

Л. П. Хорошун

**ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
МЕХАНИКИ ТРЕЩИН НА ГРАНИЦЕ РАЗНЫХ СРЕД**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул.Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: stochac@inmech.kiev.ua*

Abstract. The linear plane problem on tension of the body with some crack at the two media interface is reduced by the Fourier transforms to the system of dual equations relative to the transformed stresses and then to the system of integro-differential equations relative to difference of displacements of the crack sides. This system is transformed after discretization to the system of algebraic equations relative to displacements of points of the crack sides. An influence of the bi-elastic constant and number of points of discretization of the crack sides half-length and the distribution of stresses at the interface are studied.

Key words: crack, interface, displacements of points of the crack sides, integro-differential, distribution of stresses, discretization.

Введение.

В механике разрушения отдельные направления занимают задачи механики трещин на границе раздела двух различных сред [1, 2, 5, 6, 8 – 11, 13], что обусловлено спецификой особенности в вершине трещины, имеющейся в аналитическом решении задач. Особенность проявляется в том, что в весьма малой зоне при приближении к вершине трещины напряжения и перемещения меняют знак бесконечное число раз и происходит «взаимное проникание» берегов трещины друг в друга [11]. Так как такое явление не имеет физического смысла, то возникает вопрос о корректности математической постановки задачи, а также о возможности использования таких решений в расчетной практике и целесообразности проведения исследований этих задач в рамках линейной механики разрушения [11].

Вполне естественно, что физическую некорректность решений статических задач о трещине на межфазной границе можно объяснить только некорректностью математической формулировки задачи, которая согласно [11] состоит в том, что в исходной постановке задачи не сформулированы условия взаимодействия берегов трещины в некоторой малой зоне возле вершины трещины. Устранение некорректности предлагается осуществлять путем постановки нелинейной задачи с заданием условия непроникания берегов трещины друг в друга в некоторой неизвестной зоне у вершины трещины по аналогии с задачами динамической нелинейной механики разрушения. Для решения нелинейной задачи предлагается разработать пошаговые методы исследования, где на каждом шаге итераций применяется метод решения определенной линейной задачи.

Отметим, что в задаче о давлении штампа прямолинейного профиля на горизонтальное основание [3] знак напряжения под штампом также изменяется бесконечное число раз, как и в случае задачи о межфазной трещине. Однако здесь, как отмечено, некорректность математической формулировки задачи связана с использованием линейного закона Гука и для ее устранения необходимо исходить из нелинейного закона упругости. Отметим, что в случае нелинейного закона деформирования с ограниченной по напряжением диаграммой деформирования напряжения в окрестности вершины трещины в однородной среде [14] также ограничены, т.е. не имеют особенности.

В вопросе о применении подобных физических некорректных решений в расчетной практике существуют различные точки зрения. В работе [2] приведена оценка максимального размера области у кончика трещины, где происходит «взаимное проникание» берегов трещины, отношение которого к длине трещины имеет порядок 10^{-4} . На основе этого делается вывод, что с физической точки зрения такое некорректное решение вполне может быть хорошим приближением к реальной картине в точках, удаленных от кончика трещины.

В работе [8] отмечено, что комплексность корня характеристического уравнения, ведущая к «взаимному прониканию» берегов трещины и бесконечному числу смены знака напряжений у вершины трещины, не имеющему физического смысла, свидетельствует о некорректности математической постановки задачи. Несмотря на это, принимается, что «формальное математическое решение имеет определенный физический смысл». Однако в выражениях для напряжений [8, с. 98] отбрасываются слагаемые, обуславливающие некорректность.

Согласно [11] все результаты линейной механики трещин на границе раздела разных сред, не учитывающей взаимодействие берегов трещины, допускают «взаимное проникание» берегов трещины в малой зоне возле кончика трещины и искажение напряженно-деформированного состояния в более широкой зоне. Поэтому определяемые таким образом коэффициенты интенсивности напряжений физически некорректны и их следует исключить из дальнейшего анализа проблем.

Отметим, что в линейной механике трещин в однородном теле коэффициенты интенсивности напряжений определяются как множители при размерной корневой особенности, поэтому они имеют размерность силы, деленной на длину в степени три вторых. Их предельными значениями, определяемыми из опыта, характеризуется трещиностойкость однородного тела. Однако в механике трещин на границе раздела сред [5, 6] коэффициенты интенсивности напряжений зависят от логарифма размерной длины трещины, т.е. их вычислить невозможно, а, следовательно, невозможно их определить из эксперимента. Этот парадокс обусловлен размерной особенностью в асимптотическом решении и легко устраняется введением безразмерной особенности. Размерная особенность не является корректной, так как стремление к нулю размерной величины не имеет смысла.

Необходимо иметь в виду, что в математической физике фундаментальную роль играют функции Грина или фундаментальные решения. В статических задачах теории упругости функциями Грина являются решения плоских или пространственных задач статики при заданных в области или на границе сосредоточенных нагрузках. В малой зоне возле приложения сосредоточенной силы также происходит «взаимное проникание» близлежащих частиц материала, т.е. существует малая зона, где материал как бы «вывернут наизнанку». Тем не менее, на некотором удалении от места приложения сосредоточенной силы решение задачи хорошо описывает реальное поведение упругого тела.

Целью настоящей работы является построение полного решения плоской линейной задачи о растяжении тела с трещиной на границе раздела двух различных сред на основе интегральных преобразований [7, 17, 18] и численное исследование перемещений берегов трещины, а также напряжений в окрестности трещины. На основе преобразования Фурье задача сводится к системе дуальных интегральных уравнений относительно трансформант напряжений, а затем к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно разностей перемещений берегов трещины. Дискретизация задачи приводит к решению системы алгебраических уравнений относительно разностей перемещений точек берегов трещины. Исследовано влияние биупругой постоянной и количества точек разбиения полудлины трещины на перемещения берегов трещины и распределение напряжений на границе раздела сред.

