

Ю . А . М е й ш

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОПЕРЕЧНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: juliameish@gmail.com*

**Abstract.** A problem on the forced vibrations of transversely stiffened cylindrical shells of elliptic cross-section on the elastic foundation under action of non-stationary loads is considered. The dynamical behavior of shells is studied within the framework of the theory of shells and rods with allowance for the Timoshenko hypotheses. A numerical algorithm of solving the problem is developed. A numerical example of analysis for the case of distributed impulse loading is given.

**Key words:** transversely stiffened cylindrical shell, elastic foundation, theory of shells and rods of Timoshenko type, non-stationary process, numerical method.

**Введение.**

Задачи определения динамического поведения подкрепленных оболочек на упругом основании условно можно разделить на две части: *а)* задачи о влиянии упругого основания на гладкие пластины и оболочки [4, 10 – 12, 15, 16, 19]; *б)* задачи о влиянии подкрепляющих элементов на неоднородную конструкцию [3, 8, 9, 14, 16]. Следует отметить работы, в которых учтено совместное влияние упругой среды и подкрепляющих элементов на напряженно-деформируемое состояние исходных неоднородных конструкций [1, 3, 4, 13, 15, 17, 18].

Как частный случай подкрепленных оболочек эллиптического сечения на упругом основании, рассмотрены задачи динамического поведения дискретно подкрепленных цилиндрических и сферических оболочек [3].

В данной работе рассмотрены задачи о вынужденных колебаниях цилиндрических дискретно подкрепленных оболочек эллиптического сечения на упругом двухпараметрическом основании Винклера – Пастернака при действии распределенной импульсной нагрузки. Динамическое поведение подкрепленной неоднородной оболочки рассмотрено согласно варианту геометрически линейной теории оболочек и стержней с учетом гипотез Тимошенко. Для решения поставленной задачи использован метод конечных разностей по пространственным и временной координатам [3, 6]. Приведены численные результаты решения задачи в зависимости от геометрических и физико-механических параметров конструкции и упругого основания.

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим подкрепленную цилиндрическую оболочку эллиптического поперечного сечения при действии распределенной внутренней нагрузки  $P_3(s_1, s_2, t)$ , где  $s_1, s_2$  и  $t$  – пространственные и временная координаты. Коэффициенты первой квадратичной формы и кривизны координатной поверхности исходной оболочки примем в следующем виде:

$$A_1 = 1; \quad k_1 = 0; \quad (1.1)$$

$$A_2 = (a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2};$$

$$k_2 = ab(a^2 \cos^2 \alpha_2 + b^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2},$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса, характеризующего поперечное сечение цилиндрической оболочки.

Для вывода уравнений колебаний подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании используем вариационный принцип стационарности Гамильтона – Остроградского [1, 3, 5]. После стандартных преобразований в вариационном функционале получим две группы уравнений:

1) уравнения колебаний гладкой цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial S}{\partial s_2} = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial s_2} + k_2 T_{23} = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}; \quad (1.2)$$

$$C_2 \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial s_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial T_{13}}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial s_2} - k_2 T_{22} - C_1 u_3 + P_3(s_1, s_2, t) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial H}{\partial s_2} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial H}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial s_2} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2},$$

2) уравнения колебаний  $j$ -го поперечного подкрепляющего элемента, расположенного вдоль оси  $s_2$ , т. е.

$$\frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j = \rho_j F_j \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right);$$

$$\frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} + k_2 T_{22} + [T_{13}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}]_j = \rho_j F_j \left[ \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{torj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right];$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} + [H]_j = \rho_j F_j \left[ \pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left( h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right].$$

В уравнениях (1.2) – (1.3)  $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$  – компоненты обобщенного вектора перемещений срединной поверхности оболочки;  $\rho, \rho_j$  – плотности материалов оболочки и  $j$ -го ребра, соответственно;  $h$  – толщина оболочки;  $h_{cj} = 0,5(h + h_j)$ ;  $h_j$  – высота поперечного сечения  $j$ -го ребра. Величины  $[f]_i = f^+ - f^-$ , где  $f^\pm$  – значения функ-

ций справа и слева на  $j$ -й линии разрыва (линия проектирования центра тяжести  $j$ -го ребра на срединную поверхность цилиндрической оболочки);  $C_1$  – коэффициент основания Винклера;  $C_2$  – коэффициент основания Пастернака.

