

В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок, В. И. Козлов

**ТЕРМОМЕХАНИКА НЕУПРУГИХ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КОНСТРУКЦИЙ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ И
АКТУТОРАМИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:karn@inmech.kiev.ua*

Abstract. The models, numerical-analytical methods and results of studying the forced resonance vibrations and dissipative heating of the thin-wall inelastic structural members with piezoelectric sensors and actuators under monoharmonic mechanical and electric loading are presented. The thermomechanical behavior of passive and piezoactive materials is described using the concept of complex characteristics. It is assumed that these characteristics depend on temperature and the strain tensor invariants. The classical and refined thermomechanical theories are used in modeling the vibrations and dissipative heating of the thin-wall structural members with sensors and actuators. The solutions of nonlinearly coupled problems of thermomechanics of thin-wall structural members are obtained by use of iteration and numerical methods. The thermal failure of the structural members is considered. The methods of analysis of the critical parameters of electrical and mechanical monoharmonic loading as well as the methods of analysis of postcritical state are described. An influence of different factors on effectiveness of active damping of the resonance vibrations of inelastic thin-wall structural members by the piezoelectric sensors and actuators is studied.

Key words: thin-wall structural members, resonance vibrations, inelastic material, dissipative heating, piezoelectric sensors and actuators.

Введение.

Как конструктивные элементы, тонкие стержни, пластины и оболочки широко используются в различных областях современной техники: авиа-, машино-, судостроении, космической и ракетной технике, строительстве, гидроакустике, медицине, электронике и др. Одним из основных и наиболее распространенных режимов работы таких элементов являются вынужденные гармонические колебания, в частности, резонансные. Все материалы при колебаниях в той или иной степени обладают гистерезисными потерями, в результате чего механическая или электромеханическая энергия превращается в тепловую. Гистерезисные потери существенно увеличиваются в неупругих материалах – вязкоупругих, упругопластических и вязкоупругопластических. Этот эффект широко используется при разработке пассивных методов демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов с целью уменьшения их динамической напряженности, когда в структуру элемента с малым гистерезисом включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями, что приводит к существенному уменьшению амплитуды колебаний конструкции. Исследованию пассивного демпфирования колебаний посвящена обширная литература в виде энциклопедий, монографий и статей [10, 17, 19, 57, 62 – 65, 70, 76, 95, 138, 139].

Однако повышение гистерезисных потерь может сопровождаться существенным повышением температуры, которую в дальнейшем будем называть температурой диссипативного разогрева (ТДР). Она может повлиять как на механическое и тепловое состояния конструкции (распределение напряжений и деформаций в деформируемом теле, амплитудно- и температурно-частотные характеристики, частотную зависимость

коэффициента демпфирования), так и на динамическую и статическую устойчивость тонкостенных элементов, их механическое и тепловое разрушение, ползучесть [8, 9, 28, 66]. Кроме того, все материалы при определенной температуре (точке деградации) теряют свое функциональное назначение.

Как правило, точке деградации соответствует переход материала из одного фазового состояния в другое. Для пассивного материала точкой деградации является, например, температура плавления, а для пьезоэлектрического материала – точка Кюри, при достижении которой теряется пьезоэффект. Поэтому, по мнению авторов данной статьи, ТДР необходимо учитывать при исследовании вынужденных колебаний элементов конструкций из неупругих материалов, так как неучет этого явления может привести к недостоверным результатам. Несмотря на этот очевидный факт, подавляющее большинство работ по вынужденным резонансным колебаниям неупругих тонкостенных элементов выполнено без такого учета.

В последние годы для демпфирования колебаний тонкостенных элементов эффективно применяются активные методы, базирующиеся на включении пьезоактивных компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала. В большинстве случаев в качестве активных элементов используются пьезоэлектрические компоненты. Обзор зарубежных работ по активному управлению стационарными и нестационарными колебаниями элементов конструкций представлен в [89, 90, 150, 153, 154]. Одни из указанных выше пьезоактивных элементов (сенсоры) дают информацию о механическом состоянии тела, а при помощи других (актуаторов) к конструкции прикладывается электрическая нагрузка, компенсирующая действие механической нагрузки. Конструкции из пассивных материалов с присоединенными к ним пьезоактивными сенсорами и актуаторами, позволяющими управлять их механическим состоянием, называют смарт конструкциями, а используемые для этой цели активные материалы смарт материалами (от английского слова smart – умный). К смарт материалам принадлежат также магнитоактивные материалы, материалы с памятью формы и др. Smart или intelligent материалы способны реагировать на внутренние или внешние влияния (изменения внешней среды) и привести в действие свои функции в соответствии с этими изменениями. Одним из наиболее ярких примеров эффективного применения таких материалов и является активное демпфирование стационарных и нестационарных колебаний тонкостенных элементов при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов.

Эффективность активного демпфирования колебаний существенно зависит от эффективности работы сенсоров и актуаторов, на которую, в свою очередь, влияет много факторов: их геометрические и электромеханические характеристики; геометрические и механические характеристики пассивного элемента; механические и электрические граничные условия; температура. В зависимости от механических граничных условий работа сенсора и актуатора будет наиболее эффективной при полном либо при частичном (в виде пятен) покрытии тонкостенного элемента пьезоэлектрическими слоями. При частичном покрытии тела из пассивного материала пьезослоями эти пятна можно формировать при помощи разрезных электродов.

Особенно заметное влияние на эффективность работы сенсоров и актуаторов оказывает температура. При обсуждении этого вопроса, как правило, ограничиваются исследованием температуры, возникающей в результате теплообмена с внешней средой [140]. Однако, гармонические во времени, в частности, резонансные колебания тонкостенных элементов из пьезоактивных и пассивных неупругих материалов из-за их значительных гистерезисных потерь, низкой теплопроводности и существенной зависимости свойств от температуры, вызванной механической и электрической нагрузками, могут сопровождаться значительным повышением ТДР вследствие превращения электромеханической энергии в тепловую. Это явление может отрицательно влиять на эффективность работы тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами по нескольким причинам: 1) зависимость электромеханических характеристик материала от температуры может существенно повлиять на эффективность работы пьезоэлектрических включений и, как следствие этого, на эффективность активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов; 2) при достижении температурой диссипативного разогрева точки Кюри активный материал теряет пьезоэффект и становится пассивным, т.е. имеет место специфический тип теплового разрушения, когда

тело не разделяется на части, но пьезоэлемент теряет свое функциональное назначение; 3) при нарушении баланса между поступлением тепла в тело из-за гистерезисных потерь и потерями тепла в результате теплообмена с внешней средой в неупругих элементах может иметь место так называемый тепловой взрыв, когда наблюдается катастрофическое повышение ТДР. В пассивных диэлектриках это явление достаточно хорошо изучено и является классическим разделом физики диэлектриков [15, 72, 74, 75].

На важность диссипативного разогрева в механике деформируемого твердого тела ученые-механики обратили внимание после экспериментальных работ по разогреву твердотопливных ракетных зарядов, когда было обнаружено превращение топлива в жидкое состояние при вынужденных резонансных колебаниях [152]. После этих работ началось интенсивное теоретическое исследование явления диссипативного разогрева простейших вязкоупругих механических систем при квазистатическом механическом нагружении [12, 80, 81, 88, 151, 155], обзор которых представлен, например, в [88]. Эти теоретические результаты, по существу, повторяют работы по физике диэлектриков, когда в качестве источника тепла выступает диссипативная функция, порождаемая диэлектрическими, а не механическими потерями в материале. На важность влияния ТДР на колебания пьезоактивных элементов указано еще в ранних работах по экспериментальному исследованию колебаний пьезопреобразователей [4]. В них указано, что основным ограничителем их мощности является именно ТДР. Обзор исследований по влиянию ТДР на механическое поведение элементов конструкций из неупругих пассивных материалов представлен в монографиях [8, 9, 23, 28, 66] и статьях [96, 104 – 106, 145 – 147]. В работах [24, 28, 29, 39, 83, 100, 106] дан обзор результатов по исследованию колебаний и диссипативного разогрева элементов конструкций из пьезоэлектрических материалов. Однако в этих обзорах не рассмотрено влияние ТДР на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования вынужденных гармонических колебаний тонкостенных элементов из пассивных материалов с их помощью. При резонансных колебаниях и высоких уровнях механической нагрузки возникает необходимость в учете влияния физической нелинейности, диссипативных свойств материалов и ТДР на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов с их помощью. При этом следует различать физические нелинейности *трех* типов: *первый* порождается зависимостью механических характеристик пассивного материала от температуры и зависимостью диссипативной функции от деформаций и температуры; *второй* – зависимостью механических характеристик пассивного материала и диссипативной функции от инвариантов деформаций; *третий* – учетом совместного влияния указанных двух типов нелинейности. Для гибких тонкостенных элементов амплитуда колебаний может быть сравнимой с их толщиной и возникает необходимость в учете еще и геометрической нелинейности при исследовании вынужденных гармонических колебаний и диссипативного разогрева гибких тонкостенных элементов, когда используются нелинейные кинематические соотношения [11].

§1. Общие соотношения термомеханики вязкоупругих материалов.

Теоретической основой для разработки моделей гармонических колебаний и диссипативного разогрева неупругих элементов конструкций являются модели вязкоупругости, пластичности и вязкоупругопластичности. Общая теория термовязкоупругости для пассивных и пьезоактивных материалов с учетом взаимодействия механических, температурных и электромагнитных полей представлена в монографиях [8, 9, 23, 29, 66]. Приведем основные соотношения теории определяющих уравнений для пассивных материалов интегрального типа с затухающей памятью, представленные в этих монографиях.

Структура определяющих уравнений для тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа σ , энтропии η и внутренней диссипации $\hat{\sigma}$ для таких материалов имеет вид:

$$\partial_{g_R} \int_{s=0}^{\infty} \psi [;] = 0; \quad (1.1)$$

$$\sigma = T_* \int_{s=0}^{\infty} [;] = \partial_E \int_{s=0}^{\infty} \psi [;]; \quad (1.2)$$

$$\eta = \int_{s=0}^{\infty} \eta [;] = -\partial_{\theta} \int_{s=0}^{\infty} \psi [;]; \quad (1.3)$$

$$\hat{\sigma} - \frac{1}{\rho_R \theta^2} h_{s=0}^{\infty} [;] \cdot g_R \geq 0; \quad (1.4)$$

$$\hat{\sigma} = -\frac{1}{\theta} \left\{ \delta_E \psi_{s=0}^{\infty} [; | \dot{E}_r^t] + \delta_{\theta} \psi_{s=0}^{\infty} [; | \dot{\theta}_r^t] \right\}. \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения: $[;] = [E_r^t, \theta_r^t; E, \theta, g_R]$; ∂_E, \dots и δ_E, \dots – частные производные и производные Фреше; ψ – свободная энергия, в общем случае являющаяся функционалом прошлых историй больших деформаций и температуры E_r^t, θ_r^t ; функцией мгновенных деформаций, температуры и градиента температур E, θ, g_R .

Из соотношений (1.1) – (1.5) вытекают следующие фундаментальные свойства термомеханики материалов с затухающей памятью:

1) согласно (1.1) функционал свободной энергии $\psi_{s=0}^{\infty} [;]$ не зависит от градиента температуры g_R ;

2) тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа σ и энтропия η определяются функционалом свободной энергии соотношениями (1.2), (1.3) и, как видно, не зависят от градиента температуры g_R ;

3) внутренняя диссипация $\hat{\sigma}$ определяется функционалом свободной энергии $\psi_{s=0}^{\infty} [;]$ соотношениями (1.5) и удовлетворяет неравенству $\hat{\sigma} \geq 0$;

4) функционал теплового потока $h_{s=0}^{\infty} [;]$ удовлетворяет обобщенному диссипативному неравенству (1.4).

С учетом (1.1) – (1.5) уравнение сохранения энергии принимает вид:

$$\theta \dot{\eta} + \frac{1}{\rho_R} \text{Div } h_R - \theta \hat{\sigma} - r = 0. \quad (1.6)$$

Величина $\hat{\sigma}$ в уравнении (1.6) называется внутренней диссипацией (или некомпенсированным теплом). Для однородных температурных полей $g_R = 0$ и из неравенства (1.4) получаем неравенство для внутренней диссипации $\hat{\sigma} \geq 0$. Видно, что материал с затухающей памятью определяется двумя функционалами – функционалом свободной энергии $\psi_{s=0}^{\infty} [E_r^t, \theta_r^t; E, \theta]$ и функционалом теплового потока $h_{s=0}^{\infty} [E_r^t, \theta_r^t; E, \theta, g_R]$.

Конкретные определяющие уравнения получаем путем выбора конкретных выражений для этих функционалов. Различные варианты выбора свободной энергии приведены в монографиях [8, 9, 23, 29, 66]. Применяя к вышепредставленным определяющим уравнениям методы нелинейной механики для гармонических процессов деформирования, получим упрощенные определяющие уравнения, подробный анализ которых будет проведен ниже.

Представленные выше результаты на случай пьезоактивных материалов обобщены в монографиях [23, 39], где изложена также общая теория для материалов с внутренними переменными и материалов интегро-дифференциального типа.

§2. Определяющие уравнения для пассивных и пьезоактивных неупругих материалов при моногармоническом деформировании.

В механике деформируемого твердого тела при моделировании колебаний и диссипативного разогрева неупругих элементов конструкций из пассивных и пьезоактивных материалов фундаментальную роль играют определяющие уравнения для этих материалов. Для описания термомеханического поведения неупругих пассивных материалов разработаны модели термовязкоупругости, термопластичности, термовязко-

пластичности различной сложности [8, 9, 21, 22, 68, 79, 85, 86]. Однако, для решения задач о гармонических колебаниях и диссипативном разогреве неупругих элементов конструкций необходимо разрабатывать упрощенные модели поведения материала, учитывающие специфику этого типа деформирования.

Так, например, в линейной теории вязкоупругости разработаны общие модели дифференциального типа, модели интегрального типа и модели материалов с внутренними переменными, которые при гармоническом деформировании принимают универсальную форму комплексных алгебраических уравнений (концепция комплексных характеристик) [5, 8, 9, 21, 62, 66, 68, 70]. При гармоническом деформировании задача сводится к экспериментальному определению коэффициентов этих уравнений. Разработаны экспериментальные методы определения мнимой и действительной составляющих комплексных характеристик материала [56, 87, 138, 139]. Возникает необходимость в обобщении указанной концепции на нелинейный случай, когда тензорно линейные определяющие уравнения для неупругих материалов при гармоническом деформировании имеют такой же вид, как и комплексные уравнения линейной теории вязкоупругости, но комплексные характеристики для пассивного материала зависят от температуры и инвариантов тензора деформаций.

Ниже рассмотрен вопрос об обобщении концепции комплексных характеристик на нелинейные материалы. Для определения зависящих от деформаций комплексных характеристик необходимо разработать экспериментально-теоретическую программу, аналогичную разработанной в теории малых упругопластических деформаций с использованием простейших одномерных задач, и программу проверки достоверности полученных результатов путем решения задач, выходящих за пределы упомянутых простейших одномерных задач, и сравнения полученных теоретических результатов с экспериментальными. При отсутствии таких экспериментально-теоретических результатов использован следующий подход: 1) предложена некоторая полная теоретическая модель термомеханического поведения неупругого материала, т.е. определяющие уравнения одной из перечисленных выше теорий неупругости; 2) разработана экспериментально-теоретическая программа для определения функций и параметров определяющих уравнений этой полной модели с использованием решения наиболее простых одномерных задач; 3) на основе математических методов нелинейной механики с использованием полной модели получены упрощенные определяющие уравнения для моногармонического нагружения, основанные на концепции комплексных характеристик; 4) разработаны экспериментально-теоретические методы определения параметров и функций упрощенных моделей; 5) в рамках полной и упрощенной моделей решены более сложные задачи, выходящие за пределы одномерных задач, используемых для определения характеристик полной и упрощенной моделей; 6) проведено сравнение между собой полученных результатов для этих более сложных задач и на основе этого сравнения даны выводы о точности результатов, получаемых при помощи концепции комплексных характеристик.

Как правило, при исследовании нелинейных колебаний механических систем с распределенными параметрами используют метод разделения переменных, когда решение системы дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений в частных производных ищут в виде разложения по некоторой полной системе функций координат и исходную задачу сводят к системе обыкновенных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений по времени, для решения которых применяют аналитические или численные методы. Такой подход позволяет в какой-то мере исследовать пределы применимости моногармонического приближения. Именно такой подход использован в большинстве работ, в которых исследованы нелинейные колебания механических систем с распределенными параметрами [59], в частности, в работах по нелинейным колебаниям тонкостенных элементов конструкций с учетом нелинейного гистерезиса [57, 63 – 65], который описан на основании модели Н.Н. Давиденкова [18].

Если принять, что выполняются условия, при которых моногармоническое приближение имеет место и которые установлены в математических работах по нелинейным колебаниям неупругих элементов, то можно применить такой подход (именуемый в дальнейшем первым) для исследования нелинейных колебаний механических систем с распределенными параметрами, когда к исходной нелинейной системе в частных производных применяется метод разделения переменных и решение с самого начала представляется в виде моногармонических функций по времени с неизвестными

ми коэффициентами, которые зависят от координат. В результате получим нелинейную комплексную систему дифференциальных уравнений в частных производных по координатам, к которой уже можно применять разработанные в механике деформируемого твердого тела численно-аналитические методы. При этом принимаем, что определяющие уравнения полной модели известны. Например, для вязкоупругих материалов это могут быть нелинейные дифференциальные или интегральные уравнения Вольтерра. Для упругопластических и вязкоупругопластических материалов можно применить теорию малых упругопластических деформаций, разного рода модели теории течения и т.п. Но можно использовать и второй подход, когда принимается гипотеза о моногармоничности механического процесса при моногармоническом нагружении и на ее основе построить теорию определяющих уравнений для неупругих материалов для этого специфического класса историй деформирования. Эта теория будет намного проще указанных выше полных теорий, которые описывают поведение неупругого материала для более общих историй деформирования, чем моногармонические. Затем разработать программу экспериментального определения комплексных характеристик неупругого материала при гармоническом деформировании. Дополнив эти уравнения универсальными соотношениями механики для моногармонического процесса – уравнениями движения, кинематическими соотношениями, граничными условиями – можно получить замкнутую систему уравнений, которая описывает нелинейные моногармонические процессы в системах с распределенными параметрами.

Первый из указанных подходов был использован, например, в монографии [142] для моделирования внутреннего трения в неупругих материалах и исследования нелинейных колебательных процессов в механических системах с гистерезисом. При этом в качестве полной модели использована теория микропластичности А.Ю.Ишлинского [22, 142]. Применение к определяющим уравнениям этой теории метода гармонического баланса позволило получить нелинейные комплексные алгебраические определяющие уравнения, аналогичные определяющим уравнениям линейной теории вязкоупругости, но с зависящими от амплитуд деформаций комплексными характеристиками. При этом в [142] был установлен принцип соответствия, аналогичный принципу соответствия для линейных вязкоупругих материалов, который заключается в том, что в линейных уравнениях теории упругости необходимо заменить механические характеристики материала на комплексные и записать все уравнения в комплексной форме. Такой же подход был использован и в [8, 9, 23, 28, 39, 66] при построении термомеханических моделей вязкоупругих пассивных (без пьезоэффекта) материалов. В этих монографиях использованы указанные выше два подхода – первый из них заключается в использовании полных моделей вязкоупругости того или иного типа и построении на их основе с применением метода гармонического баланса приближенных определяющих уравнений для моногармонического деформирования.

При использовании второго подхода построена теория определяющих уравнений для моногармонических процессов деформирования диссипативных материалов независимо от природы диссипации в материале, который может быть вязкоупругим, упругопластическим, вязкоупругопластическим. При этом по аналогии с теорией определяющих уравнений упругопластических материалов принимаем, что действительные и мнимые составляющие компонент тензора напряжений являются функциями действительных и мнимых составляющих компонент тензора деформаций. Установлены условия, при выполнении которых полученные таким образом определяющие уравнения могут быть записаны в комплексной форме, а также условия потенциальности этих уравнений, когда определяющие уравнения могут быть получены через производные от некоторых двух скалярных функций, которые можно назвать потенциалами. При таком подходе квазилинейные определяющие уравнения принимают алгебраическую форму с некоторыми функциями и параметрами, которые, как и в нелинейной теории упругости и в теории малых упругопластических деформаций, определяются экспериментально.

Для определения комплексных характеристик неупругого нелинейного материала разработана экспериментальная программа. С использованием полученных таким образом комплексных определяющих уравнений численными и аналитическими методами решаются задачи, выходящие за пределы тех простейших одномерных задач, которые использованы в упомянутой выше экспериментальной программе. Эти теоретические результаты сравниваются с соответствующими экспериментальными данными и делается вывод о достоверности предлагаемых определяющих уравнений.

Такой подход изложен в монографии [39], где также представлено обобщение концепции комплексных характеристик на пьезоэлектрические материалы. В связи с проблемой определяющих уравнений для случая моногармонического механического или электрического нагружения отметим следующее: при управлении колебаниями тонкостенных элементов из неупругих пассивных материалов при помощи пьезоэлектрических включений толщина наносимых на поверхности этих элементов активных слоев значительно меньше толщины пассивного элемента. Поэтому, как правило, влияние активных слоев на динамические характеристики и ТДР управляемой конструкции из пассивного неупругого материала незначительно. В связи с этим в большинстве случаев неупругими и нелинейными свойствами пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов можно пренебречь, а основным вопросом при постановке задач о вынужденных гармонических колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тел является установление определяющих уравнений для пассивных неупругих материалов для этого типа нагружения.

2.1. Постановка трехмерных задач о колебаниях и диссипативном разогреве тел из пассивных и пьезоактивных материалов. Для разработки моделей о гармонических колебаниях и диссипативном разогреве тонкостенных элементов, состоящих из пьезоэлектрических и пассивных слоев, необходима постановка соответствующих трехмерных задач. Она сводится к универсальным уравнениям движения [16, 23, 28, 29, 39]

$$\sigma_{kl,l} + F_k = -\rho\omega^2 u_k; \quad (2.1)$$

кинематическим соотношениям

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{kl} + u_{lk}); \quad (2.2)$$

уравнениям электростатики

$$D_{k,k} = 0; \quad (2.3)$$

уравнению энергии

$$(\lambda_{kl}\theta_{,k})_{,l} + W = \frac{\partial\theta}{\partial t}. \quad (2.4)$$

К уравнениям (2.1) – (2.4) следует присоединить стандартные начальные и граничные условия, представленные, например, в [29, 52, 153, 154]. В уравнениях (2.1) – (2.3) все величины (кроме температуры) являются комплексными: $\sigma_{kl} = \sigma'_{kl} + i\sigma''_{kl}, \dots$, при этом, например, напряжения $\tilde{\sigma}_{kl}(t) = \text{Re} \sigma_{kl} e^{i\omega t} = \sigma'_{kl} \cos \omega t - \sigma''_{kl} \sin \omega t$. Остальные физико-механические величины определяются по таким же формулам. Универсальные соотношения необходимо дополнить определяющими уравнениями, которые для гармонического деформирования превращаются в квазилинейные алгебраические комплексные уравнения. При этом для пассивного материала они имеют вид [8, 9, 23, 39, 66]

$$\sigma_{kl} = E_{klmn} \varepsilon_{mn}, \quad (2.5)$$

а для пьезоактивного [23, 28, 39]

$$\sigma_{kl} = c_{klmn}^E \varepsilon_{mn} - e_{klm} E_m, \quad D_k = \varepsilon_{kl}^S E_l + e_{klm} \varepsilon_{lm}. \quad (2.6)$$

Выражение диссипативной функции для пассивного материала приобретает форму

$$W = \frac{\omega}{2} (\sigma''_{kl} \varepsilon'_{kl} - \sigma'_{kl} \varepsilon''_{kl}), \quad (2.7)$$

а для пьезоактивного –

$$W = \frac{\omega}{2} (\sigma''_{kl} \varepsilon'_{kl} - \sigma'_{kl} \varepsilon''_{kl} + D_k'' E_k' - D_k' E_k''). \quad (2.8)$$

В уравнениях (2.5), (2.6) в общем случае все электромеханические характеристики зависят от полевых величин, например, от действительной и мнимой составляющих тензора деформаций $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}$ и аналогичных составляющих вектора напряженности

электрического поля E'_k, E''_k . Такая зависимость осуществляется через инварианты этих величин. Подробное освещение этого вопроса представлено в монографии [39]. Они также могут быть зависимы от температуры. Как видно из (2.7) – (2.8), диссипативная функция для активного и пассивного материалов становится известной, если известны определяющие уравнения (2.5), (2.6). При постановке задач о колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тел имеют место три указанные выше типа физических нелинейностей. При исследовании колебаний гибких тонкостенных элементов возникает четвертый тип нелинейности – геометрическая нелинейность, когда вместо соотношений (2.2) необходимо использовать нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями [11].

Представленная выше постановка трехмерных задач является основой для построения моделей неупругих тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении при помощи некоторых гипотез о распределении полевых величин по толщине элемента.

2.2. Обоснование концепции комплексных характеристик для физически нелинейных материалов первого типа. Рассматриваемая ниже нелинейность первого типа порождается зависимостью комплексных характеристик от температуры и нелинейной зависимостью диссипативной функции от температуры и амплитуд деформаций (или напряжений). В силу малого изменения температуры за период колебаний определяющие уравнения для этого типа нелинейности имеют такой же вид, как и определяющие уравнения для линейной теории вязкоупругости для гармонических процессов, т.е. они по форме совпадают с определяющими уравнениями линейной теории упругости, но являются комплексными, а коэффициенты этих уравнений зависят от температуры.

Определяющее уравнение для диссипативной функции совпадает с усредненной за период мощностью, так что при известных определяющих уравнениях диссипативная функция становится также известной. Для пассивных материалов в работах [9, 16, 30, 66] представлены результаты экспериментов, свидетельствующие о высокой точности расчетов температуры диссипативного разогрева при использовании такой упрощенной модели. В работах [9, 12, 39, 66, 133] представлены расчеты с использованием полной модели вязкоупругости либо полигармонического приближения и дано сравнение с результатами расчетов по упрощенной модели. Это сравнение также свидетельствует о высокой точности результатов расчетов по упрощенной модели с использованием концепции комплексных характеристик. Результаты экспериментальных исследований по определению комплексных характеристик пассивных материалов приведены в [9, 66, 80, 81], а для пьезоактивных материалов – в работах [82, 89, 143, 144].

2.3. Обоснование концепции комплексных характеристик для физически нелинейных материалов второго типа. Нелинейность второго типа порождается зависимостью комплексных характеристик и диссипативной функции от амплитуд деформаций (или напряжений) и нелинейной зависимостью диссипативной функции от амплитуд деформаций. Постановка связанных задач термовязкоупругости с учетом такой нелинейности представлена в [23, 39, 66]. Нелинейности обоих типов имеют место как для полимерных, так и для металлических материалов. Но нелинейность первого типа проявляется более ярко для полимерных материалов, многие из которых очень чувствительны к изменению температуры. Нелинейность второго типа является типичной для металлических материалов, для которых зависимость комплексных характеристик от амплитуд деформаций имеет большее влияние на их поведение, чем их зависимость от температуры. Как указано выше, моногармоническое приближение реализуется в механических системах, в каком то смысле близких к упругим. Тогда для решения соответствующих нелинейных дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений можно использовать методы нелинейной механики [59 – 61]. Для обоснования концепции комплексных характеристик для физически нелинейных материалов второго типа в работах [148, 149, 157] использована модель неупругого поведения материала, представленная в [85, 86]. С ее использованием получены графики зависимости действительной и мнимой составляющих модуля сдвига от второго

инварианта e_i девиатора тензора деформаций, т. е. $G' = G'(e_i), G'' = G''(e_i)$. Модуль объемного расширения принят постоянным. Диссипативная функция определена представленной выше формулой. Полученная таким образом система уравнений ничем не отличается от системы, полученной при постановке задач термомеханики в моногармоническом приближении с использованием нелинейных моделей теории вязкоупругости [23, 26, 39]. Она также не отличается от механических определяющих уравнений, полученных в упомянутой выше работе [142] с использованием метода гармонического баланса.

Отметим, что в [142] не учитывалось взаимодействия механических и тепловых полей. Для конкретизации зависимости комплексных характеристик от интенсивности деформаций использована одномерная задача о сдвиге (кручении), как это делается в деформационной теории пластичности [79]. Для определения комплексных характеристик неупругих материалов в [141] рекомендуется следующий подход: 1) сначала определяется динамический модуль $E^* = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}$ (E' и E'' – действительная и мнимая составляющие комплексного модуля $\tilde{E} = E' + iE''$) по так называемой циклической диаграмме, представляющей собой зависимость амплитуды напряжений σ_a от амплитуды деформаций ε_a , так что $E^* = \sigma_a / \varepsilon_a$; 2) затем по площади гистерезисной петли находится E'' ; 3) действительная составляющая комплексного модуля рассчитывается по формуле $E' = \sqrt{E^{*2} - E''^2}$.

В работе [141] дано сравнение результатов расчетов амплитуд напряжений или деформаций с использованием полной модели вязкопластичности и по приближенной модели с использованием циклической диаграммы и обнаружено очень хорошее согласование этих результатов. В работах [148, 149, 157] для определения составляющих комплексных амплитуд предложен аналогичный подход: динамический модуль определяется по размахам (амплитудам) напряжений и деформаций; мнимая составляющая комплексного модуля рассчитывается по площади петли гистерезиса; действительная составляющая – по приведенной выше формуле. Такой подход назван модифицированным методом для определения составляющих комплексного модуля. Дано сравнение результатов расчетов по полной модели, по стандартному методу гармонического баланса и по модифицированному методу. В качестве полной модели в этих работах использована модель неупругости [85, 86]. В результате обработки экспериментальных данных для алюминиевого сплава АМг-6 и стали по представленной в [148] методике получены параметры полной модели. Затем с использованием полной модели определены циклические характеристики для историй $e = e_0 \sin \omega t$. Сравнение результатов расчетов по полной модели, по стандартному и модифицированному методам гармонического баланса показывает, что модифицированная модель лучше согласуется с полной моделью по сравнению со стандартной. С использованием полной и упрощенной постановок задач о колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тел из пассивных материалов с учетом физической нелинейности второго типа решено большое количество конкретных задач и показано, что концепция комплексных характеристик дает достаточно точные результаты. Детальное обсуждение вопросов, связанных с обоснованием концепции комплексных характеристик на основе сравнения результатов расчетов с использованием полной и упрощенной моделей, изложено в обзоре [147].

Следует отметить, что определяющие уравнения для моногармонических процессов деформирования имеют один и тот же вид как для вязкоупругих, так и для упругопластических или вязкоупругопластических материалов, так что они одинаковы для всех типов неупругих материалов. Большой цикл экспериментальных исследований по зависимости комплексных характеристик от амплитуд деформаций для пассивных материалов представлен в работе [84]. При деформировании в области микропластических деформаций результаты экспериментальных исследований зависимости дек-

ременты затухания от деформаций для широкого класса материалов приведены в [65]. При этом следует отметить, что эти эксперименты свидетельствуют о существенной зависимости мнимой составляющей комплексных модулей от деформаций и незначительном влиянии деформаций на действительную составляющую комплексного модуля. В работах [92, 93, 157, 158] дано сравнение результатов решения задач об изгибных колебаниях неупругой балки с пьезоактивными слоями (актуаторами) с использованием полной модели неупругого поведения материала, приведенной в [85, 86], и концепции комплексных характеристик и обнаружено их хорошее согласование.

