

А.В.Марчук, С.В.Гнедаш, С.А.Левковский

## СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

*Национальный транспортный университет;  
ул. Суворова 1, 01010, Киев, Украина: e-mail: ksm\_ntu@ukr.net*

**Abstract.** Two approaches to study of free and forced axisymmetric vibrations of cylindrical shell are proposed within the framework of the spatial theory of elasticity. They are based on representation of the shell in the form of series of shells over the thickness. The first approach uses the linear polynomials in approximation of function that have to be determined in the plane and over the thickness. The second approach also uses the linear polynomials in approximation of function that have to be determined in the plane, but the dependence of functions on thickness is determined from the analytical solution of corresponding system of differential equations. Both approaches have the errors of approximation and arithmetic evaluations. A closeness of results by two approaches can be treated as some element of reliability. While the free vibration frequencies being determined by the semi-analytical method of finite elements in combination with the method of successive interval constriction search, it seems to be convenient to choose the initial values of frequencies that are determined by the method of the finite element approach. The behavior of shell for the free and forced vibrations is analyzed in the case when the zone of loading is two times less of the shell thickness.

**Key words:** thick-wall layered cylindrical shell, local loading, free and forced vibrations.

### **Введение.**

В настоящее время в различных областях техники все чаще применяются пластиковые волокнистые цилиндры. Слои таких конструкций обладают анизотропией свойств. Они подвержены динамическим, близким к резонансным, локальным воздействиям с величиной зоны нагрузки, соизмеримой с толщиной конструкции, что приводит к трёхмерному напряженно-деформированному состоянию с высокими градиентами его изменения. Это обуславливает необходимость развития соответствующих подходов к расчету подобного рода конструкций. Если расчету свободных колебаний в трёхмерной постановке посвящено сравнительно большое количество работ, включая [1 – 10, 14 – 25], то вынужденные гармонические колебания толстостенных оболочек большой кривизны с размером площади нагрузки, соизмеримой с толщиной оболочки на частотах, близких к резонансным, практически не рассмотрены.

### **§1. Постановка задачи.**

Задачей данной работы является разработка двух подходов, которые позволяют рассматривать свободные и вынужденные колебания толстостенных оболочек большой кривизны в условиях осесимметрического изгиба, подверженных локальным динамическим воздействиям с зоной нагрузки, соизмеримой с толщиной оболочки. Необходимость в разработке двух подходов связана с тем, что им присущи погрешности аппроксимации и арифметических вычислений. Рассмотрение исследовательских задач двумя методами служит дополнительным обоснованием достоверности получае-

мых результатов расчета. Оба подхода основаны на разделении цилиндрической оболочки по толщине концентрическими поверхностями на ряд составляющих цилиндрических оболочек (рис. 1), достаточно тонких, чтобы можно было пренебречь изменением их кривизны по толщине. Удовлетворяя условиям контакта на внешних поверхностях между составляющими оболочками, описывается динамическое состояние исходной оболочки с дискретным учетом изменения кривизны по толщине.

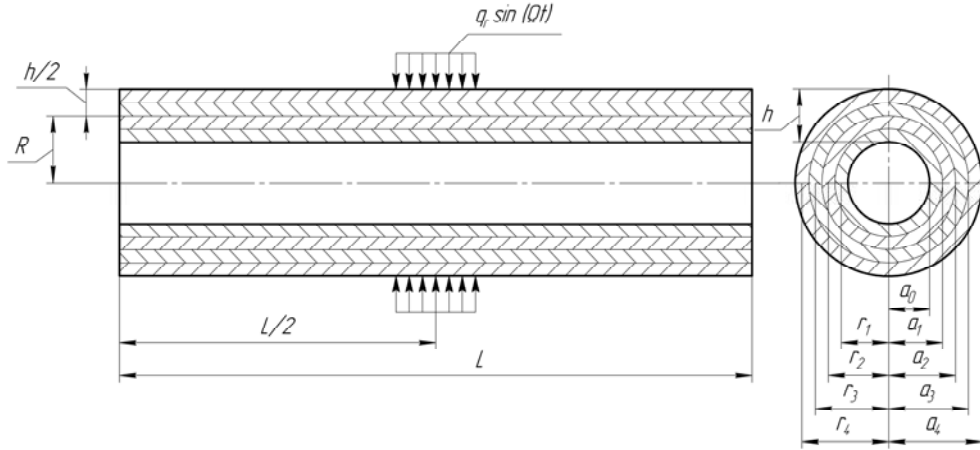


Рис. 1

В первом подходе для аппроксимации искомых функций и по толщине, и в плане, привлекаются полиномы. Во втором – для аппроксимации искомых функций в плане используются полиномы, а их распределение по толщине конструкции определяется на основе аналитического решения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

