{(1+\eta)^2} \alpha^5 + O(\alpha^7). \quad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что радиационная сила существенно зависит от параметра η . Для малых значений α радиационная сила принимает минимальное значение при $\eta = 3,0$. На рис. 3.13 приведены графики зависимости величины $\beta = \langle F \rangle / A^2 \cdot 10^{-3}$ от параметра α , построенные на основе расчетов, проведенных по формуле (3.24) для цилиндра в воде ($\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$). Радиационная сила, действующая на цилиндр, увеличивается с ростом частоты и существенно зависит от параметра η . При $\alpha = 0,2$ радиационную силу можно с достаточной точностью вычислять по формуле (3.25).

В работе [116] исследован случай, когда свободный цилиндр находится в поле плоской стоячей акустической волны, потенциал которой

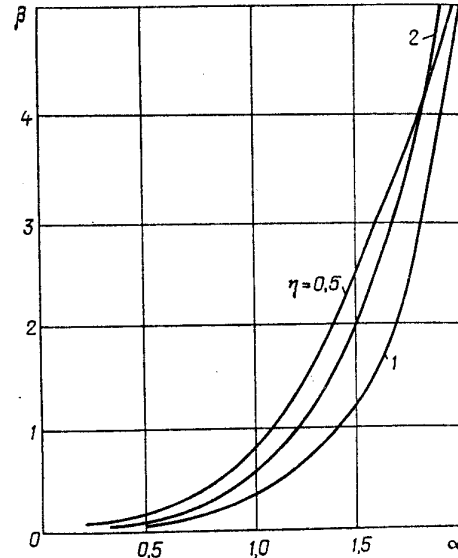


Рис. 3.13

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} A \exp\{i[k(l+x) - \omega t]\} + \exp\{-i[k(l+x) + \omega t]\}. \quad (3.26)$$

Начало системы координат $oxuz$ находится на оси цилиндра на расстоянии l от выбранной неподвижной плоскости отсчета. Радиационная сила, действующая на единицу длины цилиндрически изотропного цилиндра, определяется соотношением

$$\langle F \rangle = A^2 \pi \rho_0 \frac{3-\eta}{4a(1+\eta)} \sin(2kl) \alpha^3 + O(\alpha^5), \quad (3.27)$$

которое получено в длинноволновом приближении [40]. Радиационная сила (3.27) имеет пространственную периодичность с периодом, равным половине длины волны, и действует на более легкий цилиндр ($\eta > 3$) в направлении к узлам поля скоростей, а на более плотный цилиндр ($\eta < 3$) – в направлении к пучностям поля скоростей. В (3.27) l – расстояние от неподвижной плоскости отсчета.

Уравнение движения цилиндра под действием радиационной силы (3.27) приводится к уравнению, описывающему движение нелинейного осциллятора

$$\ddot{\theta} + n^2 \sin \theta = 0; \quad \theta = \pi - 2kl; \quad n^2 = A^2 k^4 \frac{\eta(3-\eta)}{2(1+\eta)^2}. \quad (3.28)$$

Характерно, что радиус цилиндра не влияет на колебательный процесс. Для более плотного цилиндра $n^2 > 0$ положениями устойчивого равновесия в его усредненном по времени движении являются пучности поля скоростей. Период колебаний цилиндра относительно них определяется выражением

$$T = \frac{2\tilde{\lambda}}{\pi v_0} \left[\frac{2(1+\eta)^2}{\eta(3-\eta)} \right]^{1/2} K(\kappa). \quad (3.29)$$

Для более легкого цилиндра $n^2 < 0$ положениями устойчивого равновесия в его среднем по времени движении являются узлы поля скоростей. Цилиндр совершает колебательное движение относительно них с периодом

$$T = \frac{2\tilde{\lambda}}{\pi v_0} \left[\frac{2(1+\eta)^2}{\eta(\eta-3)} \right]^{1/2} K(\kappa). \quad (3.30)$$

В (3.29) и (3.30) $\tilde{\lambda}$ – длина волны; v_0 – амплитуда поля скоростей; $K(\kappa)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; $\kappa = \sin(kx_0)$; x_0 – максимальное расстояние цилиндра соответственно от узла или пучности поля скоростей (амплитуда в его среднем по времени колебательном движении). Период T колебаний в случае (3.29) имеет минимум.

Действие радиационного давления звука на малый рассеиватель, движущийся в однородном и изотропном поле, исследовано в работе [105]. В работе [128] сформулирована задача определения радиационной силы, действующей на твердую сферу в потоке жидкости. Предполагается, что идеальная сжимаемая жидкость находится в баротропном движении с функцией давления P_0 . Поток направлен вдоль оси $o\zeta_3$ неподвижной декартовой системы координат $o\zeta_1\zeta_2\zeta_3$, а \mathbf{V}_∞ , ρ_∞ и p_∞ – соответственно, его скорость, плотность и давление в жидкости на бесконечности. Рассмотрен случай наличия в жидкости сферической частицы радиуса R , которая со скоростью \mathbf{U} также движется вдоль оси $o\zeta_3$. Наличие сферы в потоке обуславливает его неоднородность. Если связать со сферой систему координат $o_1x_1x_2x_3$ (оси $o\zeta_3$ и o_1x_3 совпадают), то параметры неоднородного потока скорость \mathbf{u} , плотность ρ' и давление p' в подвижной системе координат определяются при решении задачи обтекания сферы стационарным потоком, который на бесконечности имеет скорость $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{V} - \mathbf{U}$. Величины p' и ρ' связаны уравнением Тэйта.

При распространении акустической волны величины \mathbf{u} , ρ' и p' получают малые приращения \mathbf{v} , ρ и p , соответственно, которые характеризуют колебания частиц жидкости относительно устойчивого состояния возмущенного потока. При условии, что движение жидкости, вызванное акустическим полем, также потенциальное

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi, \quad (3.31)$$

получено уравнение для потенциала Φ акустического поля в потоке, который обтекает твердую сферу, движущуюся в жидкости, т.е. имеем

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - a^2\Delta\Phi - (\nabla P_0 \cdot \nabla\Phi) - \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{u} \cdot \nabla \ln c^2) = 0. \quad (3.32)$$

Здесь a – локальная скорость распространения малых возмущений относительно потока жидкости. Для стационарного баротропного потока имеем формулу

$$a^2 = -\frac{\mathbf{u} \cdot \nabla P_0}{\nabla \cdot \mathbf{u}}. \quad (3.33)$$

Для определения давления p с точностью до величин второго порядка получено уравнение

$$p = -\rho' \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \Phi - \frac{1}{2} \rho' (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho'}{c^2} \left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)^2 + u^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \left(2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + u^2 \right) (\mathbf{u} \cdot \nabla\Phi) + \frac{3}{2} u^2 (\nabla\Phi)^2 \right), \quad (3.34)$$

в которой опущены слагаемые, обращающиеся в нуль при осреднении по времени. При отсутствии потока и неподвижной сфере ($\mathbf{u} = 0$, $p' = p_0$, $\rho' = \rho_0$) соотношение (3.34) принимает вид (3.18).

Параметры возмущенного потока, входящие в уравнения (3.32) и (3.34), определяются при решении задачи потенциального обтекания сферы жидкостью, которая на бесконечности имеет скорость \mathbf{u}_∞ . Потенциалы как первичной Φ_0 , так и отраженной от сферы волн должны удовлетворять уравнению (3.32). Потенциал Φ_d отраженной от сферы волны определяется при решении задачи дифракции первичной волны на сфере при условии, что компонента v_r скорости на ее поверхности и потенциал Φ_d на бесконечности равны нулю. Сила радиационного давления на сферу отфильтровывается осреднением по времени гидродинамической силы (3.20) при условии, что давление p вычисляется по формуле (3.34), в которой потенциал $\Phi = \Phi_0 + \Phi_d$ определяется как результат интерференции первичной и вторичной волн.

В работе [130, 131] на основе подхода, разработанного для твердых частиц, исследовано действие акустического излучения на сферическую каплю жидкости радиуса a , отличную по своим механическим характеристикам от внешней жидкости, в которой распространяется акустическая волна (3.23). Предполагается, что обе жидкости – идеальные. На первом этапе исследования формулируется задача дифракции волны (3.23) на сферической капле. Потенциалы Φ_d и $\bar{\Phi}_d$ отраженной от капли волны и волны внутри капли являются решениями уравнения (3.19), которые находятся методом разделения переменных в сферической системе координат, связанной с каплей. Они записываются в виде обобщенных рядов Фурье по сферическим волновым функциям. Постоянные коэффициенты в разложениях потенциалов в ряды определяются методом редукции из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничных условий на поверхности капли: непрерывности нормальной составляющей скорости и давления при переходе через поверхность. Детально исследован случай, когда радиус сферы мал по сравнению с длиной акустической волны. В этом случае используется асимптотическое представление для функций $j_n(w)$ и $h_n(w)$ при малом значении аргумента. В результате на третьем этапе решения задачи получено выражение, определяющее радиационную силу, действующую в звуковой волне на жидкую сферу

$$\langle F_x \rangle = \frac{2}{27} A^2 \pi \rho_0 \frac{1}{2 + \eta} \left[k^* (\eta - 10) + 4(1 - \eta) \right] \alpha^6 + O(\alpha^8), \quad (3.35)$$

в котором $\langle F_x \rangle$ – проекция радиационной силы на волновой вектор \mathbf{k} (направленный вдоль оси ox); ρ_0 – плотность внешней жидкости в равновесном состоянии; $\eta = \rho_0 / \bar{\rho}_0$; $\bar{\rho}_0$ – плотность жидкости капли; $\alpha = ka \ll 1$; $k^* = 3(\kappa - \bar{\kappa}) / (3\bar{\kappa} - \kappa\alpha^2)$; κ и $\bar{\kappa}$ – адиабатические модули объемной упругости внешней жидкости и жидкости капли.

В работе [96] проведен детальный анализ полученных результатов, основанный на численных исследованиях. Рассмотрено два случая: а) плотность жидкости капли меньше плотности окружающей жидкости ($\eta > 1$); б) плотность жидкости капли больше плотности окружающей жидкости ($\eta < 1$). В первом случае рассматривалась капля этилового спирта в воде. Во втором случае – капля воды в этиловом спирте. Графики зависимости от параметра ka величины радиационной силы, действующей на каплю, представлены на рис. 3.14 и рис. 3.15 кривыми 1 – 1. Кривая 2 на этих рисунках соответствует случаю твердой сферической частицы. Укажем, что значение параметра $ka = \sqrt{3\bar{\kappa}/\kappa}$ соответствует резонансу пульсационных колебаний жидкой сферической капли. Отметим при этом, что выражение для радиационной силы (3.35) получено при условии, что значение ka по величине отличается от $\sqrt{3\bar{\kappa}/\kappa}$. В этом случае в движении капли преобладают осцилляционные колебания. При анализе поведения кривых на графиках можно отметить следующие явления качественного характера:

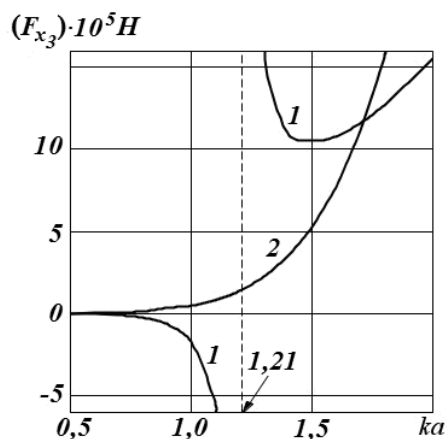


Рис. 3.14

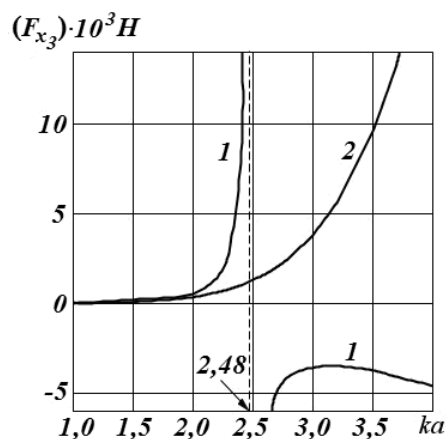


Рис. 3.15

1) при переходе параметра ka через резонансное для соответствующей капли его значение направление действия радиационной силы на каплю меняется на противоположное (кривые 1 – 1 на рис. 3.14, 3.15);

2) направление действия радиационной силы на каплю зависит от величины $\eta = \rho_0 / \bar{\rho}_0$.