§3. Математические модели и численно – аналитические методы решения задач термомеханики неупругих тонкостенных элементов с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при гармоническом нагружении.

Ниже представлены математические модели и описаны итерационные методы, сводящие исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач вязкоупругости и теплопроводности с известным источником тепла. При построении математических моделей колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами можно использовать два подхода: первый из них заключается в применении тех или иных гипотез к этим линейным задачам электромеханики и теплопроводности; второй – на применении указанных гипотез непосредственно к поставленным в предыдущем разделе нелинейным задачам электромеханики и теплопроводности. Первый из указанных подходов целесообразно применять при решении задач численными методами, а второй – при аналитическом решении нелинейных связанных задач.

Дана вариационная постановка задач о колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами и представлены конечно - элементные методы решения вариационных задач. Для решения одномерных задач использованы описанные ниже итерационные процедуры. Для решения линеаризованных задач на каждой итерации применен метод дискретной ортогонализации в сочетании с конечно - разностными методами при решении задач теплопроводности с известным источником тепла.

3.1. Методы линеаризации для решения нелинейных связанных задач термоэлектровязкоупругости. При решении связанной нелинейной задачи термоэлектровязкоупругости могут быть применены различные методы решения нелинейных дифференциальных уравнений. В частности, можно использовать метод Ньютона и различные его модификации, аналоги методов переменных параметров и упругих решений, асимптотические методы (метод ВКБ, метод усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского и др.). Кратко изложим некоторые итерационные методы, используемые авторами при решении конкретных задач.

Для решения нелинейной задачи термоэлектровязкоупругости с учетом физической нелинейности первого типа в [9, 23, 39, 66] использован метод пошагового интегрирования по времени. Его суть состоит в следующем: 1) по заданному в начальный момент времени $t = 0$ распределению температуры определяем электромеханические характеристики материала и решаем линейную задачу электровязкоупругости; 2) по найденным электромеханическим переменным определяем диссипативную функцию W ; 3) на интервале времени $[0, t_1]$ решаем задачу теплопроводности с известным источником тепла, причем выбор значения t_1 зависит от степени чувствительности электромеханических свойств материала к изменению температуры; 4) по заданному распределению температуры в момент времени t_1 вычисляем комплексные характеристики материала и повторяем процесс решения задач 1) и 2); 5) по найденным значениям диссипативной функции и распределению температуры в момент t_1 задачу решаем на следующем интервале времени $[t_1, t_2]$ и т. д. Процесс завершаем при достижении заданного значения времени $t = t_k$. Решение задачи пошаговым методом позволяет исследовать поведение пьезоэлементов как в установившемся тепловом состоянии, так и в процессе выхода температуры на стационарный режим.

В случае, когда учитывается зависимость свойств материала не только от температуры, но и от амплитуд деформаций (напряжений) и напряжённости электрического поля, для линеаризации связанной задачи в [9, 23, 39, 66] использованы итерационные методы, основанные на идее метода переменных параметров упругости. Элементарная итерация включает в себя решение линеаризованной динамической задачи электровязкоупругости и задачи теплопроводности. При этом для линеаризации задачи на n -ой итерации в температурно – и амплитудно – зависимых характеристиках материала используются значения полевых величин $(\varepsilon^{n-1}, \sigma^{n-1}, E^{n-1}, T^{n-1})$, вычисленных на $(n-1)$ – ой итерации, т.е. реализуется метод последовательных приближений. С целью ускорения сходимости метода переменных параметров был использован алгоритм типа Стеффенсена – Эйткена, описанный в [66, 78]. В обоих изложенных методах исходная нелинейная задача сводится к последовательности линеаризованных задач электромеханики и теплопроводности с известным источником тепла, для решения которых использованы численные методы. Так, при решении одномерных задач с зависящими от температуры свойствами материала использован метод пошагового интегрирования по времени в сочетании с методом дискретной ортогонализации [14, 77].

При решении двумерных линеаризованных задач электровязкоупругости и теплопроводности использован метод конечных элементов [3, 9, 66].

3.2. Моделирование колебаний и диссипативного разогрева оболочек с использованием гипотез Кирхгофа – Лява. При построении моделей вынужденных колебаний тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами следует иметь в виду следующее. Как и в трехмерном случае, основной проблемой термомеханики тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами является проблема определяющих уравнений, связывающих силовые факторы с кинематическими, поскольку универсальные уравнения (кинематические соотношения, уравнения движения, начальные и граничные условия) известны из механики тонкостенных элементов. Разработке моделей колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами с учетом физической нелинейности первого типа посвящены работы [23, 28, 29, 100]. Аналогичные модели для случая физически нелинейных материалов второго типа разработаны в [28, 30, 31]. Для вывода уравнений энергии можно использовать известные методы приведения трехмерных задач к двумерным на основе тех или иных гипотез о распределении температуры по толщине элемента [52].

Рассмотрим тонкую трехслойную оболочку вращения толщиной $H = h_1 + h_2 + h_3$, составленную из трансверсально-изотропных слоев с толщиной поляризации. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат (s, θ, z) . В качестве базисной выберем срединную поверхность внутреннего слоя оболочки. Оболочка является достаточно тонкой, так что для моделирования ее механического поведения можно использовать гипотезы Кирхгофа – Лява, согласно которым $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{zs} = 0, \sigma_{z\theta} = 0$. Кроме того, принимаем, что при деформировании нормаль к оболочке не изменяет своей длины и остается перпендикулярной к срединной поверхности. Меридиан базисной поверхности описывается уравнением $r = r(x)$. На поверхностях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ (a_0, a_1 ограничивают первый внешний слой; a_1, a_2 – средний слой, а a_2, a_3 – второй внешний слой оболочки) размещены сплошные или разрезные электроды, на которых задаются потенциалы. Указанные выше механические гипотезы Кирхгофа – Лява дополняются адекватными им гипотезами относительно электрических полевых величин, когда принимаем, что отличными от нуля являются только нормальные составляющие векторов напряженности электрического поля и электрической индукции ($E_z \neq 0, D_z \neq 0$). В соответствии с этими гипотезами получаем упрощенные уравнения состояния для k -го активного слоя оболочки ($k = 1, 2$), приведенные в [28, 29, 100]. Для пассивного слоя упрощенные уравнения представлены, например, в [1, 14, 28].

Согласно кинематическим гипотезам Кирхгофа – Лява компоненты вектора перемещений и компоненты тензора деформаций оболочки запишем в виде

$$\begin{aligned}
u(s, \theta, z) &= u_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{\partial s} z; \quad v(s, \theta, z) = \\
&= v_0(s, \theta) - \frac{\partial w(s, \theta)}{r \partial \theta} z; \quad w(s, \theta, z) = w(s, \theta); \\
\varepsilon_{ss} &= \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z, \quad \varepsilon_{s\theta} = \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где деформации $\varepsilon_{ss}^0, \dots, \kappa_{ss}, \dots$ определяются через перемещения (3.1) по известным из теории оболочек формулам [1, 14, 28].

Учитывая вышеуказанные гипотезы относительно электрических полевых величин, получим упрощенные определяющие уравнения для активных и пассивных слоев [1, 14, 28]. Интегрируя их по полной толщине оболочки, получим комплексные нелинейные определяющие уравнения для моментов и усилий для обоих типов указанных выше нелинейностей, т.е.

$$\begin{aligned}
N_{ss} &= C_{11} \varepsilon_{ss}^0 + C_{12} \varepsilon_{\theta\theta}^0 + K_{11} \kappa_{ss} + K_{12} \kappa_{\theta\theta} - \frac{H_2^k}{H_1^k} (V_k - V_{k-1}), \dots; \\
M_{ss} &= K_{11} \varepsilon_{ss}^0 + K_{12} \varepsilon_{\theta\theta}^0 + D_{11} \kappa_{ss} + D_{12} \kappa_{\theta\theta} - \frac{H_3^k}{H_1^k} (V_k - V_{k-1}), \dots.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу k , а жесткостные характеристики и выражения для H_i^k определяются по формулам, представленным, например, в [29, 37].

Как видно из (3.2), определяющие уравнения по внешнему виду совпадают с уравнениями состояния термоупругости тонкостенных оболочек с заменой теплового расширения на величину, зависящую от разности потенциалов.

Представим вариационную формулировку задачи, эквивалентную дифференциальной постановке задачи. С учетом гипотез Кирхгофа – Лява и предположения о постоянстве нормальной составляющей вектора электрической индукции в каждом слое после интегрирования по толщине и суммирования результатов по всему пакету слоев оболочки, приведем представленное в [16, 29, 39] трехмерное вариационное уравнение к двумерному виду

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_1 + \delta \mathcal{E}_2 + \delta \mathcal{E}_3. \tag{3.3}$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= \frac{1}{2} \iint_F \{ C_{11} (\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12} (\varepsilon_{ss}^0 \varepsilon_{\theta\theta}^0) + C_{22} (\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44} (\varepsilon_{s\theta}^0)^2 + \\
&+ 2K_{11} (\varepsilon_{ss}^0 \kappa_{ss}) + 2K_{12} (\varepsilon_{ss}^0 \kappa_{\theta\theta}) + 2K_{21} (\varepsilon_{\theta\theta}^0 \kappa_{ss}) + 2K_{22} (\varepsilon_{\theta\theta}^0 \kappa_{\theta\theta}) + \\
&+ 8K_{44} (\varepsilon_{s\theta}^0 \kappa_{s\theta}) + D_{11} (\kappa_{ss})^2 + 2D_{12} (\kappa_{ss} \kappa_{\theta\theta}) + D_{22} (\kappa_{\theta\theta})^2 + 4D_{44} (\kappa_{s\theta})^2 - \\
&- \omega^2 \rho_1 (u_0^2 + v_0^2 + w^2) + 2\omega^2 \rho_2 \left(u_0 \frac{\partial w}{\partial s} + v_0 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \omega^2 \rho_3 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] r ds d\theta,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{1}{2} \iint_F (P_s u_0 + P_\theta v_0 + P_z w) r ds d\theta - \int_L \left(N_s u_0 + N_\theta v_0 + N_z w - M_s \frac{\partial w}{\partial s} - M_\theta \right) dL; \tag{3.5}$$

$$\mathcal{E}_3 = -\iint_F \frac{V_k - V_{k-1}}{H_1^k} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) H_2^k + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) H_3^k \right] r ds d\theta. \tag{3.6}$$

В (3.4), (3.5) принято:

$$M_s = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_s z dz; \quad M_\theta = \int_{a_{k-1}}^{a_k} f_\theta z dz; \quad (3.7)$$

$$\rho_1 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k dz; \quad \rho_2 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z dz; \quad \rho_3 = \int_{a_{k-1}}^{a_k} \rho^k z^2 dz \quad (3.8)$$

(ρ^k – плотности материалов).

В выражениях (3.6) – (3.8) перед интегралами опущен знак суммирования по индексу k . В случае симметричного размещения слоев оболочки $K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0$. Отметим, что из функционала $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ дифференцированием по деформациям приходим к определяющим уравнениям для усилий и моментов.

При исследовании влияния температуры на активное демпфирование колебаний оболочки при помощи сенсоров и актуаторов приведенные выше уравнения необходимо дополнить уравнениями энергии, описывающими диссипативный разогрев.

Для определения ТДР использовано трехмерное вариационное уравнение энергии, приведенное, например, в [52]. Для сведения этого уравнения к двумерному принимаем, что нормальная составляющая теплового потока q_z изменяется по толщине пакета слоев по линейному закону $q_z = q_0 + q_1 z$. В этом случае температура в каждом слое оболочки аппроксимируется квадратичным полиномом по толщинной координате z .

При механическом нагружении на электродированных поверхностях в случае разомкнутых электродов выполняются условия

$$\iint_S D_z ds = 0. \quad (3.9)$$

Из (3.9) определяем разность потенциалов между электродами

$$V_k - V_{k-1} = \left\{ \iint_{(S)} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} \right] dS \right\} / \iint_{(S)} \frac{dS}{H_1^k}. \quad (3.10)$$

В (3.9), (3.10) S – площадь электродов, с которых снимается разность потенциалов. При этом электроды могут быть как сплошными, так и разрезными.

При совместном использовании сенсоров и актуаторов для активного демпфирования колебаний оболочек сенсоры дают информацию об их механическом состоянии, а к актуаторам подводится разность потенциалов, которая связана с показателями сенсора уравнениями обратной связи [153, 154]

$$V_a = G_1 V_s + G_2 \frac{\partial V_s}{\partial t} + G_3 \frac{\partial^2 V_s}{\partial t^2}. \quad (3.11)$$

В случае гармонического деформирования уравнения обратной связи (3.11) принимают следующий вид:

$$V_a = G_1 V_s + i\omega G_2 V_s - \omega^2 G_3 V_s, \quad (3.12)$$

где $G_i (i = 1-3)$ – параметры управления.

Для исследования влияния коэффициентов обратной связи на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики оболочки используем приведенные выше вариационные уравнения (3.3) – (3.6).

Подставляя (3.12) в (3.6), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 = & \frac{(G_1 V_s + i\omega G_2 V_s - \omega^2 G_3 V_s)}{\iint_{(S)} \frac{dS}{H_1^k}} \iint_{(F)} \left\{ \frac{1}{H_1^k} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) H_2^k + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) H_3^k \right] \times \right. \\ & \left. \times \iint_{(S)} \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) H_2^k / H_1^k + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) H_3^k / H_1^k \right] dS \right\} r ds d\theta. \end{aligned}$$

Конечно-элементный метод решения задачи. Решение вариационной задачи (3.3) на каждой итерации находится методом конечных элементов (МКЭ) с использованием двенадцатиузловых изопараметрических четырехугольных элементов с аппроксимацией перемещений и геометрии оболочки полиномами третьей степени в пределах четырехугольника [3]. При этом прогиб оболочки в пределах элемента аппроксимируется бикубическими полиномами Эрмита L_i [3, 53, 134]:

$$w = \sum_{i=1}^4 L_i w_i + L_{i+4} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_i + L_{i+8} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)_i + L_{i+12} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta} \right)_i. \quad (3.13)$$

В (3.13) $w_i, (\partial w / \partial s)_i, (\partial w / r \partial \theta)_i, (\partial^2 w / r \partial s \partial \theta)_i$ – амплитудные значения прогиба и его производных в узловых точках.

Тангенциальные составляющие перемещений срединной поверхности оболочки в пределах элемента аппроксимируются кубическими полиномами N_i [3, 53, 134]:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i u_0^i; \quad v_0 = \sum_{i=1}^{12} N_i v_0^i. \quad (3.14)$$

Как глобальная система координат, в которой объединяются все конечные элементы, используется цилиндрическая система координат (r, θ, s) . Меридиональная s и осевая x координаты связаны соотношениями

$$ds = A dx; \quad A = \sqrt{1 + (dr/dx)^2}.$$

Как локальная система координат, в которой определяются аппроксимирующие функции и проводится интегрирование, используется нормализованная система координат ξ, η . При этом связь между координатами s, r, θ и координатами местной системы ξ, η определяется зависимостями

$$s = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) s_i; \quad r = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) r_i; \quad \theta = \sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) \theta_i,$$

где s_i, r_i, θ_i – узловые значения координат.

Представим компоненты механического и электрического нагружения, действующего в пределах элемента, в виде разложения

$$P = \sum_{i=1}^{12} N_i P_i; \quad V = \sum_{i=1}^{12} N_i V_i.$$

Учитывая выражения для перемещений и деформаций, из условия стационарности $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} = 0, \dots$ функционала $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ получим комплексную систему линейных алгебраических уравнений относительно тангенциальных перемещений, прогиба и его производных. При этом дифференцирование по $w, w^s, w^\theta, w^{s\theta}$ проводится только в угловых точках, а по u_0, v_0 – во всех точках элемента. Производные для каждого i -го узла элемента, совпадающего с угловой точкой, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial w_i} &= a_{ik}^w w_k + b_{ik}^w w_k^s + c_{ik}^w w_k^\theta + d_{ik}^w w_k^{s\theta} + g_{in}^w u_{0n} + h_{in}^w v_{0n} + f_i^w, \dots, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial v_i} &= a_{ik}^{v_0} w_k + b_{ik}^{v_0} w_k^s + c_{ik}^{v_0} w_k^\theta + d_{ik}^{v_0} w_k^{s\theta} + g_{in}^{v_0} u_{0n} + h_{in}^{v_0} v_{0n} + f_i^{v_0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

В соотношениях (3.15) нумерация узлов является локальной ($k = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots, 12$). Комплексные коэффициенты системы (3.15) выражаются через электромеханические и геометрические характеристики оболочки, а правые части $f_i^w, f_i^{u_0}, f_i^{v_0}$ определяются путем разложения нагрузки по системе аппроксимирующих функций.

Представленная выше система алгебраических уравнений решается в комплексной области методом Гаусса. Это позволяет с высокой точностью получить решение системы большой размерности без нарушения симметричности и ленточности ее структуры. По найденным значениям перемещений определяются компоненты тензора деформаций, толщинная составляющая электрической индукции и компоненты вектора напряженности электрического поля в произвольной точке конечного элемента. Такой подход позволяет получить решение линейной задачи для оболочек вращения как при механическом, так и при электрическом нагружении.

В случае активного демпфирования колебаний вариация \mathcal{E}_3 вносит вклад в соответствующие коэффициенты разрешающей системы, которые имеют место при неизвестных величинах, и тем самым изменяют жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики оболочки.

Двумерное вариационное уравнение теплопроводности решается на той же сетке конечных элементов. При этом производная dT/dt не варьируется и заменяется выражением $dT/dt = [T(t + \Delta t) - T(t)]/\Delta t$. В дальнейшем используем неявную схему решения уравнения теплопроводности. Для ускорения сходимости итерационного процесса на каждом шаге по времени Δt используем метод Стеффенсена – Эйткена [66, 78].

3.3. Моделирование колебания и диссипативного разогрева оболочек вращения с использованием уточненных теорий. Уточненные модели колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами с учетом физической нелинейности первого типа представлены в [23, 28, 29], а с учетом физической нелинейности второго типа – в [30, 31]. Изложим уточненную теорию, построенную на послойной аппроксимации перемещений [69].

Рассмотрим трехслойную оболочку вращения толщины $H = h_1 + h_2 + h_3$, составленную из трансверсально – изотропных вязкоупругих пьезоэлектрических слоев с толщинной поляризацией и отнесенную к криволинейной ортогональной системе координат (s, θ, z) . Оболочка достаточно тонкая, т.е. такая, для которой сведение трехмерных уравнений к двумерным возможно произвести, приравнявая $\sigma_{zz} = 0$ и принимая квадратичный закон изменения сдвиговых деформаций ε_{sz} и $\varepsilon_{\theta z}$ в пределах каждого слоя. При этом сдвиговые напряжения $\sigma_{sz}, \sigma_{\theta s}$ должны удовлетворять условиям контакта на стыке слоев. Меридиан ее базисной поверхности описывается уравнением $r = r(x)$. На пьезоэлектрических поверхностях $z = a_0, a_1, a_2, a_3$ имеются сплошные или дискретные электродные покрытия, на которых задаются соответствующие значения потенциалов V_0, V_1, \dots, V_3 . Для моделирования электромеханического поведения материалов используем концепцию комплексных характеристик. Упрощенные определяющие уравнения, связывающие напряжения и деформации, получаем на основе уточненных механических гипотез, учитывающих деформации поперечного сдвига, и дополненных адекватными им гипотезами о распределении по толщине электрических полевых величин, согласно которым отличными от нуля являются компоненты вектора напряженности электрического поля и нормальная составляющая электрической индукции ($D_z \neq 0, D_s = 0, D_\theta = 0$). В результате приходим к комплексным упрощенным уравнениям состояния для активных и пассивных слоев, которые не отличаются от указанных выше уравнений для гипотез Кирхгофа – Лява, за исключением того, что к ним добавляются соотношения для $\sigma_{sz}^k = 2G_{sz}e_{sz}^k, \sigma_{\theta z}^k = 2G_{\theta z}e_{\theta z}^k$ с модифицированными выражениями для $G_{sz}, G_{\theta z}$. Сдвиговые деформации в каждом слое аппроксимируются квадратичными функциями по толщинной координате z :

$$e_{sz}^k = \frac{1}{2G_{sz}^k} u_1(s, \theta) q^k(z); e_{\theta z}^k = \frac{1}{2G_{\theta z}^k} v_1(s, \theta) q^k(z). \quad (3.16)$$

Функции $q^k(z)$ для трехслойной оболочки приведены в [37].

В качестве базисной поверхности выбираем срединную поверхность внутреннего слоя оболочки. Используя соотношения Коши и интегрируя выражения (3.16) по толщинной координате z , выражения для компонент вектора перемещений запишем в виде

$$u^k = u_0 - \frac{\partial w}{\partial s} z + u_1 f^k(z); \quad v^k = v_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} z + v_1 f^k(z), \quad (3.17)$$

где u_0, v_0 – тангенциальные перемещения поверхности $z = 0$, w – нормальный прогиб оболочки, а функции $f^k(z)$ приведены в [37].

Используя соотношения Коши [1, 14] и зависимости (3.16), (3.17), компоненты тензора деформации k -го слоя оболочки представим в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ss}^k &= \varepsilon_{ss}^0 + \kappa_{ss} z + \delta_{ss} f^k(z); \quad \varepsilon_{\theta\theta}^k = \varepsilon_{\theta\theta}^0 + \kappa_{\theta\theta} z + \delta_{\theta\theta} f^k(z); \\ \varepsilon_{s\theta}^k &= \varepsilon_{s\theta}^0 + \kappa_{s\theta} z + \delta_{s\theta} f^k(z); \quad e_{sz}^k = \frac{1}{2} u_1 q^k(z); \quad e_{\theta z}^k = \frac{1}{2} v_1 q^k(z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Выражения для $\varepsilon_{ss}^0, \dots, \kappa_{ss}, \dots, \delta_{ss}, \dots$ в (3.18) через u_0, v_0, w, u_1, v_1 приведены, например, в [37].

Полагаем, что между слоями и на поверхностях оболочки нанесены бесконечно тонкие электроды, на которых заданы электрические потенциалы V_k . Согласно указанным выше гипотезам относительно электрических полевых величин получим упрощенные определяющие уравнения для каждого из слоев. После интегрирования их по полной толщине оболочки получим определяющие уравнения для усилий и моментов [37]. Универсальные уравнения остаются без изменений [69]. Отметим, что представленные ниже вариационные формулировки задач с использованием классических и уточненных гипотез эквивалентны локальным формулировкам.

Конечно-элементный метод решения двумерной задачи. Для решения задач о колебаниях и диссипативном разогреве слоистых оболочек вращения методом конечных элементов (МКЭ) исходим из трехмерных вариационных уравнений. С учетом приведенных выше гипотез и соотношений трехмерное вариационное уравнение электромеханики для оболочки вращения сводится к двумерному (3.3), в котором

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \frac{1}{2} \iint_F \left[\begin{aligned} &C_{11}(\varepsilon_{ss}^0)^2 + 2C_{12}\varepsilon_{ss}^0\varepsilon_{\theta\theta}^0 + C_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}^0)^2 + 4C_{44}(\varepsilon_{s\theta}^0)^2 + \\ &+ 2(K_{11}\varepsilon_{ss}^0\kappa_{ss} + K_{12}\varepsilon_{ss}^0\kappa_{\theta\theta} + K_{21}\varepsilon_{\theta\theta}^0\kappa_{ss} + K_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^0\kappa_{\theta\theta} + 4D_{44}\varepsilon_{s\theta}^0\kappa_{s\theta}) + \\ &+ D_{11}\kappa_{ss}^2 + 2D_{11}\kappa_{ss}\kappa_{\theta\theta} + D_{11}\kappa_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}\kappa_{s\theta}^2 + \\ &+ 2(C_{11}\varepsilon_{ss}^0\delta_{ss} + C_{12}\varepsilon_{ss}^0\delta_{\theta\theta} + C_{21}\varepsilon_{\theta\theta}^0\delta_{ss} + C_{22}\varepsilon_{\theta\theta}^0\delta_{\theta\theta} + 4C_{44}\varepsilon_{s\theta}^0\delta_{s\theta}) + \\ &+ 2(D_{11}\kappa_{ss}\delta_{ss} + D_{12}\kappa_{ss}\delta_{\theta\theta} + D_{21}\kappa_{\theta\theta}\delta_{ss} + D_{11}\kappa_{\theta\theta}\delta_{\theta\theta} + 4D_{44}\kappa_{s\theta}\delta_{s\theta}) + \\ &+ D_{11}\delta_{ss}^2 + 2D_{12}\delta_{\theta\theta}\delta_{ss} + D_{22}\delta_{\theta\theta}^2 + 4D_{44}\delta_{s\theta}^2 + C_{35}u_1^2 + C_{55}v_1^2 \end{aligned} \right] r ds d\theta; \\ \mathfrak{A}_2 &= -\frac{1}{2} \iint_F \omega^2 \left\{ \begin{aligned} &\rho_1(u_0^2 + v_0^2 + w^2) + \rho_2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \rho_3(u_1^2 + v_1^2) - \\ &- 2\rho_4 \left(\frac{\partial w}{\partial s} u_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_1 \right) + 2\rho_6(u_0 u_1 + v_0 v_1) - 2\rho_5 \left(\frac{\partial w}{\partial s} u_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} v_0 \right) \end{aligned} \right\} r ds d\theta; \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\mathfrak{A}_3 = -\frac{1}{2} \iint_F \left\{ (\varphi_k - \varphi_{k-1}) \left[(\varepsilon_{ss}^0 + \varepsilon_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] - P_z \omega \right\} r ds d\theta.$$

Выражения для жесткостных характеристик приведены в [29].

Отметим, что определяющие уравнения для усилий и моментов получаются из (3.19) дифференцированием $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$ по деформациям.

Решение вариационной задачи (3.3) осуществляется МКЭ на той же сетке конечных элементов, что и решение классической задачи Кирхгофа – Лява. При этом прогиб и его производные аппроксимировались бикубическими полиномами Эрмита, а тангенциальные составляющие перемещений и деформации поперечного сдвига – кубическими полиномами. Используемый элемент имеет 64 степени свободы: 8 степеней $\left(w, \frac{\partial w}{\partial s}, \frac{\partial w}{r \partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{r \partial s \partial \theta}, u_0, v_0, u_1, v_1 \right)$ в каждой угловой точке и 4 степени свободы (u_0, v_0, u_1, v_1) в каждом узле, расположенном на сторонах четырехугольника.

В дальнейшем все рассуждения повторяют изложенное выше для классической гипотезы. Указанную выше систему линейных алгебраических уравнений на каждой итерации решаем в комплексной области методом Гаусса. Это позволяет с высокой точностью получить решение системы большой размерности без нарушения симметричности и ленточности ее структуры. По найденным значениям перемещений определяем компоненты тензора деформаций, толщинную составляющую электрической индукции и компоненты вектора напряженности электрического поля в произвольной точке конечного элемента.

Данный подход позволяет получить на каждой итерации решение линейной задачи для оболочки вращения с учетом деформаций поперечного сдвига как при механическом, так и при электрическом нагружении. При механическом нагружении для случая разомкнутых электродов из условия (3.9) можно определить разность потенциалов между электродами

$$V_k - V_{k-1} = \frac{1}{\iint_S \frac{ds}{H_1^k}} \iint_S \left[(e_{ss}^0 + e_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] r dr d\theta.$$

Здесь S – площадь электродов, с которых снимается разность потенциалов; k – номер слоя оболочки. При этом электродные покрытия могут быть как сплошными, так и дискретно расположенными.

Для демпфирования колебаний в рамках уточненной модели применяется изложенная выше технология с использованием соотношений (3.19).

Для исследования влияния обратной связи на жесткостные, диссипативные и инерционные характеристики используем соотношение

$$\mathcal{E}_3 = (V_k - V_{k-1}) \iint_F \left[(e_{ss}^0 + e_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] r dr d\theta,$$

которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 = & (G_1 + i\omega G_2 - \omega^2 G_3) \frac{1}{\iint_{S_j} \frac{ds_j}{H_1^k}} \iint_{S_j} \left[(e_{ss}^0 + e_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] ds_j \times \\ & \times \iint_F \left[(e_{ss}^0 + e_{\theta\theta}^0) \frac{H_2^k}{H_1^k} + (\kappa_{ss} + \kappa_{\theta\theta}) \frac{H_3^k}{H_1^k} + (\delta_{ss} + \delta_{\theta\theta}) \frac{H_4^k}{H_1^k} \right] r ds d\theta, \end{aligned}$$

где S_j – площадь электрода, с которого снимается показания сенсора.

Изложенный выше подход дает возможность построить решение, удовлетворяющее условиям идеального механического контакта на стыке слоев оболочки и получить полную аппроксимацию механических и электрических величин в пределах каждого слоя.

Из приведенных решений, как частный случай, получаем решение задачи электровязкоупругости для неоднородных оболочек вращения, основанное на классической теории Кирхгофа – Лява.

Одной из широко используемых теорий при расчете напряженно-деформированного состояния неоднородных пластин и оболочек МКЭ является теория С.П. Тимошенко [55]. Это объясняется тем, что функционалы, входящие в вариационные формулировки задач, содержат только первые производные от перемещений. При разработке МКЭ в линейной теории оболочек обычно используется вариант так называемой пятимодульной теории, в которой поле перемещений характеризуется пятью независимыми функциями – прогибом w , двумя тангенциальными составляющими вектора перемещений срединной поверхности u_0, v_0 и двумя функциями u_1, v_1 , характеризующими независимый поворот нормали [14, 55], т.е.

$$w = w(s, \theta); \quad u(s, \theta, z) = u_0(s, \theta) + zu_1(s, \theta); \quad v = v_0(s, \theta) + zv_1(s, \theta).$$

Для реализации МКЭ используется вариационная формулировка задачи, представленная в [32, 37]. При этом связь между компонентами деформаций и компонентами вектора перемещений определяется известными соотношениями [14, 52].

Для повышения точности вычислений при уменьшении толщины оболочки, т.е. чтобы получить решение, совпадающее с решением, полученным на основе классической теории Кирхгофа – Лява, для аппроксимации прогиба, его производных, тангенциальных перемещений и углов поворота используются упомянутые выше полиномы (3.13), (3.14).

Для вычисления искомых величин по аналогии с вышеизложенным получаем комплексную систему алгебраических уравнений. Такой подход позволяет для изучения колебаний вязкоупругих неоднородных оболочек вращения разработать единый алгоритм МКЭ как для классической теории Кирхгофа – Лява, так и теорий, учитывающих деформации поперечного сдвига. Решение уравнения теплопроводности с известным источником тепла получаем аналогично вышеизложенному.

§4. Аналитические решения нелинейных задач о колебаниях и диссипативном разогреве тонкостенных элементов.

Аналитические решения имеют важное значение при исследовании колебаний и диссипативного разогрева неупругих тел. С одной стороны, они являются эталонными при оценке различного рода численных методов. С другой – с их помощью значительно проще исследовать влияние ТДР на термомеханическое состояние указанных тел. Так, например, из аналитического выражения для температуры можно получить максимальное значение ТДР. Приравнявая его значению в точке деградации материала, найдем критическую нагрузку.