## §2. Построение конечно-элементного подхода на основе полиномиальной аппроксимации.

Компоненты тензора деформаций цилиндрической оболочки в условиях осесимметричной деформации определены на основе следующих соотношений (ось  $x$  направлена вдоль образующей оболочки):

$$e_{xx}^{(k)} = \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x}; \quad e_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{1}{r} U_r^{(k)}; \quad e_{rr}^{(k)} = \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r}; \quad 2e_{x\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$2e_{xr}^{(k)} = \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x}; \quad 2e_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)}. \quad (2.1)$$

Напряжения, с учетом выражений для деформаций (2.1), записаны на основе закона Гука:

$$\sigma_{xx}^{(k)} = C_{11} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{12} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{13} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{16} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)} = C_{21} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{22} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{23} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{26} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$\sigma_{rr}^{(k)} = C_{31} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{32} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{33} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{36} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x};$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\theta}^{(k)} &= C_{61} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + C_{62} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + C_{63} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + C_{66} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
\sigma_{xr}^{(k)} &= C_{55}^{(k)} \left( \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{45}^{(k)} \left( \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right); \\
\sigma_{r\theta}^{(k)} &= C_{54}^{(k)} \left( \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} \right) + C_{44}^{(k)} \left( \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_\theta^{(k)} \right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Используя известную аппроксимацию искомых перемещений по толщине оболочки [11], имеем

$$\begin{aligned}
U_x^{(k)}(x, r) &= U_{xl}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_p^{(k)}(x) \varphi_p^{(k)}(r); \\
U_\theta^{(k)}(x, r) &= U_{\theta l}^{(k)}(x) f_l^{(k)}(r); \\
U_r^{(k)}(x, r) &= W_p^{(k)}(x) \beta_p^{(k)}(r), \quad (l=1, 2; \quad p=1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь  $U_{x1}^{(k)}(x)$ ,  $U_{x2}^{(k)}(x)$  – тангенциальные перемещения на лицевых поверхностях конструкции;  $U_{\theta 1}^{(k)}(x)$ ,  $U_{\theta 2}^{(k)}(x)$  – окружные перемещения на лицевых поверхностях конструкции;  $W_1^{(k)}(x)$ ,  $W_2^{(k)}(x)$  – нормальные перемещения на лицевых поверхностях конструкции;  $W_3^{(k)}(x)$  – функция сдвига;  $f_1^{(k)}(r)$ ,  $f_2^{(k)}(r)$ ,  $\beta_1^{(k)}(r)$ ,  $\beta_2^{(k)}(r)$  – заданные полиномы первой степени;  $\varphi_1^{(k)}(r)$ ,  $\varphi_2^{(k)}(r)$ ,  $\beta_3^{(k)}(r)$  – полиномы второй степени;  $\varphi_3^{(k)}(r)$  – полиномы третьей степени.

Вариация потенциальной энергии деформации с использованием выражений для деформаций (2.1) и напряжений (2.2) с учетом введенной аппроксимации по толщине (2.3) после соответствующих преобразований принимает вид [12]