Укажем на характерные особенности действия радиационной силы на сферическую каплю.

1. При приближении значения параметра ka к резонансному значению пульсационных колебаний жидкой сферы ($ka = 1,21$ в первом случае, рис. 3.14, и $ka = 2,48$ во втором случае, рис. 3.15) радиационная сила возрастает (кривые 1 – 1 на рис. 3.14, 3.15).

2. В случае, когда механические свойства жидкости капли не отличаются от свойств окружающей жидкости ($\eta = 1, k^* = 0$) радиационная сила равна нулю.

3. В случае твердой сферической частицы направление действия радиационной силы не зависит от величины η и совпадает с направлением распространения акустической волны (кривая 2 на рис. 3.14, 3.15). Ее значение монотонно возрастает при увеличении частоты волны.

В работах [134, 202] исследовано действие радиационной силы на твердую сферическую частицу, закрепленную на оси цилиндрической полости, заполненной идеальной сжимаемой жидкостью. Рассмотрен случай распространения вдоль полости плоской акустической волны, описываемой потенциалом

$$\Phi_0 = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (3.36)$$

который удовлетворяет линейному волновому уравнению (3.19). Ось oz прямоугольной системы координат с началом в центре сферы направлена вдоль оси цилиндрической полости.

Исследование проведено на основе подхода, который изложен выше для случая свободной частицы. Волновое поле в цилиндрической полости формируется первичной волной (3.36) и волнами, отраженными от поверхности сферы Φ_{sph} и от поверхности полости Φ_{cyl} . На первом этапе – определении этих потенциалов, на основе метода, предложенного в [181], решена линейная многосвязная задача рассеяния волны (3.36) на сфере и на цилиндрической полости. Задача решена методом разделения переменных в сферической системе координат. Потенциал Φ_{sph} искомой волны, рассеянной на сфере, представлен в виде обобщенного ряда Фурье по сферическим волновым функциям

$$\Phi_{sph}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n^{(1)}(\omega r) P_n(\cos \theta), \quad (3.37)$$

а потенциал отраженной от поверхности цилиндрической полости волны в виде интеграла

$$\Phi_{cyl}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi, \quad (3.38)$$

где $J_0(x)$ – цилиндрическая функция Бесселя нулевого порядка; ω – угловая частота; ρ – здесь радиальная координата цилиндрической системы координат; $B(\xi)$ – неизвестная плотность; ξ – постоянная разделения. В выражениях (3.37) и (3.38) опущен множитель $\exp(-i\omega t)$, а входящие в них величины обезразмерены.

Для удовлетворения граничным условиям на цилиндрической и на сферической поверхностях используются в выражениях для потенциалов волн разложения сферических волновых функций по цилиндрическим и наоборот [181]. Неизвестные постоянные в разложениях потенциалов волн в ряды определены при решении линейной бесконечной системы алгебраических уравнений, полученных при удовлетворении граничным условиям, методом редукции. Полученные на первом этапе решения задачи потенциалы, в соответствии с принятым методом исследования, использованы при определении давления в жидкости с точностью до величин второго порядка (3.18) и при вычислении гидродинамической силы (3.20), действующей на сферическую частицу. Ее постоянная составляющая (радиационная сила) получена осреднением по времени.

Исследование характера действия радиационной силы на твердую сферическую частицу в круговой цилиндрической полости, заполненной жидкостью, проведено численно в безразмерных величинах. В качестве нормировочных параметров использованы параметры сжимаемой жидкости (воды): скорость звука $a_0 = 1500$ м/с, плотность $\gamma = 1000$ кг/м³. Рассмотрена плоская акустическая волна (3.36) с плотностью потока энергии $I = 175,5$ Вт/м², что соответствует умеренной мощности излучения, при котором длина волны $\tilde{\lambda} = 0,038$ м, а скорость частиц жидкости порядка 0,015 м/с. Графики изменения безразмерных значений радиационной силы, вычисленной на втором этапе решения задачи, представлены на рис. 3.16 – 3.19. Сплошной линией показана зависимость от безразмерной частоты $\omega \rho_0 / a_0$ (ρ_0 – радиус цилиндрической полости) величины радиационной силы, действующей на сферическую частицу в круговой цилиндрической полости и определенной при безразмерном давлении $p / (\gamma a_0^2)$. Штриховой линией – при тех же условиях для случая сферической час-

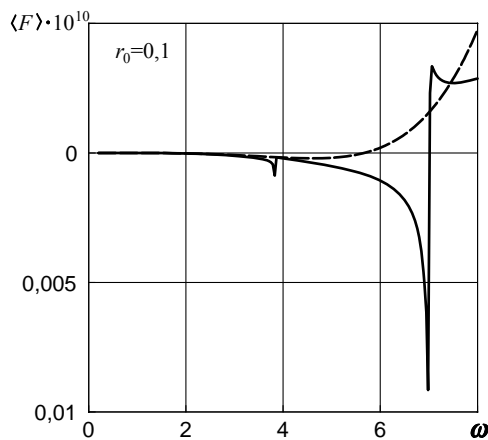


Рис. 3.16

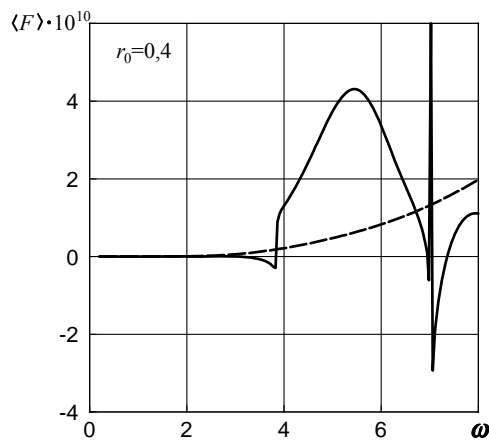


Рис. 3.17

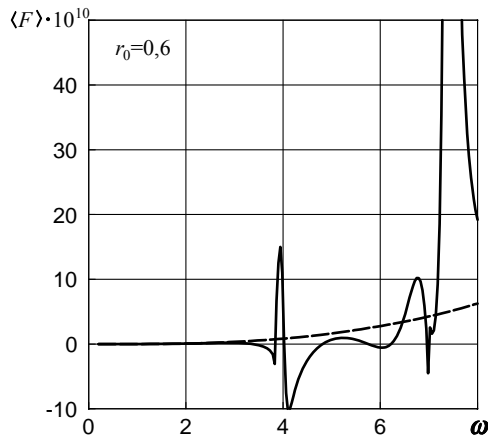


Рис. 3.18

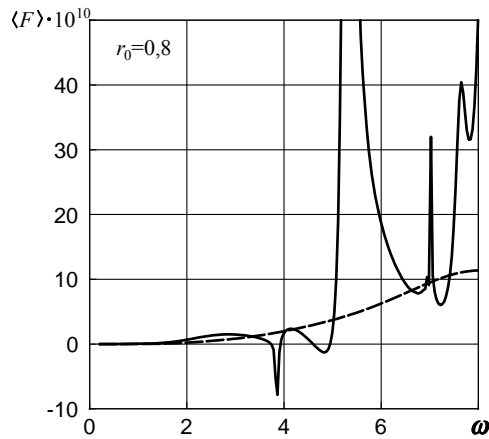


Рис. 3.19

тицы, находящейся в безграничной жидкости. Результаты, представленные на рисунках, свидетельствуют о немонотонном характере зависимости величины радиационной силы от частоты. При определенных значениях частоты ω ($\omega \rightarrow 4$, $\omega \rightarrow 7$) происходит резкое изменение величины радиационной силы, свойственное для всех размеров сферической частицы.

Отмечены характерные особенности воздействия радиационной силы на сферическую частицу, которые следуют из анализа графиков:

- если на частицу в безграничной жидкости действует радиационная сила, направленная в сторону распространения волны и монотонно возрастающая с увеличением частоты, то для частицы в цилиндрической полости характер зависимости радиационной силы от частоты существенно усложняется, что определяется усложнением дифракционного поля внутри цилиндра;

- в зависимости от частоты радиационная сила для частицы в полости, в отличие от случая частицы в неограниченной жидкости, может быть направлена как в сторону распространения акустической волны, так и в противоположную сторону;

- в окрестности некоторых частот изменение величины радиационной силы имеет характер, близкий к резонансному: на графиках зависимости радиационной силы от частоты в окрестностях резонансных частот появляются максимумы. Очевидно резонансные частоты являются собственными частотами механической системы: заполненная жидкостью жесткая цилиндрическая полость с твердой сферической частицей [181].

В статье [135] рассмотрена задача о действии радиационной силы на сферическую каплю жидкости в цилиндрической полости, заполненной жидкостью с другими механическими свойствами. При постановке задачи в отличие от случая твердой сферической частицы граничные условия на поверхности сферической капли требуют непрерывности как нормальных составляющих скоростей частиц жидкости капли и внешней к ней жидкости, так и непрерывности давлений в жидкостях. Потенциал $\Phi_1(r, \theta)$, который описывает волновое движение в капле, принят в следующем виде:

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta), \quad (3.39)$$

где $\eta = c_0/c_1$ – отношение скорости звука в жидкости, в которой находится капля, к скорости звука в жидкости капли. Выражение (3.39) записано в безразмерном виде. Для решения задачи использован подход, который был применен для случая твердой сферической частицы, расположенной в заполненной жидкостью цилиндрической полости [202]. В результате исследования получено выражение для вычисления радиационной силы, действующей на сферическую каплю жидкости в заполненной жидкостью с другими свойствами цилиндрической полости.

3.6. Действие радиационной силы на систему двух объектов в идеальной жидкости. При наличии большого числа частиц в жидкости возникает проблема определения их взаимовлияния, обусловленного при распространении акустической волны возникающими радиационными силами. Если положения погруженных в жидкость частиц случайны, а среднее расстояние между ближайшими соседями велико по сравнению с линейными размерами частиц, наиболее важными взаимодействиями будут взаимодействия между парами частиц, оказавшимися близко одна от другой. Группы из трех или большего числа близко расположенных частиц будут встречаться значительно реже. В связи с этим, изучение взаимодействия именно двух частиц, одиночных в большом объеме жидкости, имеет фундаментальное значение. Поэтому имеется большое число работ как теоретического, так и экспериментального характера, посвященных исследованию взаимодействия двух частиц в поле звуковой волны. В этих работах линейные размеры частиц принимаются малыми по сравнению с амплитудой колебания среды и длиной волны. Поэтому в этом случае принимается допущение об однонаправленном установившемся (квазистационарном) режиме обтекания частиц несжимаемой жидкостью, которое приводит к возникновению гидродинамических сил. Эти силы используются для объяснения взаимодействия частиц. В случае больших чисел Рейнольдса – это силы Бернулли. В случае малых чисел Рейнольдса используют подходы, основанные на рассмотрении гидродинамических сил Стокса и Озеена. При таких подходах к решению задачи в уравнениях движения жидкости инерционные члены не учитываются или учитываются частично. В ряде исследований [139] взаимодействие частиц в звуковом поле низкой частоты объясняется возникновением сил Бьеркнесса, которые появляются между частицами, колеблющимися с различными скоростями в несжимаемой идеальной жидкости.