Аналитические решения линейных и нелинейных задач (нелинейность первого типа) о резонансных колебаниях и диссипативном разогреве тонких шарнирно опертых и жестко защемленных цилиндрических оболочек, прямоугольных и круглых пластин с актуаторами представлены в [110, 113, 116, 117, 119 – 121]. Аналогичные решения для тех же элементов с сенсорами приведены в [122 – 124]. Аналитические решения задач об активном демпфировании указанных элементов при совместном использовании сенсоров и актуаторов приведены в [125 – 127]. Аналитические решения для элементов из нелинейного материала второго типа получены в [41, 42]. Проиллюстрируем технику получения аналитических решений на конкретных примерах.

4.1. Аналитическое решение для шарнирно опертой прямоугольной пластины из физически нелинейного материала первого типа. Для рассматриваемой трехслойной пластины с изотропным средним пассивным слоем и двумя внешними пьезоэлектрическими слоями с противоположной поляризацией задача сводится к решению нелинейной комплексной системы дифференциальных уравнений относительно прогиба и температуры диссипативного разогрева, приведенной, например, в [120, 123, 126]. Аналитическое решение задачи активного демпфирования колебаний при помощи сенсоров и актуаторов получено методом Бубнова – Галеркина, когда в одномодовом приближении прогиб $\hat{w} = A\tilde{w}(x, y)$, где $\tilde{w}(x, y)$ – функция формы, A – комплексная амплитуда. Для шарнирного опирания в качестве функции формы выбираем тригонометрические функции, автоматически удовлетворяющие граничным условиям. Зависят

щие от температуры T действительная и мнимая составляющие модуля сдвига пассивного материала (полиэтилена), представленные в [71], с высокой точностью аппроксимированы линейными соотношениями $G = G' + iG''$; $G' = G'_0 - G'_1 T$; $G'' = G''_0 - G''_1 T$. Механические и теплофизические свойства этого материала приведены в [98, 101, 104].

Методом Бубнова – Галеркина получено кубическое уравнение относительно безразмерной величины $y = T / T_c$

$$y^3 - e_2 y^2 + e_1 y - e_0 = 0, \quad (4.1)$$

коэффициенты которого приведены в [120, 123, 126].

После определения температуры амплитуды колебаний получим согласно формулам, представленным в [120, 123, 126]. Приравняв величину y значению температуры в точке деградации, получим выражение для критической нагрузки [120, 123, 126].

4.2. Аналитическое решение для шарнирно опертой пластины из физически нелинейного материала второго типа. Здесь представлено аналитическое решение задачи о колебаниях шарнирно опертой прямоугольной пластины из физически нелинейного материала второго типа. Используются экспериментальные данные работы [91] для модуля сдвига, которые с высокой точностью аппроксимированы функциями

$$G' = a_1 - b_1 \Gamma^2; \quad G'' = a_2 - b_2 \Gamma^2 \quad (4.2)$$

$$(a_1 = 2,410 \cdot 10^5 \text{ Па}; \quad a_2 = 1,810 \cdot 10^5 \text{ Па}; \quad b_1 = 0,537 \cdot 10^7 \text{ Па}; \quad b_2 = 0,380 \cdot 10^7 \text{ Па}).$$

Для шарнирно опертой пластины все величины при колебаниях на резонансе можно представить следующим образом:

$$w = w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y; \quad k_m = \frac{m\pi}{a}; \quad p_n = \frac{n\pi}{b} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.3)$$

Используя аппроксимации (4.2), (4.3), на основе метода Бубнова – Галеркина для квадрата амплитуды поперечного перемещения $y = |w_{mn}|^2 / h^2$ получим кубическое уравнение вида (4.1) с коэффициентами, представленными в [42].

Стационарную температуру диссипативного разогрева пластины с теплоизолированными торцами находим из решения уравнения теплопроводности с известным источником тепла. Точное решение для температуры имеет вид

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_m x + \theta_2 \cos 2p_n y + \theta_{12} \cos 2k_m x \cos 2p_n y. \quad (4.4)$$

Выражения для $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_{12}$ представлены в [37]. Из (4.4) можно определить максимальную температуру θ_{\max} . Приравняв ее температуре в точке деградации, получаем критическую нагрузку.

§5. Влияние различных факторов на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования с их помощью.

Ниже на основе полученных численно – аналитических решений приведены результаты исследования влияния различных факторов на эффективность работы пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов и активное демпфирование вынужденных резонансных колебаний с их помощью.

Исследовано влияние следующих факторов: размеров, размещения пьезоактивных включений, механических граничных условий; деформаций сдвига; геометрической нелинейности; физической нелинейности первого и второго типов; совместное влияние геометрической нелинейности и физической нелинейности второго типа. Приведены лишь типичные графики, иллюстрирующие тот или иной эффект.

5.1. Влияние размеров, расположения пьезоактивных включений и механических граничных условий на эффективность их работы. Для исследования влияния указанных факторов на активное демпфирование колебаний тонкостенных элементов можно использовать аналитические решения соответствующих задач. При использовании численных методов необходимо проводить расчеты для различных вариантов

размещения и размеров пьезовключений и путем анализа числовых результатов выбрать оптимальное значение характеристик.

Влияние размеров пьезовключений. В работе [120] представлено аналитическое решение задачи о колебаниях и диссипативном разогреве шарнирно опертой прямоугольной пластины с актуатором с учетом физической нелинейности первого типа. График зависимости величины безразмерной разности потенциалов Y , которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки, от безразмерной диагонали пьезовключения $s = l/L$ представлен на рис. 5.1. Видно, что эта величина стремится к нулю при уменьшении диагонали и к единице при стремлении диагонали пьезовключения к диагонали пластины.

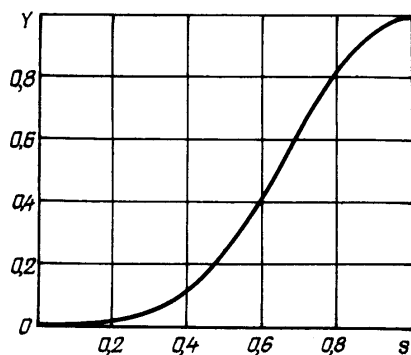


Рис. 5.1

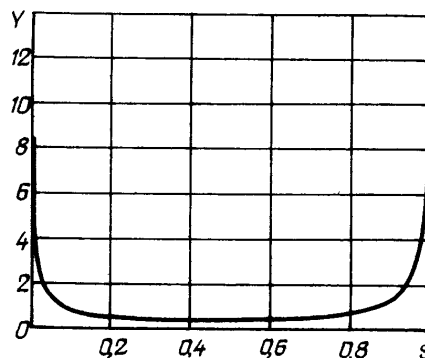


Рис. 5.2

Таким образом, для шарнирного опирания эффективность работы сенсора и актуатора будет наибольшей при полном покрытии поверхности пластины пьезовключениями.

Для пластины с жестко защемленными торцами график аналогичной величины $\left(Y = \frac{15(a^2 + b^2)}{32a^2b^2p_0} V_a(h_0 + h_1)\gamma_{31} \right)$, характеризующей влияние размеров актуатора на эффективность его работы, получен в [99] и представлен на рис. 5.2. Как видно из этого графика, для жесткого защемления торцов имеется оптимальный размер наиболее эффективной работы актуатора. Аналогичные графики имеют место и при оценке работы пьезоэлектрических сенсоров [100 – 102].

Влияние размещения пьезовключений. Выражение для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки при резонансных колебаниях шарнирно опертой пластины, имеет вид [38]

$$M_{mn}^0 = \frac{ab p_{mn}^0 k_m p_n}{16 k_m^2 + p_n^2} \frac{1}{\sin k_m \xi \sin p_n \eta \sin \frac{k_m c}{2} \sin \frac{p_n d}{2}}. \quad (5.1)$$

Величина M_{mn}^0 пропорциональна подводимой к актуатору разности потенциалов для компенсации механической нагрузки P^0 . Центр актуатора (ξ, η) и его размеры (c, d) выбираем из условия минимальности этой разности. Из (5.1) видно, что это будет иметь место, если выполняются равенства

$$\sin k_m \xi = 1; \quad \sin p_n \eta = 1; \quad \sin \frac{k_m c}{2} = 1; \quad \sin \frac{p_n d}{2} = 1.$$

Для моды, отвечающей резонансным колебаниям на первой частоте ω_1 , центр актуатора должен выбираться из условий $\sin k_1 \xi = 1$, $\sin p_1 \eta = 1$, так что его координа-

ты равны: $\zeta = a/2, \eta = b/2$, т.е. центр актуатора совпадает с центром пластины. При другом выборе центра актуатора имеем поверхность

$$M/m = 1 / (\sin k_1 \zeta \sin p_1 \eta), \quad (5.2)$$

где $m = (ab p_{11} k_1 p_1) / \left[16(k_1^2 + p_1^2) \sin \frac{k_1 c}{2} \sin \frac{p_1 d}{2} \right]$ – константа.

На рис. 5.3 представлена поверхность, изображающая зависимость величины M/m , пропорциональной разности потенциалов, от безразмерных координат центра актуатора $\bar{\zeta} = \zeta/a, \bar{\eta} = \eta/b$. Как видно из рисунка и формулы (5.2), при приближении координат центра актуатора к торцам пластины подводимая к нему разность потенциалов стремится к бесконечности. В окрестности точки $(a/2, b/2)$ имеется достаточно большая область, в которой потенциал мало отличается от своего минимального значения. Поэтому центр актуатора также можно размещать в этой области. Для других мод результаты по влиянию размещения актуаторов приведены в [38].

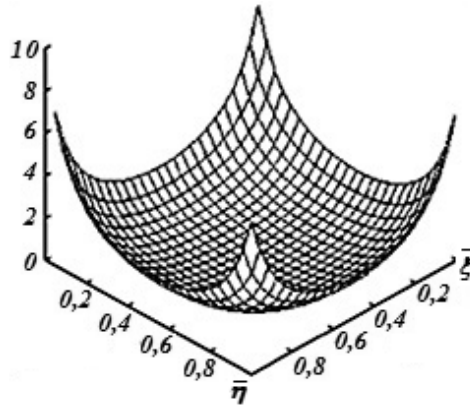


Рис. 5.3

Аналогичные соображения имеют место и при расчете сенсоров. Пусть на пластину действует гармоническое во времени нагружение, распределенное по одной из форм колебаний. При шарнирном опирании торцов пластины прогиб выбирается в форме

$$w = w_{mn} \sin k_m x \sin p_n y \exp(i\omega t).$$

Эта форма колебаний будет выдерживаться с большой точностью, если частота нагружения близка к резонансной. Тогда величина, обратная заряду Q , определяется по формуле [38]

$$1/Q = A / \left(\sin k_m \bar{\zeta} \sin p_n \bar{\eta} \sin \frac{k_m c}{2} \sin \frac{p_n d}{2} \right). \quad (5.3)$$

Здесь A – константа, которая не зависит от координат центра и размеров актуатора.

Основной принцип работы сенсора состоит в том, что заряд должен быть максимальным при заданном прогибе. Тогда величина (5.3) должна быть минимальной.

Сравнение формул (5.1) и (5.3) показывает, что координаты центра сенсора и его размеры определяются по одинаковым формулам. Представленные выше соображения о размещении и размерах актуатора для разных мод колебаний сохраняются без изменений и для сенсора. Если сенсор изготовить в виде некоторой моды колебаний, он будет реагировать только на эту моду, т.е. будет играть роль фильтра.

Представленный выше анализ носит общий характер независимо от вида граничных условий. Пусть в результате анализа частот и мод колебаний упругой пластины установлено, что при нестационарном нагружении основной вклад в деформирование вносит несколько мод, например, первые четыре моды. Тогда при соответствующем выборе координат центров и размеров четырех актуаторов можно, согласно представленным выше формулам, устранить их действие на пластину. При этом необходимо иметь в виду, что указанные четыре электрода должны быть отделены друг от друга, т.е. необходимо использовать четыре разрезных электрода прямоугольной формы. Подводя к этим электродам разности потенциалов, рассчитанные по представленным выше формулам, устраним четыре основных моды, в результате чего прогиб существенно уменьшится.

При использовании первого из указанных выше методов демпфирования резонансных колебаний к актуатору подводится такая разность потенциалов, что при совместном действии механического и электрического нагружения колебания соответствующей моды не возникают. Этот факт имеет важное значение и при демпфировании нестационарных колебаний, поскольку при устранении наиболее энергоемкой моды амплитуда нестационарных колебаний существенно уменьшится.

Влияние механических граничных условий. Влияние механических граничных условий на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования колебаний проиллюстрируем на примере круглой пластины [137]. Рассмотрим трехслойную круглую пластину радиуса R , внутренний слой толщиной h_3 которой изготовлен из пассивного материала, а на ее внешних поверхностях $z = \pm h_3/2$ размещены поляризованные по толщине пьезоэлектрические слои с радиусами $r_0 \leq R$ и толщинами h_2 и h_1 , соответственно. Материалы пассивного и пьезоактивного слоев примем вязкоупругими. На внешние поверхности пьезослоев и на поверхности, которые контактируют с пассивным слоем, нанесены сплошные бесконечно тонкие электроды. Внутренние электроды поддерживаются при нулевом потенциале. Пьезоактивный слой толщиной h_1 является актуатором, а пьезослой толщиной h_2 – сенсором. На пластину действует гармоническое поверхностное давление $\tilde{P} = P(r) \cos \omega t$ с частотой ω , близкой к резонансной. К электродам актуатора подводится разность потенциалов $\varphi(-h_3/2) - \varphi(-h_3/2 - h_1) = \text{Re}(V_A e^{i\omega t})$. Рассмотрен случай разомкнутых электродов сенсора, на которых возникает разность потенциалов комплексной амплитуды $V_S = V'_S + iV''_S$.

Задача сведена к решению системы нелинейных комплексных уравнений, приведенных в [137]. К этим уравнениям добавлены граничные условия шарнирного опирания $u = 0, w = 0, M_r = 0 (r = R)$ или жесткого защемления $u = 0, w = 0, \mathcal{Q} = 0 (r = R)$ внешнего торца пластины.

Граничные и начальные условия для уравнения энергии имеют вид

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\alpha_r}{\lambda}(T - T_s) \quad (r = R); \quad T = T_0 \quad (t = 0).$$

Для решения задачи использован упомянутый выше итерационный метод пошагового интегрирования по времени в сочетании с методом дискретной ортогонализации. Числовые результаты получены для пластины из вязкоупругого полимера с такими зависящими от температуры механическими характеристиками [71]:

$G' = 968 - 8,69T$ [МПа]; $G'' = 87,1 - 0,7T$ [МПа]; $E', E'' = 2(1 + \nu)(G', G'')$; $\nu = 0,3636$; $\rho_3 = 929 \text{ кг/м}^3$; $\lambda = 0,47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$. Экспериментальная зависимость свойств пьезоматериала ЦТСтБС-2 от температуры характеризуется соотношениями, приведенными в [16, 137].

На рис. 5.4 в зависимости от безразмерного радиуса $x_0 = r_0/L$ пьезослоев, выполняющих функции сенсора и актуатора, показаны кривые распределения первой резонансной частоты изгибных колебаний пластинки $\tilde{\omega} = \omega \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ (штрих-пунктирные линии), рассчитанных на этих частотах максимальных амплитуд прогиба $w_E = |w_E^1(x=0)| \cdot 10^5 \text{ м}$ при подведении к актуатору электрического потенциала $V'_A = 1 \text{ В}, V''_A = 0, P = 0$ и $w_p = |w_p^1(x=0)| \cdot 10^6 \text{ м}$ при механическом нагружении с амплитудой $P = 1 \text{ Па}, V'_A = V''_A = 0$ (штриховые линии), а также при этом же нагружении кривые эталонных значений потенциала $V'_A, \tilde{V}'_A = V'_A \cdot 10 \text{ В}$ актуатора и потенциала $V''_S, \tilde{V}''_S = V''_S \cdot 10 \text{ В}$ сенсора (сплошные линии).

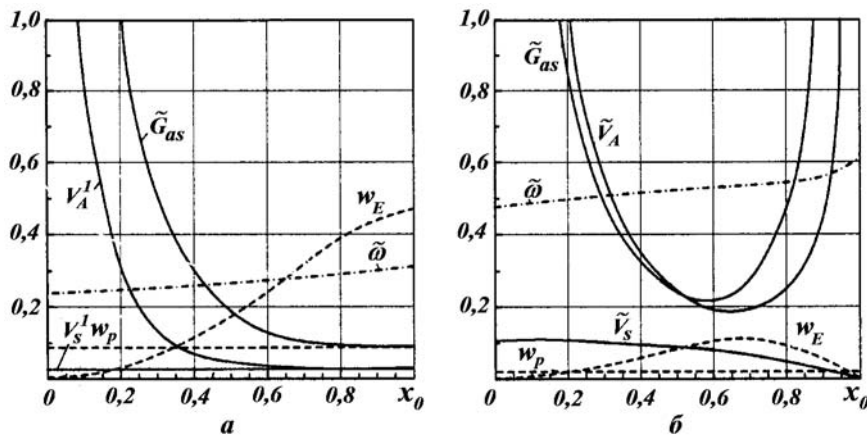


Рис. 5.4

Сплошная кривая \tilde{G}_{as} характеризует зависимость от параметра x_0 коэффициента управления $\tilde{G}_{as} = G_{as} \cdot 10^{-1}$ в соотношении обратной связи. При этом приведенные результаты на рис. 5.4, а характеризуют пластину с шарнирным опиранием краев, а на рис. 5.4, б – с жестким защемлением.

Анализ кривых w_p^1 (штриховые линии) показывает, что максимальные амплитуды прогибов пластины при механическом нагружении слабо зависят от параметра x_0 , характеризующего площадь пьезонакладок. За исключением достаточно малой окрестности точки $x_0 = 0$, показания сенсора V_s^1 мало изменяются с увеличением параметра x_0 при шарнирном и монотонно уменьшаются – при жестком защемлении торца пластины. В то же время при электрическом нагружении актуатора зависимости максимальной амплитуды прогиба w_E^1 пластины и эталонного значения актуатора V_A^1 являются немонотонными функциями параметра x_0 . При этом w_E^1 достигает максимального, а V_A^1 минимального значений при полном покрытии пьезонакладками внешних плоскостей пластины ($x_0 = 1$) в случае шарнирного опирания и частичном покрытии ($x_0 = 0,67$) – при жестком защемлении. Для рассмотренной пластины размеры актуатора и сенсора являются наиболее эффективными с параметрами $0,7 \leq x_0 \leq 1$ – при шарнирном и $0,5 \leq x_0 < 0,7$ – при жестком закреплении, соответственно. При таких размерах пьезоактивных составляющих подведенная к актуатору разность электрических потенциалов V_A вызывает максимальные прогибы w_E пластины, а коэффициент обратной связи будет минимальным (кривые \tilde{G}_{as}). В случае шарнирного опирания пластины коэффициент $G_{as} \approx 1$.

На рис. 5.5, а, б для пластины рассмотренных размеров и условий закрепления в зависимости от параметра x_0 показаны кривые 1, 2 максимальных амплитуд прогибов $\tilde{w} = |w(0)| \cdot 10^3$ м (штриховые линии) и температур саморазогрева $T_m = T_{\max}(0)^\circ\text{C}$ (штрих – пунктирные линии), рассчитанных на первой резонансной частоте.

При этом кривые 1 рассчитаны при механическом нагружении с амплитудой $P = 0,25 \cdot 10^4$ Па, а кривые 2 – при совместном противофазном действии на пластину этого нагружения и подведенных к электродам актуатора амплитудных значений потенциала $V_A = |V_A| \cdot 10^{-3}$ В (сплошные линии), рассчитанных на основе показаний сенсора с учетом значений коэффициента G_{as} , представленных кривой на рис. 5.4.

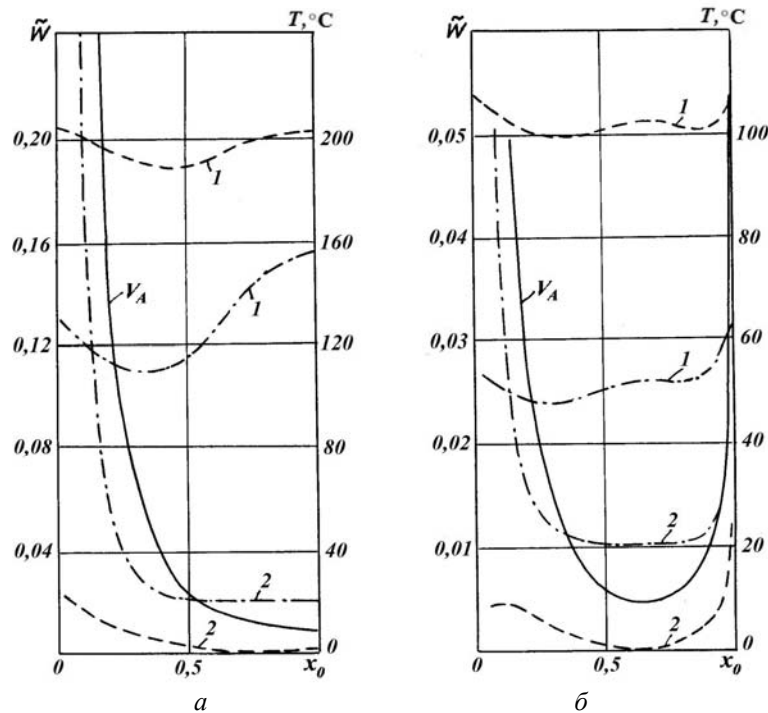


Рис. 5.5

Из сравнения между собой кривых 1, 2 (штриховые линии) видно, что при компенсации гармонического механического нагружения с помощью противофазно подведенной к актуатору разности электрического потенциала имеет место значительное уменьшение прогибов (кривые 2) во всем диапазоне изменения параметра x_0 . При этом уменьшение максимальной температуры виброразогрева (штрих – пунктирные кривые 2) до уровня начальной температуры пластины имеет место лишь для оптимальных параметров $x_0 > 0,4$ шарнирно опертой (рис. 5.5, а) и $0,3 \leq x_0 \leq 0,9$ в случае жесткого заземления ее краев (рис. 5.5, б). Для актуаторов, размеры которых выходят за размеры оптимальных, активное демпфирование механических колебаний пластины может вызвать температуру разогрева, которая значительно превышает температурный режим недемпфированной пластины. Последнее обусловлено необходимостью подвода к электродам актуатора больших значений электрического потенциала V_A .

На рис. 5.6 кривыми 1 – 4 показано распределение установившейся ($\tau = 0,5$) температуры диссипативного разогрева вдоль радиальной координаты пластины, рассчитанное при следующих значениях относительного размера x_0 пьезонакладок, резонансной частоты ω_p и амплитуды потенциала $V_A = |V_A|$, подведенного к актуатору с противоположной к механическому нагружению фазой:

- 1) $x_0 = 0,1$, $\omega_p = 2390 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 2670 \text{ В}$; 2) $x_0 = 0,2$, $\omega_p = 2430 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 700 \text{ В}$;
- 3) $x_0 = 0,4$, $\omega_p = 2580 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 183 \text{ В}$; 4) $x_0 = 1,0$, $\omega_p = 3030 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 43,1 \text{ В}$

– в случае шарнирного опирания края (рис. 5.6, а);

- 1) $x_0 = 0,1$, $\omega_p = 4350 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 1103 \text{ В}$; 2) $x_0 = 0,2$, $\omega_p = 4930 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 298,4 \text{ В}$;
- 3) $x_0 = 0,4$, $\omega_p = 5170 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 82,6 \text{ В}$; 4) $x_0 = 0,7$, $\omega_p = 5370 \text{ c}^{-1}$, $V_A = 47,46 \text{ В}$

– в случае жесткого заземления края (рис. 5.6, б).

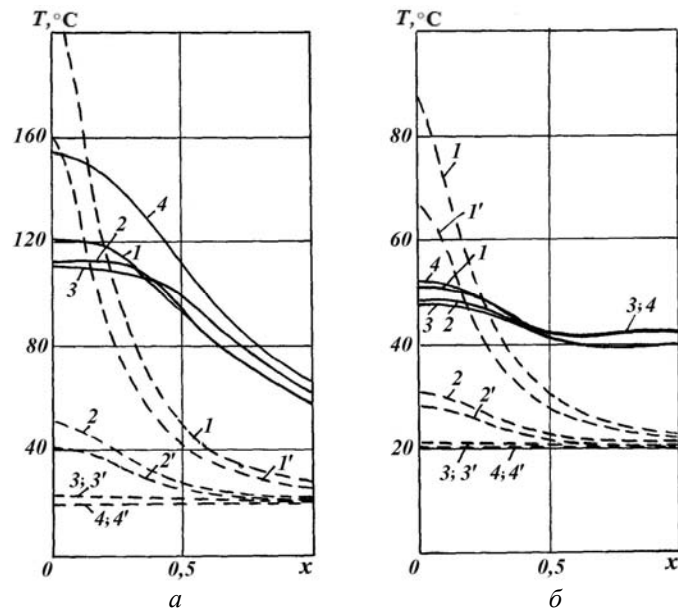


Рис. 5.6

Здесь сплошные кривые 1 – 4 отвечают случаю только механического гармонического нагружения с амплитудой $P = 0,25 \cdot 10^4$ Па ($V_A = 0$). Штриховые кривые 1 – 4 рассчитаны при совместном действии на пластину механического нагружения P и компенсирующего его соответствующего значения потенциала V_A . Штриховые кривые 1' – 4' отвечают случаю, когда в диссипативной функции не учитываются составляющие с пьезоэлектрическими и диэлектрическими потерями в пьезоматериале. Распределение диссипативной функции вдоль радиальной координаты для указанных вариантов показано кривыми 1 – 4 на рис. 5.7.

Анализ кривых на рис. 5.6 показывает, что радиальная неравномерность температуры разогрева (сплошные кривые) и ее уровень существенно зависят от величины площади пьезонакладок, выполняющих функции сенсора и актуатора, и граничных

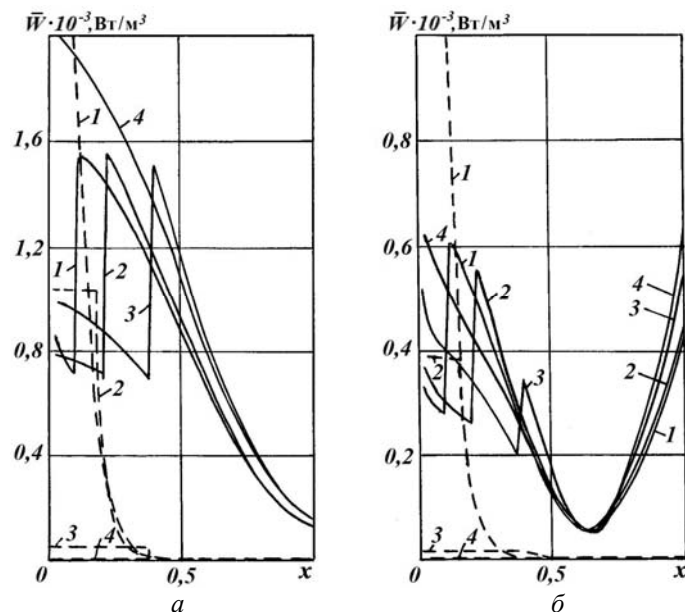


Рис. 5.7

условий закрепления пластины. При активном демпфировании механических колебаний пластины путем противофазного подведения к электродам актуатора разности электрических потенциалов, компенсирующих действие механического нагружения, для оптимальных размеров сенсора и актуатора радиальное распределение температуры виброразогрева становится однородным и по величине близким к начальной температуре (штриховые кривые 3, 4). Но для параметров, выходящих за размеры оптимальных, имеет место значительное повышение температуры диссипативного разогрева в области размещения пьезонакладок (штриховые кривые 1, 2). Сравнение между собой кривых 1, 2 и 1', 2' показывает, что процесс резкого повышения температуры саморазогрева в зоне размещения пьезоактуаторов в значительной степени обусловлен необходимостью подведения к электродам актуатора малой площади больших амплитуд электрического потенциала. При этом в диссипативной функции членами, включающими пьезо – и диэлектрические потери, нельзя пренебрегать (кривые 1, 2 на рис. 5.7). Это обстоятельство свидетельствует о том, что при активном демпфировании неупругих пластин контроль вынужденных колебаний необходимо проводить не только по величине амплитуд прогибов, но и по уровню виброразогрева, который при некоторых неоптимальных размерах пьезонакладок и условиях эксплуатации элемента может достигать температуры точки Кюри, при которой пьезоэлемент теряет работоспособность из-за деполяризации пьезоматериала.

На рис. 5.8 кривые 1, 2, 3 демонстрируют частотные зависимости амплитуд максимальных прогибов $\tilde{w} = |w(0)| \cdot 10^4$ м (сплошные линии) и показателя сенсора $\tilde{V}_s = |V_s| \cdot 10^{-2}$ В (штрих – пунктирные линии) механически нагруженной с амплитудой $P = 0,25 \cdot 10^4$ Па пластины с пьезонакладками безразмерного радиуса $x_0 = 0,2; 0,4; 1,0$ при шарнирном (рис. 5.8, а) и $x_0 = 0,2; 0,4; 0,7$ при жестком (рис. 5.8, б) закреплениях края пластины, соответственно. При этом электроды актуатора коротко замкнуты ($V_A = 0$).

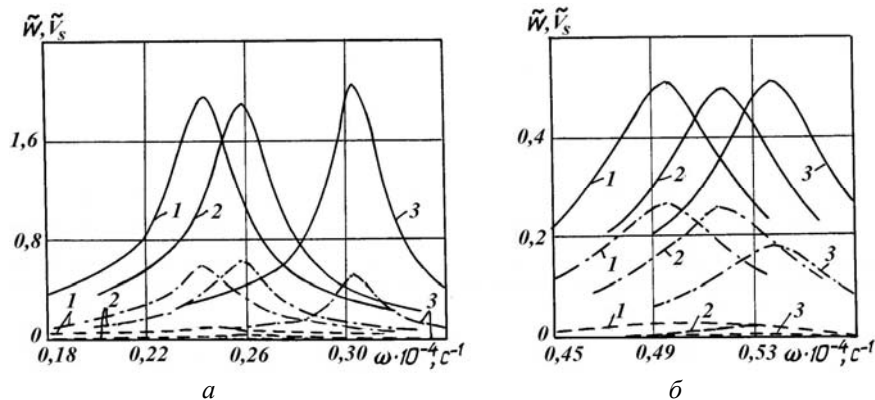


Рис. 5.8

Частотные зависимости максимального значения ($x = 0$) установившейся ($\tau = 0,5$) температуры диссипативного разогрева с указанными размерами пьезонакладок сплошными кривыми показаны на рис. 5.9. Штриховые кривые 1, 2, 3 характеризуют амплитудно – частотные (рис. 5.8) и температурно – частотные (рис. 5.9) зависимости при совместном действии механического нагружения $P = 0,25 \cdot 10^4$ Па и значений амплитуд электрического потенциала $V_A = (700; 183; 43,1)$ В при шарнирном опирании и $V_A = (298; 82,6; 47,5)$ В при жестком закреплении края пластины.