§1. Исходные уравнения.

Рассмотрим плоское деформированное состояние полупространства ($-\infty \leq x \leq \infty, y \geq 0$) при заданных на границе $y = 0$ напряжениях $\sigma_{22}(x, 0) = -p(x)$, $\sigma_{12}(x, 0) = q(x)$, тогда на основе преобразования Фурье [17, 18] напряжения и перемещения можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{p}(\xi)(1-|\xi|y) - i\xi^{-1}|\xi|\tilde{q}(\xi)(2-|\xi|y)] e^{-|\xi|y-i\xi x} d\xi; \\
\sigma_{22}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{p}(\xi)(1+|\xi|y) - i\xi\tilde{q}(\xi)y] e^{-|\xi|y-i\xi x} d\xi; \\
\sigma_{12}(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi y\tilde{p}(\xi) + i\tilde{q}(\xi)(1-|\xi|y)] e^{-|\xi|y-i\xi x} d\xi; \quad (1.1)
\end{aligned}$$

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ i\xi^{-1}\tilde{p}(\xi)(1-2\nu-|\xi|y) + |\xi|^{-1}\tilde{q}(\xi)[2(1-\nu)-|\xi|y] \right\} e^{-|\xi|y-i\xi x} d\xi;$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ |\xi|^{-1}\tilde{p}(\xi)[2(1-\nu)+|\xi|y] - i\xi^{-1}\tilde{q}(\xi)(1-2\nu+|\xi|y) \right\} e^{-|\xi|y-i\xi x} d\xi,$$

где $\tilde{p}(\xi)$, $\tilde{q}(\xi)$ – преобразования Фурье по координате x соответственно функций $p(x)$, $q(x)$; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона. В случае плоского напряженного состояния необходимо ν заменить на $\nu/(1+\nu)$.

Пусть бесконечное двумерное тело состоит из двух различных полуплоскостей с различными постоянными упругости и на границе их раздела имеется внутренняя трещина ($-c \leq x \leq c$, $y = 0$), расширяющаяся под воздействием давления p_0 и заданной на бесконечности нормальной равномерно распределенной нагрузки p_∞ . Тогда с учетом соотношений $p(-x) = p(x)$, $q(-x) = -q(x)$ на основе (1.1) получим представление напряжений и перемещений для верхней ($y \geq 0$) полуплоскости

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(1)}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_1(\xi)(1-\xi y) + \tilde{q}_1(\xi)(2-\xi y)] e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\
\sigma_{22}^{(1)}(x, y) &= p_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_1(\xi)(1+\xi y) + \xi\tilde{q}_1(\xi)y] e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi; \\
\sigma_{12}^{(1)}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\xi y\tilde{p}_1(\xi) - \tilde{q}_1(\xi)(1-\xi y)] e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi; \quad (1.2)
\end{aligned}$$

$$u_1^{(1)}(x, y) = -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_1(\xi)(\nu_1^0 - \xi y) + \tilde{q}_1(\xi)(1+\nu_1^0 - \xi y)] e^{-\xi y} \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi;$$

$$u_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi\mu_1} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_1(\xi)(1+\nu_1^0 + \xi y) + \tilde{q}_1(\xi)(\nu_1^0 + \xi y)] e^{-\xi y} \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi$$

и нижней ($y \leq 0$) полуплоскости

$$\sigma_{11}^{(2)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_2(\xi)(1+\xi y) + \tilde{q}_2(\xi)(2+\xi y)] e^{\xi y} \cos \xi x d\xi;$$

$$\sigma_{22}^{(2)}(x, y) = p_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_2(\xi)(1-\xi y) - \xi\tilde{q}_2(\xi)y] e^{\xi y} \cos \xi x d\xi;$$

$$\sigma_{12}^{(2)}(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [-\xi y\tilde{p}_2(\xi) - \tilde{q}_2(\xi)(1+\xi y)] e^{\xi y} \sin \xi x d\xi;$$

$$u_1^{(2)}(x, y) = -\frac{1}{\pi\mu_2} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_2(\xi)(\nu_2^0 + \xi y) + \tilde{q}_2(\xi)(1+\nu_2^0 + \xi y)] e^{\xi y} \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi; \quad (1.3)$$

$$u_2^{(2)}(x, y) = -\frac{1}{\pi\mu_2} \int_0^{\infty} [\tilde{p}_2(\xi)(1+\nu_2^0 - \xi y) + \tilde{q}_2(\xi)(\nu_2^0 - \xi y)] e^{\xi y} \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi,$$

где обозначено $\nu_1^0 = 1 - 2\nu_1$, $\nu_2^0 = 1 - 2\nu_2$, индексы 1, 2 относятся, соответственно, к верхней и нижней полуплоскости, причем имеют место интегральные преобразования

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1(\xi) &= \int_0^\infty p_1(x) \cos \xi x dx; & \tilde{p}_2(\xi) &= \int_0^\infty p_2(x) \cos \xi x dx; \\ p_1(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{p}_1(\xi) \cos \xi x d\xi; & p_2(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{p}_2(\xi) \cos \xi x d\xi; \\ \tilde{q}_1(\xi) &= \int_0^\infty q_1(x) \sin \xi x dx; & \tilde{q}_2(\xi) &= \int_0^\infty q_2(x) \sin \xi x dx; \\ q_1(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{q}_1(\xi) \sin \xi x d\xi; & q_2(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{q}_2(\xi) \sin \xi x d\xi.\end{aligned}\quad (1.4)$$