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \int_0^L \left\{ \left[ D11_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left( D12_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D13_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{\bar{l}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + \right. \right. \\
&+ D15_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} \left. \right] \delta \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left[ \left( T11_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \right) U_l^{(k)}(x) + \left( T12_{\bar{l}p}^{(k)} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{r^{(k)}} T22_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \left( T13_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T14_{\bar{l}\bar{l}}^{(k)} \right) U_{\theta l}^{(k)}(x) \right] \delta U_{xl}^{(k)}(x) + \\
&+ \left[ D21_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left( D22_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D23_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D24_{\bar{p}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + \right. \\
&+ D25_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} \left. \right] \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \left[ \left( T31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \left( T32_{\bar{p}p}^{(k)} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{1}{r^{(k)}} T42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \left( T33_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T44_{\bar{p}l}^{(k)} \right) U_{\theta l}^{(k)}(x) \right] \delta \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \left( D31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \left( \left( D32_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\
& \quad \left. + \left( T12_{\bar{l}p}^{(k)} + D43_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)2}} \right) + \left( D34_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \right] W_p^{(k)}(x) + \quad (2.4) \\
& + \left[ \left( D35_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} \right] \delta W_{\bar{p}}^{(k)}(x) + \left[ D51_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial U_{xl}^{(k)}(x)}{\partial x} + \right. \\
& + \left. \left( D52_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D53_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{\bar{l}p}^{(k)} \right) W_p^{(k)}(x) + D55_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial U_{\theta l}^{(k)}(x)}{\partial x} \right] \delta \frac{\partial U_{\theta \bar{l}}^{(k)}(x)}{\partial x} + \\
& + \left[ \left( T51_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{\bar{l}}^{(k)} \right) U_{xl}^{(k)}(x) + \left( T52_{\bar{l}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial W_p^{(k)}(x)}{\partial x} + \right. \\
& + \left. \left( T53_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T63_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T54_{\bar{l}}^{(k)} \right) U_{\theta l}^{(k)}(x) \right] \delta U_{\theta \bar{l}}^{(k)}(x) \quad (\bar{l} = 1, 2; \bar{p} = 1, 2, 3);
\end{aligned}$$

$l$  – длина оболочки;  $a_{k-1}$ ,  $a_k$  – координаты внешних поверхностей  $k$ -той составляющей оболочки по оси  $r$ .

Вариация работы внешней нагрузки на лицевых поверхностях слоя имеет вид

$$\delta A = \int_0^l (q_{xl}^{(k)}(x) \delta U_{xl}^{(k)}(x) + q_{\bar{p}}^{(k)}(x) \delta W_{\bar{p}}^{(k)}(x) + q_{\theta l}^{(k)}(x) \delta U_{\theta l}^{(k)}(x)) dx \quad (q_{r3}^{(k)}(x) = 0). \quad (2.5)$$

Вариация кинетической энергии

$$\begin{aligned}
\delta T = & - \int_0^l \int_{a_0}^{a_N} \rho^{(k)} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \dot{U}_{xl}^{(k)}(x, t) f_l^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{W}_p^{(k)}(x, t) \phi_p^{(k)}(r) \right) \delta \left( U_{xl}^{(k)}(x, t) f_{\bar{l}}^{(k)}(r) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial}{\partial x} W_{\bar{p}}^{(k)}(x, t) \phi_{\bar{p}}^{(k)}(r) \right) + \left( \dot{W}_p^{(k)}(x, t) \beta_p^{(k)}(r) \right) \delta \left( W_{\bar{p}}^{(k)}(x, t) \beta_{\bar{p}}^{(k)}(r) \right) + \right. \\
& + \left. \left( \dot{U}_{\theta l}^{(k)}(x, t) f_l^{(k)}(r) \right) \delta \left( U_{\theta \bar{l}}^{(k)}(x, t) f_{\bar{l}}^{(k)}(r) \right) \right] dt - \left[ \left( \dot{U}_{xl}^{(k)}(x, t) f_l^{(k)}(r) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial}{\partial x} \dot{W}_p^{(k)}(x, t) \phi_p^{(k)}(r) \right) \delta \left( U_{xl}^{(k)}(x, t) f_{\bar{l}}^{(k)}(r) + \frac{\partial}{\partial x} W_{\bar{p}}^{(k)}(x, t) \phi_{\bar{p}}^{(k)}(r) \right) + \right. \\
& + \left. \left( \dot{W}_p^{(k)}(x, t) \beta_p^{(k)}(r) \right) \delta \left( W_{\bar{p}}^{(k)}(x, t) \beta_{\bar{p}}^{(k)}(r) \right) + \right. \\
& + \left. \left. \left( \dot{U}_{\theta l}^{(k)}(x, t) f_l^{(k)}(r) \right) \delta \left( U_{\theta \bar{l}}^{(k)}(x, t) f_{\bar{l}}^{(k)}(r) \right) \right] \Big|_{t_1}^{t_2} \right\} dr dL \quad (l = 1, 2; p = 1, 2, 3).
\end{aligned} \quad (2.6)$$