В реферируемых работах рассмотрены системы из двух свободных сферических и из двух свободных цилиндрических тел. Исследовано их взаимодействие, обусловленное радиационными силами. Для решения поставленных задач использован подход, рассмотренный выше. На первом этапе решения задачи при определении потенциалов рассеянных на объектах волн применена линейная теория распространения волн (3.19). В результате при определении потенциалов поля скоростей использовался принцип суперпозиции. Для решения задач рассеяния применен метод разделения переменных в цилиндрической (сферической) системе координат [149]. С каждым объектом связывалась соответствующая локальная цилиндрическая (сферическая) система координат, в которой потенциалы волн представлены обобщенными рядами Фурье, соответственно, по цилиндрическим (сферическим) волновым функциям. Коэффициенты в разложениях потенциалов в ряды определяются из решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, которые получены при удовлетворении граничным условиям на поверхности каждого объекта. При этом скорости частиц поверхности объектов определены при решении уравнений движения объекта (3.22) под действием силы (3.20), в которой давление задавалось соотношением (3.21). Для записи граничных условий на каждом из объектов в локальной системе координат использованы теоремы сложения соответствующих волновых функций [149, 84]. Полученные системы уравнений являются регулярными и в силу этого имеют единственное решение, которое получено численно методом редукции. Заданная степень точности обеспечена путем сравнения результатов для последовательно возрастающего числа уравнений. Такой подход использован при решении многих задач о взаимодействии объектов с жидкостью [166, 174, 181]. Полученные на первом этапе решения задачи потенциалы волн использованы для определения давления в жидкости с точностью до величин второго порядка (3.18), вычисления сил на втором этапе, действующих на тела в жидкости (3.20), и определения их постоянных составляющих (радиационных сил) на третьем этапе, а также исследование движения тел под действием радиационных сил.

В случае системы двух свободных сферически изотропных твердых сфер характер действия на них радиационных сил изучен в работах [88, 110, 111, 117, 123, 129].

В случае распространения волны (3.23) вдоль линии центров сфер (волновой вектор принимался направленным от сферы 1 к сфере 2) предполагалось, что радиусы сфер могут быть как равными [88, 110, 117], так и различными [123] при возможных схемах расположения таких сфер в системе. В силу симметрии волнового поля радиа-

ционные силы, действующие на каждую из сфер, направлены вдоль линии их центров. Выражения для этих сил в замкнутом виде удалось получить для случая $\alpha = ka \ll 1$, $kl \gg 1$ (l – расстояние между центрами сфер радиуса a) в результате использования асимптотических представлений для сферических функций малого и соответственно большого аргументов:

$$\langle F^{(2)} \rangle = 2A^2 \pi \rho_0 \frac{1 + \frac{2}{9}(1-\eta)^2}{(2+\eta)^2} \alpha^6; \quad (3.40)$$

$$\langle F^{(1)} \rangle = \langle F^{(2)} \rangle + 2A^2 \pi \rho_0 \frac{(5-4\eta) \sin(2kl)}{9(2+\eta) kl} \alpha^6. \quad (3.41)$$

Здесь: $\eta = \rho_0 / \rho_s$; ρ_0 – плотность жидкости; ρ_s – плотность материала s -й сферы ($s = 1, 2$).

Соотношение (3.40) и соотношение (3.41) при условии $kl \rightarrow \infty$ полностью совпадают с (3.14), полученным в [180] для одиночной сферы. Второе слагаемое в (3.41) представляет осредненную по времени силу воздействия второй сферы на первую. Она обусловлена волной, отраженной от второй сферы. Первая сфера не воздействует на вторую, поскольку в случае длинных волн (рассматриваемое здесь приближение) энергия, рассеянная на сфере, направлена навстречу падающей волне. Если второе слагаемое в (3.41) положительно, то первая сфера притягивается второй, если отрицательно – отталкивается.

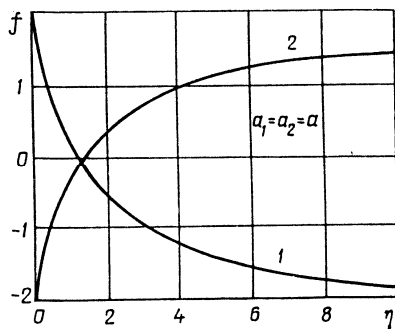


Рис. 3.20

На рис. 3.20 показаны кривые зависимости величины $f = (\langle F^{(1)} \rangle - \langle F^{(2)} \rangle) \cdot 10^4$ Н от параметра η для двух одинаковых сфер радиуса a в воде ($1-ka = 0,1$, $kl = 10$; $2-ka = 0,112$, $kl = 11,2$) при распространении плоской волны (3.23) единичной амплитуды. При изменении частоты или плотности сфер характер взаимодействия существенно изменяется.

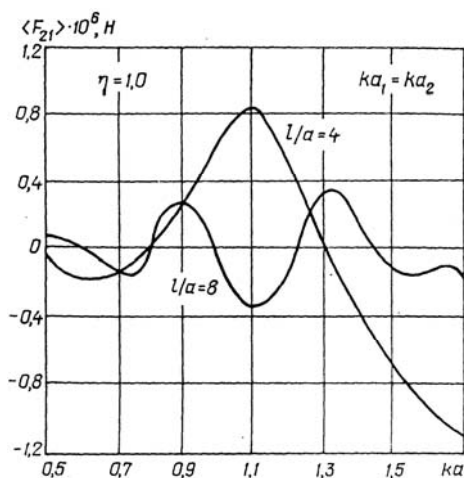


Рис. 3.21

На рис. 3.21 – 3.24 приведены результаты расчетов радиационных сил для системы двух сфер в пропаноле (при $\mu^* = 0$), полученные на компьютере без ограничений на длину волны, радиусы сфер и на расстояние между ними. При этом первичная волна характеризуется амплитудой $A = 0,918 \cdot 10^{-4}$ м²/с. Сила воздействия i -й сферы на j -ю F_{ij} ($i, j = 1, 2$) определена как разность радиационной силы, действующей в акустическом поле на j -ю сферу в системе двух сфер, и радиационной силы, действующей в акустическом поле на одиночную j -ю сферу. В результате взаимодействия сферы имеют тенденцию к сближению или удалению (рис. 3.21, 3.22). На рис. 3.23 построены кривые зависимости величины

$\langle \Delta F \rangle = \langle F^{(1)} \rangle - \langle F^{(2)} \rangle$ от параметра ka_1 для следующих систем из двух сфер радиусов a_1 и a_2 : 1 - $a_1, a_2 = 0,8a_1$; 2 - $a_1, a_2 = a_1$; 3 - $a_1, a_2 = 1,2a_1$ при $l = 4a_1$. Силы взаимодействия существенно зависят от размеров сфер и от их ориентации в системе относительно направления распространения волны.

Результаты расчетов радиационных сил в зависимости от расстояния между центрами сферических частиц приведены на рис. 3.24. Кривые 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй сферам в системе. Действие радиационной силы на одиночную сферу характеризуется кривой 3. Анализ кривых обнаруживает наличие в акустическом поле зон притяжения и отталкивания частиц, устойчивых и неустойчивых границ раздела этих зон.

Случай распространения плоской волны перпендикулярно к линии центров системы из двух сфер одинаковых радиусов a , расположенных на расстоянии l , рассмотрен в работах [111, 129]. Задача решена в длинноволновом приближении ($ka \ll 1$) для случая достаточно удаленных сфер ($kl \gg 1$). Выражения для радиационных сил получены в замкнутом виде. Их проекции на прямую, проходящую через центры сфер, имеют следующий вид:

$$\langle F^{(1)} \rangle = \frac{2}{9} A^2 \pi \rho_0 \frac{\sin(kl)}{kl} \alpha^6; \quad \langle F^{(2)} \rangle = -\langle F^{(1)} \rangle. \quad (3.42)$$

Радиационные силы (3.42) не зависят от параметра $\eta = \rho_0 / \rho$. Это обусловлено тем, что в рассматриваемом случае смещение сфер в колебательном движении вдоль линии их центров пренебрежимо мало. Радиационные силы уменьшаются с увеличением расстояния между сферами. На расстояниях, кратных длине полуволны, они равны

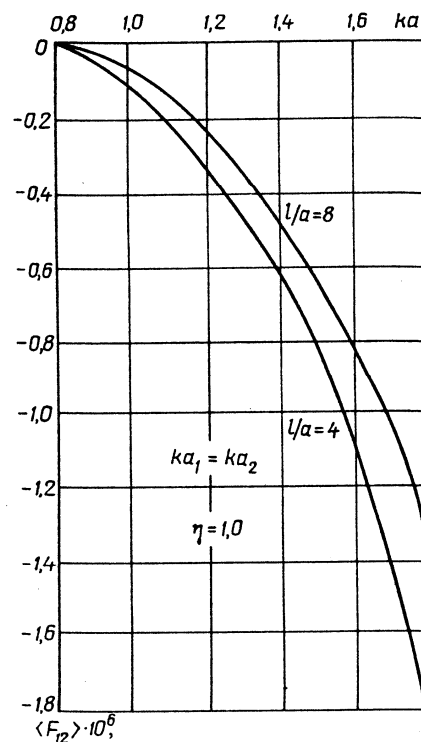


Рис. 3.22

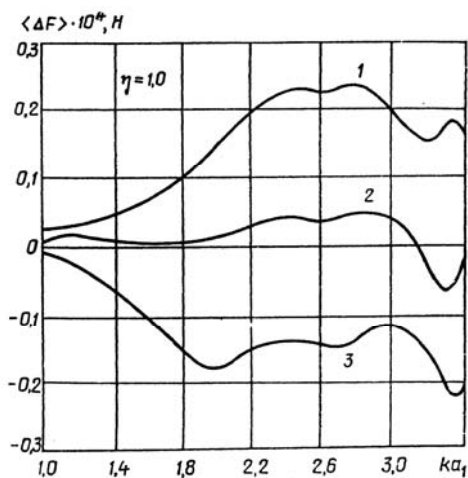


Рис. 3.23

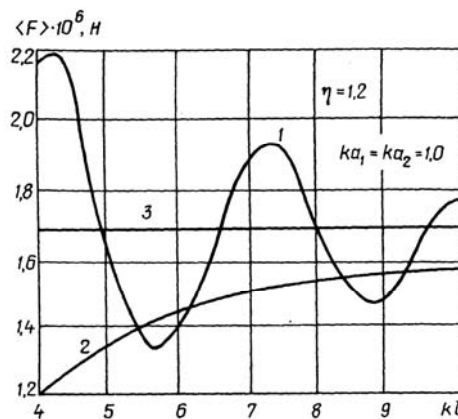


Рис. 3.24

нулю. Характер изменения величины радиационных сил свидетельствует о существовании в волновом поле зон, в которых сферы притягиваются или отталкиваются в направлении, перпендикулярном волновому вектору. На границах зон сферы образуют, соответственно, устойчивую или неустойчивую пару. Характер движения сфер под действием радиационных сил (3.42) исследован в [129]. На рис. 3.25 приведен фазовый портрет системы двух сферических частиц, полученный для конкретного примера. В зависимости от расстояния сфер до положения устойчивого равновесия они либо разбегаются в противоположных направлениях (фазовые траектории 1, 2), либо колеблются относительно положений равновесия (фазовые траектории 4). Область колебательных движений отделяется от области разбегания сепаратрисой 3.

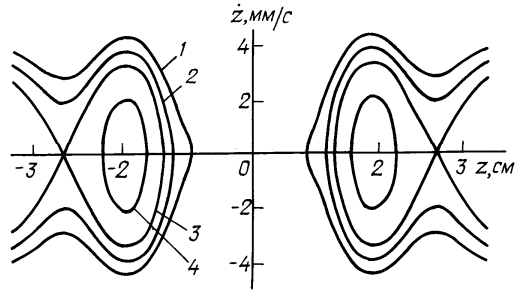


Рис. 3.25

Задача о действии радиационных сил на систему из двух параллельных цилиндрических изотропных круговых цилиндров, расположенных один за другим на расстоянии l вдоль направления распространения плоской акустической волны (3.23), решена в [113, 119, 124]. Использован подход, аналогичный случаю двух сферических тел. Рассмотрена система двух свободных твердых цилиндров одинаковых радиусов a , а также системы двух цилиндров различных радиусов при их возможном расположении в системе. Изучены случаи переменного расстояния l между цилиндрами при постоянной частоте и случаи фиксированного расстояния l между ними при изменении частоты.