Влияние температурной зависимости модулей пассивного и пьезоактивного материалов механически нагруженной ($P = 0,25 \cdot 10^4$ Па) пластины на частотные характеристики амплитуды максимального прогиба $\tilde{w} = |w(0)| \cdot 10^4$ м и потенциала $\tilde{V}_s = |V_s| \cdot 10^{-2}$ В на электродах сенсора демонстрируют кривые 1 и 2 на рис. 5.10. Расчеты выполнены для параметров $x_0 = 1,0$ и $x_0 = 0,7$, которые отвечают оптимальным размерам сенсо-

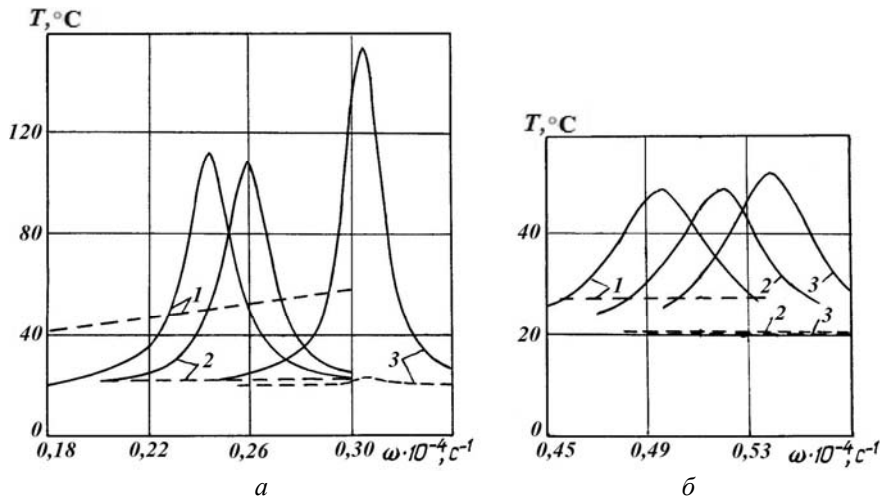


Рис. 5.9

ра и актуатора при шарнирном (рис. 5.10, а) и жестком (рис. 5.10, б) закреплениях края пластины. Штрих-пунктирные линии отвечают изотермическим ($T = T_0$), а сплошные – зависящим от температуры значениям вязкоупругих модулей. Штриховые линии I' характеризуют амплитудно-частотную зависимость прогибов \tilde{w} при совместном противофазном действии механического нагружения и подведенной к актуатору разности потенциалов $V_A = 43,1\text{В}$ для шарнирного и $V_A = 47,5\text{В}$ для жесткого закрепления края пластины.

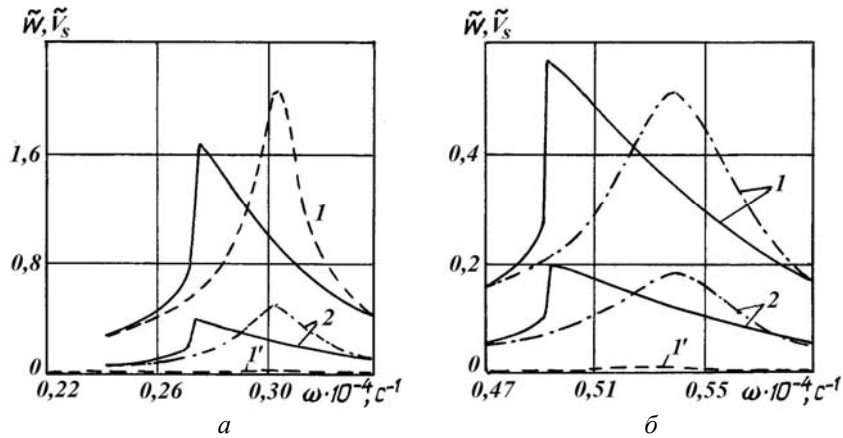


Рис. 5.10

Анализ кривых на рис. 5.10 показывает, что влияние нелинейности первого типа в задаче о вынужденных колебаниях рассмотренной пластины сводится к уменьшению резонансной частоты и трансформации амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) прогибов w и показателей V_s сенсора в нелинейные характеристики «мягкого» типа. В то же время числовые значения максимальных амплитуд w и V_s на изотермическом и термомеханическом резонансах близки между собой. Поэтому при расчетах электрического потенциала актуатора для компенсации механического нагружения можно использовать показатели сенсора V_s , вычисленные на резонансе изотермической системы. Сравнение между собой результатов, показанных на рис. 5.10, а и рис. 5.10, б, приводит к выводу, что граничные условия существенно влияют на количественные значения частоты резонанса, амплитуд прогибов, температуры разогрева и оптимальных размеров сенсора и актуатора.

Из проведенных расчетов и сравнения между собой показанных сплошными и штриховыми кривыми амплитудно-частотных (рис. 5.8) и температурно-частотных (рис. 5.9) характеристик вытекает, что при активном демпфировании вынужденных колебаний рассмотренных пластин амплитуды вынужденных механических колебаний в окрестности основной резонансной частоты уменьшаются на два порядка (рис. 5.10), а диссипативный разогрев пластины с оптимальными параметрами пьезонакладок практически отсутствует (рис. 5.9).

5.2. Влияние деформаций сдвига. Для оценки влияния деформаций сдвига на эффективность работы сенсоров и актуаторов в работах [32, 35 – 37] использовались как аналитические решения, так и решения, полученные с использованием метода конечных элементов и метода дискретной ортогонализации. При этом применены представленные в разделе 2 уточненные теории с квадратичной аппроксимацией деформаций сдвига и теория С.П.Тимошенко. Для пластины и цилиндрической панели из трансверсально-изотропного материала получена следующая простая формула для разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации действующего на пластину равномерного давления P [37]:

$$V_a = \frac{P}{(h_0 + h_1)\gamma_{31}} \frac{1}{k_m^2 + p_n^2} \left[1 + c(k_m^2 + p_n^2) \right]$$

или

$$V_a^T = V_a^K \left[1 + c(k_m^2 + p_n^2) \right], \quad (5.4)$$

где V_a^T, V_a^K – разности потенциалов, рассчитанные с учетом гипотез С.П. Тимошенко и Кирхгофа – Лява, соответственно. Если в модели С.П.Тимошенко выбрать поправочный коэффициент равным $k^2 = \pi^2 / 12$, то в формуле (5.4) –

$$c = \left(\frac{D}{B'} \right) = \left(\frac{2}{1-\nu} \right) \left(\frac{G}{G'} \right) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 n^2 \right].$$

Тогда имеем такое равенство:

$$V_a^{yt} = V_a^{kl} \left\{ 1 + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{G}{G'} \right) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[m^2 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 n^2 \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Для основной моды $m = n = 1$ из формулы (5.5) следует

$$V_a^{yt} = V_a^{kl} \left\{ 1 + \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{G}{G'} \right) \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.6)$$

Как видно из (5.6), поправка к классическому результату зависит от отношения модулей сдвигов трансверсально-изотропного материала (G/G') и отношения толщины пластины h к размеру a . В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой. В работе [37] аналогичное решение приведено также для колебаний пластины с сенсорами и представлены формулы для снимаемого с сенсора заряда.

Подробное исследование влияния деформаций сдвига на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования колебаний цилиндрической панели и прямоугольной пластины с шарнирным опиранием торцов представлено в [32, 35 – 37]. Показано, что описанные в разделе 2 уточненные теории приводят к очень близким результатам.

В [35 – 37] рассмотрена задача о колебаниях шарнирно опертой по торцам цилиндрической пьезопанели толщиной H и радиуса R , находящейся под действием равномерно распределенного давления $P = P_0 \cos \omega t$. На электродированных поверхностях поддерживается нулевое значение потенциала. Получено также аналитическое решение этой задачи. Панель изготовлена из пьезоэлектрического материала PZT–ES-65, комплексные характеристики которого представлены в [143].

Нагружение панели и ее геометрия характеризуются такими значениями параметров: $P_0 = 10^4$ Па; $R = 0,1$ м; $a = L = 0,1$ м; $b = R\theta = 0,1$ м; $r_1 = 0,09$ м; $r_2 = 0,11$ м; $H = 0,001$ м. Коэффициент теплопроводности и плотность материала внешнего слоя имеют такие значения: $\lambda = 1,25$ Вт / (м · °С), $\rho = 0,75 \cdot 10^4$ кг / м³. Коэффициент теплоотдачи между окружающей средой и материалом панели является постоянным и равным $\alpha_T = 25$ Вт / (м² · °С). На рис. 5.11 – 5.13 показаны АЧХ для значений толщины и амплитуды нагрузки $H/R = 0,01$; $P_0 = 10^2$ Па; $H/R = 0,1$; $P_0 = 10^4$ Па; $H/R = 0,2$; $P_0 = 10^4$ Па, соответственно.

Кривые 1 отвечают результатам расчетов МКЭ в трехмерной постановке, кривые 2 – результатам, полученным на основе уточненной теории, а кривые 3 – на основе гипотез Кирхгофа – Лява. Эти результаты получены без учета нелинейности. На рис. 5.14, 5.15 представлены АЧХ и температурно – частотные характеристики (ТЧХ) при учете физической нелинейности первого типа. Здесь кривые 2 отвечают случаю линейной задачи, а кривые 1 – нелинейной [143].

Как видно из рис. 5.11, для тонкой оболочки ($H/R = 0,01$) результаты расчетов с использованием всех теорий практически совпадают. Из рис. 5.11 – 5.13 также видно, что амплитуды колебаний на резонансной частоте, полученные с использованием уточненной и трехмерной теорий, очень хорошо согласуются между собой. Кроме того, результаты расчета с использованием аналитического решения и МКЭ также очень близки.

В работе [132] с использованием метода дискретной ортогонализации и гипотез С.П. Тимошенко решена одномерная задача о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой круглой пластины толщиной h и радиуса R с пьезоэлектрическими актуаторами. На внешние поверхности $z = \pm h/2$ пластины нанесены актуаторы одинаковой толщины δ и радиуса r_0 . Материал пассивного слоя является вязкоупругим и изотропным, а поляризованные по толщине актуаторы выполнены из вязкоупругой пьезокерамики с противоположной друг к другу поляризацией. В дальнейшем принимается, что поляризация в направлениях $z > 0$ и $z < 0$ характеризуется пьезомодулем d_{31} и $(-d_{31})$, соответственно. На внешние плоскости актуато-

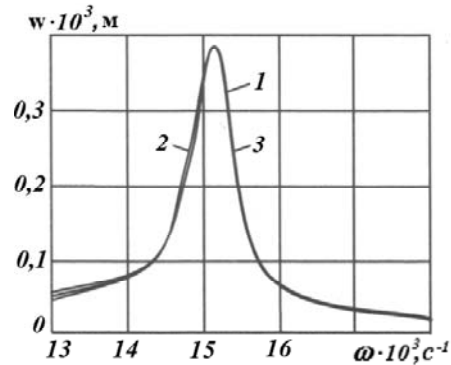


Рис. 5.11

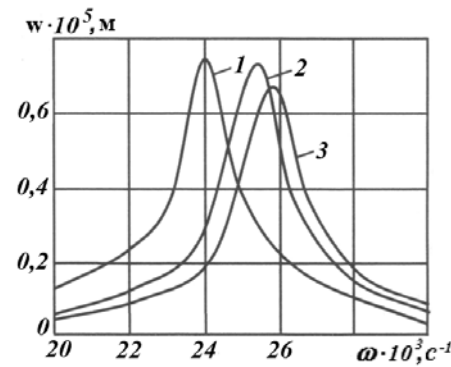


Рис. 5.12

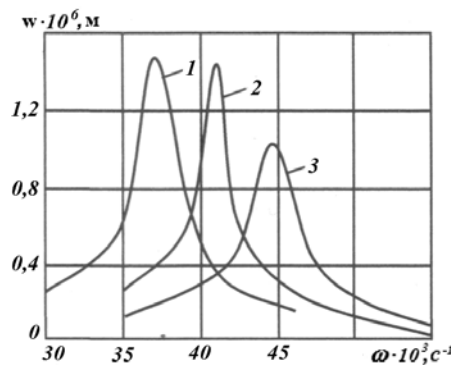


Рис. 5.13

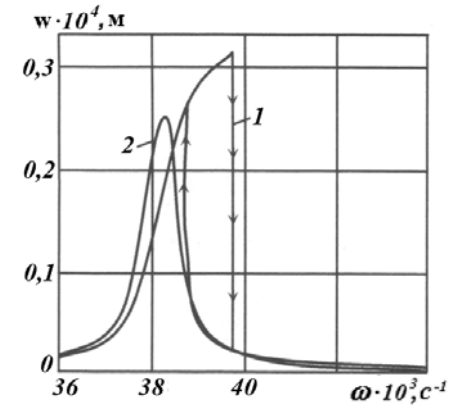


Рис. 5.14

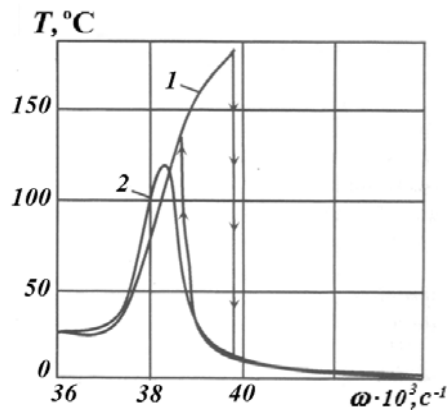


Рис. 5.15

Для моделирования электромеханических колебаний такой пластинки использованы гипотезы С.П. Тимошенко относительно механических переменных. Относительно электрических полевых величин принимается, что тангенциальными составляющими индукции D_r, D_θ электрического поля в пьезослоях можно пренебречь по сравнению с нормальной составляющей D_z , которая принимается независимой от толщинной координаты. При этом уравнения электростатики удовлетворяются тождественно, а тангенциальные составляющие вектора электрической напряженности E_r, E_θ получаем из трехмерных уравнений состояния поляризованной пьезокерамики. Температуру диссипативного разогрева принимаем постоянной по всей толщине пластины.

В силу структурной симметрии пластины, способа поляризации актуаторов и характера нагружения в пластине возбуждаются чисто изгибные осесимметричные колебания. Для решения нелинейной задачи использован метод пошагового интегрирования во времени в сочетании с методом дискретной ортогонализации. После вычисления диссипативной функции уравнение теплопроводности решаем методом конечных разностей с использованием явной схемы. Для определения оптимального значения электрического потенциала V_A , который необходимо подвести к электродам актуатора для гашения вынужденных колебаний, обусловленных поверхностным давлением с амплитудой P_0 , используется линейное соотношение $V_A = -k_A P_0$, где k_A – комплексный коэффициент управления. Влияние деформации сдвига и электромеханического сопряжения на фундаментальные характеристики колебаний пластины при раздельном и совместном механическом и электрическом нагружениях исследовано для пластины из полимера с актуаторами из пьезокерамики ЦТСтБС-2 [82]. Зависимость комплексного модуля сдвига пассивного полимера от температуры виброразогрева описывается соотношением $G' = 968 - 8,69T$ [МПа]; $G'' = 87,1 - 0,7T$ [МПа]. Остальные характеристики таковы: $\nu = 0,3636$; $\rho = 929 \text{ кг/м}^3$; $\lambda = 0,47 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$; $\alpha_0 = \alpha_R = 2 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$.

Зависимость электромеханических характеристик пьезокерамики от температуры представлена в [16, 82].

Кроме того, для пьезокерамики коэффициент $\nu_E = -s_{12}^0 / s_{11}^0$ принимается постоянной вещественной величиной; $\rho_s = 7520 \text{ кг/м}^3$; $T_0 = T_c = T_R = 20^\circ\text{C}$. При учете деформации сдвига принимаем, что коэффициент $k_s = 5/6$. На рис. 5.16, а, б для жестко закрепленной пластинки радиуса $R = 0,2 \text{ м}$ и толщины $h = 0,04 \text{ м}$ с актуаторами толщиной $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и относительного радиуса $x_0 = 0,8$, нагруженной гармоническим давлением интенсивности $P_0 = 1 \text{ Па}$, показано, соответственно, радиальное распределе-

ров, а также между актуаторами и пассивным слоем нанесены бесконечно тонкие электроды.

Пластинка нагружена равномерно распределенным поверхностным давлением, которое изменяется во времени t по гармоническому закону $P = P_0 \cos \omega t$ с круговой частотой ω , близкой к резонансной. К внешним электродам подводится разность электрических потенциалов $\psi(h/2 + \delta) - \psi(-h/2 - \delta) = 2 \text{ Re}(V e^{i\omega t})$ с той же частотой, что и механическая нагрузка. Внутренние электроды поддерживаются при нулевом потенциале. Вязкоупругое поведение пассивного и пьезоактивного материалов пластинки описывается концепцией комплексных модулей, зависящих от ТДР.

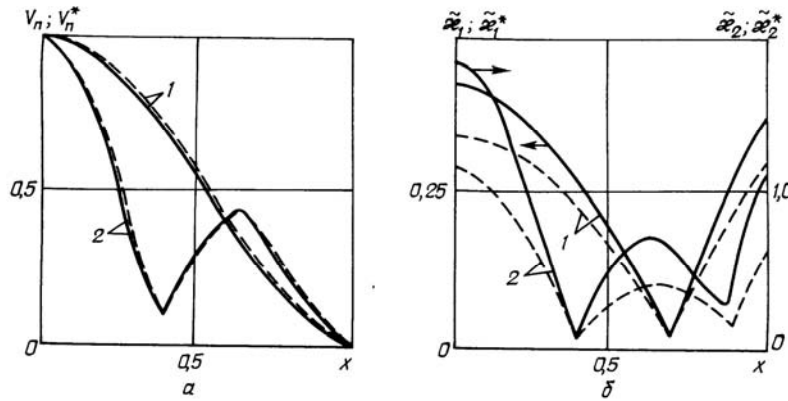


Рис. 5.16

ние нормированных амплитуд прогибов $(V_n; V_n^*) = |w_p| \cdot 10^{-2} / (A_n; A_n^*)$, $n = 1, 2$ и суммарных кривизн $(\tilde{\kappa}_n; \tilde{\kappa}_n^*) = |\kappa| \cdot 10^{-2} / (A_n; A_n^*)$. Сплошные линии соответствуют расчетам, основанным на гипотезах Кирхгофа – Лява. Штриховые линии относятся к отмеченным «звездочкой» расчетным величинам, полученным с учетом деформации сдвига. При этом кривые 1 ($n = 1$) соответствуют первой изгибной моде колебаний и значениям $\omega_p = 0,532 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$, $A_1 = 0,2045 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ (сплошные линии), а кривые 2 ($n = 2$) – второй моде колебаний при $\omega_p = 0,219 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $A_2 = 0,1016 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ (штриховые линии). Из приведенных результатов следует, что учет деформации сдвига в расчетах колебательных характеристик рассматриваемых пластинок сопровождается уточнением резонансных частот в сторону уменьшения ($\omega_p^* < \omega_p$), увеличением параметра максимального прогиба ($A_{1,2}^* > A_{1,2}$) и практически не изменяет формы колебаний. В большей степени учет деформации сдвига проявляется в перераспределении вдоль радиуса пластинки нормированной суммарной кривизны как на первой, так и, особенно, на второй модах колебаний. Последний фактор является определяющим при вычислении влияния деформации сдвига на коэффициент управления. Как показали числовые расчеты для более тонких пластинок ($h/R \leq 1/20$), эти факторы нивелируются с уменьшением толщины.

На рис. 5.17, а, б для жестко заземленной пластины, нагруженной давлением $P_0 = 1 \text{ Па}$, в зависимости от безразмерного радиуса x_0 актуатора толщиной $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ приведены кривые распределения резонансных частот ω_p (штрих-пунктирные линии) и коэффициентов управления $k_* = |k_A| \cdot 10 [\text{В/Па}]$, $k_{**} = |k_A| \cdot 10^2 [\text{В/Па}]$ (сплошные линии) для демпфирования первой (рис. 5.17, а) и второй (рис. 5.17, б) мод вынужденных изгибных колебаний, рассчитанных на основе гипотез Кирхгофа – Лява (кривые 1, 2) и с учетом деформации сдвига (кривые 1*, 2*). При этом кривые 1, 1* получены для пластинки толщиной $h = 0,01 \text{ м}$, а кривые 2, 2* – для $h = 0,04 \text{ м}$. Кроме того, на рис. 5.17, а сплошные кривые, отмеченные точками, характеризуют изменение максимальных значений амплитуды $w^* = |w_E(0)| \cdot 10^4 \text{ м}$ для пластинки толщиной $h = 0,01 \text{ м}$ (кривые 1, 1*) и амплитуды $w^{**} = |w_E(0)| \cdot 10^5 \text{ м}$ при $h = 0,04 \text{ м}$ (кривые 2, 2*) при электрическом возбуждении единичным потенциалом $V' = 1 \text{ В}$, $V'' = 0$.

Проведенные расчеты и анализ кривых на рис. 5.17 показали, что наиболее эффективным (оптимальным) является актуатор таких геометрических размеров, при которых достигаются максимальные амплитуды прогибов при электрическом возбуждении (сплош-

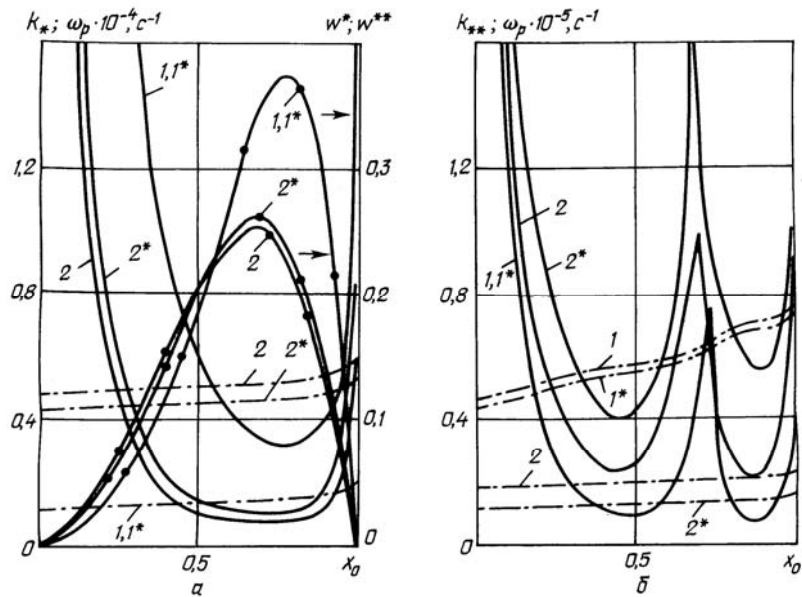


Рис. 5.17

ные линии с точками). При этом коэффициент управления будет минимальным (сплошные линии). Размеры такого актуатора зависят от толщины пассивного слоя. При колебаниях с частотой первого резонанса жестко заземленной пластинки значения максимума электрически возбуждаемых амплитуд и коэффициента управления являются неоднозначными функциями относительно радиуса x_0 кругового актуатора, а коэффициент управления достигает минимального значения при неполном покрытии пьезослоями внешних плоскостей пластины ($0,6 \leq x_0 \leq 0,8$). Учет деформации сдвига приводит к некоторому повышению коэффициента управления. Этот эффект становится более заметным с увеличением толщины пластинки и частоты колебаний со второй резонансной и выше. При вынужденных колебаниях пластины с частотой второго резонанса коэффициент управления является неоднозначной функцией параметра x_0 (рис. 5.17, б).

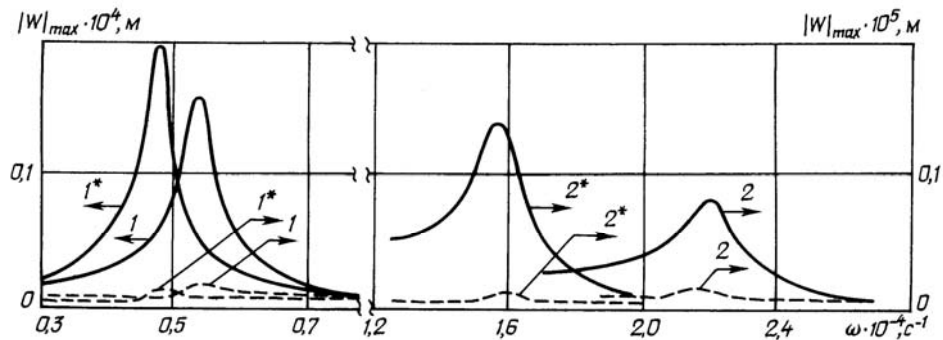


Рис. 5.18

На рис. 5.18 показаны АЧХ колебаний жестко заземленной пластинки толщиной $h = 0,04$ м с актуатором относительного радиуса $x_0 = 0,8$ и толщиной $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м при гармоническом возбуждении в диапазоне частот первого (кривые 1, 1*) и второго (кривые 2, 2*) резонансов. Кривые 1, 2 рассчитаны на основе гипотез Кирхгофа – Лява, а кривые 1*, 2* – с учетом деформации сдвига. Сплошные линии соответствуют случаю

возбуждения колебаний внешним давлением $P_0 = 0,8 \cdot 10^3$ Па. АЧХ при совместном действии указанного механического нагружения и с той же частотой противофазно подведенного к актуаторам электрического потенциала V_A характеризуются штриховыми линиями. Последние рассчитаны для следующих значений активной V'_A и реактивной V''_A составляющих амплитуд потенциала: $V'_A = -6,923$ В, $V''_A = -0,2856 \cdot 10^{-1}$ В (кривые 1); $V'_A = -8,848$ В, $V''_A = -0,5365 \cdot 10^{-1}$ В (кривые 1*); $V'_A = -1,990$ В, $V''_A = -0,3166$ В (кривые 2); $V'_A = -5,541$ В, $V''_A = -0,3418$ В (кривые 2*). Указанные результаты, как и в случае вышерассмотренных примеров, получены для независящих от температуры ($T = T_R$) характеристик материала. Сравнение между собой кривых рис. 5.18 (сплошные и штриховые линии) позволяет сделать вывод о возможности гашения механически возбуждаемых резонансных колебаний пластины путем выбора оптимальной конфигурации актуатора и противофазного подвода к его электродам электрического потенциала с частотой механического резонанса и соответствующей амплитудой. Выполненные расчеты показали, что учет влияния деформации сдвига на колебательные параметры рассматриваемых пластин способствует уменьшению резонансных частот и увеличению амплитуд прогибов при вынужденных колебаниях на этих частотах.

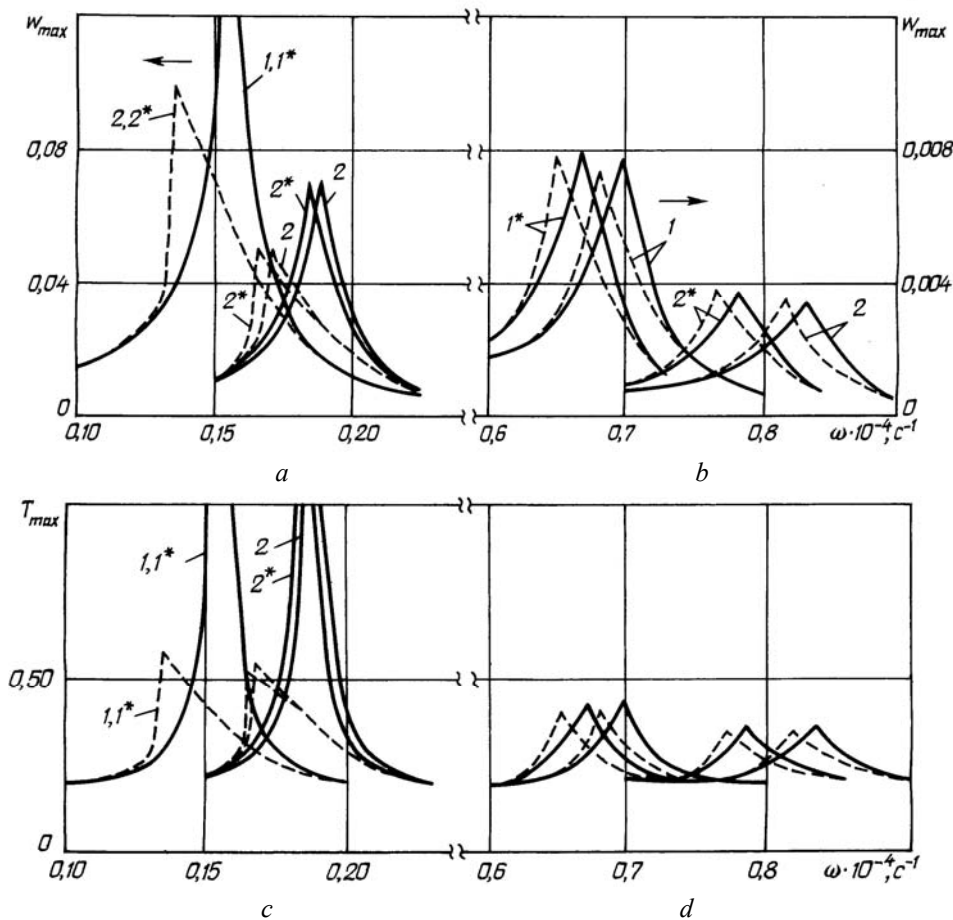


Рис. 5.19, a – d

Из рис. 5.18 и проведенных числовых экспериментов также следует, что с помощью актуатора одного и того же оптимального размера можно демпфировать вынужденные колебания рассматриваемой пластины с частотой как первого, так и второго

резонансов. Однако, в силу большой энергоемкости первой моды колебаний, для ее гашения необходимо подводить к электродам актуатора электрический потенциал большей амплитуды, чем при демпфировании второй моды. Кроме того, численными расчетами установлено, что значение реактивной составляющей V_A'' потенциала практически не дает вклада в расчеты кривых АЧХ, обозначенных штриховыми линиями. Влияние учета деформации сдвига и температурной зависимости электромеханических свойств материалов на частотные зависимости максимальных значений амплитуды относительных прогибов $w_{\max} = |w(0)|/h$ и температуры диссипативного разогрева $T_{\max} = T(0)$ при вынужденных колебаниях пластины, возбуждаемых нагрузкой $P_0 = 1,4 \cdot 10^3$ Па, демонстрируют кривые на рис. 5.19, *a – d*.

При этом кривые на рис. 5.19, *a*; 5.19, *c* характеризуют поведение системы в окрестности частот колебаний первого, а кривые рис. 5.19, *b*; 5.19, *d* – второго резонансов. Расчеты представлены для жестко заземленной пластинки радиуса $R = 0,2$ м с актуатором толщиной $\delta = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м и относительным радиусом $x_0 = 0,8$ при следующих значениях коэффициентов: $\alpha = 2$ Вт/(м²·град), $\lambda = 0,47$ Вт/(м·град) и $T_0 = T_R = 20^\circ\text{C}$. Сплошные кривые получены для независимых от температуры свойств материалов, а штриховые – при учете такой зависимости. При этом кривые 1, 2 рассчитаны в рамках гипотез Кирхгофа – Лява, а кривые 1*, 2* – с учетом деформации сдвига.

Из рис. 5.19 видно, что учет температурной зависимости свойств материалов (штриховые линии) приводит к эффекту трансформации АЧХ и ТЧХ в характеристики «мягкого» типа со сдвигом резонансной частоты в сторону уменьшения и снижением уровня амплитуд колебаний и температур диссипативного разогрева. При этом величина вклада термомеханического сопряжения в уточненной постановке задачи по отношению к изотермическому случаю (сплошные линии) имеет такой же порядок, как и при использовании классических гипотез.