Искомые функции в плане конструкции определены линейными и кубическими полиномами

$$\begin{aligned}
U_{xl}^{(k)}(x) &= U_{xl1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{xl2}^{(k)} f_{u2}(x); \quad U_{\theta l}^{(k)}(x) = U_{\theta l1}^{(k)} f_{u1}(x) + U_{\theta l2}^{(k)} f_{u2}(x); \\
W_p^{(k)}(x) &= W_{p1}^{(k)} f_{w1}(x) + \alpha_{p1}^{(k)} f_{w2}(x) + W_{p2}^{(k)} f_{w3}(x) + \alpha_{p2}^{(k)} f_{w4}(x); \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$f_{u1}(x) = 1 - x/a; \quad f_{u2}(x) = x/a; \quad f_{w1}(x) = \frac{2x^3 - 2ax^2 + a^3}{a^3}; \quad f_{w2}(x) = \frac{x^3 - 2ax^2 + a^2x}{a^2};$$

$$f_{w3}(x) = \frac{-2x^3 + 3ax^2}{a^3}; \quad f_{w4}(x) = \frac{x^3 - ax^2}{a^2}, \quad a - \text{длина конечного элемента.}$$

Уравнения равновесия конечного элемента получаем на основе следующего вариационного уравнения:

$$\delta\Pi - \delta T - \delta A = 0.$$

С учетом введенной аппроксимации (2.7), а также выражений для потенциальной энергии (2.4), работы внешних сил на лицевых поверхностях слоя (2.5), кинетической энергии (2.6) они принимают вид:

$$\int_0^a \left\{ \left[ \left( D11_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T11_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T21_{\bar{l}}^{(k)} \right) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right) U_{xls}^{(k)} + \left( \left( D12_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + D13_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D14_{\bar{l}p}^{(k)} \right) f_{wc}(x) \right] \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T12_{\bar{l}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T22_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) \right] \bar{W}_{pc}^{(k)} +$$

$$\left. + \left( D15_{\bar{l}}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T13_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T23_{\bar{l}}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T14_{\bar{l}}^{(k)} \right) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right) U_{\theta ls}^{(k)} + \right.$$

$$\left. + D\rho 11_{\bar{l}}^{(k)} f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \ddot{U}_{xls}^{(k)} + D\rho 12_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) \ddot{W}_{pc}^{(k)} - q_{x\bar{l}}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right] \delta U_{x\bar{s}}^{(k)} +$$

$$+ \left[ \left( D21_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + \left( D31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{w\bar{c}}(x) + \right.$$

$$\left. + \left( T31_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T41_{\bar{p}l}^{(k)} \right) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \right) U_{xls}^{(k)} + \left( \left( D22_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D23_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + \right. \right.$$

$$\left. + D24_{\bar{p}p}^{(k)} \right) f_{wc}(x) \left. \right] \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + \left( \left( D32_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \quad (2.8)$$

$$\left. + \left( D33_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D43_{\bar{p}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)2}} \right) + \left( D34_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D44_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \right] f_{wc}(x) f_{w\bar{c}}(x) +$$

$$\left. + \left( T32_{\bar{p}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T42_{\bar{p}p}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \right) \bar{W}_{pc}^{(k)} + \left[ \left( D25_{\bar{p}l}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \left( D35_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} D45_{\bar{p}l}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} f_{w\bar{c}}(x) + \right.$$