На границе раздела сред ($y = 0$) граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{22}^{(2)}(x, 0) = -p_0; & \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{12}^{(2)}(x, 0) = 0 \quad \text{при } |x| \leq c; \\ \sigma_{22}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{22}^{(2)}(x, 0); & \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) &= \sigma_{12}^{(2)}(x, 0); \\ u_1^{(1)}(x, 0) &= u_1^{(2)}(x, 0); & u_2^{(1)}(x, 0) &= u_2^{(2)}(x, 0) \quad \text{при } |x| \geq c.\end{aligned}\quad (1.5)$$

Из (1.2), (1.3) получим соответствующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{(1)}(x, 0) &= p_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{p}_1(\xi) \cos \xi x d\xi; & \sigma_{12}^{(1)}(x, 0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{q}_1(\xi) \sin \xi x d\xi; \\ \sigma_{22}^{(2)}(x, 0) &= p_\infty - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{p}_2(\xi) \cos \xi x d\xi; & \sigma_{12}^{(2)}(x, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{q}_2(\xi) \sin \xi x d\xi; \\ u_1^{(1)}(x, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\alpha_1 \tilde{p}_1(\xi) + \beta_1 \tilde{q}_1(\xi)] \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi; \\ u_2^{(1)}(x, 0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\beta_1 \tilde{p}_1(\xi) + \alpha_1 \tilde{q}_1(\xi)] \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi; \\ u_1^{(2)}(x, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\alpha_2 \tilde{p}_2(\xi) + \beta_2 \tilde{q}_2(\xi)] \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi; \\ u_2^{(2)}(x, 0) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty [\beta_2 \tilde{p}_2(\xi) + \alpha_2 \tilde{q}_2(\xi)] \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi; \\ \alpha_1 &= \frac{\nu_1^0}{2\mu_1}; & \beta_1 &= \frac{1 + \nu_1^0}{2\mu_1}; & \alpha_2 &= \frac{\nu_2^0}{2\mu_2}; & \beta_2 &= \frac{1 + \nu_2^0}{2\mu_2}.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.5), с учетом равенств $\tilde{p}_1(\xi) = \tilde{p}_2(\xi) = \tilde{p}(\xi)$, $\tilde{q}_1(\xi) = -\tilde{q}_2(\xi) = \tilde{q}(\xi)$ приходим к системе дуальных уравнений относительно $\tilde{p}(\xi)$, $\tilde{q}(\xi)$ такого вида:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{p}(\xi) \cos \xi x d\xi &= p_0 + p_\infty, & \int_0^\infty \tilde{q}(\xi) \sin \xi x d\xi &= 0 \quad \text{при } |x| \leq c; \\ \int_0^\infty [\varepsilon \tilde{p}(\xi) + \tilde{q}(\xi)] \frac{\sin \xi x}{\xi} d\xi &= 0, & \int_0^\infty [\tilde{p}(\xi) + \varepsilon \tilde{q}(\xi)] \frac{\cos \xi x}{\xi} d\xi &= 0 \\ \text{при } |x| \geq c & \left(\varepsilon = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2} \right),\end{aligned}\quad (1.7)$$

где ε – биупругая постоянная.

Введем обозначения:

$$u_1^0(x) = u_1^{(1)}(x, 0) - u_1^{(2)}(x, 0); \quad u_2^0(x) = u_2^{(1)}(x, 0) - u_2^{(2)}(x, 0); \quad (1.8)$$

тогда, согласно (1.4) – (1.7), приходим к равенствам

$$\tilde{p}(\xi) = \frac{\xi}{(1-\varepsilon^2)\beta} [\varepsilon \tilde{u}_1^0(\xi) + \tilde{u}_2^0(\xi)]; \quad \tilde{q}(\xi) = \frac{\xi}{(1-\varepsilon^2)\beta} [\tilde{u}_1^0(\xi) + \varepsilon \tilde{u}_2^0(\xi)] \quad (\beta = \beta_1 + \beta_2), \quad (1.9)$$

где имеют место интегральные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1^0(\xi) &= \int_0^\infty u_1^0(x) \sin \xi x d\xi; & u_1^0(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{u}_1^0(\xi) \sin \xi x d\xi; \\ \tilde{u}_2^0(\xi) &= \int_0^\infty u_2^0(x) \cos \xi x d\xi; & u_2^0(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{u}_2^0(\xi) \cos \xi x d\xi. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подставляя (1.9) в (1.7) для $0 \leq x \leq c$, получим систему интегро-дифференциальных уравнений относительно $u_1^0(x)$, $u_2^0(x)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi(1-\varepsilon^2)\beta} \left[\int_0^c R_{11}(x, \eta) u_2^0(\eta) d\eta + \frac{\varepsilon\pi}{2} u_1^{0'}(x) \right] &= p_0 + p_\infty; \\ \int_0^c R_{22}(x, \eta) u_1^0(\eta) d\eta - \frac{\varepsilon\pi}{2} u_2^{0'}(x) &= 0 \quad (0 \leq x \leq c). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь использованы соотношения:

$$\begin{aligned} R_{11}(x, \eta) &= \int_0^\infty \xi \cos \xi x \cos \xi \eta d\xi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{x+\eta} - \frac{1}{x-\eta} \right); \\ R_{22}(x, \eta) &= \int_0^\infty \xi \sin \xi x \sin \xi \eta d\xi = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{x+\eta} + \frac{1}{x-\eta} \right); \\ R_{12}(x, \eta) &= \int_0^\infty \xi \cos \xi x \sin \xi \eta d\xi = -\frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(x-\eta); \\ R_{21}(x, \eta) &= \int_0^\infty \xi \sin \xi x \cos \xi \eta d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(x-\eta), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $\delta(x-\eta)$ – δ -функция Дирака.