Величины усилий и моментов в уравнениях колебаний для оболочки (1.2) связаны с соответствующими величинами деформаций следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_2 \varepsilon_{22}); & T_{22} &= B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_1 \varepsilon_{11}); & (1.4) \\ M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_2 \kappa_{22}); & M_{22} &= D_{22}(\kappa_{22} + \nu_1 \kappa_{11}); & H &= D_{12} \kappa_{12}; \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_1}; & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} + k_2 u_3; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} + \frac{\partial u_2}{\partial s_1}; & \varepsilon_{13} &= \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial s_1}; & \varepsilon_{23} &= \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_2 u_2; \\ \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1}; & \kappa_{22} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}; & \kappa_{12} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

В соотношениях (1.4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; & B_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_1 \nu_2}; \\ B_{12} G_{12} h; & B_{13} &= G_{13} h; & B_{23} &= G_{23} h; \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; & D_{12} &= G_{12} \frac{h^3}{12}, \end{aligned}$$

где  $E_1, E_2, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_1, \nu_2$  – физико-механические параметры ортотропного материала оболочки.

Величины усилий – моментов в уравнениях колебаний для  $j$ -го ребра (1.3) связаны с соответствующими величинами деформаций соотношениями:

$$\begin{aligned} T_{22j} &= E_j F_j \varepsilon_{22j}; & T_{12j} &= G_j F_j \varepsilon_{12j}; & T_{13j} &= G_j F_j \varepsilon_{13j}; & (1.5) \\ M_{22j} &= E_j I_{1j} \kappa_{22j}; & M_{12j} &= G_j I_{torj} \kappa_{12j}; \\ \varepsilon_{22j} &= \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \pm h_{ej} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}; & \varepsilon_{12j} &= \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \pm h_{ej} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}; \\ \varepsilon_{23j} &= \varphi_2 + \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - k_{2j} u_2; & \kappa_{22j} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial s_2}; & \kappa_{12j} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_2}. \end{aligned}$$

В соотношениях (1.5)  $E_j, G_j$  – физико-механические параметры материала ребра;  $F_j, I_{1j}, I_{torj}$  – геометрические параметры поперечного сечения  $j$ -го ребра.

Уравнения колебаний (1.2) – (1.5) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

## §2. Численный алгоритм решения задач.

Численный алгоритм решения начально-краевой задачи (1.2) – (1.5) основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных соотношений по пространственным координатам  $s_1, s_2$  и явной аппроксимации по временной координате  $t$  [3, 6].

Рассмотрим область  $D = \{s_{10} \leq s_1 \leq s_{1N}; s_{20} \leq s_2 \leq s_{2N}\}$ . Выберем подобласть  $D_{kl}^1 \subset D$ ,  $D_{kl}^1 = \{s_{1k-1/2} \leq s_1 \leq s_{1k+1/2}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$  и проинтегрируем уравнения колебаний (1.2) по этой подобласти. В результате получим следующие разностные соотношения для определения решения на  $(n+1)$ -ом временном слое:

$$\frac{T_{11k+1/2,l}^n - T_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} = \rho h (u_{1k,l}^n)_{\bar{t}}; \quad (2.1)$$

$$\frac{S_{k,l+1/2}^n - S_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k+1/2,l}^n - T_{22k-1/2,l}^n}{\Delta s_2} + \frac{k_{2k,l}}{2} (T_{23k,l-1/2}^n + T_{23k,l+1/2}^n) = \rho h (u_{2k,l}^n)_{\bar{t}};$$

$$\frac{T_{13k+1/2,l}^n - T_{13k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{T_{22k,l+1/2}^n - T_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} + \frac{k_{2k,l}}{2} (T_{22k,l-1/2}^n + T_{22k,l+1/2}^n) + P_{3k,l}^n = \rho h (u_{3k,l}^n)_{\bar{t}};$$

$$\frac{M_{11k+1/2,l}^n - M_{11k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{H_{k,l+1/2}^n - H_{k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} -$$

$$-\frac{1}{2} (T_{13k+1/2,l}^n + T_{13k-1/2,l}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{1k,l}^n)_{\bar{t}};$$

$$\frac{H_{k+1/2,l}^n - H_{k-1/2,l}^n}{\Delta s_1} + \frac{M_{22k,l+1/2}^n - M_{22k,l-1/2}^n}{\Delta s_2} -$$

$$-\frac{1}{2} (T_{23k,l+1/2}^n + T_{23k,l-1/2}^n) = \rho \frac{h^3}{12} (\varphi_{2k,l}^n)_{\bar{t}}.$$

Таким образом, в разностных соотношениях величины обобщенных перемещений  $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2$  отнесены к целым узлам пространственной разностной сетки, а величины усилий и моментов (соответственно деформаций) – к полуцелым узлам  $(k \pm 1/2, l)$ ;  $(k, l \pm 1/2)$ . Для получения обобщенных разностных соотношений для усилий и моментов, уравнения (1.4) интегрируются по областям:

$$D_{kl}^2 = \{s_{1k-1} \leq s_1 \leq s_{1k}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\};$$

$$D_{kl}^2 = \{s_{1k} \leq s_1 \leq s_{1k+1}; s_{2l-1/2} \leq s_2 \leq s_{2l+1/2}\}$$

и т. д. В соотношениях (2.1) обозначения разностных производных введены согласно [3, 6]. Аналогичным образом строим разностные соотношения для уравнений колебаний  $j$ -го подкрепляющего элемента (1.3), (1.5) [3, 6].