$$\left. + \left( T33_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T43_{\bar{p}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T44_{\bar{p}l}^{(k)} \right) f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \right) U_{\theta ls}^{(k)} + D\rho 21_{\bar{l}p}^{(k)} f_{us}(x) \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} \ddot{U}_{xls}^{(k)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( D\rho 22_{pp}^{(k)} \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{w\bar{c}}(x)}{\partial x} + D\rho 33_{pp}^{(k)} f_{wc}(x) f_{w\bar{c}}(x) \right) \ddot{W}_{\bar{p}c}^{(k)} - q_{r\bar{p}}^{(k)}(x) f_{w\bar{c}}(x) \left] \delta \bar{W}_{\bar{p}c}^{(k)} + \right. \\
& + \left[ \left( D51_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T51_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T61_{\bar{l}l}^{(k)} \right) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right) U_{xls}^{(k)} + \left( \left( D52_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \right. \right. \\
& + D53_{\bar{l}p}^{(k)} \frac{1}{r^{(k)}} + D54_{\bar{l}p}^{(k)} \left. \right) f_{wc}(x) \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T52_{\bar{l}p}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T62_{\bar{l}p}^{(k)} \right) \frac{\partial f_{wc}(x)}{\partial x} f_{u\bar{s}}(x) \left. \right) \bar{W}_{pc}^{(k)} + \\
& + \left( D55_{\bar{l}l}^{(k)} \frac{\partial f_{us}(x)}{\partial x} \frac{\partial f_{u\bar{s}}(x)}{\partial x} + \left( T53_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)}} T53_{\bar{l}l}^{(k)} + \frac{1}{r^{(k)2}} T54_{\bar{l}l}^{(k)} \right) f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right) U_{\theta ls}^{(k)} + \\
& \left. + D\rho 51_{\bar{l}l}^{(k)} f_{us}(x) f_{u\bar{s}}(x) \dot{U}_{\theta ls}^{(k)} - q_{\theta \bar{l}}^{(k)}(x) f_{u\bar{s}}(x) \right] \delta U_{\theta \bar{l}s}^{(k)} \left. \right\} dx = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $\bar{W}_{p1}^{(k)} = W_{p1}^{(k)}$ ;  $\bar{W}_{p2}^{(k)} = \alpha_{p1}^{(k)}$ ;  $\bar{W}_{p3}^{(k)} = W_{p2}^{(k)}$ ;  $\bar{W}_{p4}^{(k)} = \alpha_{p2}^{(k)}$ .

### §3. Методика решения задач на основе полуаналитического метода конечных элементов.

Наиболее полный обзор по полуаналитическому методу конечных элементов представлен в [2]. В большинстве рассматриваемых работ по одной из координат используется разложение в ряды, по другим координатам – традиционная конечно-элементная аппроксимация. В данной работе представлен несколько иной подход.

Уравнения динамического равновесия  $k$ -го анизотропного слоя оболочки в смешанной форме имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} - B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \\
& B_{13}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{63}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x} - B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} = 0; \\
& \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U_r^{(k)} - B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)} - B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0; \tag{3.1} \\
& B_{11}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{xr}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial t^2} = 0; \\
& B_{21}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r^2} U_r^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xr}^{(k)}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial r} + \\
& + B_{23}^{(k)} \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} - \frac{1}{r} \sigma_{rr}^{(k)} - \rho \frac{\partial^2 U_r^{(k)}}{\partial t^2} = 0; \\
& B_{16}^{(k)} \frac{\partial^2 U_x^{(k)}}{\partial x^2} + B_{26}^{(k)} \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^{(k)}}{\partial x} + B_{66}^{(k)} \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial x^2} + B_{36}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)} - \rho \frac{\partial^2 U_\theta^{(k)}}{\partial t^2} = 0,
\end{aligned}$$

где жёсткостные характеристики  $B_{ij}^{(k)}$  определены в следующей взаимосвязи напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{12}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{22}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
\sigma_{x\theta}^{(k)} &= B_{61}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{62}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + B_{63}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{66}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
B_{33}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} &= B_{13}^{(k)} e_{xx}^{(k)} + B_{23}^{(k)} e_{\theta\theta}^{(k)} + e_{rr}^{(k)} + B_{36}^{(k)} 2e_{x\theta}^{(k)}; \\
e_{r\theta}^{(k)} &= B_{44}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{45}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}; \quad e_{xr}^{(k)} = B_{54}^{(k)} \sigma_{r\theta}^{(k)} + B_{55}^{(k)} \sigma_{xr}^{(k)}.
\end{aligned}$$