Если ввести безразмерные параметры

$$\begin{aligned} v_1(\bar{x}) &= \frac{2u_1^0(\bar{x})}{\pi\beta c(p_0 + p_\infty)}; & v_2(\bar{x}) &= \frac{2u_2^0(\bar{x})}{\pi\beta c(p_0 + p_\infty)}; & \bar{u}_i^{(1)} &= \frac{u_i^{(1)}}{c}; & \bar{u}_i^{(2)} &= \frac{u_i^{(2)}}{c}; \\ \bar{\sigma}_{ij}^{(1)} &= \frac{\sigma_{ij}^{(1)}}{p_0 + p_\infty}; & \bar{\sigma}_{ij}^{(2)} &= \frac{\sigma_{ij}^{(2)}}{p_0 + p_\infty}; & \bar{x} &= \frac{x}{c}; & \bar{\eta} &= \frac{\eta}{c}; & \bar{\xi} &= \xi c; \end{aligned} \quad (1.13)$$

то интегро-дифференциальные уравнения (1.11) принимают вид

$$\int_0^1 R_{11}(\bar{x}, \bar{\eta}) v_2(\bar{\eta}) d\bar{\eta} + \frac{\varepsilon\pi}{2} v_1'(\bar{x}) = 1 - \varepsilon^2; \quad \int_0^1 R_{22}(\bar{x}, \bar{\eta}) v_1(\bar{\eta}) d\bar{\eta} - \frac{\varepsilon\pi}{2} v_2'(\bar{x}) = 0. \quad (1.14)$$

С учетом (1.9), (1.13) выражения (1.2), (1.3) представляются в такой форме для верхней ($\bar{y} \geq 0$) полуплоскости –

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ [(\varepsilon-2)T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1-\varepsilon)\bar{y}T_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta})] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\ &\quad \left. + [(1-2\varepsilon)R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1-\varepsilon)\bar{y}R_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta})] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{22}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{p} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[\varepsilon T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1-\varepsilon) \bar{y} T_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1-\varepsilon) \bar{y} R_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{\sigma}_{12}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[S_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1-\varepsilon) \bar{y} S_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\varepsilon P_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1-\varepsilon) \bar{y} P_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{u}_1^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\bar{p}_1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[(1+\bar{v}_1^0) S_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1-\varepsilon) \bar{y} S_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(-\bar{v}_1^0 + \varepsilon) P_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1-\varepsilon) \bar{y} P_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{u}_2^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{\bar{p}_1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[(\bar{v}_1^0 + \varepsilon) T_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1-\varepsilon) \bar{y} T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(1+\bar{v}_1^0) R_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1-\varepsilon) \bar{y} R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

и нижней ($\bar{y} \leq 0$) полуплоскости –

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[(2+\varepsilon) T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} T_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(1+2\varepsilon) R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} R_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{\sigma}_{22}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) &= \bar{p} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[\varepsilon T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1+\varepsilon) \bar{y} T_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1+\varepsilon) \bar{y} R_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{\sigma}_{12}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[S_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} S_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[\varepsilon P_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} P_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{u}_1^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{\bar{p}_2}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[(1+\bar{v}_2^0) \bar{y} S_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} S_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(\bar{v}_2^0 + \varepsilon) P_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) + (1+\varepsilon) \bar{y} P_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta}; \\
\bar{u}_2^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{\bar{p}_2}{1-\varepsilon^2} \int_0^1 \left\{ \left[(\bar{v}_2^0 + \varepsilon) T_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1+\varepsilon) \bar{y} T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_1(\bar{\eta}) + \right. \\
&\quad \left. + \left[(1+\bar{v}_2^0) R_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) - (1+\varepsilon) \bar{y} R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) \right] v_2(\bar{\eta}) \right\} d\bar{\eta},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где приняты обозначения:

$$\bar{p} = \frac{p_\infty}{p_0 + p_\infty}; \quad \bar{p}_1 = \frac{p_0 + p_\infty}{2\mu_1}; \quad \bar{p}_2 = \frac{p_0 + p_\infty}{2\mu_2}; \quad \bar{v}_1^0 = (1-\varepsilon)v_1^0; \quad \bar{v}_2^0 = (1+\varepsilon)v_2^0;$$

$$T_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \ln \left\{ \left[(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2 \right] \left[(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2 \right] \right\};$$

$$T_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{y}}{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} \right];$$