5.3. Влияние геометрической нелинейности. Влияние нелинейности и диссипативного разогрева на колебания и диссипативный разогрев тонкостенных элементов с сенсорами и актуаторами исследовано в [25, 26, 33, 46, 51, 101, 102, 112, 131, 134, 136]. В качестве примера рассмотрим гибкую трехслойную круглую пластинку радиуса R , средний слой толщиной h_0 которой изготовлен из изотропного пассивного материала, а два внешних слоя одинаковой толщины h_1 – из трансверсально-изотропного пьезоактивного материала с одинаковыми свойствами, но с противоположным направлением их поляризации по толщине [46]. Для конкретности считаем, что верхний ($z \geq h_0/2$) и нижний ($z \leq -h_0/2$) слои характеризуются значениями пьезомодуля d_{31} и $-d_{31}$, соответственно. Внешние и внутренние поверхности пьезослоев – актуаторов, контактирующих с пассивным слоем, электродированы. Внутренние электроды поддерживаются при нулевом электрическом потенциале.

На пластинку действует поверхностное давление, изменяющееся по гармоническому во времени t закону с круговой частотой ω , близкой к резонансной. К внешним электродам кругового актуатора радиуса $r = r_0 \leq R$ с частотой механического нагружения подводится разность электрических потенциалов $\varphi(h_0/2 + h_1) - \varphi(-h_0/2 - h_1) = \text{Re}(2V_A e^{i\omega t})$. Электроды в области $r > r_0$ – закорочены ($V_A = 0$). Контур пластинки свободен в радиальном и шарнирно или жестко заземлен в поперечном направлениях. На поверхностях пластинки реализуются условия конвективного теплообмена с внешней средой с температурой T_s . При активном демпфировании вынужденных колебаний пластинки, обусловленных механическим нагружением, необходимо на основе решения механической задачи рассчитать амплитуду и фазу электрического потенциал, который подводится к электродам актуатора для компенсации механического нагружения.

Для моделирования колебаний такой пластинки используем гипотезы Кирхгофа – Лява, дополненные адекватными им гипотезами относительно распределения электрических полевых величин (см. 3.2). Диссипативные свойства пассивных и пьезоактивных материалов описываются концепцией комплексных характеристик. Температура диссипативного разогрева принимается постоянной по толщине пакета слоев. Принимается, что деформации малы, но в кинематических соотношениях учитываются квадраты углов поворота. При этом уравнения движения являются также нелинейными.

Постановка задачи и метод ее решения представлены в [46]. Рассмотрено два типа механических граничных условий: шарнирное и жесткое закрепления. При решении задачи наряду с основной частотой (частотой нагружения) удерживаются и другие гармоники, так что колебательный процесс является полигармоническим. В результате получена приближенная система нелинейных дифференциальных уравнений, которую решаем итерационным методом квазилинеаризации. При этом линеаризованная система обыкновенных дифференциальных уравнений на каждой итерации интегрируется методом дискретной ортогонализации.

Числовые расчеты проведены для круглой пластинки из пассивного вязкоупругого материала с представленными в 5.2 характеристиками. Пьезоэлектрические слои актуаторов изготовлены из вязкоупругой керамики типа ЦТСтБС–2 [82]. Размеры пластинки следующие: $R = 0,2$ м; $\varepsilon = 0,1 \cdot 10^{-3}$ м; $h_0 = 0,01$ м; $h_1 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ м. В связи с тем, что в пластинке реализуются, преимущественно, изгибные колебания, числовые расчеты проведены для частот нагружения, близких к первому резонансу изгибных колебаний. Рассмотрены три способа нагружения пластинки: механическое, электрическое и совместное противофазное действие механического и электрического нагружений. Ограничимся случаем равномерного поверхностного давления с амплитудой $q'_z = q_0$. Для компенсации действия механического нагружения при помощи актуатора необходимо рассчитать подводимую к нему разность потенциалов V_A . По аналогии с линейной задачей [50] принята линейная зависимость между V_A и q_0 в виде $V_A = k_a(x_0)q_0$, где $x_0 = r_0 / R$ – безразмерный радиус кругового актуатора. Коэффициент управления k_a рассчитываем, как отношение амплитуды максимального прогиба w_p , вызванного на частоте линейного резонанса единичным механическим нагружением ($q_0 = 1$ Па), и амплитуды прогиба w_E при подведении к электродам актуатора единичного электрического потенциала ($V'_A = 1B; V''_A = 0$), так что $k_a = |w_{p,max}| / |w_{E,max}|$.

Если механическое нагружение изменяется во времени по гармоническому закону с частотой ω , то электрическое нагружение должно изменяться по закону $V_A \cos(\omega t + \pi) = -V_A \cos \omega t$.

На рис. 5.20 показаны рассчитанные на частотах ω_p линейного резонанса кривые 1, 2 зависимости коэффициента управления k_a (сплошные линии) и максимальные значения относительных прогибов $w_1 = 4|w_E(0)|/h_0$ и $w_2 = |w_E(0)|/h_0$ (штриховые линии), вызванные единичным электрическим нагружением, от безразмерного радиуса x_0 кругового актуатора. Здесь кривые 1 отвечают жесткому, а кривые 2 – шарнирному закреплению края пластинки. Проведенные расчеты и представленные на рис. 5.20 графики показывают, что актуаторы с радиусами $x_0 = 0,67$ жестко защемленной и $x_0 = 1$ шарнирно опертой пластинок реализуют максимальные прогибы при минимальном зна-

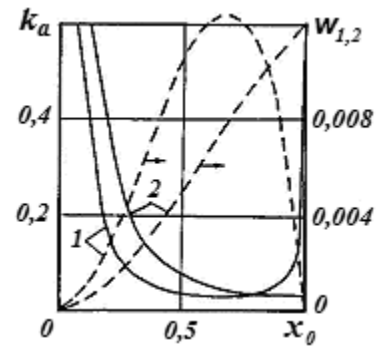


Рис. 5.20

чении коэффициента k_a . Такие актуаторы являются наиболее эффективными при использовании их для активного демпфирования вынужденных механических колебаний.

Ниже числовые исследования эффектов нелинейности представлены графиками на рис. 5.21 – 5.24, на которых сопоставлены результаты решения линейной (штриховые линии) и геометрически нелинейной (сплошные линии) задач. Графики на рис. 5.21, а; 5.22, а; 5.23, а получены для шарнирного опирания, а на рис. 5.21, б; 5.22, б; 5.23, б – жесткого закрепления края пластинки.

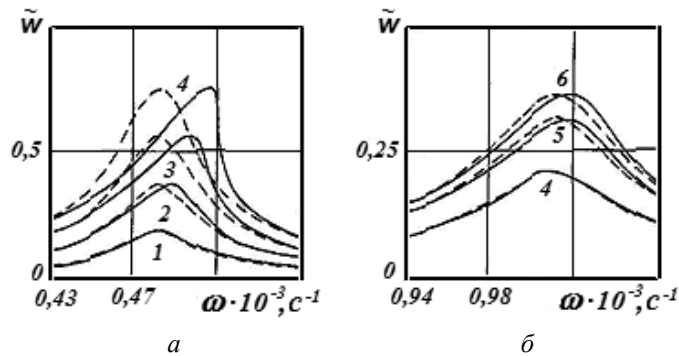


Рис. 5.21

На рис. 5.21 показаны кривые 1 – 6 АЧХ максимального значения отнесенной к толщине пассивного слоя амплитуды прогиба $\tilde{w} = |w(0)|/h_0$ при механическом нагружении пластинки с такими значениями амплитуды $q_0 \cdot 10^{-4}$ [Па]: 1) 0,05; 2) 0,10; 3) 0,15; 4) 0,20; 5) 0,30; 6) 0,35. При этом электрическое нагружение $V_A = 0$. Для указанных амплитуд механического нагружения ТЧХ максимального значения стационарной ($\tau = 0,1$) температуры диссипативного разогрева при конвективном теплообмене на поверхностях пластинки с коэффициентом $\alpha_n = \alpha_r = 15 \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{град})$ представлены на рис. 5.22.

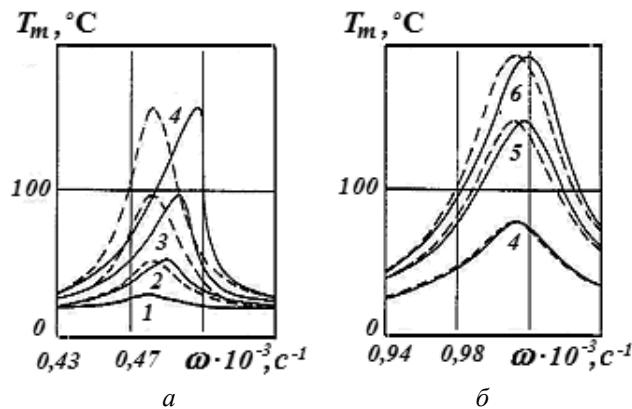


Рис. 5.22

Из анализа кривых рис. 5.21 следует, что при нагрузке, которая приводит к максимальному значению относительного прогиба $\tilde{w} \leq 0,2$, можно ограничиться линейной постановкой задачи. Видно, что условия жесткого защемления края пластинки сопровождаются более высоким уровнем нагружения, при котором справедлива такая постановка задачи. При рассмотренных условиях теплообмена для жесткого защемления имеет место более высокий уровень температуры диссипативного разогрева (кривые 4, рис. 5.22, б), который менее заметен при шарнирном опирании (кривые 1,

рис. 5.22, а). С ростом амплитуды относительного прогиба ($\tilde{w} > 0,2$) влияние геометрической нелинейности становится более заметным и проявляется в сдвиге резонансной частоты в сторону ее увеличения и формирования АЧХ и ТЧХ жесткого типа.

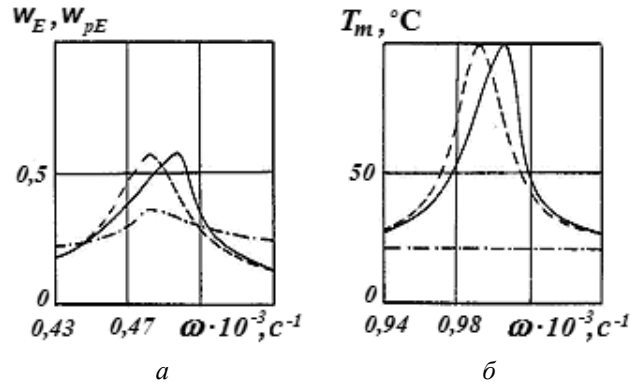


Рис. 5.23

Для рассмотренной пластинки с шарнирно опертым краем приведены АЧХ максимальных амплитуд прогибов $w_E = |w(0)|/h_0$ (рис. 5.23, а) и ТЧХ максимального значения температуры диссипативного разогрева T_m (рис. 5.23, б), рассчитанные для линейной (штриховые линии) и нелинейной (сплошные линии) постановок задачи при подведении к электродам оптимального актуатора ($x_0 = 1$) электрических потенциалов $\pm V_A = 46,8B$. Видно, что эффекты нелинейности аналогичны случаю механического нагружения. При таком нагружении результаты решения линейной и нелинейной задач в масштабе графиков совпадают с кривыми 3 на рис. 5.21, а и рис. 5.22, а. Представленные на рис. 5.23 штрих-пунктирные кривые являются АЧХ относительного прогиба $w_{pE} = |w(0)|/h_0 \cdot 10^2$ и ТЧХ пластинки при совместном действии механического нагружения $q_0 = 0,15 \cdot 10^4$ Па и противофазно подведенного к электродам актуатора потенциала $\pm V_A = 46,8B$, компенсирующего механическое нагружение. Они демонстрируют результат активного демпфирования механических колебаний рассмотренной пластинки.

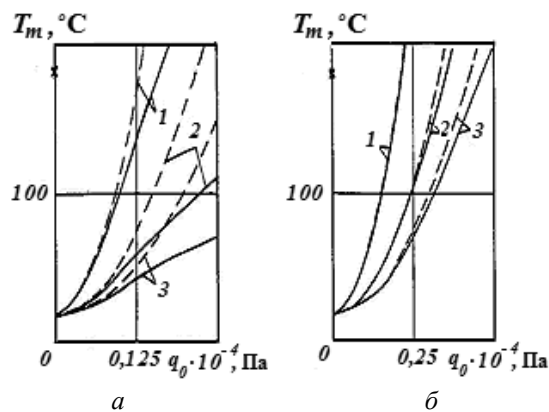


Рис. 5.24

На рис. 5.24 показаны зависимости максимальной температуры диссипативного разогрева T_m от величины амплитуды механического нагружения q_0 для коэффициентов теплообмена $\alpha_n = \alpha_R = 5; 15; 25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$ (кривые 1 – 3). Числовые результаты

получены на частотах линейного резонанса $\omega_p = 482 \text{ с}^{-1}$ при шарнирном (рис. 5.24, а) и $\omega_p = 1010 \text{ с}^{-1}$ при жестком (рис. 5.24, б) закреплении внешнего края пластинки в линейной (штриховые линии) и геометрически нелинейной (сплошные линии) постановках задачи. Звездочкой на оси ординат показано значение температуры Кюри $T_k = 180^\circ\text{С}$ пьезокерамики ЦТСтБС-2, при котором пьезоматериал деполяризуется. Анализ кривых на рис. 5.24 показывает, что при активном демпфировании колебаний пластинок из вязкоупругих материалов обязательно необходимо рассчитывать температуру диссипативного разогрева, которая зависит не только от амплитуды нагружения, но и от условий механического закрепления контура пластинки и теплообмена на ее поверхности. Учет геометрической нелинейности сопровождается понижением температуры разогрева.

Принимая, что пьезоактуатор теряет свое функциональное назначение при достижении температурой точки Кюри, можно определить критическое значение амплитуды механического нагружения при известных условиях теплообмена и механического закрепления краев пластинки.

5.4. Влияние нелинейности первого типа. Влияние нелинейности первого типа на АЧХ и ТЧХ для пластин и оболочек исследовано в статьях [54, 113 – 127]. Следуя [54], для исследования влияния коэффициента обратной связи G_2 на эффективность демпфирования рассмотрим задачу об активном демпфировании жестко зашпеленной по торцам трехслойной цилиндрической панели толщиной $H = 2h_1 + h_2$ из вязкоупругим средним слоем при действии на нее равномерно распределенного механического давления $P = P_0 \cos \omega t$. Она находится в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой, температура которой равна T_c .

Внешние слои панели изготовлены из пьезоэлектрического материала ЦТС_Т БС-2, теплофизические и зависящие от температуры механические характеристики которого приведены в [82]. Комплексный модуль сдвига пассивного материала $G = G' + iG''$ зависит от температуры и рассчитывается по формулам

$$G' = [968 - 8,69(T - T_0)]A_0; \quad G'' = [87,1 - 0,7(T - T_0)]A_0; \quad A_0 = 10^6 \text{ Па}; \quad \nu = 0,36.$$

Эти данные представлены в работе [54] и они описывают поведение материала в широком интервале температур. Для температуры плавления принимается значение $T = 140^\circ\text{С}$. Параметры геометрии оболочки, условий нагружения и теплообмена следующие:

$$R = 0,1 \text{ м}; \quad L = 0,1 \text{ м}; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3; \quad H = 0,01 \text{ м}; \quad 2h_1 = 0,0002 \text{ м}; \quad h_2 = 0,0098 \text{ м};$$

$$P_0 = 10^4 \text{ Па}; \quad \alpha_r = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град}); \quad \lambda_r = 0,47 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{град}); \quad T_c = T_0 = 20^\circ\text{С};$$

$$\rho = 0,929 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

На рис. 5.25 и 5.26 представлены АЧХ и ТЧХ (в $^\circ\text{С}$) в окрестности первого резонанса колебаний панели для разных значений коэффициентов обратной связи G_2 при $G_1 = G_3 = 0$ для случая независимых от температуры свойствах пассивного материала. Верхняя, средняя и нижняя кривые отвечают значениям $G_2 = 0$, $G_2 = 0,2 \cdot 10^{-5}$, $G_2 = 0,5 \cdot 10^{-5}$. Как видно, выбором коэффициента обратной связи можно существенно повлиять на амплитуду колебаний и температуру диссипативного разогрева.

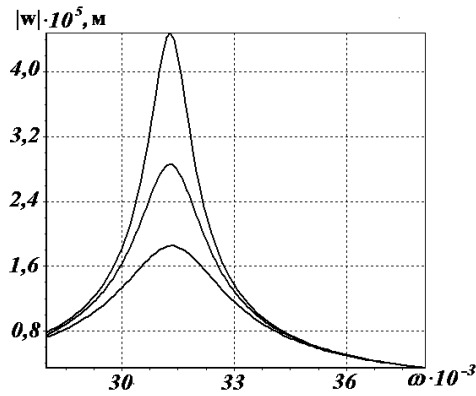


Рис. 5.25

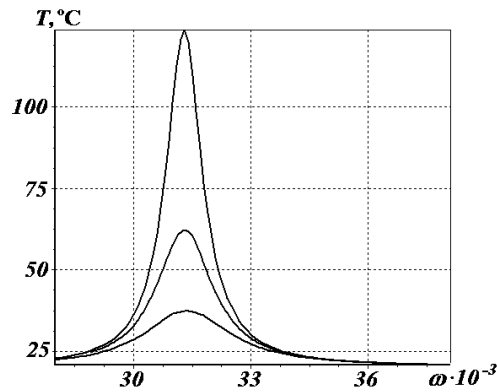


Рис. 5.26

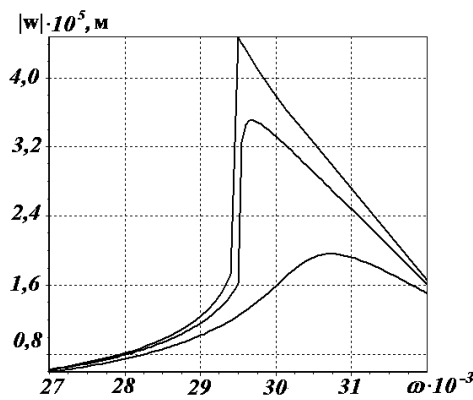


Рис. 5.27

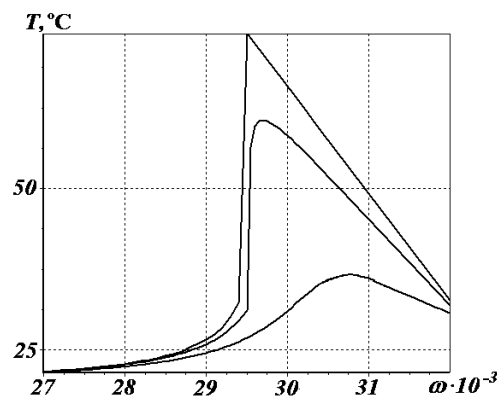


Рис. 5.28

Рис. 5.27, 5.28 иллюстрируют влияние физической нелинейности первого типа на АЧХ и ТЧХ, а также влияние на них коэффициента обратной связи. Как видно, появляются характерные для физической нелинейности резкие изменения в АЧХ и ТЧХ. С увеличением коэффициента обратной связи эти характеристики приближаются к динамическим характеристикам для независимых от температуры свойств материала.

5.5. Влияние нелинейности второго типа. Влияние указанной нелинейности на работу пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования тонкостенных элементов исследовано в [40 – 42]. В качестве примера рассмотрим оболочку вращения, составленную из среднего неупругого изотропного пассивного слоя толщиной h_2 и двух одинаковых внешних слоёв толщиной h_1 с противоположной поляризацией. На оболочку действует равномерно распределенное поверхностное гармоническое давление $q_z = q \cos \omega t$ с частотой ω , близкой к резонансной. Торцы оболочки шарнирно оперты, а поверхности находятся в условиях конвективного теплообмена с внешней средой. При моделировании электромеханического поведения такой оболочки принимаем гипотезы Кирхгофа – Лява для механических величин и адекватные им предположения относительно электрических.

Следуя [10, 142], для моделирования механического поведения материала принимаем, что составляющие комплексного модуля сдвига зависят от второго инварианта тензора девиатора деформаций по закону

$$G' = G(1 - rI_2^\alpha); \quad G'' = gGI_2^\alpha. \quad (5.7)$$

Здесь параметры G, r, g, α определяются экспериментально. Эти параметры для ряда материалов приведены в [10, 142]. Например, для алюминиевого сплава они имеют

такие значения: $G = 0,265 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $\alpha = 0,4$; $\Delta = 0,0014$; $\tau = 12$. При этом в (5.7) принято

$$g = \left(2G/\sqrt{2\tau}\right)^\alpha \frac{\Delta}{\pi}; \quad r = \frac{4}{g} \cdot \frac{\Gamma(2+\alpha/2)}{\Gamma[(\alpha+1)/2] \cdot \Gamma(3/2)}; \quad \Gamma - \text{гамма-функция.}$$

Числовые расчеты проведены для круговой цилиндрической панели с толщиной среднего пассивного слоя $h_2 = 0,00999 \text{ м}$. Общая толщина панели $H = h_2 + 2h_1 = 0,01 \text{ м}$, а ее радиус и длина $R = 0,1 \text{ м}$, $l = 0,1 \text{ м}$. Длина образующей $s = 0,1 \text{ м}$. Пассивный слой изготовлен из алюминиевого сплава с указанными выше характеристиками, а пьезослой – из вязкоупругого пьезоэлектрического материала со свойствами, представленными в [143]. Коэффициент Пуассона принимаем постоянным и равным $\nu = 0,31$; плотности пьезоактивного $\rho_a = 0,75 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ и пассивного $\rho_n = 0,28 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$ материалов. Коэффициент теплопроводности пассивного слоя $\lambda_T = 200 \text{ Вт/(м} \cdot \text{град)}$, коэффициент теплообмена – $\alpha_T = 20 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{град)}$, а начальная температура и температура внешней среды $T_C = T_0 = 20^\circ\text{C}$. Частота нагружения принята близкой к резонансной, а амплитуда механического нагружения $q = 0,25 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$.

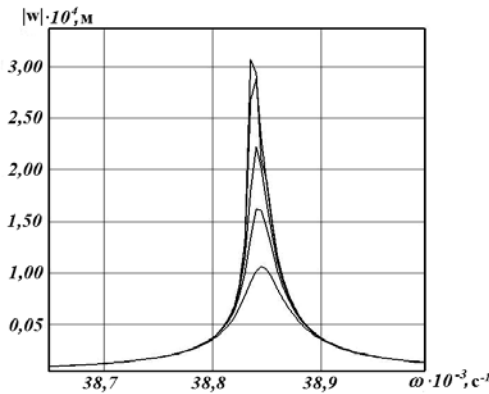


Рис. 5.29

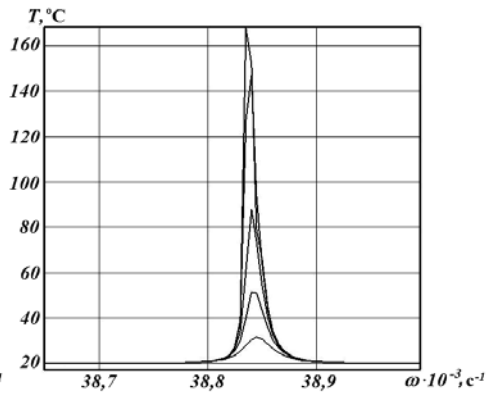


Рис. 5.30

На рис. 5.29 показана АЧХ такой панели. При расчетах использован подход, представленный в [39], когда влияние коэффициента обратной связи учитывается путем введения комплексной плотности. Приведенные здесь кривые отвечают таким значениям мнимой составляющей комплексной плотности $\rho_n = \rho' - i\rho''$ (кривые обозначены сверху вниз): $\rho'' = 0; 0,1; 0,5; 1,0; 2,0$. ТЧХ для тех же значений комплексной плотности представ-

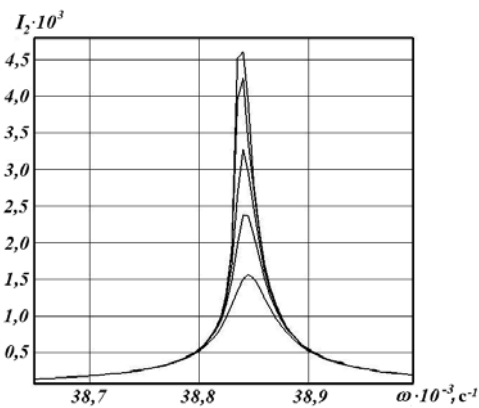


Рис. 5.31

лены на рис. 5.30, а зависимость второго инварианта тензора деформаций I_2 – на рис. 5.31. Последняя зависимость вводится для того, чтобы деформации цилиндрической панели не превышали пределов упругости. Как видно, величина мнимой составляющей комплексной плотности материала существенно влияет на фундаментальные динамические характеристики колебаний цилиндрической панели из физически нелинейного материала второго типа. Эта мнимая составляющая легко определяется через показатели сенсора и пропорциональна коэффициенту обратной связи.

5.6. Совместное влияние геометрической нелинейности и физической нелинейности второго типа. Для иллюстрации совместного влияния геометрической нелинейности на демпфирование колебаний тонкостенных элементов при помощи актуаторов рассмотрим представленную в [156] задачу о вынужденных колебаниях шарнирно опертой трехслойной балки, средний слой которой изготовлен из алюминиевого сплава АМг-6, а внешние – из пьезокерамики ЦТС-19. Поведение материала электрически пассивного (без пьезоэффекта) алюминиевого сплава характеризуется при помощи модели обобщенной теории течения [85, 86]. Пьезокерамические слои приняты упругими трансверсально-изотропными. Основные соотношения и свойства материалов приведены в статье [156].

Толщины пьезоактивных слоев равны: $h_1 = h_3$, полная толщина балки $h = h_1 + h_2 + h_3$, где h_2 – толщина алюминиевого слоя. Длина балки $L = 0,826$ м. Рассмотрены два варианта со следующими наборами толщин: а) $h = 0,3 \cdot 10^{-1}$ м, $h_1 = h_3 = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0,2 \cdot 10^{-1}$ м (вариант А); б) $h = 0,6 \cdot 10^{-1}$ м, $h_1 = h_3 = 0,2 \cdot 10^{-2}$ м, $h_2 = 0,56 \cdot 10^{-1}$ м (вариант В). Ширина балки – $b_y = 0,3 \cdot 10^{-1}$ м. Резонансная частота первой изгибной моды колебаний составляет 441 Гц для варианта А и 1167 Гц – для варианта В. Частота возбуждения принята равной $f = 10$ Гц. Пьезоактивные слои принято предварительно поляризованными по толщине, причем направления поляризации слоев противоположны (например, верхний слой поляризован в направлении, совпадающем с осью Oz , а нижний – в противоположном направлении).

Рассмотрены два типа гармонически изменяющихся во времени нагружений: моменты, приложенные на концах балки, и разность электрических потенциалов, подаваемая на электроды пьезослоев. Во всех случаях гармонический закон изменения нагрузки моделировался линейной функцией таким образом, чтобы заданная амплитуда нагружения достигалась за 50 циклов колебаний. Такой подход обеспечил симметричные прогибы балки относительно оси, поскольку непосредственное задание гармонической нагрузки на первой же четверти цикла приводит к формированию постоянной составляющей прогиба за счет неупругого деформирования материала, причем дальнейшие колебания происходят относительно этого изогнутого положения.

Для оценки взаимного влияния физической и геометрической нелинейностей используем жесткостную характеристику для установившейся стадии процесса, характеризующей зависимость амплитуды прогиба от амплитуды изгибающего момента (рис. 5.32). Пунктирная кривая отвечает линейному случаю; штрих – пунктирной и штриховой линиями показаны жесткостные характеристики балки для случаев учета только геометрической и только физической нелинейностей, соответственно. Решение задачи с учетом обеих нелинейностей представлено сплошной кривой. Физическая нелинейность формирует характеристику мягкого типа, а геометрическая – жесткого типа. Уровень влияния нелинейностей зависит от уровня нагружения, геометрии балки и условий закрепления. Очевидно, что для более тонких балок доминирующей является геометрическая нелинейность. С увеличением толщины происходит нарастание влияния физической нелинейности. Для достаточно толстых эле-

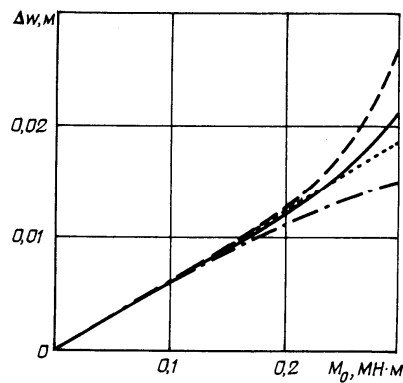


Рис. 5.32

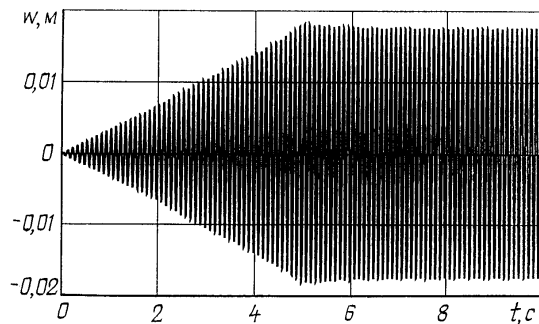


Рис. 5.33

ментов конструкций неупругое деформирование может стать главным фактором, определяющим реакцию элемента.

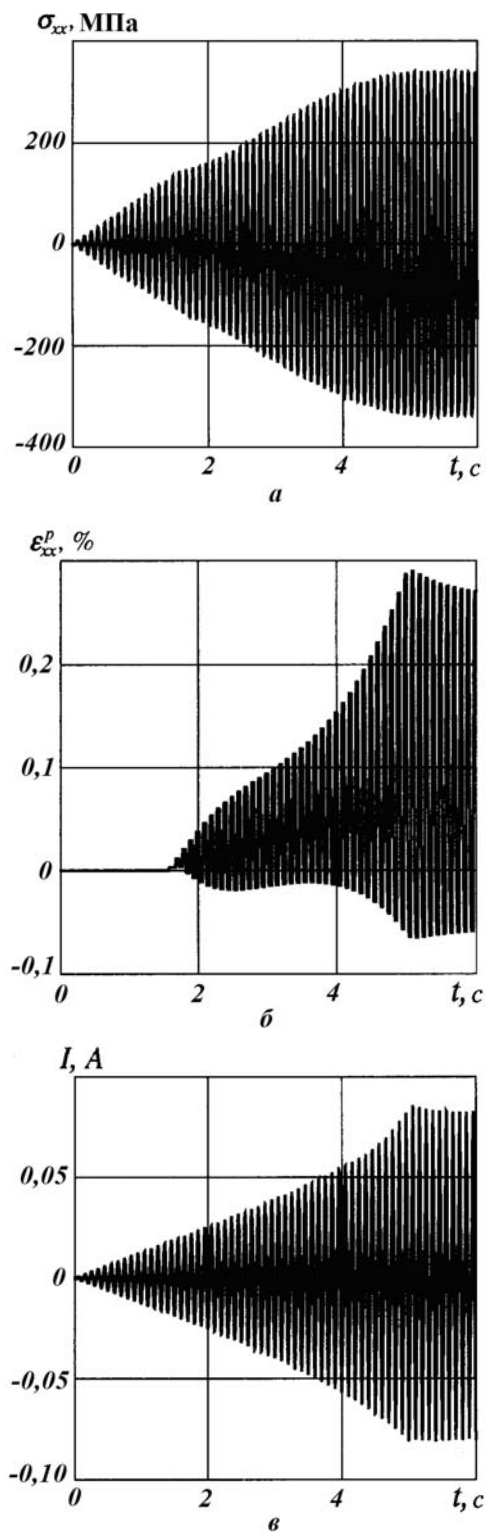


Рис. 5.34

Анализ рис. 5.32 позволяет выделить интервалы нагрузок, в которых на стадии установившихся колебаний система демонстрирует линейное поведение ($M_0 < 0,12 \text{ МН}\cdot\text{м}$), преимущественным будет геометрический тип нелинейности ($0,12 < M_0 < 0,24 \text{ МН}\cdot\text{м}$) или нагрузки, при которых влияние обеих нелинейностей велико ($M_0 > 0,24 \text{ МН}\cdot\text{м}$). Для балки с конфигурацией *A* геометрическая нелинейность доминирует во всем рассмотренном интервале нагрузок.