В длинноволновом приближении ($ka \ll 1$) для достаточно удаленных цилиндров ($kl \gg 1$) в результате использования асимптотических представлений для цилиндрических функций малого и соответственно большого аргументов для радиационных сил получены выражения в замкнутом виде:

$$\langle F^{(1)} \rangle = \langle F \rangle + f; \quad f = \frac{1}{\sqrt{kl}} \frac{A^2 \pi^{3/2} \rho_0}{4(1+\eta)} (\sin(2kl) + \cos(2kl)) \alpha^5; \quad (3.43)$$

$$\langle F^{(2)} \rangle = \langle F \rangle - A^2 \pi^{3/2} \rho_0 \frac{1}{4(1+\pi)} \frac{\alpha^5}{\sqrt{kl}}. \quad (3.44)$$

В (3.43) и (3.44) $\langle F \rangle$ обозначает радиационную силу, действующую на одиночный цилиндр (3.25). Силы взаимодействия представлены вторыми слагаемыми. На рис. 3.26 показан характер действия второго цилиндра на первый в воде при прохождении волны единичной амплитуды длиной $\tilde{\lambda} = 0,1$ м при условии, что $a / \tilde{\lambda} = 0,016$. Сила воздействия имеет осциллирующий характер и существенно зависит от параметра η , частоты и расстояния l между цилиндрами. При изменении частоты (длины волны) она изменяется как по величине, так и по направлению.

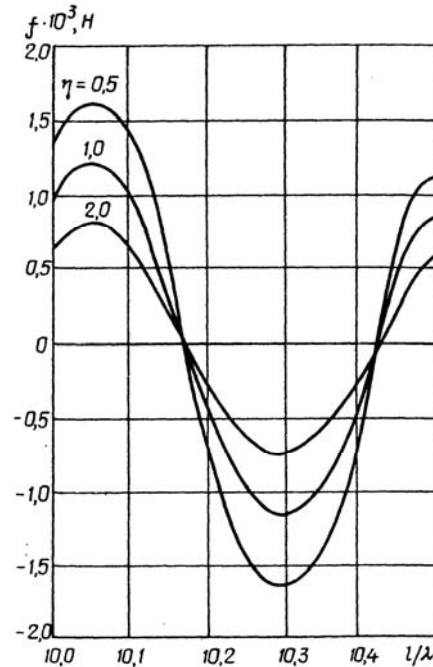


Рис. 3.26

На рис. 3.27 – 3.29 приведены результаты расчетов радиационных сил для цилиндров в пропаноле (при $\mu^* = 0$), полученные на компьютере без ограничений на отношения длины волны к радиусам цилиндров и к расстояниям между ними. При этом акустическая волна характеризуется амплитудой $A = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ (рис. 3.27, 3.28) или плотностью потока энергии $I = 175,5 \text{ Вт/м}^2$ и частотой (рис. 3.29).

На рис. 3.27 кривые 1 и 2 относятся соответственно к первому и ко второму цилиндрам, имеющим одинаковые радиусы, а кривая 3 – к одиночному цилиндру. Вторым цилиндр притягивает первый. При этом сила притяжения зависит от расстояния l между цилиндрами. Более сложный характер взаимодействия параллельных цилиндров представлен на рис. 3.28, на котором приведены результаты исследований двух систем, состоящих из цилиндров различных радиусов (a_1 и a_2). Кривая 1 относится к первому цилиндру системы № 1 ($ka_1 = 1,0$; $ka_2 = 1,3$), а кривая 2 – ко второму цилиндру системы № 2 ($ka_1 = 1,3$; $ka_2 = 1,0$). Кривая 3 характеризует радиационную силу, действующую на одиночный цилиндр при $ka = 1,0$. Взаимодействие цилиндров существенно изменяет радиационные силы, действующие на каждый из цилиндров (отклонения кривых 1 и 2 от кривой 3). Наличие цилиндров различных радиусов усложняет картину зависимости радиационных сил от расстояния: цилиндры могут не только сближаться, но и удаляться. При изменении частоты цилиндры имеют тенденцию как к быстрому, так и к медленному сближению (рис. 3.29). Эта тенденция характеризуется величиной отклонения кривых 1 и 2, которые относятся соответственно к первому и ко второму цилиндрам и определяют радиационные силы, действующие на эти цилиндры. Кривая 3 характеризует радиационную силу, действующую на одиночный цилиндр. Отклонения кривых 1 и 2 от кривой 3 представляют взаимовлияние цилиндров. С ростом частоты взаимовлияние цилиндров увеличивается.

Случай распространения плоской акустической волны перпендикулярно плоскости осевых линий системы из двух свободных параллельных цилиндров одинакового радиуса a , расположенных на расстоянии l , рассмотрен в работе [113]. Использовался подход, аналогичный случаю двух сфер. Вычисление радиационных сил проведено в длинноволновом приближении для достаточно удаленных цилиндров. В результате

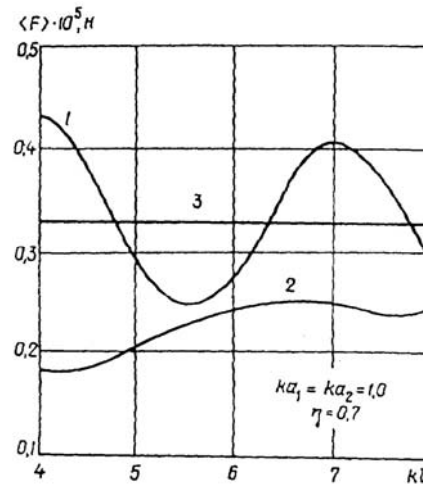


Рис. 3.27

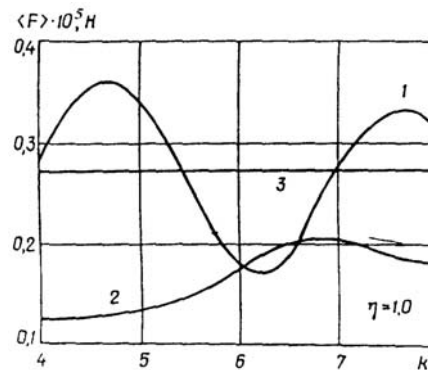


Рис. 3.28

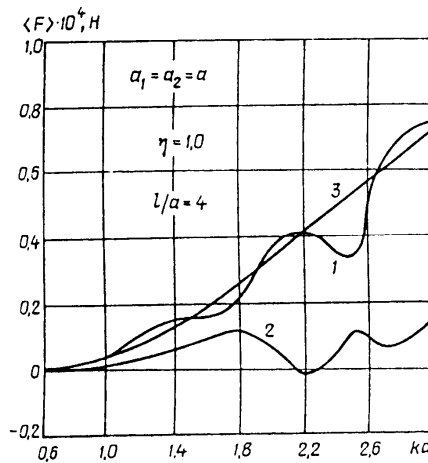


Рис. 3.29

получены следующие выражения для радиационных сил:

$$\langle F_x^{(1)} \rangle = \frac{A^2}{8} \pi^{3/2} \rho_0 [\sin(kl) + \cos(kl)] \frac{\alpha^5}{\sqrt{kl}}; \quad (3.45)$$

$$\langle F_y^{(1)} \rangle = \langle F \rangle + \frac{A^2}{8} \pi^{3/2} \rho_0 [\sin(kl) + \cos(kl)] \frac{\alpha^5}{\sqrt{kl}}; \quad (3.46)$$

$$\langle F_x^{(2)} \rangle = -\langle F_x^{(1)} \rangle; \quad \langle F_y^{(2)} \rangle = \langle F_y^{(1)} \rangle. \quad (3.47)$$

Здесь $\langle F_x^{(s)} \rangle$ ($s = 1, 2$) – проекция на ось ox радиационной силы, действующей на s -й цилиндр (ось ox расположена в плоскости осей цилиндров и направлена перпендикулярно к оси цилиндра № 2); $\langle F_y^{(s)} \rangle$ – проекция радиационной силы на ось oy , параллельную волновому вектору. В (3.46) $\langle F \rangle$ – радиационная сила, действующая на одиночный цилиндр при тех же условиях [3.25].

Из (3.45) – (3.47) следует, что цилиндры не взаимодействуют при значительном удалении ($kl \rightarrow \infty$), а также и в случае, когда длина волны $\tilde{\lambda}$ и расстояние l между осями цилиндров связаны соотношениями $2l / \tilde{\lambda} = n + 3/4$. При выполнении соотношения $2l / \tilde{\lambda} = n + 1/4$ взаимодействие цилиндров максимально. В этом случае радиационные силы сближают цилиндры при n четном и удаляют при n нечетном. Везде n предполагается достаточно большим. Как и в случае двух сфер, силы взаимодействия не зависят от параметра $\eta = \rho_0 / \rho$.

Методы, предложенные для решения задач о действии в акустическом поле радиационных сил на систему двух объектов, используются и при решении задачи о действии радиационной силы на тело у плоской границы жидкости [92, 93]. В [132, 133, 177] изучен характер действия радиационной силы, обусловленной распространяющейся перпендикулярно к плоской стенке звуковой волной (3.36), на свободную сферическую частицу радиуса a , расположенную на расстоянии l от стенки. В рассматриваемом случае волновое поле формируется в результате интерференции первичной волны и волн, отраженных от стенки и рассеянных на сфере. На первом этапе решения задачи при определении потенциалов акустического поля задаются граничные условия на поверхности сферы и на плоской границе жидкости. При решении линейной задачи о рассеянии акустической волны на сферической частице и отражении рассеянной на сфере волны от плоской границы жидкости используется метод мнимых изображений. В результате указанная задача сводится к задаче о рассеянии волны на двух сферических частицах и формулируется как задача определения потенциалов отраженных волн в сферической системе координат. Искомые потенциалы волн представлены обобщенными рядами Фурье по сферическим волновым функциям, постоянные коэффициенты в которых подлежат определению. Рассмотрен случай, когда $\alpha = ka \ll 1$ и $\beta = kl \gg 1$. В этом случае при решении бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов, полученных при удовлетворении граничных условий, используются асимптотические представления для сферических функций и их производных малых и больших аргументов. На втором этапе определенные потенциалы акустического поля используются для вычисления акустического давления в жидкости и гидродинамической силы, действующей на сферу. Ее постоянное слагаемое (радиационная сила, полученная осреднением по времени гидродинамической силы), имеет следующий вид:

$$\langle F_{z_1} \rangle = -\frac{8}{3} A^2 \pi \rho_0 \frac{1-\eta}{2+\eta} \sin \beta \alpha^3 + O(\alpha^5). \quad (3.48)$$

Исследован характер движения под действием радиационной силы (3.48) сферической частицы, которая в момент времени t находится в точке с координатой z . Уравнение ее движения принимает такой вид:

$$(m + m') \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{8}{3} A^2 \pi \rho_0 \frac{1 - \eta}{2 + \eta} \alpha^3 \sin(2\kappa z), \quad (3.49)$$

где $m = 4/3 \pi R^3 \rho_1$ – масса сферической частицы; $m' = 2/3 \pi R^3 \rho_0$ – ее присоединенная масса; $\eta = \rho_0 / \rho_1$. В рамках принятого в исследовании приближения установлено, что радиационная сила (3.49) не действует на взвешенную в жидкости ($\eta = 1$) сферическую частицу. Радиационная сила равна нулю также на определенных расстояниях z_n от плоской границы (положениях равновесия). При этом положения устойчивого равновесия для случаев $\eta < 1$ являются положениями неустойчивого равновесия для случаев $\eta > 1$ и наоборот. Возле положений устойчивого равновесия частицы колеблются. Тяжелые частицы ($\eta < 1$) по сравнению с легкими частицами ($\eta > 1$) имеют больший период T при одинаковых амплитудах колебания.