$$\begin{aligned}
T_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 - \bar{y}^2}{[(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} + \frac{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 - \bar{y}^2}{[(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} \right]; \\
R_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\bar{\eta} + \bar{x}}{\bar{y}} + \operatorname{arctg} \frac{\bar{\eta} - \bar{x}}{\bar{y}} \right); \\
R_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{x} + \bar{\eta}}{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} - \frac{\bar{x} - \bar{\eta}}{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} \right]; \\
R_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{y}(\bar{x} + \bar{\eta})}{[(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} - \frac{\bar{y}(\bar{x} - \bar{\eta})}{[(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} \right]; \\
S_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left(-\operatorname{arctg} \frac{\bar{\eta} + \bar{x}}{\bar{y}} + \operatorname{arctg} \frac{\bar{\eta} - \bar{x}}{\bar{y}} \right); \\
S_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{x} + \bar{\eta}}{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{x} - \bar{\eta}}{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} \right]; \\
S_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{\bar{y}(\bar{x} + \bar{\eta})}{[(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} + \frac{\bar{y}(\bar{x} - \bar{\eta})}{[(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} \right]; \\
P_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \ln \frac{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2}{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2}; \quad P_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[-\frac{\bar{y}}{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} + \frac{\bar{y}}{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2} \right]; \\
P_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\eta}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left[\frac{(\bar{x} + \bar{\eta})^2 - \bar{y}^2}{[(\bar{x} + \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} - \frac{(\bar{x} - \bar{\eta})^2 - \bar{y}^2}{[(\bar{x} - \bar{\eta})^2 + \bar{y}^2]^2} \right].
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Таким образом, задача сводится к решению системы дуальных уравнений (1.7) относительно трансформант $\tilde{p}(\xi)$, $\tilde{q}(\xi)$ с последующим интегрированием выражений (1.2), (1.3) или к решению системы интегро-дифференциальных уравнений (1.14) относительно разностей перемещений берегов трещины $v_1(\bar{x})$, $v_2(\bar{x})$ с последующим интегрированием выражений (1.15), (1.16).

§2. Дискретизация задачи.

Получить точное аналитическое решение уравнений (1.7) и (1.14) представляется весьма проблематичным. Применение численных методов целесообразно осуществлять для уравнений (1.14) – (1.17), для чего необходимо их преобразовать из непрерывной в дискретную форму. С этой целью разобьем интервал $(0, 1)$ в (1.14) на N частей, представив интегралы и производные соответственно суммами и разностями

$$\begin{aligned}
\int_0^1 R_{11}(\bar{x}, \bar{\eta}) v_2(\bar{\eta}) d\bar{\eta} &= \sum_{k=1}^N v_2(\bar{x}_k) \int_{\bar{x}_k - \bar{a}_k}^{\bar{x}_k + \bar{a}_k} R_{11}(\bar{x}, \bar{\eta}) d\bar{\eta}; \\
\int_0^1 R_{22}(\bar{x}, \bar{\eta}) v_1(\bar{\eta}) d\bar{\eta} &= \sum_{k=1}^N v_1(\bar{x}_k) \int_{\bar{x}_k - \bar{a}_k}^{\bar{x}_k + \bar{a}_k} R_{22}(\bar{x}, \bar{\eta}) d\bar{\eta};
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$v_1'(\bar{x}_k) = \frac{1}{2\bar{a}_k} [v_1(\bar{x}_{k+1}) - v_1(\bar{x}_k)]; \quad v_2'(\bar{x}_k) = \frac{1}{2\bar{a}_k} [v_2(\bar{x}_{k+1}) - v_2(\bar{x}_k)];$$

$$2\bar{a}_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k; \quad \sum_{k=1}^N 2\bar{a}_k = 1.$$

Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1.14) приводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N I_{i,k} v_2(\bar{x}_k) + \frac{\varepsilon\pi}{4\bar{a}_i} [v_1(\bar{x}_{i+1}) - v_1(\bar{x}_i)] &= 1 - \varepsilon^2; \\ \sum_{k=1}^N E_{i,k} v_1(\bar{x}_k) - \frac{\varepsilon\pi}{4\bar{a}_i} [v_2(\bar{x}_{i+1}) - v_2(\bar{x}_i)] &= 0 \quad (i=1, \dots, N), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где матрицы $I_{i,k}$, $E_{i,k}$ определяются формулами

$$I_{i,k} = -\bar{a}_k \left[\frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} + \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right]; \quad E_{i,k} = \bar{a}_k \left[\frac{1}{(\bar{x}_i + \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} - \frac{1}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2 - \bar{a}_k^2} \right] \quad (2.3)$$

Аналогично (2.1) – (2.3) на основе (1.15) – (1.17) получим представление решения через суммы в произвольной точке \bar{x}_i, \bar{y}_j верхней полуплоскости

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [(\varepsilon-2)T_{ijk}^{(1)} - (1-\varepsilon)T_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [(1-2\varepsilon)R_{ijk}^{(1)} - (1-\varepsilon)R_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \\ \bar{\sigma}_{22}^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \bar{p} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [\varepsilon T_{ijk}^{(1)} - (1-\varepsilon)T_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [R_{ijk}^{(1)} + (1-\varepsilon)R_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \\ \bar{\sigma}_{12}^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [S_{ijk}^{(1)} - (1-\varepsilon)S_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [\varepsilon P_{ijk}^{(1)} + (1-\varepsilon)P_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{u}_1^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \frac{\bar{p}_1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [(1+\bar{v}_1^0)S_{ijk}^{(0)} - (1-\varepsilon)S_{ijk}^{(1)'}] v_1(\bar{x}_k) + [(\varepsilon-\bar{v}_1^0)P_{ijk}^{(0)} + (1-\varepsilon)P_{ijk}^{(1)'}] v_2(\bar{x}_k) \right\};$$

$$\bar{u}_2^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \frac{\bar{p}_1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [(\varepsilon+\bar{v}_1^0)T_{ijk}^{(0)} - (1-\varepsilon)T_{ijk}^{(1)'}] v_1(\bar{x}_k) + [(1+\bar{v}_1^0)R_{ijk}^{(0)} + (1-\varepsilon)R_{ijk}^{(1)'}] v_2(\bar{x}_k) \right\}$$