### §3. Результаты численных исследований.

Как числовой пример, рассмотрим задачу динамического поведения поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки эллиптического сечения при действии распределенной внутренней импульсной нагрузки. Полагаем, что все стороны цилиндрической оболочки жестко закреплены.

Распределенную импульсную нагрузку  $P_3(s_1, s_2, t)$  задаем следующим образом:

$$P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где  $A$  – амплитуда нагрузки;  $T$  – длительность нагрузки. В расчетах принято:  $A = 10^6$  Па;  $T = 50 \cdot 10^{-6}$  с.

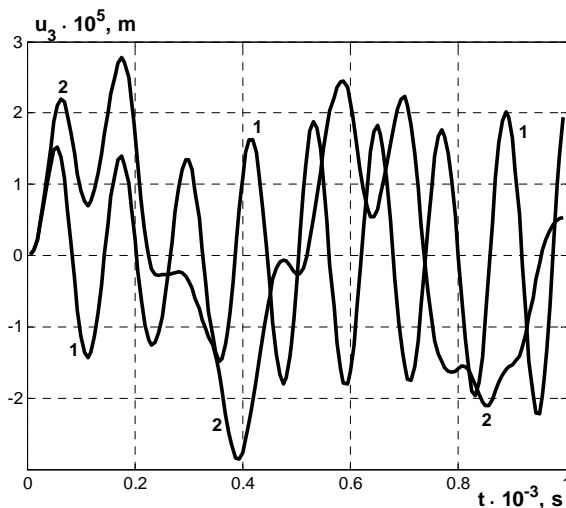


Рис. 1

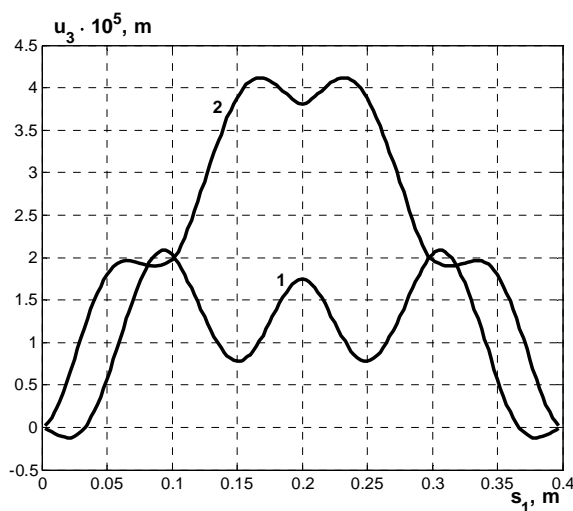


Рис. 2

Задачу решаем при следующих геометрических и физико-механических параметрах для цилиндрической оболочки:  $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$  Па;  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $h = 10^{-2}$  м;  $L = 0,4$  м. Параметры эллиптичности поперечного сечения при расчетах примем следующими: 1)  $a = b = 0,1$ ; 2)  $a = 1,2b$ . Расчеты проводились в области  $D = \left\{ 0 \leq s_1 \leq L, 0 \leq s_2 \leq A_2 \frac{\pi}{8} \right\}$  на временном отрезке  $0 \leq t \leq 80T$ . Поперечные ребра располагались в сечениях  $s_{1j} = 0,25jL$ ;  $j = \overline{1,3}$ . Расчеты проведены для случая упругого основания Винклера:  $C_1^1 = 10^9$  Н/м<sup>3</sup>;  $C_1^2 = 2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>;  $C_1^3 = 3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>3</sup>.

На рис. 1, 2 представлены результаты численных расчетов для величин  $u_3$  для случая  $C_1^1$ . Кривые с индексом 1 соответствуют случаю  $a/b = 1$ , с индексом 2 –  $a/b = 1,2$ . На рис. 1 приведены зависимости величин  $u_3$  от временной координаты  $t$  в точке  $s_1 = 0,375L$ ;  $s_2 = 0$  (середина расстояния между первым и вторым ребром в сечении  $s_2 = 0$ ).

Как видим, наличие эллиптичности поперечного сечения оболочки приводит к значительному отличию как по амплитуде значений, так и по частотным характеристикам по сравнению с оболочкой кругового сечения.