В работах [97, 83] изучен характер действия радиационной силы на твердый цилиндр, расположенный параллельно плоской стенке на расстоянии δ от нее. Для решения задачи использован подход, разработанный для твердой сферической частицы у плоской границы жидкости. Задача сформулирована для случая падения плоской акустической волны на стенку под произвольным углом θ . При решении линейной задачи о рассеянии акустической волны на твердом цилиндре и отражении рассеянной на нем волны от плоской границы жидкости используется метод мнимых изображений. В результате указанная задача сведена к задаче о рассеянии волны на двух цилиндрических телах и формулируется как задача определения потенциалов отраженных волн в цилиндрической системе координат. Искомые потенциалы волн представлены обобщенными рядами Фурье по цилиндрическим волновым функциям, постоянные коэффициенты в которых подлежат определению. Рассмотрен случай длинных волн, когда $\alpha = ka \ll 1$ и $\beta = k\delta \gg 1$. В [97] получены выражения для проекций радиационной силы на ось, перпендикулярную плоской границе и на параллельную ей. Под действием составляющей радиационной силы, перпендикулярной плоской границе,

$$\langle F_x \rangle = A^2 \frac{\pi \rho_0}{a(1 + \eta)} \sin(2k\delta \cos \theta) [(1 - \eta) \cos 3\theta + 2 \cos \theta] + O((ka)^5) \quad (3.50)$$

цилиндр совершает движения, описываемые уравнением нелинейного осциллятора. При этом период его колебаний увеличивается с увеличением угла падения θ и существенно зависит от параметра η , длины волны и амплитуды скорости частиц жидкости. В [83] задача решена численно для случая, когда цилиндр радиуса $a = 0,005$ м находится в пропаноле и плотность потока энергии в волне составляет $I = 175,5$ Вт/м². Наиболее существенно на компоненты радиационной силы влияет величина расстояния δ от цилиндра до плоскости границы жидкости и величина угла θ падения звуковой волны на границу. На рис. 3.30 показаны кривые, характеризующие зависимость составляющей радиационной силы, перпендикулярной плоскости границы, от этих параметров. Для малых значений δ эта зависимость имеет сложный характер.

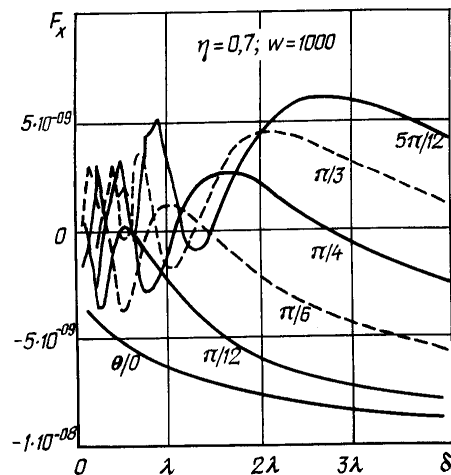


Рис. 3.30

Заключение.

В рассмотренных работах осуществлена разработка математических моделей и методов исследования динамики упругих тел, твердых и жидких частиц в вязкой жидкости, основанных на линеаризированных теориях сжимаемой вязкой жидкости и упругих тел с начальными напряжениями.

Основные научные результаты приведенных исследований заключаются в следующем.

1. Получены линеаризованные соотношения для движущейся и покоящейся вязкой сжимаемой жидкости в случае нестационарных и гармонических малых движений (колебаний).

2. Построены общие решения трехмерных уравнений линеаризованной теории вязкой сжимаемой жидкости, выражения для которых получены через скалярный и векторный потенциалы. Приведены уравнения, из которых эти потенциалы определяются.

3. Получены представления общих решений в прямоугольной, круговой цилиндрической и сферической системах координатах, что позволяет исследовать динамическое взаимодействие жидких и упругих тел такой формы с вязкой сжимаемой жидкостью.

4. Показано, что посредством предельных переходов из предложенных общих решений следуют известные общие решения для более простых моделей жидкости (несжимаемая вязкая, сжимаемая и несжимаемая идеальная жидкость).

5. Дана постановка и предложен метод исследования динамики твердых тел в сжимаемой жидкой среде при действии акустических волн, распространения возмущений в упругих цилиндрических оболочках, заполненных вязкой сжимаемой жидкостью, а также волновых процессов в упругих телах с начальными напряжениями, взаимодействующими с вязкой сжимаемой жидкостью.

6. Дана постановка и решены основные классы задач эластокинетики о распространении волн Рэлея, Стоунли, Лэмба, а также квазиповерхностных, продольных и крутильных мод в ряде гидроупругих систем (жидкое и упругое полупространства, жидкий слой и упругое полупространство, упругий слой и жидкое полупространство, упругий и жидкий слои, оболочка и полый цилиндр, содержащие жидкость, бесконечное тело с цилиндрической полостью, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью, сплошной цилиндр, находящийся в жидкости) с учетом начальных напряжений, вязкости и сжимаемости жидкой среды.

7. Применяя подход, основанный на использовании представлений общих решений линеаризованных задач аэрогидроупругости для тел с однородными начальными деформациями и покоящейся вязкой сжимаемой жидкости, получены дисперсионные соотношения в общем виде, инвариантно относительно различных форм упругого потенциала и справедливые для произвольных сжимаемых и несжимаемых материалов. Проведены исследования основных классов задач, выполнены численные вычисления и на их основе выявлены новые свойства, закономерности и механические эффекты, характерные для изучаемых волновых процессов и обусловленные взаимодействием полей начальных напряжений и динамических напряжений, а также взаимодействием упругого тела с вязкой жидкой средой.

Основные результаты заключаются в следующем:

а) показано, что в гидроупругих волноводах, состоящих из упругих тел и сжимаемой вязкой жидкости, в отличие от идеальных систем, распространяются волны, характеризующиеся затуханием, которые при устремлении коэффициента вязкости к нулю переходят в нормальные волны в гидроупругой системе с идеальной сжимаемой жидкостью;

б) проиллюстрировано, что исследование закономерностей распространения крутильных мод в оболочечных гидроупругих волноводах возможно лишь с привлечением модели вязкой жидкости. При этом вязкая жидкая среда оказывает существенное влияние на параметры волнового процесса и порождает волны, распространяющиеся с демпфированием;

в) установлено, что вязкость жидкости и начальные напряжения оказывают существенное влияние на частоты зарождения волн, а также на величины фазовых скоростей мод в окрестности этих частот;

з) обнаружено, что при взаимодействии сжимаемых упругих тел с жидкостью с увеличением сжимаемости жидкой среды возрастает число распространяющихся мод и весьма существенно изменяются величины их фазовых скоростей и коэффициентов затухания. Отмечено также, что применение при расчетах волновых процессов модели несжимаемой жидкости может привести к получению весьма неточных как количественных, так и качественных результатов;

д) выявлены нормальные волны определенных длин, на величины фазовых скоростей и коэффициентов затухания которых начальные напряжения не оказывают влияния;

е) показана возможность существования мод определенных номеров и частот, на величины фазовых скоростей которых вязкость жидкости не оказывает влияния;

ж) показано, что наличие жидкого слоя приводит к появлению новых квазилэмбовских волн. Возникающие моды имеют нулевые частоты запаривания. Воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра;

з) установлено, что локализация низших мод в системе «слой жидкости – упругий слой» зависит от механических параметров гидроупругой системы. Основным критерием распределения низших нормальных волн в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в слое жидкости и квазирэлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя;

и) показано, что влияние вязкости жидкости связано с ее взаимодействием со смещениями, возникающими в упруго-жидкостной системе при распространении волновых возмущений. В тех точках мод, где преобладающими являются сдвиговые смещения на границе раздела сред, влияние вязкости наибольшее и величины коэффициентов затухания, а также относительные изменения величин скоростей, принимают максимальное значение;

к) показано, что с возрастанием толщины упругого слоя уменьшается влияние вязкости жидкого слоя на фазовые скорости и коэффициенты затухания всех (кроме первой) квазилэмбовских мод в коротковолновой части спектра гидроупругого волновода;

л) показано, что развитая трехмерная линеаризованная теория волн применительно к высокоэластичным несжимаемым упругим телам позволяет как в плоском, так и в пространственных случаях определять значения параметров критического укорочения, при которых возникает явление поверхностной неустойчивости упругих тел и гидроупругих систем.

8. Получена информация количественного и качественного характера, которая дает возможность для волновых процессов определять погрешности, вносимые при использовании упрощенных теорий и более простых моделей упругих и жидких сред, а также оценивать пределы применимости результатов, полученных с привлечением приближенных прикладных двумерных теорий, линейной классической теории упругости и моделей вязкой несжимаемой или идеальной жидкости.

9. Исследованы проблемы взаимодействия акустической волны с объектами, находящимися в сжимаемой (вязкой и идеальной) жидкости, мерой которого являются радиационные (средние во времени) силы, которые включают:

а) постановку в общей форме задач о вычислении средних во времени сил и сил взаимодействия между объектами (без ограничений на длину волны и размеры объектов) и разработку методов их решения;

б) решение отдельных классов задач для твердых и гибких частиц конкретной формы (сферической частицы, цилиндрической частицы, системы двух сферических частиц, системы двух цилиндрических частиц) при различных направлениях распространения относительно систем частиц плоской акустической волны;

в) выявление новых механических эффектов, обусловленных взаимодействием объектов в акустическом поле и вязкостью несущей жидкости.

10. Для сжимаемой вязкой жидкости разработан метод вычисления напряжений в звуковой волне, основанный на использовании упрощенной, применительно к волновым движениям жидкости, системы исходных нелинейных уравнений гидромеханики, в которых сохранены как нелинейные, так и диссипативные слагаемые. В результате получено выражение, позволяющее вычислить напряжение в сжимаемой вязкой жид-

кости с точностью до слагаемых величин второго порядка по числу Маха, исходя из потенциалов поля скоростей жидкости, определенных с такой же точностью из линеаризованных уравнений гидромеханики. Радиационная (постоянная составляющая гидродинамической силы) сила, действующая на тело, определяется как средняя по периоду волны величина поверхностного интеграла от внутреннего произведения тензора напряжений в жидкости и орта нормали к поверхности твердого тела.

11. Для сжимаемой вязкой жидкости, течение которой описывается принятой в рассмотренных работах системой линеаризованных уравнений гидромеханики, установлена аналогия с линейным вязкоупругим твердым телом, которое при изменении объема ведет себя как тело Фойгта, а при изменении формы – как тело Ньютона. Установленная аналогия позволяет задачу о малых гармонических колебаниях сжимаемой вязкой жидкости свести к задаче о стационарном состоянии гармонических колебаний вязкоупругого твердого тела. Это дает возможность при определении потенциалов поля скоростей жидкости свести задачу рассеяния акустической волны на свободных твердых частицах в сжимаемой вязкой жидкости к задаче дифракции изотермической гармонической волны расширения в вязкоупругой твердой среде на абсолютно жестких телах. Такой подход позволил использовать методы, развитые в механике деформируемого твердого тела для решения задач дифракции упругих волн в многосвязных областях.

12. Разработанный в реферируемых работах подход позволяет исследовать поведение систем твердых частиц в сжимаемой вязкой жидкости без ограничений на отношения длины волны к размерам частиц и к расстояниям между ними.

13. Выполнены предельные переходы в соответствующих выражениях для вязкой жидкости при стремлении коэффициентов вязкости к нулю, что позволило разработанный подход использовать для случая идеальной сжимаемой жидкости.

14. Аналитические решения в замкнутом виде получены при условии, что размеры твердой частицы значительно меньше длины акустической волны. В случае системы двух твердых частиц такое решение получено для идеальной жидкости при условии, что размеры частиц малы по сравнению с длиной волны, которая, в свою очередь, мала по сравнению с расстояниями между частицами. Сравнение результатов расчетов, полученных численно и по приближенным формулам, позволяет определить области изменения параметров жидкости, твердых частиц и звуковой волны, в которых с достаточной точностью можно использовать приближенные формулы для расчета средних во времени сил.