и нижней полуплоскости

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11}^{(2)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [(2+\varepsilon)T_{ijk}^{(1)} + (1+\varepsilon)T_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [(1+2\varepsilon)R_{ijk}^{(1)} + (1+\varepsilon)R_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \\ \bar{\sigma}_{22}^{(2)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= \bar{p} - \frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [\varepsilon T_{ijk}^{(1)} - (1+\varepsilon)T_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [R_{ijk}^{(1)} - (1+\varepsilon)R_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \\ \bar{\sigma}_{12}^{(2)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\frac{1}{1-\varepsilon^2} \sum_{k=1}^N \left\{ [S_{ijk}^{(1)} + (1+\varepsilon)S_{ijk}^{(2)}] v_1(\bar{x}_k) + [\varepsilon P_{ijk}^{(1)} + (1+\varepsilon)P_{ijk}^{(2)}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(2)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) &= -\frac{\bar{p}_2}{1-\varepsilon^2} \times \\ &\times \sum_{k=1}^N \left\{ [(1+\bar{v}_2^0)S_{ijk}^{(0)} + (1+\varepsilon)S_{ijk}^{(1)'}] v_1(\bar{x}_k) + [(\varepsilon+\bar{v}_2^0)P_{ijk}^{(0)} + (1+\varepsilon)P_{ijk}^{(1)'}] v_2(\bar{x}_k) \right\}; \end{aligned}$$

$$\bar{u}_2^{(2)}(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = -\frac{\bar{p}_2}{1-\varepsilon^2} \times \\ \times \sum_{k=1}^N \left\{ \left[(\varepsilon + \bar{v}_2^0) T_{ijk}^{(0)} - (1+\varepsilon) T_{ijk}^{(1)'} \right] v_1(\bar{x}_k) + \left[(1 + \bar{v}_2^0) R_{ijk}^{(0)} - (1+\varepsilon) R_{ijk}^{(1)'} \right] v_2(\bar{x}_k) \right\},$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned} T_{ijk}^{(1)} &= -\frac{r_5}{2} \left(\frac{1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{1}{r_2^2 + r_5^2} - \frac{1}{r_3^2 + r_5^2} + \frac{1}{r_4^2 + r_5^2} \right); \\ T_{ijk}^{(2)} &= \frac{r_5}{2} \left[\frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ R_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right]; \\ R_{ijk}^{(2)} &= r_5^2 \left[\frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ S_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{r_1}{r_1^2 + r_5^2} + \frac{r_2}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{r_4}{r_4^2 + r_5^2} \right]; \\ S_{ijk}^{(2)} &= r_5^2 \left[-\frac{r_1}{(r_1^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ P_{ijk}^{(1)} &= -\frac{r_5}{2} \left(\frac{1}{r_1^2 + r_5^2} - \frac{1}{r_2^2 + r_5^2} + \frac{1}{r_3^2 + r_5^2} - \frac{1}{r_4^2 + r_5^2} \right); \\ P_{ijk}^{(2)} &= \frac{r_5}{2} \left[\frac{r_1^2 - r_5^2}{(r_1^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_2^2 - r_5^2}{(r_2^2 + r_5^2)^2} + \frac{r_3^2 - r_5^2}{(r_3^2 + r_5^2)^2} - \frac{r_4^2 - r_5^2}{(r_4^2 + r_5^2)^2} \right]; \\ S_{ijk}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(-\operatorname{arctg} \frac{r_1}{r_5} + \operatorname{arctg} \frac{r_2}{r_5} + \operatorname{arctg} \frac{r_3}{r_5} - \operatorname{arctg} \frac{r_4}{r_5} \right); \quad S_{ijk}^{(1)'} = r_5 S_{ijk}^{(1)}; \\ P_{ijk}^{(0)} &= \frac{1}{4} \ln \frac{(r_1^2 + r_5^2)(r_3^2 + r_5^2)}{(r_2^2 + r_5^2)(r_4^2 + r_5^2)}; \quad P_{ijk}^{(1)'} = r_5 P_{ijk}^{(1)}; \\ T_{ijk}^{(0)} &= \frac{1}{4} \ln \frac{(r_1^2 + r_5^2)(r_4^2 + r_5^2)}{(r_2^2 + r_5^2)(r_3^2 + r_5^2)}; \quad T_{ijk}^{(1)'} = r_5 T_{ijk}^{(1)}; \\ R_{ijk}^{(0)} &= \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{r_1}{r_5} - \operatorname{arctg} \frac{r_2}{r_5} + \operatorname{arctg} \frac{r_3}{r_5} - \operatorname{arctg} \frac{r_4}{r_5} \right); \quad R_{ijk}^{(1)'} = r_5 R_{ijk}^{(1)}; \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$r_1 = \bar{x}_i + \bar{x}_k + \bar{a}_k; \quad r_2 = \bar{x}_i + \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_3 = \bar{x}_i - \bar{x}_k + \bar{a}_k; \\ r_4 = \bar{x}_i - \bar{x}_k - \bar{a}_k; \quad r_5 = \bar{y}_j.$$

Если принять равномерное разбиение полудлины трещины и областей верхней и нижней полуплоскости, т.е.

$$\bar{a}_k = a = \frac{1}{2N}; \quad \bar{x}_i = (2i-1)a; \quad \bar{y}_j = (2j-1)a \quad (i, j, k = 1, 2, \dots), \quad (2.7)$$

тогда будем иметь

$$r_1 = [2(i+k)-1]a; \quad r_2 = [2(i+k)-3]a; \quad r_3 = [2(i-k)+1]a; \\ r_4 = [2(i-k)-1]a; \quad r_5 = (2j-1)a. \quad (2.8)$$