На рис. 2 приведены зависимости величины  $u_3$  по пространственной координате  $s_1$  в сечении  $s_2 = 0$  для случая  $t = 3,5T$  (время достижения максимального значения величины  $u_3$  для случая  $a/b = 1$  на исследуемом интервале времени).

Значительное отличие величин  $u_3$  для двух случаев расчетов анализируется, исходя из зависимостей, приведенных на рис. 1. Расчеты для случаев упругого основания  $C_1^2$  и  $C_1^3$  имеют аналогичный как качественный, так и количественный характер.

### Выводы.

Рассмотрены задачи о вынужденных колебаниях дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек эллиптического сечения на упругом основании при распределенной импульсной нагрузке. Динамическое поведение дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек рассмотрено в рамках теории оболочек и стержней согласно модели Тимошенко.

Для решения поставленной задачи использован метод конечных разностей по пространственным и временной координатам.

Представлены численные результаты решения задач, дан анализ влияния упругого основания на напряженно-деформированное состояние исходной подкрепленной конструкции.

РЕЗЮМЕ. Досліджено вимушені коливання поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі під дією нестационарних навантажень. Динамічну поведінку підкріплених циліндричних оболонок розглянуто в рамках теорії оболонок та стержнів з врахуванням гіпотез Тимошенка. Представлено постановку та розроблено чисельний алгоритм розв'язання даного класу задач. Наведено чисельний приклад розрахунку динамічної поведінки поперечно підкріплених циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при дії розподіленого внутрішнього імпульсного навантаження та дано аналіз числових результатів.

1. *Вестяк А.В., Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарные взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой // Итоги науки и техники: Механика деформированного твердого тела. Т. 15. – М.: ВИНТИ, 1983. – С. 69–148.
2. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* О решении осесимметрических задач динамики цилиндрических оболочек на упругом основании // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 12. – С. 85–94.
3. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
4. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Головко К.Г.* О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 2. – С. 99–106.
5. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – К.: Сталь, 2000. – 600 с.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
7. *Akgoz B., Civalek O.* Nonlinear vibration analysis of laminated plates resting on nonlinear two – parameters elastic foundations // Steel and Composite Structures. – 2011. – **11**, N 5. – P. 403–421.
8. *Bayat M., Pakar I., Bayat M.* Analytical solution for nonlinear vibration of an eccentrically reinforced cylindrical shell // Steel and Composite Structures. – 2013. – **14**, N 5. – P. 511–521.
9. *Carrera E., Zappino E., Filippi M.* Free Vibration Analysis of Thin – Walled Cylinders Reinforced With Longitudinal and Transversal Stiffeners // J. Vibr. and Acoust. – 2013. – **135**, N 1. – P. 177–188.
10. *Civalek Ö.* Geometrically nonlinear dynamic and static analysis of shallow spherical shell resting on two-parameters elastic foundations // Int. J. Pres. Vessels and Piping. – 2014. – **113**. – P. 1–9.
11. *Gupta A.P.* Vibration of rectangular orthotropic elliptic plates on quadratically varying thickness on elastic foundation // Trans. ASME J. Vibr. and Acoust. – 2004. – **126**, N 1. – P. 132–140.
12. *Güler K.* Circular Elastic Plate Resting on Tensionless Pasternak Foundation // J. Eng. Mech. ASCE. – 2004. – **130**, N 10. – P. 1251–1254.
13. *Lugovoi P.Z., Prokopenko N.Ya.* Effects of Elastic Foundation on Dispersion of Harmonic Waves in Cylindrical Shells Stiffened Longitudinally // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 5. – P.116–124.
14. *Mustafa B.A.J., Ali R.* Prediction of Natural Frequency of Vibration of Stiffened Cylindrical Shells and Orthogonally Stiffened Curved Panels // J. Sound and Vibr. – 1987. – **43**. – P. 317–327.
15. *Paliwad D.N.* Free vibrations of orthotropic cylindrical shell on elastic foundation // AIAA J. – 1999. – **37**, N 9. – P. 1135–1139.
16. *Qatu M.S.* Vibrations of Laminated Shells and Plates. – Amsterdam: Elsevier Academic Press, 2004. – 430 p.
17. *Skosarenko Yu.V.* Free Vibrations of Ribbed Cylindrical Shell Interacting with an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 5. – P. 575–581.
18. *Skosarenko Yu.V.* The Stress-Strain State of a Ribbed Cylindrical Shell Interacting with Elastic Foundation under Short –Term Loads // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P.92–101.
19. *Tornabene F., Fantuzzi N., Viola E., Reddy J.N.* Winkler-Pasternak Foundation Effect on the Static and Dynamic Analyses of Laminated Doubly-Curved and Degenerate Shells and Panels // Composites. Part B. Engineering. – 2014. – **57**, N 1. – P. 269–296.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016