15. Выполнен анализ полученных численно и по приближенным формулам результатов исследований характера действия средних во времени сил на одиночные твердые частицы и системы двух таких частиц в идеальной и вязкой жидкостях при распространении акустической волны. В результате обнаружены новые механические эффекты, наиболее важные из которых сводятся к следующему:

а) средняя во времени сила, действующая на твердую частицу в жидкости, существенно зависит от отношения плотности жидкости к плотности материала частицы и увеличивается с ростом частоты;

б) при одной и той же частоте средняя во времени сила, действующая на твердую частицу в сжимаемой вязкой жидкости, существенно зависит от величины динамического коэффициента вязкости. В более вязкой жидкости акустическая волна создает большую по величине среднюю во времени силу. Величина этой силы на несколько порядков превосходит значение радиационной силы, действующей на частицу при тех же условиях в идеальной жидкости;

в) в отличие от идеальной жидкости в сжимаемой вязкой жидкости направление действующей на частицу средней во времени силы зависит от величины отношения плотности жидкости к плотности материала частицы;

г) свободные частицы, расположенные в жидкости вдоль направления распространения акустической волны, находятся под действием средних во времени сил, которые при постоянной частоте в зависимости от расстояния между частицами изменяются как по величине, так и по направлению. В связи с этим в акустическом поле возникают области притяжения, в которых средние во времени силы сближают

частицы, и области отталкивания, в которых частицы под действием этих сил удаляются. На границах раздела областей притяжения и отталкивания система частиц образует устойчивую или неустойчивую пару;

д) на систему двух свободных частиц, расположенных в жидкости перпендикулярно направлению распространения звуковой волны, *средние во времени силы действуют как вдоль направления распространения волны, так и перпендикулярно этому направлению*. Силы, действующие на частицы перпендикулярно направлению распространения волны, уменьшаются с увеличением расстояния между ними. Они не являются монотонными функциями расстояния, а изменяются по величине и по направлению. В результате возникают области притяжения и отталкивания частиц;

е) в случае жидкой капли направление действия радиационной силы зависит от отношения плотности жидкости капли к плотности окружающей жидкости. В окрестности резонансной частоты пульсационных колебаний капли радиационная сила увеличивается и при переходе частоты звуковой волны через резонансную частоту меняет направление;

ж) в зависимости от частоты радиационная сила для частицы в полости, в отличие от случая частицы в неограниченной жидкости, может быть направлена как в сторону распространения акустической волны, так и в противоположную сторону. В окрестности некоторых частот изменение величины радиационной силы имеет характер, близкий к резонансному.

В рассмотренных работах предложен подход, который включает постановку в общей форме задачи о действии средней во времени силы на твердые частицы и разработан метод ее решения, что позволяет исследовать поведение частиц в акустическом поле независимо от отношений длины волны к размерам частиц и к расстоянию между ними. В связи с этим полученные результаты могут быть использованы при оценке результатов исследований, выполненных на основе подходов, использующих упрощающие предположения.

Отметим, что в настоящей работе рассмотрены лишь некоторые результаты исследований динамики упругих тел, твердых и жидких частиц в сжимаемой вязкой жидкости. При отборе материала отдавалось предпочтение только тем, которые были получены в рамках трехмерной линеаризованной теории, учитывающей вязкость и сжимаемость жидкой среды, а также наличие начальных напряжений в упругих телах. При этом более подробно обсуждались результаты, полученные в Институте механики имени С.П. Тимошенко Национальной академии наук Украины за последние годы.

РЕЗЮМЕ. Наведено результати лінеаризації основних співвідношень в'язкої стисливої рідини стосовно до теорії малих коливань або рухів твердих тіл в ній і до теорії поширення малих збурень в пружних тілах, що взаємодіють із рідиною. Представлено загальні розв'язки рівнянь лінеаризованої теорії.

Розглянуто результати досліджень хвильових процесів у гідропружних системах, які виконано із застосуванням тривимірних лінеаризованих теорій пружності при скінченних деформаціях та в'язкої стисливої рідини. Наведено результати досліджень поширення акустичних хвиль різних типів в хвилюваннях з плоскими та круговими циліндричними поверхнями контакту пружних та рідких середовищ, а також вплив на них великих (скінченних) початкових деформацій та в'язкості й стисливості рідини.

Наведено огляд досліджень руху об'єктів у стисливих ідеальній та в'язкій рідинах під дією радіаційних сил, які обумовлені акустичним полем. Акцент зроблено на роботах, в яких використано метод, що ґрунтується на розв'язуванні задач гідродинаміки стисливої рідини, в якій знаходяться тверді частинки, з наступним обчисленням сил, діючих на частинки. Радіаційна сила визначається як стала складова гідродинамічної сили.

Числові результати досліджень наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. Алексеев В.Н. К вопросу о радиационной силе давления звука на сферу // Акуст. журнал. – 1983. – 29, № 2. – С. 129 – 136.
2. Альтберг В. О давлении звуковых волн и об абсолютных измерениях силы звука // ЖРФХО, часть физич. – 1903. – № 35. – С. 459 – 474.
3. Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Жук А.П. Упругие волны в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 4. – С. 3 – 23.

4. *Бабич С.Ю., Жук А.П.* К теории волн Стоунли на цилиндрической границе раздела жидкости и предварительно деформированного тела // Докл. АН УССР. – 1981, сер. А. – № 7. – С. 36 – 39.
5. *Багно А.М.* О распространении малых возмущений в системе предварительно напряженный несжимаемый цилиндр – жидкость // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 6. – С. 40 – 45.
6. *Багно А.М.* О распространении продольных волн в предварительно напряженном сжимаемом цилиндре, содержащем жидкость // Прикл. механика. – 1980. – 16, № 8. – С. 24 – 29.
7. *Багно А.М.* К вопросу о влиянии начальных напряжений на «обратную волну» в системе предварительно напряженный сжимаемый цилиндр – жидкость // Прикл. механика. – 1983. – 19, № 3. – С. 66 – 70.
8. *Багно А.М.* К вопросу о влиянии начальных напряжений на распространение волн в сжимаемом цилиндре с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 103 – 110.
9. *Багно А.М.* Влияние вязкой сжимаемой жидкости на распространение волн Стоунли на границе раздела твердой и жидкой сред // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 6. – С. 70 – 74.
10. *Багно А.М.* О влиянии жидкости на скорости осесимметричных волн в предварительно деформированном сжимаемом цилиндре // Гидромеханика. – 1984. – вып. 50. – С. 34 – 36.
11. *Багно А.М.* Влияние конечных деформаций на скорости волн Стоунли в высокоэластичном несжимаемом полупространстве, взаимодействующем с идеальной жидкостью // Прикл. механика. – 1985. – 21, № 6. – С. 116 – 119.
12. *Багно А.М.* Влияние начальных напряжений на поверхностные волны в системе предварительно деформированное сжимаемое тело – вязкая сжимаемая жидкость // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 6. – С. 32 – 36.
13. *Багно А.М.* Влияние начальных напряжений на скорости поверхностных волн в сжимаемом полупространстве, взаимодействующем с идеальным жидким слоем // Прикл. механика. – 1989. – 25, № 1. – С. 113 – 117.
14. *Багно А.М.* Влияние начальных напряжений на волновой процесс в упругом сжимаемом полупространстве, взаимодействующем с вязким жидким слоем // Докл. АН УССР, сер. А. – 1989. – № 8. – С. 22 – 25.
15. *Багно А.М.* Волны в предварительно деформированном упругом полупространстве, взаимодействующим со слоем вязкой сжимаемой жидкости / Всесоюзный симпозиум «Взаимодействие акустических волн с упругими телами» (Таллинн, 26 – 27 октября 1989): Тезисы докладов. – Таллинн, 1989. – С. 22 – 25.
16. *Багно А.М.* Влияние конечных деформаций на волновой процесс в несжимаемом полупространстве, несущем слой вязкой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 36 – 40.
17. *Багно О.М.* Поширення хвиль у попередньо деформованому стисливному пружному шарі, який взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини // Вісник Київ. націон. ун-т ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2014. – № 3. – С. 22 – 27.
18. *Багно О.М.* Хвильовий процес у стисливному пружному шарі, що взаємодіє з шаром в'язкої рідини // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – Вип. 23. – С. 27 – 39.
19. *Багно О.М.* Хвилі у попередньо деформованому стисливному пружному шарі, який взаємодіє з шаром в'язкої стисливої рідини // Вісник Київ. націон. ун-т ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-матем. науки. – 2014. – № 4. – С. 63 – 68.
20. *Багно О.М.* О дисперсии волн в упругом слое, несущем вязкий жидкий слой // Доп. НАН України. – 2015. – № 5. – С. 40–46.
21. *Багно А.М.* О частотном спектре нормальных волн в предварительно напряженном сжимаемом слое, взаимодействующем со слоем идеальной жидкости // Доп. НАН України. – 2015. – № 6. – С. 30 – 36.
22. *Багно А.М.* О волнах Лэмба в системе: слой идеальной жидкости – упругий слой // Доп. НАН України. – 2015. – № 7. – С. 39 – 46.
23. *Багно А.М.* О локализации квазилэмбовских волн в системе слой идеальной жидкости – упругий слой // Доп. НАН України. – 2016. – № 2. – С. 38 – 46.
24. *Багно А.М.* О квазилэмбовских волнах в системе слой идеальной жидкости – сжимаемый упругий слой с начальными напряжениями // Доп. НАН України. – 2016. – № 3. – С. 38 – 47.

25. *Багно А.М.* О влиянии вязкой жидкости на квазилэмбовские волны в упругом слое, взаимодействующем с жидким слоем // Доп. НАН України. – 2016. – № 4. – С. 41 – 48.
26. *Багно А.М., Гузь А.Н.* Исследование влияния жидкости на распространение продольных волн в предварительно напряженном цилиндре из несжимаемого материала // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 39 – 42.
27. *Багно А.М., Гузь А.Н.* О распространении волн в предварительно напряженном несжимаемом цилиндре, содержащем вязкую сжимаемую жидкость // Механика композитных материалов. – 1982. – № 2. – С. 349 – 355.
28. *Багно А.М., Гузь А.Н.* О распространении малых возмущений в системе: предварительно напряженное сжимаемое твердое тело – вязкая сжимаемая жидкость // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 1. – С. 167 – 170.
29. *Багно А.М., Гузь А.Н.* Влияние начальных напряжений на скорости волн в полом цилиндре с жидкостью // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 3. – С. 15 – 19.
30. *Багно А.М., Гузь А.Н.* Волны Стоунли на границе контакта предварительно напряженного несжимаемого твердого полупространства и вязкой сжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 3. – С. 107 – 110.
31. *Багно А.М., Гузь А.Н.* Упругие волны в предварительно напряженных телах, взаимодействующих с жидкостью (Обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 6. – С. 3 – 39.
32. *Багно А.М., Гузь А.Н., Ефремов В.И.* Влияние начальных деформаций на распространение волн в несжимаемом цилиндре, находящемся в идеальной жидкости // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 8. – С. 31 – 34.
33. *Багно А.М., Гузь А.Н., Шурук Г.И.* Влияние начальных деформаций на скорость волн в предварительно напряженном несжимаемом полупространстве, взаимодействующем со слоем идеальной жидкости // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 6. – С. 68 – 73.
34. *Багно А.М., Гузь А.Н., Шурук Г.И.* Волны в жидком вязком слое, находящемся на упругом полупространстве // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 4. – С. 3 – 7.
35. *Багно А.М., Гузь А.Н., Шурук Г.И.* Особенности неосесимметричного волнового процесса в ортотропной оболочке типа С.П.Тимошенко, содержащей вязкую жидкость // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 12. – С. 22 – 28.
36. *Багно А.М., Гузь А.Н., Шурук Г.И.* Волны в упругом предварительно напряженном сжимаемом слое, взаимодействующем с идеальной жидкостью // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 2. – С. 3 – 10.
37. *Багно А.М., Гузь А.Н., Шурук Г.И.* Влияние вязкости жидкости на волны в упругом предварительно деформированном сжимаемом слое, взаимодействующем с жидкой средой // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 9. – С. 3 – 8.
38. *Багно А.М., Кошман В.П.* Влияние конечных начальных деформаций на скорости волн Рэлея в несжимаемом полупространстве // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 9. – С. 18 – 20.
39. *Багно О.М., Шурук Г.И.* Особливості хвильового процесу в системі пружний шар – в'язка рідина // Доп. АН України. Матем., природознав., техн. науки. – 1993. – № 9. – С. 52 – 56.
40. *Басмат А.С., Гузь А.Н., Жук А.П.* Волновые и нестационарные движения твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости / В кн.: Динамика тел, взаимодействующих со средой / Под ред А.Н. Гузя – К.: Наук. думка, 1991. – С. 6-52.
41. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства // Акуст. журнал. – 2014. – 60, № 5. – С. 492 – 504.
42. *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 428 с.
43. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
44. *Весницкий А.И., Уткин Г.А.* Движение тела вдоль струны под действием сил волнового давления // Докл. АН СССР. – 1988. – **302**, № 2. – С. 278 – 280.
45. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
46. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С. 608 – 615.
47. *Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е.* Динамика частиц при воздействии вибраций. – К.: Наук. думка, 1975. – 168 с.
48. *Гольдберг З.А.* Давление звука / В кн.: Мощные ультразвуковые поля / Под ред Л.Д. Розенберга. – М.: Наука, 1968. – С. 49-86.