При этом значениям координат $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ соответствуют значения индексов $i = 1/2$, $j = 1/2$, а система уравнений (2.2) принимает вид

$$\sum_{k=1}^N I_{i,k} v_2(\bar{x}_k) + \frac{\varepsilon \pi N}{2} [v_1(\bar{x}_{i+1}) - v_1(\bar{x}_i)] = 1 - \varepsilon^2; \\ \sum_{k=1}^N E_{i,k} v_1(\bar{x}_k) - \frac{\varepsilon \pi N}{2} [v_2(\bar{x}_{i+1}) - v_2(\bar{x}_i)] = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (2.9)$$

где матрицы $I_{i,k}$, $E_{i,k}$ определяются формулами

$$I_{i,k} = -2N \left[\frac{1}{4(i-k)^2 - 1} + \frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} \right]; \quad E_{i,k} = 2N \left[\frac{1}{4(i+k-1)^2 - 1} - \frac{1}{4(i-k)^2 - 1} \right]. \quad (2.10)$$

§3. Численные результаты.

Алгебраическая система уравнений (2.9) относительно безразмерных разностей перемещений берегов трещины $v_1(\bar{x}_k)$, $v_2(\bar{x}_k)$ требует задания биупругой постоянной ε и числа разбиений N полудлины трещины, т.е. интервала (0,1). Биупругая постоянная ε , согласно (1.6), (1.7), определяется формулой

$$\varepsilon = \frac{(1-2\nu_1)\mu_2 - (1-2\nu_2)\mu_1}{2[(1-\nu_1)\mu_2 + (1-\nu_2)\mu_1]} \quad (3.1)$$

– для плоского деформированного состояния и

$$\varepsilon = \frac{(1-\nu_1)(1+\nu_2)\mu_2 - (1-\nu_2)(1+\nu_1)\mu_1}{2[(1+\nu_1)\mu_1 + (1+\nu_2)\mu_2]} \quad (3.2)$$

– для плоского напряженного состояния. Отсюда следует, что максимальное значение биупругой постоянной ε по абсолютной величине не превосходит 0,5 для изотропных материалов.

В таблице приведены абсолютные величины биупругой постоянной ε для некоторых пар материалов, вычисленные по формуле (3.1)

| Материал | медь титан | золото бор | золото свинец | стекло эпокс.смола | бор эпокс.смола | стекло бор | бор гранит | вольфрам гранит |
|---------------|---------------|---------------|------------------|-----------------------|--------------------|---------------|---------------|--------------------|
| ε | 0,021 | 0,04 | 0,063 | 0,191 | 0,211 | 0,22 | 0,382 | 0,392 |

Решение алгебраической системы (2.9) можно представить в символическом виде

$$v_2(\bar{x}_i) = \sum_{k=1}^N M_{i,k}^{-1} + (1 - \varepsilon^2); \quad v_2(\bar{x}_{N+1}) = 0; \quad v_1(\bar{x}_i) = \frac{\pi \varepsilon N}{2} \sum_{k=1}^N E_{i,k}^{-1} [v_2(\bar{x}_{k+1}) - v_2(\bar{x}_k)];$$

$$M_{i,k}(\bar{x}_i) = I_{i,k} + \frac{\pi^2 \varepsilon^2 N^2}{4} L_{i,k}; \quad L_{N,1} = E_{i,1}^{-1}; \quad L_{N,k} = E_{N,k}^{-1} - E_{N,k-1}^{-1}; \quad (3.3)$$

$$L_{r,1} = E_{r,1}^{-1} - E_{r+1,1}^{-1}; \quad L_{r,k} = E_{r+1,k-1}^{-1} - E_{r+1,k}^{-1} - E_{r,k-1}^{-1} + E_{r,k}^{-1}$$

$$(i=1, \dots, N, \quad r=1, \dots, N-1, \quad k=2, \dots, N),$$

где $E_{i,k}^{-1}$, $M_{i,k}^{-1}$ – матрицы, обратные, соответственно, к $E_{i,k}$, $M_{i,k}$.

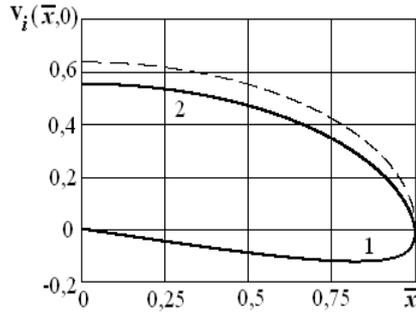


Рис. 1

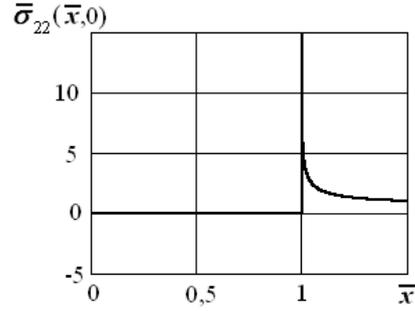


Рис. 2

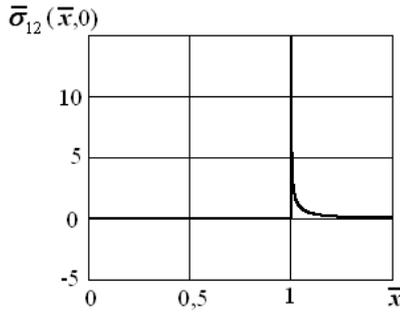


Рис. 3

На рис. 1 представлены кривые зависимостей безразмерных разностей перемещений берегов трещины v_1 (кривая 1) и v_2 (кривая 2) от безразмерной координаты \bar{x} , вычисленные для значений $\varepsilon = 0,5$, $N = 2000$ согласно формул (3.3). Штриховой линией обозначено раскрытие трещины при $\varepsilon = 0$, т.е. для однородной плоскости. Здесь «взаимное проникание» [11] берегов трещины происходит только в точке \bar{x}_N , т.е. $v_2(\bar{x}_N) = -1,073 \cdot 10^{-3}$. Начало такого проникания начинается с $N = 1256$. «Взаимное проникание» берегов трещины в

большем количестве точек при $N = 2000$ возможно только для $\varepsilon > 0,5$.