Продольные и окружные напряжения определены согласно закона Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{12}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{16}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}; \\
\sigma_{\theta\theta}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} \frac{\partial U_x^{(k)}}{\partial x} + B_{22}^{(k)} \frac{1}{r} U_r^{(k)} + B_{23}^{(k)} \sigma_{rr}^{(k)} + B_{26}^{(k)} \frac{\partial U_\theta^{(k)}}{\partial x}. \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Введем следующую аппроксимацию искомым функций перемещений и напряжений в плане конечного элемента [12]:

$$\begin{aligned}
U_x^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) v_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{x2}^{(k)}(r)) e^{i\omega t}; \\
U_\theta^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) v_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) v_{\theta 2}^{(k)}(r)) e^{i\omega t}; \\
U_r^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) w_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) w_2^{(k)}(r)) e^{i\omega t}; \\
\sigma_{xr}^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) \tau_{x1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{x2}^{(k)}(r)) e^{i\omega t}; \\
\sigma_{\theta r}^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) \tau_{\theta 1}^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \tau_{\theta 2}^{(k)}(r)) e^{i\omega t}; \\
\sigma_{rr}^{(k)}(x, r, t) &= (\varphi_1(x) \sigma_1^{(k)}(r) + \varphi_2(x) \sigma_2^{(k)}(r)) e^{i\omega t}, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

где  $\varphi_1(x) = 1 - x/a$ ;  $\varphi_2(x) = x/a$ ;  $a$  – длина конечного элемента;  $v_{xi}^{(k)}(r)$ ,  $v_{\theta i}^{(k)}(r)$ ,  $w_i^{(k)}(r)$ ,  $\tau_{xi}^{(k)}(r)$ ,  $\tau_{\theta i}^{(k)}(r)$ ,  $\sigma_i^{(k)}(r)$  – искомые функции распределения перемещений и напряжений в  $i$ -м узле (координата  $x$  направлена вдоль оболочки).

Известная процедура Бубнова – Галёркина с использованием формулы Грина позволяет преобразовать уравнения (3.1) с учетом выражений для напряжений (3.2) и введенной аппроксимации (3.3) в уравнения динамического равновесия конечного элемента:

$$\begin{bmatrix}
0 & -k_{01} & 0 & B_{55}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{45}^{(k)} k_{00} \\
-B_{13}^{(k)} k_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} k_{00} & -k_{01} B_{36}^{(k)} & 0 & k_{00} B_{33}^{(k)} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{45}^{(k)} k_{00} & 0 & B_{44}^{(k)} k_{00} \\
B_{11}^{(k)} k_{11} - k_{00} \rho^{(k)} \omega^2 & \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} k_{10} & B_{16}^{(k)} k_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}} k_{00} & B_{13}^{(k)} k_{10} & 0 \\
\frac{1}{r^{(k)}} B_{21}^{(k)} k_{01} & k_{00} \left( \frac{1}{r^{(k)^2}} B_{21}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 \right) & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{01} & k_{10} & \frac{1}{r^{(k)}} (B_{1r}^{(k)} - 1) k_{00} & 0 \\
B_{16}^{(k)} k_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} k_{10} & B_{66}^{(k)} k_{11} - k_{00} \rho^{(k)} \omega^2 & 0 & B_{36}^{(k)} k_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}} k_{00}
\end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{00,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(k)}(r) \\ v_\theta^{(k)}(r) \\ w^{(k)}(r) \\ \tau_x^{(k)}(r) \\ \tau_\theta^{(k)}(r) \\ \sigma^{(k)}(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

где

$$k_{00} = \begin{bmatrix} a/3 & a/6 \\ a/6 & a/3 \end{bmatrix}; \quad k_{10} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad k_{11} = \begin{bmatrix} 1/a & -1/a \\ -1/a & 1/a \end{bmatrix};$$

$$k_{01} = k_{10}^T; \quad v_x^{(k)T} = \{v_{x1}^{(k)}(r), v_{x2}^{(k)}(r)\}; \quad v_\theta^{(k)T} = \{v_{\theta1}^{(k)}(r), v_{\theta2}^{(k)}(r)\};$$

$$w^{(k)T} = \{w_1^{(k)}(r), w_2^{(k)}(r)\}; \quad \tau_x^{(k)T} = \{\tau_{x1}^{(k)}(r), \tau_{x2}^{(k)}(r)\};$$

$$\tau_\theta^{(k)T} = \{\tau_{\theta1}^{(k)}(r), \tau_{\theta2}^{(k)}(r)\}; \quad \sigma^{(k)T} = \{\sigma_1^{(k)}(r), \sigma_2^{(k)}(r)\}.$$