49. Гольдберг З.А., Наугольных К.А. О рэлеевском давлении звука // Акуст. журнал. – 1963. – **9**, № 1. – С. 28 – 31.
50. Горьков Л.П. О силах, действующих на малую частицу в акустическом поле в идеальной жидкости // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 1. – С. 88 – 91.
51. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Распространение волн в полом упругом цилиндре с жидкостью // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 21 – 26.
52. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства нормальных неосесимметричных волн в толстостенном цилиндре, заполненном жидкостью // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 10. – С. 15 – 20.
53. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве // Акустичний вісник. – 2005. – **8**, № 4. – С. 38 – 45.
54. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
55. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 270 с.
56. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. – 272 с.
57. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости сжимаемых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 8. – С. 700 – 703.
58. Гузь А.Н. О представлении общих решений линеаризованной теории упругости несжимаемых тел // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1975. – № 12. – С. 1092 – 1095.
59. Гузь А.Н. О линеаризованной теории распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 4. – С. 3 – 32.
60. Гузь А.Н. О волнах Лява в телах с начальными напряжениями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1092 – 1095.
61. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – К.: Наук. думка, 1979. – 144 с.
62. Гузь А.Н. О задачах гидроупругости для вязкой жидкости и упругих тел с начальными напряжениями // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 2. – С. 305 – 308.
63. Гузь А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 3. – С. 3 – 21.
64. Гузь А.Н. О представлении решений линеаризованных уравнений Стокса – Навье // Докл. АН СССР. – 1980. – **253**, № 4. – С. 825 – 827.
65. Гузь А.Н. О представлении решений линеаризованных уравнений Стокса – Навье для движущейся жидкости // Докл. АН СССР. – 1980. – **255**, № 5. – С. 1066 – 1068.
66. Гузь А.Н. Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 10. – С. 10 – 20.
67. Гузь А.Н. Динамика твердых тел в сжимаемой вязкой жидкости (покоящаяся жидкость) // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 3. – С. 3 – 22.
68. Гузь А.Н. Об одной аналогии в механике сплошной среды // Докл. АН СССР. – 1982. – **263**, № 3. – С. 563 – 565.
69. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
70. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 511 с.
71. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 1. Общие вопросы. – К.: Наук. думка, 1986. – 376 с.
72. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Т. 2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
73. Гузь А.Н. Проблемы гидроупругости для сжимаемой вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 1. – С. 3 – 15.
74. Гузь А.Н. Упругие волны в сжимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухосных остаточных напряжений // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 1. – С. 3 – 17.
75. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
76. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости (обзор). I // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 1. – С. 25 – 52.
77. Гузь А.Н. О необходимых и достаточных условиях описания движения объектов в вязкой жидкости при акустических воздействиях // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 64 – 71.

78. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости (обзор). II // Прикл. механика. – 2000. **36**, № 3. – С. 3 – 30.
79. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
80. Гузь А.Н., Багно А.М. Волны Стоунли на границе раздела упругого полупространства с начальными напряжениями и вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 12. – С. 3 – 7.
81. Гузь А.Н., Багно А.М. Влияние начальных напряжений на скорости волн в предварительно деформированном сжимаемом слое, контактирующим с жидким полупространством // Докл. Акад. наук СССР. – 1993. – **329**, № 6. – С. 715 – 717.
82. Гузь А.Н., Багно А.М., Шурук Г.И. Осесимметричные упругие волны в ортотропной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую сжимаемую жидкость // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 9. – С. 41 – 46.
83. Гузь О.М., Геращенко Н.В., Жук О.П. Дія акустичної хвилі на циліндричну частинку, розташовану близько твердої плоскої межі // Доп. НАН України. – 1996. – № 2. – С. 52 – 56.
84. Гузь А.Н., Головачан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – К.: Наук. думка, 1972. – 254 с.
85. Гузь А.Н., Жук А.П. О гидродинамических силах, действующих в акустическом поле в вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1982. – **266**, № 1. – С. 32 – 35.
86. Гузь А.Н., Жук А.П. О нелинейных задачах теории малых колебаний частиц в вязкой сжимаемой жидкости / Тр. IX Международ. конф. по нелинейным колебаниям. Приложение методов теории нелинейных колебаний в механике, физике, электронике, биологии. – К.: Наук. думка, 1984. – **3**. – С. 85 – 88.
87. Гузь А.Н., Жук А.П. О силах, действующих на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости // Докл. АН СССР. – 1984. – **274**, № 6. – С. 1313 – 1316.
88. Гузь А.Н., Жук А.П. Гидродинамическое взаимодействие двух сферических частиц в идеальной жидкости в поле звуковой волны // Докл. АН СССР. – 1984. – **279**, № 3. – С. 566 – 570.
89. Гузь А.Н., Жук А.П. О движении двух параллельных цилиндров в вязкой жидкости в поле акустической волны // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – № 6. – С. 158 – 164.
90. Гузь А.Н., Жук А.П. Воздействие акустической волны на твердые частицы в жидкости / Сб.ст.: Нелинейные задачи динамики машин. – М.: Ин-т машиноведения, РАН – 1992. – С. 43 – 52.
91. Гузь А.Н., Жук А.П. Динамика твердых частиц в жидкости при воздействии акустического поля. Модель кусочно-однородной среды. (Обзор) // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 5. – С. 3 – 20.
92. Гузь А.Н., Жук А.П. Динамика частиц возле плоской границы в радиационном поле акустической волны // Прикл. механика. – 1999. – **35**, № 10. – С. 74 – 79.
93. Гузь А.Н., Жук А.П. Движение твердой частицы в окрестности плоской границы жидкости в поле средних сил акустической волны // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 342 – 349.
94. Гузь А.Н., Жук А.П. О движении твердых частиц в жидкости при действии акустической волны. Механизм радиационного давления // Прикл. механика. – 2004. – **40**, №3. – С. 11 – 34.
95. Гузь А.Н., Жук А.П. О движении твердых частиц в жидкости при действии акустического поля / Успехи механики в 6-ти томах. Под редакцией А.Н.Гузя. Том 5. – К.: «Литера ЛТД», 2009. – 752 с. – С. 144 – 166.
96. Гузь А.Н., Жук А.П. Действие радиационного излучения в вязкой жидкости на сферическую каплю идеальной жидкости // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 6. – С. 3 – 11.
97. Гузь О.М., Жук О.П., Геращенко Н.В. Про рух циліндра біля твердої плоскої межі в радіаційному полі звукової хвилі // Доп. НАН України. – 1994. – № 11. – С. 61 – 65.
98. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
99. Гузь А.Н., Маркуш Ш., Пуст Л. и др. Динамика тел, взаимодействующих со средой / Под ред. А.Н.Гузя. – К.: Наук. думка, 1991. – 392 с.
100. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. – К.: Наук. думка, 1977. – 152 с.
101. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И., Лебедев В.К. Основы ультразвукового неразрушающего метода определения напряжений в твердых телах. – К.: Наук. думка, 1974. – 108 с.
102. Данилов С.Д. Средняя сила, действующая на малую сферу в поле бегущей волны в вязкой жидкости // Акуст. журнал. – 1985. – **31**, № 1. – С. 45 – 49.

103. Данилов С.Д., Миронов М.А. Одномерное моделирование средних сил в акустике // Акуст. журнал. – 1984. – **30**, № 3. – С. 306 – 309.
104. Данилов С.Д., Миронов М.А. О силе радиационного давления, действующей на малую частицу в звуковом поле // Акуст. журнал. – 1984. – **30**, № 6. – С. 467 – 473.
105. Данилов С.Д., Миронов М.А. Сила радиационного давления звука на малый рассеиватель, движущийся в однородном и изотропном поле // Акуст. журнал. – 1990. – **36**, № 1. – С. 21 – 24.
106. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 1. – С. 113 – 116.
107. Жук О.П. Хвилі Стоунлі на границі поділу рідини і попередньо напруженого тіла // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1980. – № 4. – С. 36 – 40.
108. Жук А.П. Взаимодействие твердой частицы со звуковой волной в вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 11. – С. 92 – 99.
109. Жук А.П. Исследование средней гидродинамической силы, действующей на сферическую частицу в звуковом поле в вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 1. – С. 126 – 127.
110. Жук А.П. Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц, обусловленное звуковой волной, распространяющейся вдоль линии центров // Прикл. механика. – 1984. – **20**, № 9. – С. 111 – 116.
111. Жук А.П. Гидродинамическое взаимодействие двух сферических частиц, обусловленное звуковой волной, распространяющейся перпендикулярно линии центров // Прикл. механика. – 1985. – **21**, № 3. – С. 110 – 116.
112. Жук А.П. Радиационная сила, действующая на цилиндрическую частицу в звуковом поле // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 7. – С. 103 – 108.
113. Жук А.П. Взаимодействие двух параллельных цилиндров, расположенных один за другим вдоль направления распространения звуковой волны // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 8. – С. 89 – 95.
114. Жук А.П. Взаимодействие двух параллельных цилиндров при распространении звуковой волны перпендикулярно плоскости осевых линий // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 11. – С. 105 – 111.
115. Жук А.П. Взаимодействие твердого цилиндра со звуковой волной в вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 1. – С. 107 – 114.
116. Жук А.П. О движении цилиндра в радиационном поле стоячей звуковой волны // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 3. – С. 123 – 126.
117. Жук А.П. Взаимодействие двух сферических тел в идеальной жидкости при прохождении акустической волны // Докл. АН УССР. Серия А. – 1989. – № 5. – С. 30 – 33.
118. Жук А.П. О применимости теории вязкоупругости при решении задач взаимодействия акустической волны с твердыми телами в вязкой жидкости // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1989. – № 6. – С. 35 – 38.
119. Жук А.П. Взаимодействие двух параллельных круговых цилиндров в идеальной жидкости при прохождении акустической волны // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 8. – С. 28 – 32.
120. Жук А.П. Взаимодействие двух тел в идеальной жидкости при прохождении плоской акустической волны / Тез. докл.: Всесоюзный симпозиум «Взаимодействие акустических волн с упругими телами» (Таллинн, 26 – 27 октября 1989). – Таллинн, 1989. – С. 92 – 95.
121. Жук А.П. Исследование взаимодействия акустической волны с цилиндром в вязкой жидкости на основе теории вязкоупругости // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 49 – 52.
122. Жук А.П. Исследование на основе теории вязкоупругости взаимодействия в вязкой жидкости двух параллельных цилиндров при прохождении акустической волны // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 42 – 45.
123. Жук А.П. Действие акустической волны на систему двух сферических тел в идеальной жидкости // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 5. – С. 102 – 108.
124. Жук А.П. Действие акустической волны на систему двух параллельных круговых цилиндров в идеальной жидкости // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 1. – С. 117 – 123.
125. Жук А.П. Исследование взаимодействия акустической волны со сферической частицей в вязкой жидкости на основе теории вязкоупругости // Докл. АН УССР. – 1991. – № 2. – С. 30 – 34.
126. Жук А.П. Исследование взаимодействия акустической волны в вязкой жидкости с двумя цилиндрами, расположенными параллельно // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 3. – С. 108 – 115.
127. Жук А.П. Исследование воздействия акустической волны на систему двух сфер в вязкой жидкости // Прикл. механика. – 1993. – **29**, № 2. – С. 110 – 116.