На рис. 2, 3 представлены кривые зависимостей безразмерных напряжений $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}, 0) = \bar{\sigma}_{22}^{(1)}(\bar{x}, 0) = \bar{\sigma}_{22}^{(2)}(\bar{x}, 0)$ и $\bar{\sigma}_{12}(\bar{x}, 0) = \bar{\sigma}_{12}^{(1)}(\bar{x}, 0) = \bar{\sigma}_{12}^{(2)}(\bar{x}, 0)$ от безразмерной координаты \bar{x} на границе раздела различных упругих сред, вычисленных для значений $\varepsilon = 0,5$, $N = 2000$ согласно формул

$$\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0) = 1 - \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left\{ \sum_{k=1}^N I_{i,k} v_2(\bar{x}_k) + \frac{\pi \varepsilon N}{2} [v_1(\bar{x}_{i+1}) - v_1(\bar{x}_i)] \right\};$$

$$\bar{\sigma}_{12}(\bar{x}_i, 0) = -\frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left\{ \sum_{k=1}^N E_{i,k} v_1(\bar{x}_k) - \frac{\pi \varepsilon N}{2} [v_2(\bar{x}_{i+1}) - v_2(\bar{x}_i)] \right\}, \quad (3.4)$$

которые следуют из (2.4) – (2.6) при $p_0 = 0$.

Отметим, что, несмотря на «взаимное проникание» берегов трещины в точке \bar{x}_N , осцилляция напряжений у вершины трещины не наблюдается при $\varepsilon = 0,5$, $N = 2000$. Осцилляция нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0)$ наблюдается, начиная с $N = 2323$. В то же время осцилляция касательных напряжений $\bar{\sigma}_{12}(\bar{x}_i, 0)$ не наблюдается даже при

$N = 2700$. При $N = 2700$ осцилляция нормальных напряжений $\bar{\sigma}_{22}(\bar{x}_i, 0)$ не наблюдается для $\varepsilon \leq 0,492$, однако «взаимное проникание» $v_2(\bar{x}_N)$ берегов трещины имеет место в одной точке \bar{x}_N для $0,486 \leq \varepsilon \leq 0,5$.

Заключение.

На основе преобразований Фурье плоская задача о растяжении тела с трещиной на границе раздела двух сред сведена к задаче о решении системы дуальных уравнений относительно трансформант напряжений, а затем к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно разностей перемещений берегов трещины, дискретизация которых приводит к системе алгебраических уравнений. Численное решение позволяет установить влияние биупругой постоянной и количества точек разбиения полудлины трещины на перемещения берегов трещины, распределение напряжений и начало взаимного проникания берегов трещины.

Р Е З Ю М Е . На основі перетворень Фур'є плоску задачу про розтяг тіла з тріщиною на границі розділу двох середовищ зведено до задачі про розв'язування системи дуальних рівнянь відносно трансформант напружень, а потім до системи інтегро-диференціальних рівнянь відносно різниць переміщень берегів тріщини, яка після дискретизації приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно переміщень точок берегів тріщини. Чисельно досліджено вплив біпружної постійної і кількості точок розбиття напівдовжини тріщини на переміщення берегів тріщини і розподіл напружень на границі розділу двох середовищ.

1. *Зак А.Р., Вильямс М.Л.* Сингулярность в напряжениях у конца трещины на поверхности раздела двух материалов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1963. – **30**, № 1. – С. 169 – 171.
2. *Ингленд А.* Трещина между двумя разными средами // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 165 – 168.
3. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
4. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – К.: Наук. думка, 1988. – 487 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах; Т. 1).
5. *Райс Дж., Си Г.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух различных сред // Тр. Амер. об-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – **32**, № 2. – С. 186 – 192.
6. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 619 с. (Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие в 4-х томах; Т. 2).
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
8. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. *Fracture. An advance treatise. V. 1 – 7 / Liebowitz H., Chief Editor.* – New York - London: Academic Press, 1968 – 1972.
10. *Garg A.C.* Intralaminar and interlaminar fracture in graphite / epoxy laminates // Engng. Frac. Mech. – 1986. – **23**, N 4. – P. 719 – 733.
11. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 1. – P. 1 – 61.
12. *Guz A.N.* Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
13. *Hutchinson J.W., Mear M., Rice J.R.* Crack paralleling an interface between dissimilar material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1987. – **54**, N 4. – P. 828 – 832.
14. *Khoroshun L.P.* Discretization of the plane problem for a cracked body with nonlinear stress-strain diagram under tension // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 11. – P. 1238 – 1252.
15. *Khoroshun L.P.* Necking Near a Crack Tip in a Plate: a Plane Problem // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 3. – P. 326 – 341.
16. *Perez N.* Fracture Mechanics. – Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004. – 299 p.
17. *Sneddon I.N., Berry D.S.* The Classical Theory of Elasticity. – Berlin: Springer-Verlag, 1958. – 219 p.
18. *Sneddon I.N.* Integral Transform Methods // Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1973. – P. 315 – 367. – (Mechanics of fracture; 1).

Поступила 25.05.2015

Утверждена в печать 29.11.2016