Пример нестационарной реакции балки на гармоническое механическое возбуждение представлен на рис. 5.33. Здесь показана история изменения прогиба для конфигурации *B* при $M_0 = 0,27 \text{ МН}\cdot\text{м}$ для случая полного учета как физической, так и геометрической нелинейностей. Видно, что после первых 50-ти циклов колебаний, когда амплитуда нагрузки принимает стационарное значение, происходит небольшое уменьшение амплитуды прогиба, обусловленное упрочнением слоев алюминиевого сплава, прилегающих к пьезокерамике. После окончания переходного процесса формируется симметричный относительно горизонтальной линии цикл колебаний балки.

История изменения напряжения и неупругой деформации в точке $x = L/2$, $z = -h_2/2$ (крайняя нижняя точка алюминиевого слоя в центральном поперечном сечении балки) представлена на рис. 5.34, *а* и 5.34, *б*, соответственно. Эволюция величины электрического тока, снимаемого с нижнего пьезокерамического слоя в режиме сенсора, представлена на рис. 5.34, *в*. Отмечено формирование симметричного цикла реакции напряжения на стадии установившихся колебаний. При нарастании нагрузки достигается предел упругости материала. Этому моменту времени соответствует изменение угла наклона огибающей на рис. 5.34, *а*.

Анализ рис. 5.34, *б* показывает, что при учете геометрической нелинейности история изменения неупругой деформации не является симметричной относительно нуля вследствие деформации оси

балки. Учет только физической нелинейности приводит к иной ситуации: при этом формируется симметричная история неупругой деформации. Момент начала неупругого деформирования легко идентифицировать по рис. 5.34, б. При работе в режиме сенсора электрический ток, снимаемый с одного пьезоактивного слоя, также характеризуется слабой асимметрией цикла относительно нуля. Такое поведение обусловлено тем, что возникающий (вследствие обратного пьезоэффекта) заряд определяется деформацией активного слоя, которая не является симметричной относительно нуля из-за влияния геометрической нелинейности. Детальное поведение электромеханических параметров в пределах стабилизированного цикла колебаний представлено на рис. 5.35.

На рис. 5.35, а сплошной и штриховой линиями представлены изменения во времени полных деформаций в точках с координатами $(L/2, -h_2/2)$ и $(L/2, h_2/2)$, соответственно: штрих-пунктирной линией показана зависимость деформации оси балки от времени, а пунктирной – временная зависимость тока, снимаемого с нижнего пьезоактивного слоя. Видно, что асимметрия деформационных циклов обусловлена влиянием геометрической нелинейности, в частности, деформацией оси балки. Поскольку ось испытывает деформации растяжения, то в пределах каждого полуцикла она увеличивает деформацию растянутых слоев и уменьшает деформацию противоположных сжатых слоев балки. Аналогичная ситуация наблюдается и для тока. Отмечается отклонение кривых от гармонического закона изменения во времени. В случае неучета геометрической нелинейности при прогибе балки все рассматриваемые зависимости будут симметричными, а деформация оси балки – нулевой.

На рис. 5.35, б тонкими сплошной и штриховой линиями показаны изменения за период колебаний прогиба балки и фазы механической нагрузки, соответственно. Жирная сплошная и штриховая линии отвечают неупругой деформации в точках с координатами $(L/2, -h_2/2)$ и $(L/2, h_2/2)$, а пунктирная и штрих-пунктирная линии – напряжениям в этих же точках. Отмечается появление сдвига фаз между механической нагрузкой и прогибом, обусловленное неупругим деформированием материала центрального слоя. Наблюдаемый сдвиг фаз мал, поскольку мал относительный объем материала, вовлеченного в неупругое деформирование. Аналогично рис. 5.35, а временные зависимости неупругой деформации и напряжения являются несимметричными относительно нуля, вследствие учета геометрической нелинейности. Учет только физической нелинейности приводит к симметрии соответствующих кривых.

При электрическом возбуждении колебаний путем подачи на электроды пьезоактивных слоев гармонически изменяющейся во времени разности потенциалов наблюдается аналогичное поведение всех механических величин. В результате проведенных расчетов построены графики, соответствующие рис. 5.33 – 5.35. Рис. 5.32 имеет подобный вид с тем отличием, что по оси абсцисс отложена амплитуда электрического напряжения V_0 .

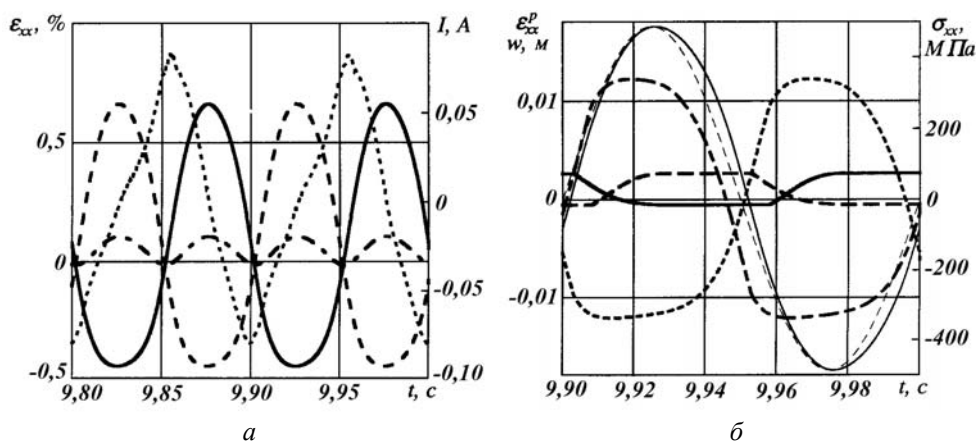


Рис. 5.35

Пусть на шарнирно закрепленную трехслойную балку действуют гармонически изменяющиеся во времени механические моменты, приложенные на ее концах. Как и ранее, моменты модулируются линейным законом по времени так, чтобы максимальное значение достигалось за 50 циклов колебаний. После стабилизации цикла колебаний в некоторый момент времени t_s на электроды пьезоактивных слоев начинает подаваться разность потенциалов V , изменяющаяся по закону

$$V = V_0 \sin(\omega t + \pi + \delta) = -V_0 \sin(\omega t + \delta), \quad (5.8)$$

где δ – некоторый дополнительный сдвиг фаз.

Результаты расчетов для балки конфигурации A при учете только физической нелинейности представлены на рис. 5.36. На рис. 5.36, *a* штриховая линия соответствует режиму стационарных колебаний без подавления при помощи электрического напряжения при $M_0 = 100$ кН·м и частоте 10 Гц, а пунктирная – иллюстрирует фазу механического возбуждения. Сплошные кривые отвечают режиму подавления колебаний при $V_0 = 570$ кВ и $\delta = 0$. Кривая *1* – решение, получаемое в квазистатической постановке, а кривые с номерами *2* – *6* – решения в динамической постановке при $t_s = (8; 8,001; 8,004; 8,0058; 8,00578)$ с, соответственно. На рис. 5.36, *б* детально показаны решения в квазистатической и динамической постановках, причем жирная кривая отвечает линии *1* (квазистатическое решение), а тонкая кривая – линии *6* (динамическое решение) на рис. 5.36, *a*. Оказывается, что при подавлении колебаний на частоте вынуждающей силы не удастся погасить колебания полностью. Остаточные результирующие колебания характеризуются двумя особенностями.

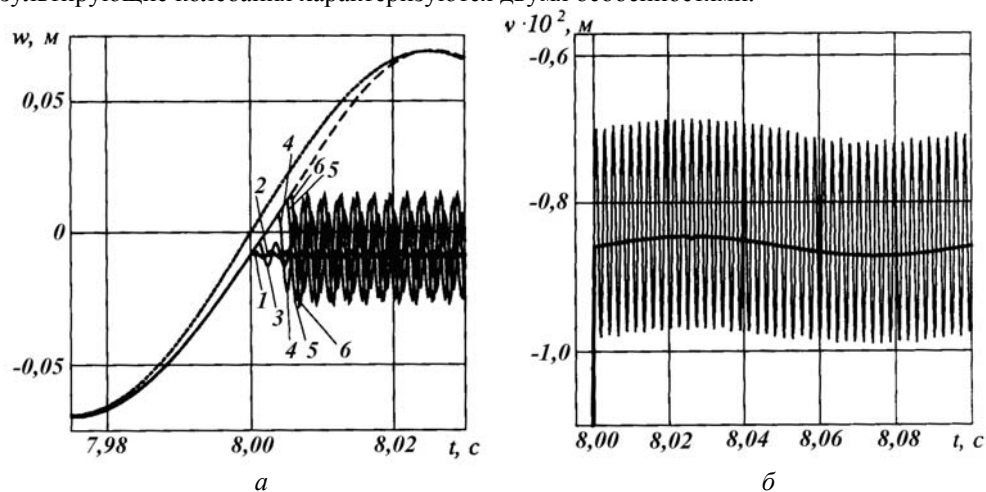


Рис. 5.36

Во-первых, они происходят около изогнутого положения оси балки. Это положение определяется неупругими деформациями материала и остается постоянным, если момент включения электрического напряжения совпадает с этапом упругого деформирования, когда имеет место разгрузка или повторное нагружение в упругой области (см. сплошную и штриховую кривые на рис. 5.39, *б*). Если не учитывать инерционные эффекты, то амплитуда остаточных колебаний будет пренебрежимо малой (жирная кривая на рис. 5.36, *б*), а соответствующим подбором фазы δ можно полностью подавить указанные колебания. Средняя составляющая при этом остается и для ее устранения необходимо дополнительно вводить постоянную составляющую электрического напряжения.

Во-вторых, учет динамических эффектов качественно меняет характер остаточных колебаний. Они также совершаются около изогнутого положения оси, однако их

амплитуда значительно возрастает и совершаются они с собственной частотой колебаний балки (быстрые составляющие на рис. 5.36), модулированной медленно изменяющимися остаточными колебаниями на частоте внешнего воздействия. В этом случае рассматриваемая задача становится эквивалентной задаче об упругих колебаниях изогнутой балки, имеющей в начальный момент времени некоторый прогиб и скорость. Эти величины определяются отклонением точек балки от изогнутого положения и их скоростью в момент включения t_s электрического сигнала. Из рис. 5.36, *a* видно, что чем больше это отклонение, тем больше амплитуда собственных колебаний. С другой стороны, амплитуда также зависит от скорости точек балки в момент времени t_s .

Изменение характера поведения остаточных колебаний при учете как физической, так и геометрической нелинейности, представлено на рис. 5.37 для балки конфигурации *b* при $M_0 = 270$ кН·м, $V_0 = 670$ кВ. Кривая 1 на рис. 5.37, *a* соответствует решению динамической задачи при $t_s = 10,002$ с и $\delta = 0$. Кривая 2 представляет динамическое поведение балки при $t_s = 10,002$ с и $\delta = \delta_{Mw}$, где δ_{Mw} – сдвиг фаз между механическим возбуждением и прогибом, обусловленным неупругим деформированием. Кривые 3 и 4 иллюстрируют квазистатическое решение, отвечающее линии 1, для случая неучета и учета геометрической нелинейности, соответственно. Кривые 5, *a* и 6, *a* представляют поведение неупругой деформации в точке $(L/2, -h_2/2)$ в случае пренебрежения и учета геометрической нелинейности, соответственно, а кривые 5, *б* и 6, *б* показывают аналогичные зависимости для точки $(L/2, h_2/2)$.

На рис. 5.37, *б* и рис. 5.37, *в* представлены установившиеся циклы колебаний после включения электрического напряжения. Линии 1 и 2 соответствуют кривым с такими же номерами на рис. 5.37, *a*. Линия 3 представляет историю прогиба при отличающемся от (5.8) законе подавления колебаний $V = A(t)V_0 \sin(\omega t + \pi + \delta) = -A(t)V_0 \sin(\omega t + \delta)$;

$$A(t) = \begin{cases} 0; & t \leq t_s; \\ (t-t_s)f/N_C; & t_s < t < t_s + N_C f; \\ 1; & t \geq t_s + N_C f, \end{cases}$$

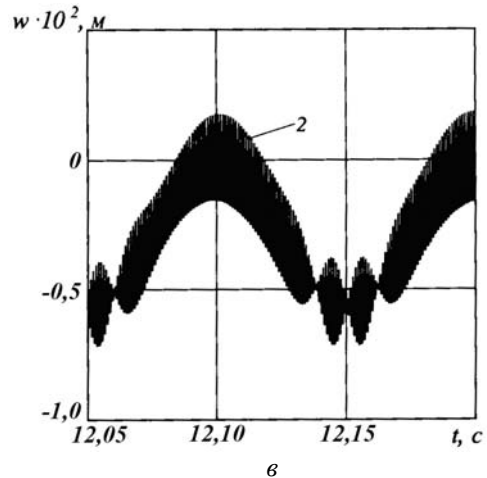
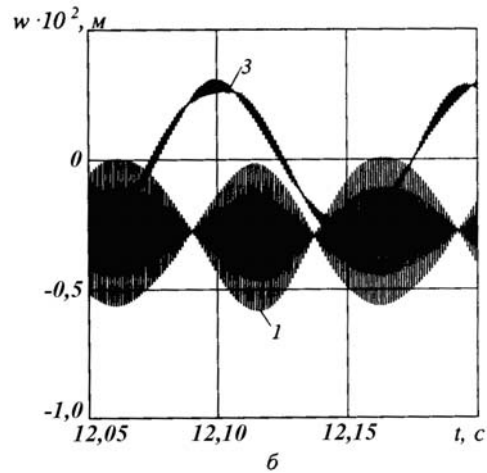
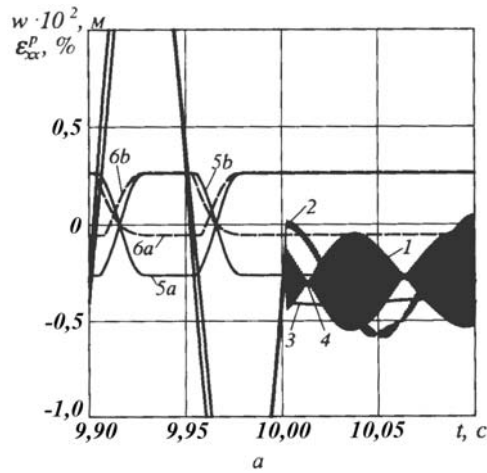


Рис. 5.37

где f – частота колебаний; N_C – количество циклов, в течение которых амплитуда гармонически изменяющегося во времени электрического напряжения возрастает до заданного значения V_0 .

Для кривой 3 принято $t_s = 10$ с, $N_C = 20$. В этом случае из-за медленного нарастания амплитуды электрической нагрузки происходит постепенная компенсация механического возбуждения и медленное уменьшение амплитуды прогиба. В результате предотвращается образование изогнутой оси балки вследствие неупругого деформирования и остаточные колебания совершаются относительно линии $z = 0$.

Анализ рис. 5.37 показывает, что геометрическая нелинейность проявляется двумя эффектами. Во-первых, происходит уменьшение остаточного прогиба изогнутой оси балки (линии 3 и 4 на рис. 5.37, а). Этот эффект вызван изменением характера поведения неупругой деформации по поперечному сечению, что, в свою очередь, обусловлено учетом растяжения оси балки. Сравнение кривых 5 и 6 на рис. 5.37, а указывает на то, что балка становится более жесткой.

Во-вторых, геометрическая нелинейность в рассмотренной постановке является кубической по прогибу. Это приводит к появлению нечетных гармоник в спектре частот остаточных колебаний. Поскольку остаточные колебания являются упругими, то на рис. 5.37 наблюдаются биения как результат суммирования колебаний на частоте внешнего воздействия, кратных ему частотам и частоте первого изгибного резонанса для балки.

Таким образом, для шарнирно опертой трехслойной балки с внешними пьезоактивными слоями изучены особенности механического и электрического возбуждения колебаний. Для симметрично расположенных пьезослоев равной толщины с противоположно направленной толщиной поляризацией механическое и электрическое возбуждение оказываются эквивалентными как по прогибу, так и по всем параметрам напряженно-деформированного состояния. Этот факт может служить основой разработки методики гашения механически возбуждаемых колебаний при помощи подачи соответствующей разности потенциалов на контакты пьезослоев. При этом физическая нелинейность поведения материала пассивного слоя и геометрическая нелинейность существенно влияют на реакцию слоя – сенсора и конструкции в целом. Наличие нелинейного поведения и взаимовлияние нелинейностей как при переходных, так и при стационарных режимах работы препятствуют полному подавлению вынужденных колебаний. Влияние физической и геометрической нелинейностей проявляется в возникновении сдвига фаз между нагружением и реакцией системы, формировании изогнутой оси балки, возникновении остаточных колебаний с собственной частотой на первой изгибной моде и колебаний с частотами, кратными частоте возбуждения. Дальнейшее уменьшение амплитуд остаточных колебаний возможно при использовании методов активно – пассивного демпфирования, например, введения дополнительных рассеивающих покрытий, состоящих из материалов с высокой вязкостью, или организации электрических цепей с обратной связью.

Влияние геометрической нелинейности на эффективность активного демпфирования вынужденных изгибных колебаний вязкоупругих балок при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов исследовано в [129]. Показано, что при расчете коэффициента управления, необходимого для вычисления компенсирующего механическую нагрузку электрического показателя актуатора, можно ограничиться линейной постановкой задачи.

§6. Демпфирование нестационарных колебаний.

Ниже рассмотрены задачи о демпфировании нестационарных колебаний прямоугольных пластин при помощи актуаторов. Для моделирования колебаний используются гипотезы Кирхгофа – Лява и С.П. Тимошенко. Для демпфирования нестационарных колебаний применяются два метода. Согласно первому из них к актуатору подводится разность потенциалов, компенсирующая действие наиболее энергоемких мод механической нагрузки. Согласно второму – к актуатору подводится разность потенциалов, изменяющаяся по закону, определяемому методом оптимального управления. Проведено сравнение эффективности активного демпфирования с использованием указанных двух методов. Исследовано также влияние геометрической нелинейности на активное демпфирование нестационарных колебаний гибкой вязкоупругой пластинки.

Необходимость в исследовании активного демпфирования нестационарных колебаний возникает при решении вопроса, как быстро реализуется режим стационарных колебаний при периодических механических и электрических воздействиях.

6.1. Активное демпфирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины при помощи пьезоактуаторов. Для эффективного демпфирования нестационарных колебаний пластин с использованием только пьезоэлектрических актуаторов выше использован классический подход, когда для компенсации механической нагрузки к актуаторам подводятся разности потенциалов, компенсирующие действие наиболее энергоемких мод. С целью повысить эффективность демпфирования нестационарных колебаний в [110] использованы методы оптимального управления [20].

В качестве примера рассмотрены нестационарные колебания шарнирно опертой прямоугольной упругой пластины под действием внешнего нормального давления $p(x, y, t)$. На поверхности пластинки $z = \pm h/2$ нанесено N пьезоэлектрических актуаторов с противоположной поляризацией. К ним подводятся разности потенциалов, вызывающие изгибные колебания. Рассчитаем ту разность потенциалов, которую необходимо подвести к актуаторам для компенсации действия механической нагрузки и таким образом уменьшить амплитуду колебаний пластины. Задача сводится к решению стандартного уравнения нестационарных поперечных колебаний пластины, на которую действует нагрузка

$$p(x, y) + \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}, \text{ где } M_0 = \sum_{i=1}^N M_0^i = \sum_{i=1}^N \gamma_{31}^i (h + h_i) V_a^i.$$

Здесь N – количество актуаторов; γ_{31}^i – пьезоконстанта i -го актуатора; h_i – толщина i -го актуатора; V_a^i – разность потенциалов, подводимая к i -му актуатору. При шарнирном опирании торцов пластины поперечный прогиб w , механическая $p(x, y, t)$ и электрическая M_0 нагрузки представляются в виде рядов по тригонометрическим функциям. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений во времени [110]:

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \frac{1}{\rho h} p_{mn} - \sqrt{\frac{1}{D\rho h}} \omega_{mn} \sum_{i=1}^N M_{mn}^i \quad (m, n = \overline{1, \infty}), \quad (6.1)$$

где принято $\omega_{mn} = \sqrt{D/\rho h (\pi^2 m^2/a^2 + \pi^2 n^2/b^2)}$.

Обозначая $L_{mn}^i = \sqrt{\frac{1}{D\rho h}} \omega_{mn} \gamma_{31}^i (h + h_i) \iint_{S_i} F_{mn} dx dy / K_{mn}$, представим соотношения (6.1)

в виде

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \frac{1}{\rho h K_{mn}} p_{mn} - \sum_{i=1}^N L_{mn}^i V_a^i \quad (m, n = \overline{1, \infty}). \quad (6.2)$$

Ограничимся числом Q гармоник по $m = m_1, m_2, \dots, m_Q$ и числом S гармоник по $n = n_1, n_2, \dots, n_S$. Введем обозначения: $x_{2k-1} = W_{m_q n_s}$, $x_{2k} = \dot{W}_{m_q n_s}$, $k = \overline{1, QS}$, $q = \overline{1, Q}$, $s = \overline{1, S}$. Тогда из (6.2) получим систему линейных дифференциальных уравнений порядка $2QS$ $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{V}_a + \mathbf{F}$, где \mathbf{A}, \mathbf{B} – матрицы размером $2QS \times 2QS$ и $2QS \times N$, соответственно; \mathbf{F} – $2QS$ мерный вектор-столбец, которые представлены в [110].

Сформулируем задачу об оптимизации разностей потенциалов V_a^i , подводимых к актуаторам с целью демпфирования колебаний пластинки, которые вызваны внешней нагрузкой и начальными условиями. Поведение прогиба во времени в произвольной точке пластины определяется поведением величин W_{mn} . Значит, демпфирование колебательного процесса при минимальных энергозатратах обеспечивается путем минимизации квадратичного функционала

$$J = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{2QS} q_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N r_i V_a^{i2} \right) dt,$$

где q_i и r_i – весовые коэффициенты, позволяющие задавать приоритетность минимизации той или иной фазовой координаты или управляющего воздействия. Запишем выражение для функционала J в матричной форме: $J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{V}_a^T \mathbf{R} \mathbf{V}_a) dt$; \mathbf{Q} и \mathbf{R} – квадратные диагональные матрицы со значениями q_i и r_i на главных диагоналях, соответственно. Представленные формулы позволяют формулировать задачу о синтезе оптимального регулятора для линейной стационарной системы дифференциальных уравнений при квадратичном критерии оптимальности, т.е.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{V}_a^T \mathbf{R} \mathbf{V}_a) dt \rightarrow \min; \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{V}_a + \mathbf{F}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (6.3)$$

Согласно работе [20], применяя метод динамического программирования, оптимальное управление для задачи (6.3) находим по формуле $\mathbf{V}_a = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x}$, в которой матрицу \mathbf{K} получим из алгебраического матричного уравнения Риккати [20]

$$\mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}^T - \mathbf{K} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}^T - \mathbf{Q} = 0.$$

В качестве конкретного примера рассмотрим шарнирно опертую квадратную металлическую пластинку длиной $a = b = 20$ см, толщиной, $h = 1$ мм, $\rho = 7850$ кг/м³, $D = 18,315$. На пластинку нанесен указанный выше квадратный пьезоэлектрический актуатор с длиной стороны, равной длине стороны пластинки, толщиной $h = 10$ мм и значением коэффициента $\gamma_{31} = -18,2857$ (материал ЦТС₇БС-2). Центры актуатора и пластинки совпадают, а их стороны параллельны. На пластинку действует постоянная во времени нагрузка $p = 100$ Н/м², распределенная по площади пластинки. В начальный момент времени пластинка не деформирована. При решении задачи принимаем в рассмотрение гармоники при $m, n = 1, 3, 5$. Матричное уравнение Риккати решаем численно, с использованием стандартной процедуры `sage.m` пакета MATLAB. На рис. 6.1 показаны кривые изменения прогиба в центре пластинки: 4 – без управления; 2 – при $q_i = 50, i = \overline{1,18}, r = 1$; 3 – при $q_i = 350, i = \overline{1,18}, r = 1$. На рис. 6.2 показано поведение оптимизированного управления V_a : 2 – при $q_i = 50, i = \overline{1,18}, r = 1$; 3 – при $q_i = 350, i = \overline{1,18}, r = 1$. Как видно, использование всего одного актуатора позволяет существенно уменьшить амплитуды колебаний за достаточно малый промежуток времени.

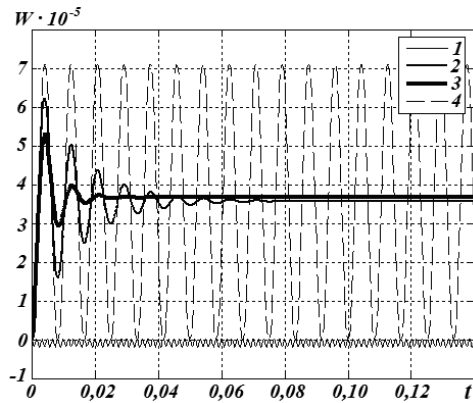


Рис. 6.1

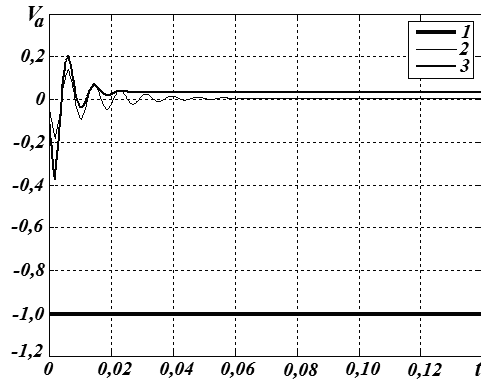


Рис. 6.2

Кривые l на рис. 6.1, 6.2 показывают изменение W и требуемую разность потенциалов при нулевых начальных условиях в случае, когда разность потенциалов выбиралась не из условия оптимизации функционала, а из условия равенства нулю правой части уравнения (6.2) для низшей гармоники $m = n = 1$ при использовании только одного актуатора. Из анализа кривых на рис. 6.1, 6.2 видно, что при классическом подходе существенно уменьшается прогиб, но на порядок возрастает требуемая для демпфирования колебаний разность потенциалов. К тому же, основным недостатком такого подхода является то, что он не применим при ненулевых начальных условиях, так как компенсируется действие внешней силы и не учитываются собственные колебания пластинки.

Отметим работу [135], в которой исследовано активное демпфирование прямоугольной пластины при импульсном нагружении.

6.2. Демпфирование нестационарных колебаний прямоугольной пластины при помощи пьезоактуаторов с учетом деформаций сдвига. В [111] рассмотрена задача об оптимальном демпфировании нестационарных колебаний шарнирно закрепленной прямоугольной упругой пластины толщины h под действием внешнего нормального давления $p(x, y, t)$ с помощью пьезоэлектрических актуаторов, нанесенных на поверхностях пластины $z = \pm h/2$. К данным актуаторам подводятся разности потенциалов, которые вызывают изгибные колебания пластины. Необходимо определить закон изменения разностей потенциалов на каждом актуаторе для максимально возможного уменьшения амплитуды колебаний при минимальных энергозатратах.

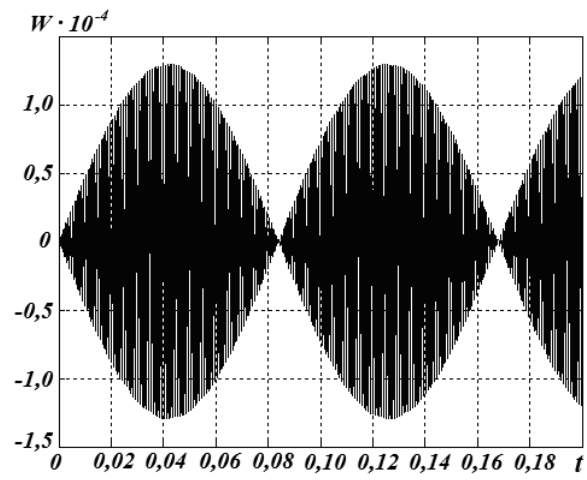
Постановка задачи представлена в [111]. Для шарнирного опирания торцов пластины решение ищем в виде разложений в ряды по тригонометрическим функциям. В результате задача сведена к решению бесконечной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений по времени, т.е.

$$\ddot{W}_{mn} + \omega_{mn}^2 W_{mn} = \tilde{p}_{mn} + \sum_{i=1}^N L_{mn}^i V_a^i, \quad m, n = \overline{1, \infty},$$

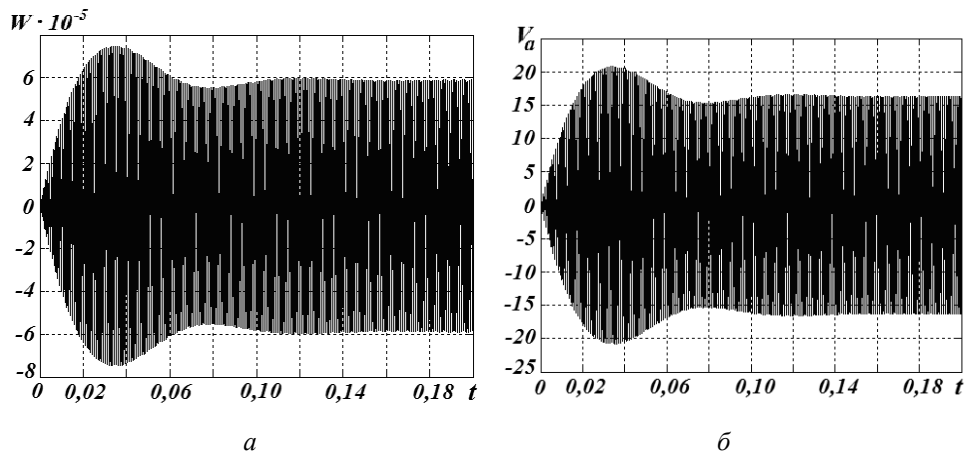
коэффициенты которой приведены в [111].

Задачу решаем по методике, изложенной в предыдущем параграфе. В качестве численного примера рассмотрим металлическую пластинку со сторонами $a = b = 20$ см, толщиной $h = 10$ мм, $\rho = 7850$ кг/м³. Материал пластинки – изотропный с такими механическими характеристиками: $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$. На пластинку нанесен указанный выше квадратный трансверсально изотропный пьезоэлектрический актуатор из ЦТС₇BC-2 с длиной стороны, равной длине стороны пластинки толщиной $h = 10$ мм. Центры актуатора и пластинки совпадают, а их стороны параллельны. На пластинку действует равномерно распределенная по ее площади нагрузка, изменяющаяся во времени по закону $p = 7000 \cos(0,99\omega_{11} t)$ Н/м² (т.е. с частотой, близкой к частоте резонанса низшей гармоники $m = n = 1$). В начальный момент времени пластинка недеформирована. При решении задачи ограничивались тремя гармониками: $m, n = 1, 3, 5$.