128. Жук О.П. Про визначення дії радіаційної сили на тверду кулю в потоці рідини // Доп. НАН України. – 2000. – № 7. – С. 50 – 54.
129. Жук О.П. Рух системи твердих частинок в радіаційному полі акустичної хвилі // Вісник Київ. Націон. ун-т ім. Т. Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2001. – № 5. – С. 275 – 279.
130. Жук А.П. Действие акустического излучения на сферическую каплю жидкости // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 7. – С. 26 – 34.
131. Жук О.П. Рух сферичної краплі рідини під дією радіаційної сили акустичного поля // Доп. НАН України. – 2007. – № 7. – С. 55–59.
132. Жук О.П. Дія радіаційних сил звукового поля на сферичну частинку в околі плоскої межі рідини // Доп. НАН України. – 2008. – № 7. – С. 71 – 76.
133. Жук А.П. Динамика сферической частицы у плоской границы жидкости при действии радиационных сил акустического поля // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 11. – С. 30 – 44.
134. Жук О.П., Кубенко В.Д., Жук Я.О. Про радіаційну силу плоскої акустичної хвилі, яка діє на тверде сферичне тіло в заповненій рідиною циліндричній порожнині // Доп. НАН України. – 2012. – № 9. – С. 48 – 54.
135. Жук А.П., Кубенко В.Д., Жук Я.А. Действие акустического излучения на жидкую сферу в заполненной жидкостью круговой цилиндрической полости // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 5. – С. 3 – 15.
136. Зарембо Л.К., Красильников В.А. Введение в нелинейную акустику. – М.: Наука, 1966. – 519 с.
137. Зарембо Л.К., Тимошенко В.И. Нелинейная акустика. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 104 с.
138. Зинин П.В., Левин В.М., Лобкис О.И., Маэв Р.Г. Силы радиационного давления в фокальной области акустического микроскопа // Акуст. журнал. – 1986. – **32**, № 6. – С. 785 – 790.
139. Каневский И.Н. Постоянные силы, возникающие в звуковом поле. Обзор // Акуст. журнал. – 1961. – **7**, № 1. – С. 3 – 17.
140. Комиссарова Г.Л. К решению задачи о распространении упругих волн в цилиндре с жидкостью // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 8. – С. 25 – 29.
141. Красильников В.А., Крылов В.В. Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984. – 340 с.
142. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
143. Кузнецов С.В. Волны Лэмба в анизотропных пластинах (обзор) // Акуст. журнал. – 2014. – **60**, № 1. – С. 90 – 100.
144. Ландау Л.Д., Лившиц В.М. Теоретическая физика, т. 6: Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
145. Мак-Интайр М. Миф о «волновом импульсе» // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы: Сб. статей / Под редакцией Дж. Бэтчелор, Г. Моффат. – М.: Мир, 1984. – С. 454 – 476.
146. Мандельштам Л. Групповая скорость в кристаллической решетке // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1945. – **15**, вып. 9. – С. 475 – 478.
147. Медников В.П. Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 264 с.
148. Микер Т., Мейтцлер А. Волновое распространение в протяженных цилиндрах и пластинах. – М.: Мир, 1966, 1, Ч. А. – С. 140 – 203.
149. Морс Ф.М., Феибах Г. Методы теоретической физики: В 2-х томах. – М.: Иностран. лит., 1960. – **2**, – 886 с.
150. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. – М.: Наука, 1975. – 287 с.
151. Стрэтт Д.В. (Лорд Рэлей). Теория звука, том II. – М.: Гостехиздат, 1955. – 476 с.
152. Широкова Н.Л. Коагуляция аэрозолей / В кн.: Физические основы ультразвуковой технологии. Т.3 / Под ред. Л.Д. Розенберга. – М.: Наука, 1970. – 688 с.
153. Шурук Г.И. Волны кручения в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью // Прикл. механика. – 1983. – **19**, № 4. – С. 117 – 121.
154. Avatani J. Studies on acoustic radiation pressure // J. Acoust. Soc. America. – 1955. – **27**, N 2. – P. 278 – 286.
155. Vagno A. Propagation of waves in pre-stressed elastic cylinders, containing liquid // Proc. Int. conf. EАНЕ. «Engineering aerohydroelasticity». Prague – Dezember 5 – 8, 1989. – **2**. – P. 180 – 184.
156. Bayer R.T. Radiation pressure – the history of mislabeled fluid // J. Acoust. Soc. America. – 1978. – **63**. – P. 1025 – 1030.
157. Bayer R.T. Radiation pressure in a sound wave // Amer. J. Phys. – 1950. – **18**. – P. 25.
158. Beissner K. Acoustic radiation pressure in the near field // J. Sound Vibr. – 1984. – **93**, N 4. – P. 537 – 548.
159. Biot M.A. Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid // J. Appl. Phys. – 1952. – **23**, N 9. – P. 997 – 1005.

160. Бранков Г., Рачев А., Петров В. Разпространение на пулсова вълна с отчитане началната напрегнатост на артериалните съдове // Биомеханика. – 1974. кн.1. – С. 17 – 26.
161. Borgnis F.E. Theory of acoustic radiation pressure // Rev. Mod. Phys. – 1953. – **25**, N 3. – P. 653 – 664.
162. Brillouin L. Sur les tensions de radiation // Ann. de Physique. – 1925. – **10**, N 4. – P. 528 – 586.
163. Brillouin L. Les pressions de radiation et leur aspect tensorial // J. Phys. et radium. – 1956. – **17**, N 5. – P. 370.
164. Cai F., Meng L., Pan Y., Zheng H. Computation of the acoustic radiation force using the finite-difference time-domain method // J. Acoust. Soc. Am. – 2010. – **128**. – P. 1617 – 1622.
165. Doinnikov A. Radiation force due to a spherical sound field on a rigid sphere in a viscous fluid // J. Acoust. Soc. America. – 1994. – **96**, N 5. – P. 3100 – 3105.
166. Dzyuba V.V., Kubenko V.D. Axisymmetric Interaction Problem for a Sphere Pulsating Inside an Elastic Cylindrical Shell Filled with and Immersed Into a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 10. – P. 1210 – 1219.
167. Fisher K.A., Miles R. Modeling the acoustic radiation force in microfluidic chambers // J. Acoust. Soc. Am. – 2008. – **123**. – P. 1862 – 1865.
168. Guz A.N. On Linearized Problems of Elasticity Theory // Int. Appl. Mech. – 1970. – **6**, N 2. – P. 109 – 116.
169. Guz A.N. Analogies Between Linearized and Linear Elasticity Theory Problems for Homogeneous Initial States // Int. Appl. Mech. – 1972. – **8**, N 5. – P. 549 – 552.
170. Guz A.N. Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 1. – P. 23 – 59.
171. Guz A.N. Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
172. Guz A.N. On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // J. Phys. Science and Application. – 2011. – **1**, N 1, June. – P. 1 – 15.
173. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
174. Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E. Dynamics of Shell Systems Interacting with a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 3. – P. 260 – 301.
175. Guz A.N., Zhuk A.P. On nonlinear interaction of solid particles with a sound wave in viscous liquid // IUTAM Symp., Tallin, ESSR, 1982 / Berlin, Springer Verlag, 1983. – P. 365 – 378.
176. Guz A.N., Zhuk A.P. The Dynamics of Rigid Bodies Near the Wall in a Compressible Viscous Fluid under the Action of Acoustic Waves / A.N.Cuz. Dynamics of Compressible Viscous Fluid / An International Series of Scientific Monographs, Textbooks and Lecture Notes «Stability, Oscillations and Optimization of System». – Cambridge Scientific Publishers, 2009. / Appendix II. – P. 367 – 395.
177. Guz A.N., Zhuk A.P. Dynamics of a rigid cylinder near a plane boundary in the radiation field of an acoustic wave // Journal of Fluids and Structures. – 2009. – **25**. – P. 1206 – 1212.
178. Hazegava T., Ochi M., Matsuzava K. Acoustic radiation force on a solid elastic sphere in a spherical wave field // J. Acoust. Soc. America. – 1981. – **69**. – P. 937 – 943.
179. Hurray E.M.J. Experimental studies on acoustic radiation pressure // J. Acoust. Soc. America. – 1955. – **25**, N 5. – P. 981 – 896.
180. King L.V. On the acoustic radiation pressure on sphere // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1934. – **147**, N 861. – P. 212 – 240.
181. Kubenko V.D., Dzyuba V. V. Diffraction of a plane acoustic wave by a rigid sphere in a cylindrical cavity: an axisymmetric problem // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, N 4. – P. 424 – 437.
182. Lamb H. On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1917. – **93**, N 648. – P. 114 – 128.
183. Maidanik G. Acoustical radiation pressure due to incident plane progressive waves on spherical objects // J. Acoust. Soc. America. – 1957. – **29**, N 6. – P. 738 – 742.
184. Maidanik G. Torques due to acoustical radiation pressure // J. Acoust. Soc. America. – 1958. – **30**, N 7. – P. 620.
185. Marston P.L. Radiation force of a helicoidal Bessel beam on a sphere // J. Acoust. Soc. Am. – 2009. – **125**. – P. 3539 – 3547.
186. Meitzler A.H. Backward – wave transmission of stress pulses in elastic cylinders and plates // J. Acoust. Soc. Amer. – 1965. – **38**, N 5. – P. 835 – 842.
187. Olsen H., Romberg W., Wergeland H. Radiation force on bodies in a sound field // J. Acoust. Soc. America. – 1958. – **30**, N 1. – P. 69 – 76.

188. *Olsen H., Wergeland H., Westervelt P.J.* Acoustic radiation force // J. Acoust. Soc. America. – 1958. – **30**, N 7. – P. 633 – 638.
189. *O'Neyl H.T.* Theory of focusing radiation // J. Acoust. Soc. America. – 1949. – **21**. – P. 516 – 526.
190. *Ottenio M., Destrade M., Ogden R.W.* Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid // Int. J. of Non-Linear Mech. – 2007. – **42**, N 2. – P. 310–320.
191. *Pochhammer L.* Uber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten Schwingungen in einem unbergawzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine und Angew. Math. – 1876. – **81**, N 4. – S. 324 – 336.
192. *Rayleigh J.W.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. Lond. Math. Soc. – 1885/1886. – **17**, N 253. – P. 4 – 11.
193. *Rayleigh (Strutt J.W.).* On the momentum and pressure of gaseous vibrations and on the connexion with virial theorem // Phil. Mag. – 1905. – **10**, N 47. – P. 364 – 374.
194. *Silva G.T.* An expression for the radiation force exerted by an acoustic beam with arbitrary wavefront // J. Acoust. Soc. America. – 2011. – **130**. – P. 3541 – 3544.
195. *Smith W.E.* Average radiation – pressure forces produced by sound fields // Austral. J. Phys. – 1964. – **17**, N 3. – P. 389.
196. *Smith W.E.* Radiation pressure forces in terms of impedance, admittance and scattering matrices // J. Acoust. Soc. America. – 1965. – **37**, N 5. – P. 932.
197. *Stoneley R.* The elastic waves at the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1924. – **106**, N 732. – P. 416 – 429.
198. *Tolstoy I., Usdin E.* Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. America. – 1957. – **29**, N 1. – P. 37 – 42.
199. *Westervelt P.J.* Acoustic radiation pressure // J. Acoust. Soc. America. – 1957. – **29**, N 1. – P. 26 – 29.
200. *Yosioka K., Kawasima Y.* Acoustic radiation pressure on compressible sphere // Acoustic. – 1955. – **5**, N 3. – P. 167 – 173.
201. *Zhuk A.P.* Interaction of solid bodies immersed in liquid in the acoustic wave field // Proc. Int. conf. EANE «Engineering aero-hydroelasticity». Prague, 1989. – 2. – P. 310 – 315.
202. *Zhuk A.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.A.* Acoustic radiation force on a spherical particle in a fluid – filled cavity // J. Acoust. Soc. America. – 2012. – **132** (4). – P. 2189 – 2197.

Поступила 08.06.2015

Утверждена в печать 05.07.2016