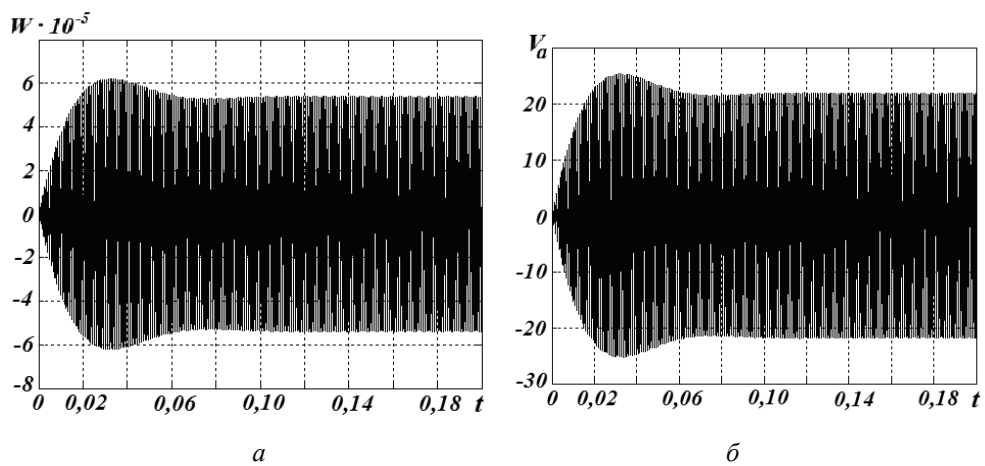
На рис. 6.3 показана кривая изменения во времени прогиба центра пластины при отсутствии управляющих воздействий (актуаторы отсутствуют). Видно, что возникает процесс биения с амплитудой $\cong 1,3 \cdot 10^{-4}$ м. Кривые изменения прогиба центра пластины W при оптимизированном активном демпфировании с помощью актуатора показаны на рис. 6.4, а при значениях коэффициентов $q_i = 350, i = \overline{1, 18}, r = 1$, а на рис. 6.4, б – при значениях коэффициентов $q_i = 750, i = \overline{1, 18}, r = 1$. На рис. 6.4, б и рис. 6.5, б показаны соответствующие графики оптимизированного управления V_a (подводимой к актуатору разности потенциалов). Как видно, использование актуатора позволяет за достаточно малый промежуток времени достичь режима установившихся (стационарных) колебаний с амплитудами, существенно меньшими, чем амплитуда вынужденных колебаний.



Puc. 6.3



Puc. 6.4



Puc. 6.5

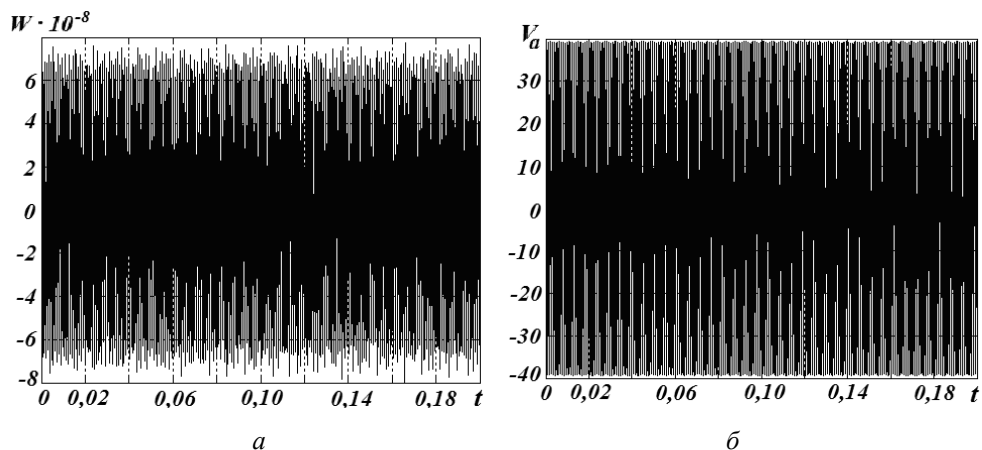


Рис. 6.6

Кривые на рис. 6.6, а, б показывают изменение W и требуемую разность потенциалов при нулевых начальных условиях в случае, когда разность потенциалов выбиралась не из условия оптимизации функционала, а из условия равенства нулю правой части уравнения (5.41) для низшей гармоники $m = n = 1$ при использовании только одного актуатора. Из анализа кривых видно, что при классическом подходе на несколько порядков уменьшается прогиб и возрастает в 1,5 – 2 раза требуемая для демпфирования колебаний разность потенциалов. Однако, основным недостатком такого подхода является то, что он не применим при ненулевых начальных условиях, так как компенсируется действие внешней силы и не учитываются собственные колебания пластинки.

6.3. Активное демпфирование нестационарных резонансных колебаний гибкой прямоугольной пластинки при помощи сенсоров и актуаторов [112]. Рассмотрим гибкую прямоугольную тонкую пластинку из пассивного (без пьезоэффекта) вязкоупругого материала. Края пластинки шарнирно оперты. На пластинку действует нормальное давление $q(x, y, t)$. Поверхности пластинки жестко скреплены с пьезоэлектрическими слоями с противоположной толщинной поляризацией, которые выполняют роль сенсоров и актуаторов. Пусть пластинка имеет линейные размеры a и b , толщину h , плотность материала ρ . Толщину пьезоактивных слоев обозначим h_s . Для моделирования электромеханического поведения такой трехслойной пластинки используем гипотезы Кирхгофа – Лява, дополненные адекватными им предположениями о малости тангенциальных составляющих напряженности электрического поля и индукции. Для учета геометрической нелинейности примем простейший вариант теории гибких пластин [112], когда в кинематических соотношениях удерживаются квадраты углов поворота. Тангенциальными силами инерции в уравнениях движения пренебрегаем. Механическое поведение пассивного материала описывается линейными уравнениями состояния интегрального типа теории вязкоупругости. Введя функцию усилий, тождественно удовлетворяющую уравнениям равновесия для усилий, и используя нелинейное уравнение совместности деформаций, получаем известную из теории гибких пластин систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений относительно функции усилий Φ и прогиба W , представленную в [112]. В этой системе поперечная нагрузка q заменяется выражением $q - \Delta M_0$, где $M_0 = 0,5\gamma_{31}(h + h_s)V_a$ – изгибающий момент от действия актуаторов, V_a – разность потенциалов, подводимая к актуатору, а γ_{31} – его пьезоконстанта.

Демпфирование колебаний пластинки осуществляется путем подачи на актуатор разности потенциалов, пропорциональной скорости изменения разности потенциалов,

снятой с сенсора, т. е. $V_a = -G\dot{V}_s$. Здесь G – постоянный во времени коэффициент обратной связи. Снимаемая с сенсора площади S разность потенциалов определяется по формуле $V_s = -\frac{h_s(h+h_s)}{2S} \frac{k_p^2}{d_{31}(1-k_p^2)} \iint_S \nabla^2 W dx dy$, а коэффициент k_p^2 определяется из выражения $k_p^2 = 2d_{31}^2 / (1-\tilde{\nu}) \varepsilon_{33} s_{11}$; $\tilde{\nu} = |s_{12} / s_{11}|$.

Для шарнирно закрепленной пластинки решение задачи ищем в виде разложений в ряды Фурье по тригонометрическим функциям, удовлетворяющим граничным условиям. Для описания механического поведения пассивного материала использовано экспоненциальное ядро. Исследованы резонансные колебания по моде mn . В результате получено интегро-дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{W}_{mn} - Gb\dot{W}_{mn} + a_1 W_{mn} - d_1 W_{mn}^3 - a_2 \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} W_{mn}(\tau) d\tau + d_2 W_{mn} \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} W_{mn}^2(\tau) d\tau = Q_1 q_{mn}(t), \quad (6.4)$$

где $b, a_1, a_2, d_1, d_2, Q_1$ – постоянные во времени коэффициенты.

Численное решение уравнения (6.4) построим на основе метода, изложенного в [2]. Пусть имеем интегро-дифференциальное уравнение такого вида:

$$\ddot{u}(t) = F\left(t, u(t), \dot{u}(t), \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau, u(\tau), \dot{u}(\tau)) d\tau\right) \quad (6.5)$$

с начальными условиями

$$u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0. \quad (6.6)$$

Дважды проинтегрировав уравнение (6.5) с учетом условий (6.6), получим

$$u(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau) F\left(t, u(t), \dot{u}(t), \int_{t_0}^s \varphi(t, \tau, u(s), \dot{u}(s)) ds\right) d\tau. \quad (6.7)$$

Наличие множителя $(t-\tau)$ в подынтегральной функции в (6.7) указывает на то, что ее значение в момент времени t равно нулю. Этот факт дал возможность построить явный алгоритм численного решения задачи (6.5), (6.6) на основе квадратурных формул [3]. В качестве примера рассмотрена задача об активном демпфировании шарнирно опертой квадратной металлической пластинки со сторонами $a = b = 20$ см, толщиной $h = 0,5$ мм, $\rho = 7850$ кг/м³. Материал пластинки принят изотропным ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$).

На пластинку нанесен указанный выше квадратный трансверсально-изотропный пьезоэлектрический актуатор из материала ЦТС₇БС-2 с длиной стороны, равной длине стороны пластинки.

Центры актуатора и пластинки совпадают, а их стороны параллельны. На пластинку действует равномерно распределенная по ее площади нагрузка, изменяющаяся во времени по закону $p = 100 \sin \omega_{11} t$ Н/м², т.е. с частотой, близкой к частоте резонанса нижней гармоники ($m = n = 1$). В начальный момент времени пластинка не деформирована.

На рис. 6.7, а – 6.10, а показаны кривые изменения во времени прогиба в центре пластинки, отнесенного к ее толщине, при таких значениях коэффициента обратной связи G_2 (3.11): 0,005, 0,01, 0,025, 0,04, соответственно, а на рис. 6.7, б – 6.10, б – соответствующие зависимости от времени разностей потенциалов V_a , подаваемых на

актуатор. Утолщенные кривые соответствуют решению геометрически нелинейной задачи – решению уравнения (5.49). Тонкие кривые соответствуют геометрически линейной постановке задачи.

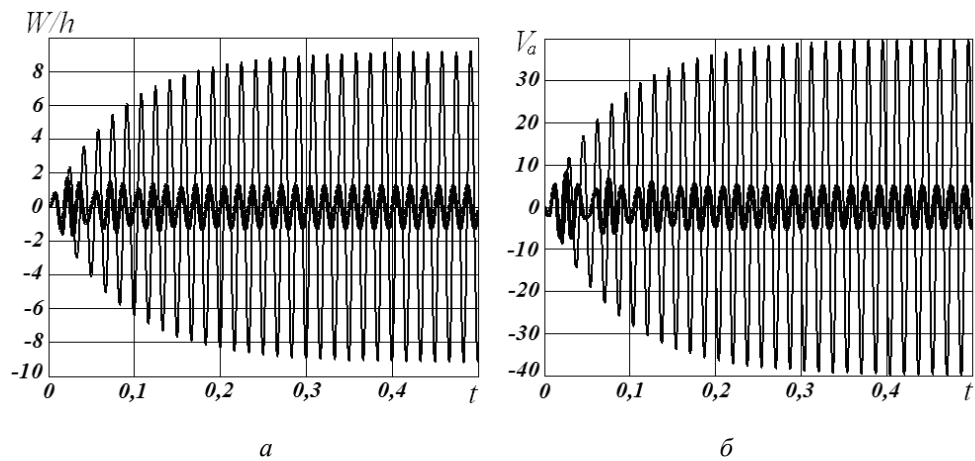


Рис. 6.7

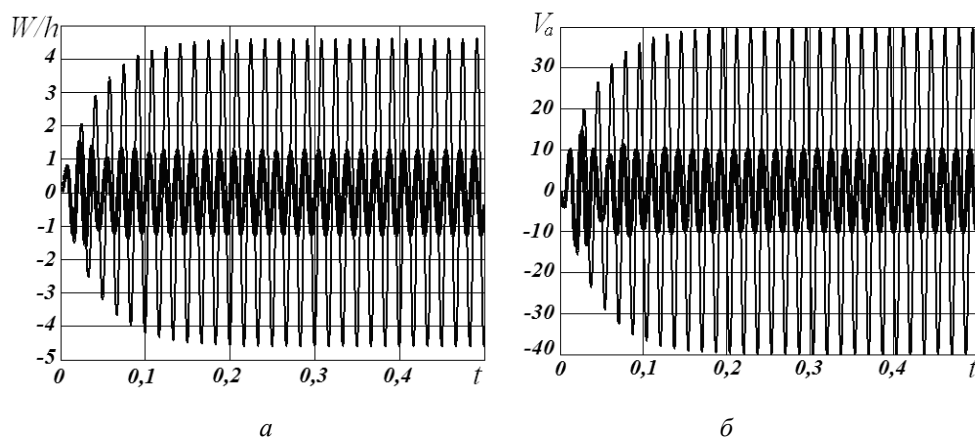


Рис. 6.8

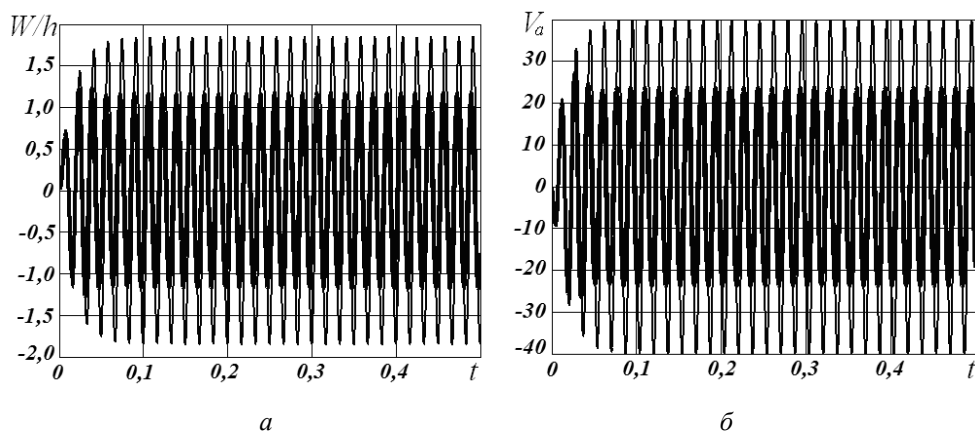


Рис. 6.9

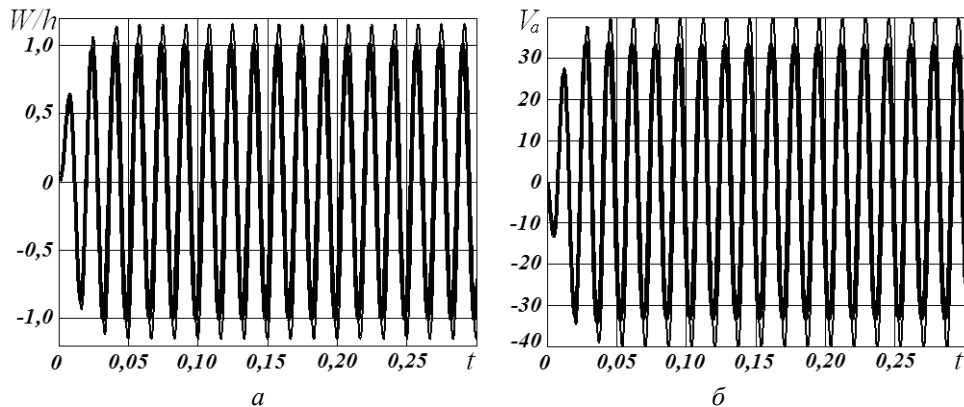


Рис. 6.10

Из представленных результатов следует, что с увеличением параметра обратной связи G_2 влияние геометрической нелинейности на амплитуду колебаний и подводимой к актуатору разности потенциалов уменьшается.

§7. Тепловое разрушение системы активного управления вынужденными колебаниями тонкостенных элементов.

Как указано во введении, под тепловым разрушением понимаем достижение ТДР точки деградации пассивного или активного материала. При рассмотрении этой проблемы следует выделить две основные задачи: первая из них состоит в определении критической нагрузки q_k , при достижении которой теряется функциональное назначение элемента; вторая – в определении критического времени t_k при действии нагрузки, превышающей критическую ($q > q_k$). При решении первой задачи можно ограничиться стационарной постановкой связанной задачи термоэлектровязкоупругости, а при решении второй – необходимо решать нестационарную связанную задачу при действии на вязкоупругий элемент закритической нагрузки и определить критическое время t_k , при котором ТДР достигает точки деградации материала θ_k . Решая вторую задачу для разных закритических нагрузок, можно построить кривую типа Веллера, представляющей собой зависимость между закритической нагрузкой и критическим временем. Эта кривая сверху асимптотически приближается к критической нагрузке. Детальное освещение вопроса о тепловом разрушении тонкостенных элементов конструкций из пассивных неупругих материалов представлено в [9, 39, 66] и обзорах [96, 145].

Первые результаты по тепловому разрушению пьезоэлектрических тонкостенных элементов, в указанном выше смысле, представлены в [103, 113], а краткий обзор по этому вопросу содержится в работах [96, 97, 100, 101]. Определению критических нагрузок с использованием аналитических решений связанных задач о колебаниях неупругих прямоугольных и круглых пластин, а также цилиндрических и сферических оболочек с учетом физической нелинейности первого типа посвящены работы [32, 34, 44, 45, 47, 49, 50, 98, 103, 107, 116, 117, 119 – 127, 131]. В этих работах с использованием полученных аналитических формул для ТДР критическая нагрузка определена путем приравнивания максимальной температуры значению θ_k в точке деградации материала. Аналогичные решения для круглых и прямоугольных пластин из физически нелинейного материала второго типа представлены в [34, 41, 42].

Тепловое разрушение балки с учетом физической нелинейности второго типа при ее поперечных колебаниях исследовано в [92 – 94], где рассмотрены вопросы определения критической нагрузки и критического времени при действии закритической нагрузки на балку. Для случая независящих от температуры свойств материала определение критического времени при закритической нагрузке шарнирно опертых плас-

тин и цилиндрических оболочек методом Бубнова – Галеркина сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка относительно максимальной температуры θ_0 [34]

$$\dot{\theta}_0 = c_1 - c_2\theta_0, \quad (7.1)$$

где постоянные c_1, c_2 зависят от геометрических размеров элемента, механических и теплофизических свойств материала [34].

Интегрируя (7.1), получим следующее выражение для критического времени t_k :

$$t_k = \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_2}{c_2\theta_k - c_1}. \quad (7.2)$$

Если механические свойства неупругих материалов зависят от температуры по произвольному закону, тогда вместо представленных выше простых формул получим более сложные выражения как для АЧХ, так и для ТЧХ. Для вычисления критических значений параметра механического нагружения из трансцендентных уравнений необходимо привлекать численные методы. Для определения критического времени вместо (7.2) получим выражение

$$\int_0^{\theta_k} \frac{d\theta}{\Phi(\theta)} = t_k, \quad (7.3)$$

где функция $\Phi(\theta)$ определяется аппроксимацией экспериментальных данных о зависимости механических характеристик от температуры.

Для расчета критической нагрузки при вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тонкостенных элементов можно использовать указанные выше численные методы решения стационарных и нестационарных связанных задач термоэлектровязкоупругости, основанные на итерационных процедурах, сводящих исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач механики и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Такой подход позволяет решать задачи с произвольной зависимостью механических характеристик от температуры и амплитуд деформаций, а также нелинейные задачи о колебаниях гибких тонкостенных элементов. Однако, при этом критическая механическая нагрузка определяется путем перебора. Расчет начинаем с некоторой нагрузки, при которой максимальная температура диссипативного разогрева не достигает точки деградации материала. Затем задаем некоторое малое приращение механической нагрузки и для этой нагрузки снова решаем нелинейную задачу. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока при некотором значении механической нагрузки максимальная температура достигнет точки деградации материала. Это значение и будет критическим. Для определения закритического времени аналогичным образом решаем нестационарные связанные задачи термоэлектровязкоупругости.

На рис. 7.1 приведены типичные кривые 1 – 4 зависимости ТДР θ тонкостенного элемента от амплитуды механической нагрузки \tilde{q} , рассчитанных на некоторой частоте для независящих от температуры свойств пассивного материала с разными коэффициентами теплообмена $\alpha_s = 2; 5; 10; 15 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{град})$, соответственно, [48]. Звездочкой на оси ординат обозначено значение температуры деградации материала $\theta_{kp} = 100^\circ\text{C}$. Этой температуре на оси абсцисс соответствует значение амплитуды критической нагрузки \tilde{q}_{kp} . Типичная зависимость \tilde{q}_{kp} от коэффициента теплообмена α_s представлена кривой на рис. 7.2 [48]. Из рис. 7.1, 7.2 видно, что значение критической нагрузки \tilde{q}_{kp} стремится к нулевому при полной теплоизоляции системы ($\alpha_s \rightarrow 0$) и постепенно нарастает, стремясь к постоянной величине, при увеличении коэффициента теплообмена.

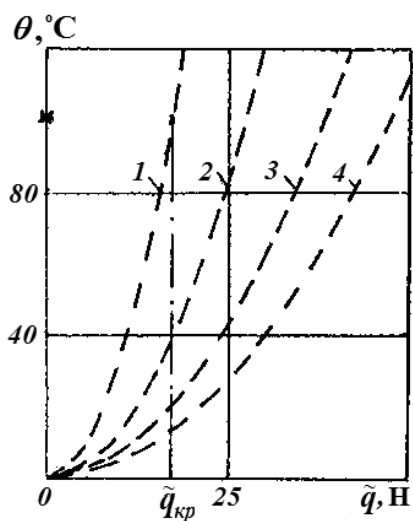


Рис. 7.1

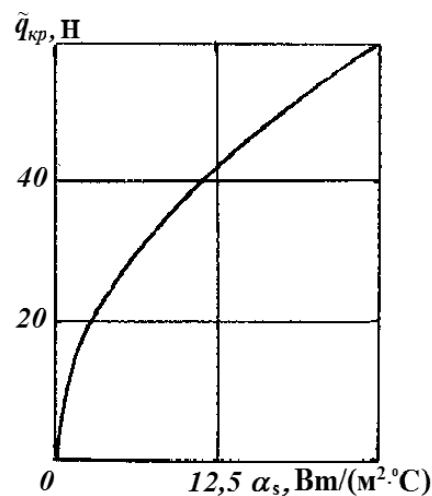


Рис. 7.2

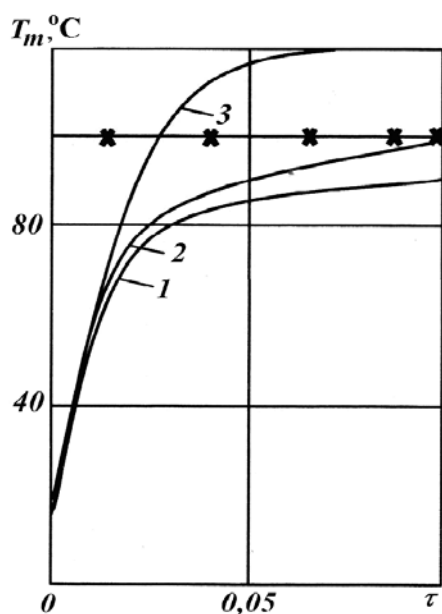


Рис. 7.3

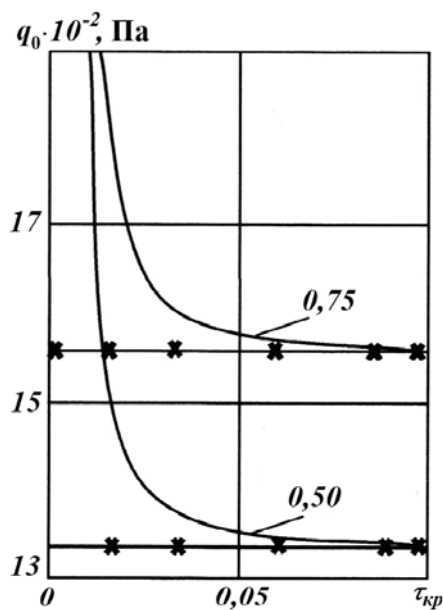


Рис. 7.4

На рис. 7.3 представлена типичная зависимость максимальной ТДР от безразмерного времени для докритических (кривые 1, 2) и закритической (кривая 3) нагрузки [44]. Температура деградации материала отмечена крестиками. На рис. 7.4 представлены типичные кривые типа Веллера для разных коэффициентов теплообмена [44]. Крестиками отмечена температура деградации. Как видно, с увеличением коэффициента теплообмена критическая нагрузка увеличивается, что отвечает показанной на рис. 7.2 кривой.

§8. Активное демпфирование резонансных колебаний пластин и оболочек при действии на них неизвестной механической нагрузки.

В [43] предложен подход к активному демпфированию резонансных изгибных колебаний ортотропных вязкоупругих пластин при помощи совместного использования сенсоров и актуаторов в случае, когда механическая нагрузка неизвестна. Суть

его состоит в следующем. По показаниям сенсора (заряду или разности потенциалов) восстанавливаются амплитуда и фаза внешней нагрузки. После этого можно использовать первый из указанных выше методов, когда к актуатору подводится разность потенциалов, которую рассчитываем по уже известной нагрузке, определяемой по экспериментальным показаниям сенсора.

Для примера рассмотрим прямоугольную пластину, на которую действует давление, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой, близкой к резонансной частоте пластины. Торцы пластины примем шарнирно опертыми. Для моделирования колебаний пластины используем гипотезы Кирхгофа – Лява (см. 3.2). Ограничимся исследованием демпфирования только изгибных колебаний. Пассивные слои могут быть металлическими, полимерными либо композитными. Примем их ортотропными, а пьезоактивные слои – трансверсально-изотропными и поляризованными по толщине пластины. Если между слоями электроды отсутствуют, то на границе их раздела имеет место идеальный механический и электрический контакт. Диссипативные свойства материалов пассивных и пьезоактивных слоев учитываем на основе концепции комплексных характеристик. Ограничимся случаем трехслойной пластины, средний слой толщиной h_0 которой изготовлен из пассивного (без пьезоэффекта) материала, а два внешних слоя одинаковой толщины h_1 – из пьезоэлектрических материалов с противоположным направлением поляризации. Для ортотропной пластины задача сводится к решению уравнения [43]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \tilde{\rho} \omega^2 w - p_0(x, y) - \left(\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (8.1)$$

Здесь все жесткостные характеристики – комплексные.

Для шарнирного опирания торцов пластины решение уравнения (8.1) имеет вид

$$w_{mn} = \frac{p_{mn} - (k_m^2 + p_n^2) M_{mn}}{[D_{11} k_m^4 + (2D_{12} + D_{66}) k_m^2 p_n^2 + D_{22} p_n^4 - \tilde{\rho} \omega_{mn}^2]}. \quad (8.2)$$

Из (8.2) следует, что для компенсации внешней механической нагрузки к актуатору необходимо подвести разность потенциалов, определяемую из соотношения

$$V_{mn} = p_{mn} / (k_m^2 + p_n^2) \gamma_{31}^1 (h_0 + h_1). \quad (8.3)$$

При этом амплитуда колебаний на рассматриваемой моде будет равна нулю.

Для равномерного механического давления $p_0 = \text{const}$ из формулы (8.3) следует, что для компенсации первой моды необходимо приложить разность потенциалов

$$V_{11} = p_{11} / (k_1^2 + p_1^2) \gamma_{31}^1 (h_0 + h_1); \quad p_{11} = 4p_0 / k_1 p_1; \quad V_{11} = 4V_0 / k_1 p_1. \quad (8.4)$$

Основные недостатки подхода, основанного на формулах (8.3), (8.4), состоят в том, что: 1) свободные колебания не демпфируются; 2) необходимо знать внешнюю механическую нагрузку. Первый из указанных недостатков устраняется за счет диссипативных свойств материалов. Для устранения второго недостатка используем показания сенсора, покрывающего площадь S_1 . Для коротко замкнутых электродов величина заряда определяется выражением

$$Q = -\gamma_{31} (h_0 + h_1) \iint_{(S_1)} (\kappa_1 + \kappa_2) dx dy. \quad (8.5)$$

Для разомкнутых электродов разность потенциалов определяем по формуле

$$V_s = h_1 Q / S_1 \gamma_{33}. \quad (8.6)$$

Рассмотрим демпфирование основной моды. Для нее из (8.5), (8.6) получаем следующие выражения для показаний сенсора:

$$Q_{11} = 4\gamma_{31}(h_0 + h_1)(k_1 / p_1 + p_1 / k_1)w_{11}; \quad (8.7)$$

$$V_{11S} = \frac{4h_1(h_0 + h_1)\gamma_{31}}{S_1\gamma_{33}} \left(\frac{k_1}{p_1} + \frac{p_1}{k_1} \right) w_{11}. \quad (8.8)$$

Решение задачи о резонансных механических колебаниях на первой моде пластинки с шарнирным опиранием ее торцов имеет следующий вид:

$$w_{11} = \frac{p_{11}}{[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \tilde{\rho}\omega_{11}^2]}. \quad (8.9)$$

Подставляя (8.9) в (8.7) или (8.8), получаем связь между показаниями сенсора и нагрузкой

$$p_{11} = \frac{Q_{11}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \tilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)(k_1 / p_1 + p_1 / k_1)},$$

$$p_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \tilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}(h_0 + h_1)(k_1 / p_1 + p_1 / k_1)}. \quad (8.10)$$

Подставим полученную из выражений (8.10) нагрузку в формулу (8.4) для разности потенциалов, компенсирующую данную нагрузку. В результате получим выражения для этого потенциала в таком виде:

$$V_{11} = \frac{Q_{11}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \tilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2(k_1 / p_1 + p_1 / k_1)(k_1^2 + p_1^2)},$$

$$V_{11} = \frac{V_{11S}S_1\gamma_{33}[D_{11}k_1^4 + (2D_{12} + D_{66})k_1^2 p_1^2 + D_{22}p_1^4 - \tilde{\rho}\omega_{11}^2]}{4\gamma_{31}^2(h_0 + h_1)^2(k_1 / p_1 + p_1 / k_1)(k_1^2 + p_1^2)}. \quad (8.11)$$

Таким образом, при использовании предлагаемого подхода к актуатору подводится разность потенциалов, определяемая через экспериментальные показания сенсора по формулам (8.11). При таком подходе необходимо знать лишь электромеханические свойства материалов пластины и ее размеры. При численном решении задачи поступаем следующим образом. Решим эталонную задачу о резонансных колебаниях пластины при действии на нее единичной нагрузки, когда $p_{11} = 1$ Па. По формулам (8.5), (8.6) определим показания сенсора $V_S^{(1)}$ или $Q_S^{(1)}$. При неизвестной нагрузке p_{11} показания сенсора будут равны:

$$V_s = p_{11}V_S^{(1)}. \quad (8.12)$$

Здесь обе величины V_s и $V_S^{(1)}$ известны: первая равна показанию сенсора при неизвестной нагрузке, а вторая равна показанию сенсора при единичной нагрузке.

Из (8.12) определяем неизвестную нагрузку

$$p_{11} = V_s / V_S^{(1)}. \quad (8.13)$$

Для расчета разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации неизвестной нагрузки, определим разность потенциалов $V_A^{(1)}$, которую следует подвести к актуатору для компенсации единичной нагрузки $p_0 = 1$ Па.

Тогда для компенсации нагрузки p_{11} к актуатору необходимо подвести разность потенциалов

$$V_A = p_{11}V_A^{(1)}. \quad (8.14)$$

Подставляя (8.13) в (8.14), окончательно получаем формулу

$$V_A = -|V_A^{(1)}|/|V_S^{(1)}|V_S.$$

Здесь величины $V_A^{(1)}$ и $V_S^{(1)}$ определяются из решения эталонных задач, а V_S равна показателю сенсора.

Для коротко замкнутых электродов все представленные выше рассуждения остаются без изменений. При этом в полученных выше формулах необходимо заменить $V_S^{(1)}$, V_S на $Q_S^{(1)}$, Q_S , соответственно.

При численном решении последней задачи необходимо решить две отдельные задачи: 1) определить прогиб w_p пластины в центре при $P_0 = 1\text{Па}$, $V_A = 0$; 2) определить прогиб w_E пластины в центре при $P_0 = 0$, $V_A = 1B$. Тогда $V_A^{(1)}$ определим из соотношения $V_A^{(1)} = w_p / w_E$. Примеры использования этого метода представлены в статьях [45, 130, 132, 137].

Заключение.

В данном обзоре представлены результаты исследований: по разработке моделей резонансных колебаний и диссипативного разогрева неупругих тонкостенных элементов с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами; по развитию численно-аналитических методов решения соответствующих нелинейных связанных краевых задач; по исследованию влияния различных факторов на эффективность работы сенсоров и актуаторов и на эффективность активного демпфирования колебаний неупругих тонкостенных элементов путем анализа решения конкретных задач.

Для моделирования термоэлектромеханического поведения пассивных и пьезоактивных материалов использована концепция комплексных характеристик. При этом рассмотрены *два типа* физической нелинейности: *первый тип* порождается зависимостью действительной и мнимой составляющих комплексных характеристик от температуры и зависимостью диссипативной функции от температуры и деформации; *второй тип* обусловлен зависимостью этих составляющих и диссипативной функции от деформаций. Рассмотрена также геометрическая нелинейность, обусловленная нелинейной зависимостью деформаций от перемещений.

Для описания колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных элементов конструкций использованы как классические гипотезы Кирхгофа – Лява, так и уточненные гипотезы, которые дополняются адекватными им гипотезами о распределении электрических и тепловых полей.

Для численного решения нелинейных краевых задач с использованием этих гипотез применены итерационные методы. При этом решение исходных нелинейных задач сведено к последовательности линейных задач механики и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Решения этих линейных задач получены с привлечением численных методов: метода дискретной ортогонализации (при решении одномерных задач) и метода конечных элементов (при решении двумерных задач). Для получения аналитических решений применен метод Бубнова – Галеркина. При исследовании демпфирования нестационарных колебаний использованы методы оптимального управления.

Путем анализа числовых результатов исследовано влияние геометрических параметров сенсоров и актуаторов, их расположения, механических граничных условий, деформаций поперечного сдвига, физических нелинейностей первого и второго типов, геометрической нелинейности как на эффективность работы сенсоров и актуаторов, так и на эффективность активного демпфирования резонансных колебаний тонкостенных элементов с их помощью. Так, например, при шарнирном опирании торцов пластины работа пьезовключений при колебаниях на первом резонансе будет наибо-

лее эффективной при полном покрытии поверхностей пластины или оболочки пьезосенсорами и актуаторами. При жестком заземлении торцов существуют оптимальные размеры пьезовключений, обеспечивающие их наиболее эффективную работу; при полном же покрытии управлять колебаниями становится невозможно. Указанные выше типы физической нелинейности оказывают существенное влияние на такие фундаментальные динамические характеристики как амплитудно- и температурно-частотные характеристики и зависимость коэффициента демпфирования от частоты.

Установлено, что при определенных условиях уровень температуры диссипативного разогрева приводит к потере функциональной способности системы управления резонансными колебаниями тонкостенных элементов в результате достижения температурой точки деградации материала. Для активного материала такой точкой является, например, точка Кюри, когда пьезоматериал теряет пьезоэффект и становится пассивным. Для пассивного материала точкой деградации является температура, при которой резко изменяются его механические свойства, например, точка плавления.

Представлены методы определения критических электрических или механических нагрузок, при превышении которых температура достигает точки деградации материала, а также методы определения критического времени при закритическом нагружении.

Предложены методы демпфирования колебаний тонкостенных элементов конструкций по показаниям сенсора, когда механическая нагрузка неизвестна.

РЕЗЮМЕ. Представлено моделі, чисельно-аналітичні методи та результати дослідження вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву непружних тонкостінних елементів конструкцій з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами при моногармонічному механічному й електричному навантаженнях. Термомеханічна поведінка пасивних і п'єзоактивних матеріалів описується концепцією комплексних характеристик. Прийнято, що вони залежать від температури й інваріантів тензора деформацій. Для моделювання коливань і дисипативного розігріву тонкостінних елементів з сенсорами та актуаторами використано класичні й уточнені термомеханічні теорії. Розв'язки нелінійних зв'язаних задач термомеханіки тонкостінних елементів отримано з використанням ітераційних та чисельних методів. Розглянуто теплове руйнування вказаних елементів. Описано методи розрахунку критичних параметрів електричного та механічного моногармонічного навантаження, а також методи аналізу закритичного стану. Досліджено вплив різних факторів на ефективність активного демпфування резонансних коливань непружних тонкостінних елементів конструкцій за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів.

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. – Ташкент: Мехнат, 1987. – 269 с.
3. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У.Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204 – 326.
5. Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
6. Боголюбов Н.Н. Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. трудов Ин – та строительной механики АН УССР. – 1949. – № 10. – С. 9 – 21.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
8. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягельский Е.Л., Кобец А.С. Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – К: Наук. думка, 2013. – 428 с. – (Прикл. механика упруго-наследственных сред: В 3-х томах. – Т. 3).
9. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягельский Е.Л., Кобец А.С. Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – К: Наук. думка, 2014. – 520 с. – (Прикл. механика упруго-наследственных сред: В 3-х томах. – Т. 4).
10. Вибрации в технике: Справочник.: В 6-ти т. / Ред. совет: В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К.В.Фролова, 1981. – 456 с.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.:Наука, 1972. – 432 с.

12. *Волосевич Р.М., С.Грач.* Нестационарные колебания вязкоупругого материала с термомеханическими связями и со свойствами, зависящими от температуры // Тр. амер. Общ-ва инженеро-механиков // Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 3. – С. 162 – 165.
13. *Горелик Б.М., Гончаров Л.П., Карнаухов В.Г.* Экспериментально-теоретическое исследование теплообразования в коротком вязкоупругом цилиндре при циклическом сжатии // Пробл. прочности. – 1977. – № 1. – С. 68 – 70.
14. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Теория оболочек переменной толщины. – К.: Наук. думка, 1981. – 516 с.
15. *Гринберг Г.А. Канторович М.И., Лебедев М.И.* О протекании теплового пробоя во времени // Журн. техн. физики. – 1940. – **10**, № 3. – С. 199 – 216.
16. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти томах. Т. 5).
17. *Гузь А.Н., Кабелка И., Маркуш Ш.* и др. Динамика и устойчивость слоистых композитных материалов / Под ред. Гузя А.Н. – К.: Наук. думка, 1991. – 368 с.
18. *Давиденков Н.Н.* О рассеянии энергии при вибрациях // Журн. техн. физики. – 1938. – **8**, вып. 6. – С. 483 – 499.
19. *Дубенец В.Г., Хильчевский В.В.* Колебания демпфируемых композитных конструкций. Т. 1. – К.: Вища шк., 1995. – 226 с.
20. *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
21. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
22. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. – М.: Физматлит, 2003. – 704 с.
23. *Карнаухов В.Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – К.: Наук. думка, 1982. – 260 с.
24. *Карнаухов В.Г.* Термомеханіка зв'язаних полів в непружних матеріалах та елементах конструкцій при гармонічному навантаженні // Вісник Київ. ун-ту. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – № 3. – С.142 – 145.
25. *Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В.* Резонансные изгибные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины с пьезоэлектрическими сенсорами // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 124 – 130.
26. *Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В.* Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 125 – 131.
27. *Карнаухов В.Г., Карнаухова Т.В., Петренко Н.В., Пересунько М.В.* Про застосування однієї аналогії між задачами термомеханіки й термоелектромеханіки // Теор. и прикл. механика. – 2013. – № 6 (52). – С. 125 – 134.
28. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1986. – 222 с.
29. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 328с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5-ти т.; Т. 4).
30. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Жук Я.О., Карнаухова Т.В.* Термомеханічна зв'язана теорія шаруватих оболонок з пасивними фізично нелінійними непружними шарами та розподіленими п'єзоелектричними включеннями для контролю нестационарних коливань // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 3. – С. 96 – 106.
31. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Жук Я.О., Карнаухова Т.В.* Термомеханічна зв'язана теорія гармонічних коливань шаруватих оболонок з фізично нелінійними непружними пасивними шарами й розподіленими п'єзоелектричними включеннями для контролю коливань // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 113 – 122.
32. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Влияние деформаций сдвига на коэффициент активного демпфирования колебаний прямоугольной пластины с шарнирным закреплением торцов // Теор. и прикл. механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 112 – 117.
33. *Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В.* Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вып. 8. – С. 48 – 68.
34. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т.В.* Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Серія «Механіка» – 2011. – Вып. 15, № 2, № 5. – С. 68 – 75.

35. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Влияние деформаций сдвига на колебания и диссипативный разогрев оболочек вращения с пьезоэлектрическими слоями // Теор. и прикл. механика. – 2013. – № 7 (53). – С. 137 – 148.
36. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Влияние деформаций сдвига на эффективность работы пьезоактуаторов при активном демпфировании резонансных колебаний цилиндрической панели // Теор. и прикл. механика. – 2014. – № 8 (54). – С. 106 – 113.
37. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Карнаухова Т.В. Вплив деформацій зсуву на ефективність роботи п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів при активному демпфуванні резонансних коливань непружних пластин і оболонок // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2015. – № 95. – С. 75 – 95.
38. Карнаухов В.Г., Козлов А.В., Пятецкая Е.В. Демпфирование колебаний вязкоупругих пластин при помощи распределенных пьезоэлектрических включений // Акустический вестник. – 2002. – 5, № 4. – С. 15 – 32.
39. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ. – 2005. – 428 с.
40. Карнаухов В.Г., Ткаченко Я.В. Исследование гармонических колебаний двухслойной цилиндрической оболочки с физически нелинейным пьезоэлектрическим слоем // Вестник Донецкого ун-та. Серия А. Естественные науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 107 – 113.
41. Карнаухов В.Г., Ткаченко Я.В., Зражевська В.Ф. Дослідження гармонічних коливань сферичної оболонки з фізично нелінійного п'єзоелектричного матеріалу // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – 50, № 1. – С. 125 – 129.
42. Карнаухов В.Г., Шевченко А.Ю., Карнаухова Т.В., Петренко Н.В. Влияние физической нелинейности и температуры диссипативного разогрева на эффективность работы сенсоров и актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – Вып. 47. – С. 11 – 19.
43. Карнаухова Т.В. О новом подходе к активному демпфированию вынужденных резонансных изгибных колебаний изотропных вязкоупругих пластин / Доп. НАНУ. – 2009. – № 5. – С. 78 – 82.
44. Киричок И.Ф., Жук Я.А. Влияние граничных условий и температуры виброразогрева на резонансные осесимметричные колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами и сенсорами // Теор. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7(53). – С. 133 – 140.
45. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Контроль вынужденных колебаний круглых вязкоупругих пластин за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вып. 9. – С. 67 – 78.
46. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Резонансні коливання і вібророзігрів гнучких круглих пластинок з п'єзоактуаторами при шарнірному та жорсткому закріпленнях // Акуст. вісник. – 2011. – 14, № 1. – С. 40 – 48.
47. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Осесимметричні резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами при врахуванні температурної залежності властивостей матеріалів // Вісник Київ. нац. ун-ту. Сер.: фіз.-матем. науки. – 2013. – Вып. 3. – С. 150 – 153.
48. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В. Резонансні осесимметричні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної замкнутої сферичної оболонки і їх демпфування п'єзоелектричними сенсором та актуатором // Вісник Запорізького нац. ун-ту. – 2013. – № 1. – С. 59 – 66.
49. Киричок И.Ф., Карнаухова Т.В., Пересунько Н.В. Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теор. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 132 – 140.
50. Киричок И.Ф., Пятецкая О.В., Карнаухов М.В. Згинні коливання та дисипативний розігрів кільцевої в'язкопружної пластинки з п'єзоелектричними актуаторами при електромеханічному моногармонічному навантаженні // Вісник Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-матем. науки. – 2006. – Вып. 2. – С. 84 – 92.
51. Киричок И.Ф., Шевченко А.Ю. Резонансные колебания и виброразогрев гибкой вязкоупругой балки с пьезоэлектрическими сенсорами // Теор. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 4(50). – С. 177 – 185.
52. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 308 с.
53. Козлов В.И., Карнаухова Т.В., Пересунько М.В. Демпфірування вимушених осесимметричних коливань жорстко закріпленої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів // Вісник Донецького ун-ту. Серія А. Природничі науки. – 2008. – № 1. – С. 142 – 145.
54. Козлов В.И., Карнаухова Т.В., Пересунько М.В. Чисельне моделювання активного демпфування вимушених термомеханічних резонансних коливань в'язкопружних оболонок обертання за допомогою п'єзоелектричних включень // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – 52, № 3 – С. 116 – 126.

55. *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. – М.: Машиностроение, 1965. – 272 с.
56. *Малкин А.Я., Аскадский А.А., Коврига В.В.* Методы измерения механических свойств полимеров. – М.: Химия, 1978. – 336 с.
57. *Матвеев В.В.* Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
58. *Механика композитов: В 12 – ти т., Т. 1 – 12 / Под общей редакцией А.Н.Гузя.* – К.: «А.С.К.», 1992 – 2005.
59. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.
60. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
61. *Митропольский Ю.А., Мосеевков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Выща шк. – 1976. – 589 с.
62. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
63. *Писаренко Г.С.* Рассеяние энергии при механических колебаниях. – К.: Изд-во АН УССР. – 1962. – 436 с.
64. *Писаренко Г.С.* Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала. – К.: Наук. думка, 1970. – 377 с.
65. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. – К.: Наук. думка, 1971. – 375 с.
66. *Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г.* и др. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
67. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
68. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
69. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с.
70. *Савченко Е.В.* Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций. – Нежин: «Аспект – Полиграф», 2006. – 232 с.
71. *Свойства полимеров и нелинейная акустика. Физическая акустика / Под ред. У.Мезона.* Т. 2. Часть Б. – М.: Мир, 1969. – 420 с.
72. *Сканави Г.Н.* Физика диэлектриков. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1958. – 980 с.
73. *Старовойтов Э.И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 343 с.
74. *Физика диэлектриков / Александров А.П., Вальтер А.Ф., Вул Б.М. и др.; / Отв. ред. А.Ф.Вальтер – Л.; М.: ГТТИ, 1932. – 560 с.*
75. *Франц В.* Пробой диэлектриков. – М.: Изд-во иностр. лит., 1961. – 208 с.
76. *Хильчевский В.В., Дубенец В.Г.* Рассеяние энергии при колебаниях тонкостенных элементов конструкций. – К.: Вища шк., 1977. – 250 с.
77. *Численное решение краевых задач статики ортотропных оболочек вращения на ЭВМ типа М-220 / Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Василенко А.Т. и др.* – К.: Наук. думка, 1971. – 152 с.
78. *Шаманский В.Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ-42. – К.: Наук. думка, 1966. – 244 с.
79. *Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 2: Термовязкопластичность / Под общей ред. А.Н. Гузя. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
80. *Шепери Р.А.* Влияние циклического нагружения на температуру вязкоупругого материала с изменяющимися свойствами // Ракет. техника и космонавтика. – 1964. – 2, № 5. – С. 55 – 56.
81. *Шепери Р.А.* Термомеханическое поведение вязкоупругих сред с переменными свойствами при циклическом нагружении // Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – № 3. – С. 150 – 161.
82. *Шульга Н.Ф., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
83. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
84. *Blanter M.S., Golovin I.S., Neuauser H., Sinning H.R.* Internal friction in metallic materials. – Handbook.: Springer Verlag, 2007. – 540 p.
85. *Bodner S.R.* Unified plasticity – an engineering approach. – Haifa: Israel Institute of Technology, 2000. – 106 p.

86. Bodner S.R., Partom Y. Constitutive equation for elastoviscoplastic strain hardening materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1975. – **42**. – P. 385 – 389.
87. Boiko A.V., Kulik V.M., Seoudi B.M., Chun H.H., Lee I. Measurement method of complex viscoelastic material properties // Int. J. Solid and Str. – 2010. – **47**. – P. 374 – 382.
88. Dinzart F., Molinari A., Herbabach R. Thermomechanical response of a viscoelastic beam under cyclic bending; self-heating and thermal failure // Arch. Mech. – 2008. – **60**, N 1. – P. 59 – 85.
89. *Encyclopedia of Smart Materials*, 1 – 2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176 p.
90. Gabbert U. Tzou H.S. Smart Structures and Structronic Systems.– Dordrecht / Boston / London: – Kluwer Academic Pub.; – 2001. – 384 p.
91. Gandhi F. Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment // AIAA Journal. – 2001. – **39**, N 5. – P. 924 – 931.
92. Guz I.A., Zhuk Y.A., Kashtalyan M. Vibration analysis of thin-wall structures containing piezoeactive layers/IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering, **10** (2010) 012174 doi:10.1088/1757-899X/10/1/012174.
93. Guz I.A., Zhuk Y.A., Kashtalyan M. Dissipative Heating and Thermal Fatigue Life Prediction for Structures Containing Piezoeactive Layers // Technische Mechanik. – 2012. – **32**, 2 – 5. – P. 238 – 250.
94. Guz I.A., Zhuk Y.A., Sands C.M. Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoeactive layers // Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2012. – **47**. – P. 105 – 116.
95. Jones D.I. Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley&Sons, 2001. – 412 p.
96. Karnaukhov V.G. Thermal Failure of Polymer Structural Elements under Monoharmonic Deformation (Review) // Int. App. Mech. – 2004. – **40**, N 6. – P. 622 – 655.
97. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoeactive inelastic bodies under harmonic deformations (Review) // J. of Thermal Stresses. – 2005. – **28**, N 6 – 7. – P. 783 – 815.
98. Karnaukhov V.G. Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoeactive inelastic bodies under harmonic deformations // Proc. of 6th Int. Congr. on Thermal Stresses (Vienna, Austria, May 2005). – Vienna: Vienna University of Technology, 2005. – P. 29 – 34.
99. Karnaukhov V.G. The Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating of Nonelastic Bodies. In: Encyclopedia of Thermal Stresses. In 11 volumes. (Ed: R. B. Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. – **7**, N – P. – P. 3910 – 3919.
100. Karnaukhov V.G. Piezothermo-Inelastic Behaviour of Structural Elements: Vibrations and Dissipative Heating. In: Encyclopedia of Thermal Stresses. In 11 volumes. (Ed: R. B. Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. **4**, F – G. – P. 1711 – 1722.
101. Karnaukhov V.G., Karnaukhova T.V. Influence of temperature of dissipative heating on an active damping of the resonant bending vibrations of a flexible rectangular plate by the distributed sensors and actuators // J. of Math. Sci. – 2009. – **161**, N 1. – P. 54 – 61.
102. Karnaukhov V.G., Karnaukhova T.V., Mc. Gillicaddy O. Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators // J. of Engineering Math. – 2013. – **78**, N 1. P. 199 – 212.
103. Karnaukhov V. G., Karnaukhova T. V., Kozlov V. I., Luts V. K. Influence of dissipation and vibroheating on the vibration characteristics of three-layer piezoelectric shells of revolution // Akust. Vestn. – 2001. – **4**, 3. – P. 39 – 52.
104. Karnaukhov V. G. Kyrchok I. F. Forced Harmonic Vibrations and Dissipative Heating-up of Viscoelastic Thin-Walled Elements (Review) // Int. App. Mech. – 2000. – **36**, N 2. – P. 174 – 195.
105. Karnaukhov V.G., Kirichok I.F., Karnaukhov M.V. The Influence of dissipative heating on active vibration damping of viscoelastic plates // J. Eng.Math. – 2008. – **61**, N 2 – 4. – P. 399 – 411.
106. Karnaukhov V. G., Kirichok I. F., Kozlov V. I. Electromechanical Vibrations and Dissipative Heating of Viscoelastic thin-walled Piezoelements (Review) // Int. App. Mech. – 2001. – **37**, N 2. – P. 182 – 212.
107. Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Karnaukhova T.V. Influence of dissipative heating on active damping of forced resonance vibrations of flexible viscoelastic cylindrical panel by piezoelectric actuators // J. of Math. Sci. – 2012. – **183**, 2. – P. 205 – 221.
108. Karnaukhov V. G., Mikhailenko V. V. Nonlinear Single-Frequency Vibrations and Dissipative Heating of Inelastic Piezoelectric Bodies (Review) // Int. App. Mech. – 2002. – **38**, N 5. – P. 521 – 547.
109. Karnaukhov V. G., Senchenkov I. K. Generalized Models of the Thermomechanical Behavior of Viscoelastic Materials with Allowance for the Interaction of Mechanical and Thermal Fields (Review) // Int. App. Mech. – 2000. – **36**, N 1. – P. 40 – 63.
110. Karnaukhov V.G., Tkachenko Ya.V. Damping the Vibrations of a Rectangular Plate with Piezoelectric Actuators // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 182 – 187.
111. Karnaukhov V. G., Tkachenko Ya.V. Influence of Shear Strains on Damping the Vibrations of a Rectangular Plate with Dielectric Actuators // Int. App. Mech. – 2009. – **45**, N 12. – P. 1365 – 1373.

112. *Karnaukhov V. G. Tkachenko Ya. V.* Active Damping of the Resonant Vibrations of a Flexible Rectangular Plate // *Int. App. Mech.* – 2011. – **47**, N 4. – P. 457 – 463.
113. *Karnaukhova T. V.* Thermal depolarization of a piezoelectric layer under harmonic quasistatic electric loading // *Prikl. Mekh.* – 1998. – **34**, N 4. – P. 81 – 84.
114. *Karnaukhova T. V.* Active Damping of Vibrations of Plates Subjected to Unknown Pressure // *Int. App. Mech.* 2010. – **46**, N 5. – P. 562 – 566.
115. *Karnaukhova T. V.* Damping the Vibrations of a Clamped Plate Using the Sensor's Reading // *Int. App. Mech.* – 2010. – **46**, N 6. – P. 683 – 686.
116. *Karnaukhova T. V.* Influence of the temperature of dissipative heating on the damping of forced the resonance vibrations of a simply supported viscoelastic cylindrical panel with the help of piezoelectric actuators // *J. of Math. Sci.* – 2010. – **167**, 2. – P. 173 – 181.
117. *Karnaukhova T. V.* Influence of the temperature of dissipative heating on the damping of forced resonance vibrations of unelastic rectangular plates // *J. of Math. Sci.* – 2010. – **165**, 2. – P. 264 – 273.
118. *Karnaukhova T. V.* Active damping of forced resonance vibrations of an isotropic shallow viscoelastic cylindrical panel under the action of an unknown mechanical load // *J. of Math. Sci.* – 2010. – **168**, 4. – P. 603 – 612.
119. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Basic Equations for Thermoviscoelastic Plates with Distributed Actuators under Monoharmonic Loading // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 200 – 214.
120. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Damping the Resonant Flexural Vibration a Hinged Plate with Actuators // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 4. – P. 448 – 456.
121. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Damping the Flexural Vibration a Clamped Viscoelastic Rectangular Plate with Piezoelectric Actuators // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 5. – P. 546 – 557.
122. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Basic Relations of the Theory of the Thermoviscoelastic Plates with Distributed Sensors // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 6. – P. 660 – 669.
123. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* The Resonant Flexural Vibrations of a Hinged Viscoelastic Plate with Sensors // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 7. – P. 762 – 771.
124. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Resonant vibrations of a clamped viscoelastic rectangular plate // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 8. – P. 904 – 916.
125. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Basic Relations of the Theory of the Thermoviscoelastic Plates with Distributed Sensors and Actuators // *Int. App. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 78 – 85.
126. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Resonant Vibrations of a Hinged Viscoelastic Rectangular Plate with Sensors and Actuators // *Int. App. Mech.* – 2010. – **46**, N 2. – P. 213 – 220.
127. *Karnaukhova T. V., Pyatetskaya E. V.* Resonant Vibrations of a Clamped Thermoviscoelastic Rectangular Plate with Sensors and Actuators // *Int. App. Mech.* – 2010. – **46**, N 3. – P. 296 – 303.
128. *Kirichok I. F.* Resonant Vibration and Heating of Ring Plates with Piezoactuators under Electromechanical Loading and Shear Deformation // *Int. App. Mech.* – 2009. – **45**, N 2. – P. 214 – 222.
129. *Kirichok I. F.* Resonance Vibration and Dissipative Heating of a Rigidly Clamped Thermoviscoelastic Beam with Piezoactuators // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 4. – P. 421 – 429.
130. *Kirichok I. F.* Control of Axisymmetric Resonant Vibrations and Self-Heating of Shells of Revolution with Piezoelectric Sensors and Actuators // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **46**, N 8. – P. 890 – 901.
131. *Kirichok I. F.* Forced Monoharmonic and Vibro-Heating of Viscoelastic Flexible Circular Plates with Piezolayers // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 715 – 725.
132. *Kirichok I. F., Karnaukhov M. V.* Monoharmonic Vibrations and Vibrational Heating of an Electromechanically Loaded Circular Plate with Piezoelectric Actuators Subject to Shear Strain // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 9. – P. 1041 – 1049.
133. *Kirichok I. F., Mikhaïlenko V. V., Davidchuk S. P.* Nonlinear Vibrations and Vibroheating of a Viscoelastic Rod with Cubic Elasticity // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 9. – P. 1125 – 1130.
134. *Kozlov V. I., Karnaukhova T. V., Peresun'ko M. V.* Numerical modeling of the active damping of forced thermomechanical resonance vibrations of viscoelastic shells of revolution with the help of piezoelectric inclusions // *J. of Math. Sci.* – 2010. – **171**, 5. – P. 565 – 578.
135. *Kubenko V. D., Yanchevsky I. V.* Active damping of nonstationary vibrations of a rectangular plate under impulse loading // *Journal of Vibration and Control.* – 2013. – **19**, N 10. – P. 1514 – 1523.
136. *Kyrychok I. F.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of a Flexible Circular Plate with Piezoactuators // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 5. – P. 583 – 591.
137. *Kyrychok I. F., Karnaukhova T. V.* Influence of boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of forced axisymmetric resonant bending vibrations of circular viscoelastic plates by piezoelectric sensors and actuators // *J. of Math. Sci.* – 2011. – **178**, N 5. – P. 480 – 495.

138. *Lazan B.* Damping of materials and members in structural mechanics. – Oxford : Pergamon Press, 1968. – 318 p.
139. *Li Z., Crocker M.J.* A review on vibration damping in sandwich composite structures // Int. J. Acoust. Vib. – 2005. – **10**, N 4. – P. 159 – 169.
140. *Namita Nanda.* Non-linear free and forced vibrations of piezoelectric laminated shells in thermal environments // The IES J., Part A: Civil & Structural Engineering. – 2010. – **3**, N 3. – P. 147 – 160.
141. *Ohno N. and Satra M.* Detailed and simplified elastoplastic analysis of a cyclically loaded notched bar // J. of Engineering Materials and Technology. – 1987. – **109**, N 3. – P. 194 – 202.
142. *Pal'mov V.A.* Vibrations of Elasto-Plastic Bodies. – New York: Springer, 1998. – 311 p.
143. *Sabat R.G., Mukherjee B., Ren W., Yung G.* Temperature dependence of the complete material coefficients matrix of soft and hard doped piezoelectric lead zirconate titanate ceramics // J. Appl. Phys. – 2007. – **101**. – P. 06411-1-7.
144. *Sabat R.G., Ren W., Yung G., Mukherjee B.* Temperature dependence of the dielectric, elastic and piezoelectric material constants of lead zirconate titanate (PZT) ceramic // Smart Structure and Materials. – 2006. – P. 6 1700A-61700A-8.
145. *Senchenkov I.K., Zhuk Ya.A., Karnaukhov V.G.* Modelling of the Thermomechanical Behaviour of Physically Nonlinear Materials under Monoharmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2004. – **40**, N 9. – P. 943 – 969.
146. *Senchenkov I.K., Karnaukhov V.G.* Thermomechanical Behaviour of Nonlinearly Viscoelastic Materials under Monoharmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2001. – **37**, N 11. – P. 1400 – 1432.
147. *Senchenkov I.K., Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Chervinko O. P.* Steady Oscillations and Dissipative Heating of Viscoelastic Bodies with Periodical Load // Int. App. Mech. – 1986. – **22**, N 6. – P. 538 – 544.
148. *Senchenkov I.K., Tabieva G.A.* Determination of the Parameters of the Bodner-Partom Model for Thermoviscoplastic Deformation of Materials // Int. App. Mech. – 1996. – **32**, №. 2. – P. 132 – 139.
149. *Senchenkov I.K., Tabieva G.A., Zhuk Ya.A., Chervinko O.P.* Monoharmonic Approximation in the Deformation of Viscoplastic Bodies with a Harmonic Load // Int. App. Mech. – 1997. – **33**, N 7. – P. 560 – 566.
150. *Tani J., Takagi T., Qui J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N 8. – P. 505 – 521.
151. *Ting E.C.* Thermomechanical coupling effects in the longitudinal oscillations of a viscoelastic cylinder // The J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – **52**, N 3. – P. 928 – 934.
152. *Tormey J.F., Britton S.C.* Effect of cyclic loading on solid propellant grain structures/ AIAA J. – 1963. – **1**, № 8. – P. 1763 – 1770.
153. *Tzou H.S.* Piezoelectric Shells (Distributed Sensing and Control of Continua). – Boston - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
154. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and Control of Distributed Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.
155. *Young R.W.* Thermomechanical response of viscoelastic rod driven by a sinusoidal displacement // Int J. Sol.Struct. – 1977. – **13**, N 10. – P. 925 – 936.
156. *Zhuk Ya.A., Guz I.A.* Active Damping of the Forced Vibration of a Hinged Beam with Piezoelectric Layer, Geometrical and Physical Nonlinearities Taken into Account // Int. App. Mech. – 2009. – **45**, N 1. – P. 94 – 108.
157. *Zhuk Ya., Senchenkov I.* Monoharmonic Approach to Investigation of the Vibrations and Selfheating of Thinwall Inelastic Members // J. of Civil Engineering and Management. – 2009. – **15**, 1. – P. 67 – 75.
158. *Zhuk Ya.A., Guz I.A., Sands C.M.* Monoharmonic approximation in the vibration analysis of a sandwich beam containing piezoelectric layers under mechanical or electrical loading // J. of Sound and Vibration. – 2011. – **330**. – P. 4211 – 4232.

Поступила 21.03.2016

Утверждена в печать 29.11.2016