Далее, с использованием соотношений динамического равновесия для конечного элемента (3.4), формируем разрешающую систему дифференциальных уравнений для слоя с учетом кинематических граничных условий на контуре оболочки:

$$\begin{bmatrix} 0 & -K_{01} & 0 & B_{55}^{(k)} K_{00} & 0 & B_{45}^{(k)} K_{00} \\ -B_{13}^{(k)} K_{01} & -\frac{1}{r^{(k)}} B_{23}^{(k)} K_{00} & -B_{36}^{(k)} K_{01} & 0 & B_{33}^{(k)} K_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^{(k)}} K_{00} & B_{45}^{(k)} K_{00} & 0 & B_{44}^{(k)} K_{00} \\ B_{11}^{(k)} K_{11} - K_{00} \rho^{(k)} \omega^2 & \frac{1}{r^{(k)}} B_{12}^{(k)} K_{10} & B_{16}^{(k)} K_{11} & -\frac{1}{r^{(k)}} K_{00} & B_{13}^{(k)} K_{10} & 0 \\ \frac{1}{r^{(k)}} B_{21}^{(k)} K_{01} & K_{00} \left( \frac{1}{(r^{(k)})^2} B_{21}^{(k)} - \rho^{(k)} \omega^2 \right) & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} K_{01} & K_{10} & \frac{1}{r^{(k)}} (B_{1r}^{(k)} - 1) K_{00} & 0 \\ B_{16}^{(k)} K_{11} & \frac{1}{r^{(k)}} B_{26}^{(k)} K_{10} & B_{66}^{(k)} K_{11} - K_{00} \rho^{(k)} \omega^2 & 0 & B_{36}^{(k)} K_{10} & -\frac{2}{r^{(k)}} K_{00} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{00,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_x^{(k)}(r)\} \\ \{v_\theta^{(k)}(r)\} \\ \{w^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_x^{(k)}(r)\} \\ \{\tau_\theta^{(k)}(r)\} \\ \{\sigma^{(k)}(r)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

где

$$\{v_{x1}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, v_{x1}^{(k)}(r), \dots\}; \quad \{v_{\theta2}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, v_{\theta2}^{(k)}(r), \dots\};$$

$$\{w_{i3}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, w_{i3}^{(k)}(r), \dots\}; \quad \{\tau_{xi4}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \tau_{xi4}^{(k)}(r), \dots\};$$

$$\{\tau_{\theta5}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \tau_{\theta5}^{(k)}(r), \dots\}; \quad \{\sigma_{i6}^{(k)}(r)\}^T = \{\dots, \sigma_{i6}^{(k)}(r), \dots\};$$

$i$  – номер точки, в которой определяются искомые функции.



Вектор искомых функций может быть представлен таким образом:

$$\begin{bmatrix} \{v_{xi1}^{(k)}\} \\ \{v_{\theta i2}^{(k)}\} \\ \{w_{i3}^{(k)}\} \\ \{\tau_{xi4}^{(k)}\} \\ \{\tau_{\theta i5}^{(k)}\} \\ \{\sigma_{i6}^{(k)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i4}^{(k)}(J) \\ \mu_{i5}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i5}^{(k)}(J) \\ \mu_{i6}^{(k)}(1) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(j) & \dots & \mu_{i6}^{(k)}(J) \end{bmatrix} [C^{(k)}],$$

где  $[C^{(k)}]^T = [C_1^{(k)} e^{r\beta_1^{(k)}}, \dots, C_j^{(k)} e^{r\beta_j^{(k)}}, \dots, C_J^{(k)} e^{r\beta_J^{(k)}}]$ ;  $\beta_j^{(k)}$  – корни характеристического уравнения разрешающей системы дифференциальных уравнений, которые могут быть комплексными;  $\mu_{i1}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i2}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i3}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i4}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i5}^{(k)}(j)$ ,  $\mu_{i6}^{(k)}(j)$  – её собственные вектора;  $C_j^{(k)}$  – постоянные интегрирования, определяемые из условий контакта слоев и условий на лицевых поверхностях в каждом узле сетки разбиения конструкции на конечные элементы;  $J$  – общее количество искомых функций в слое.

#### §4. Результаты числовых исследований.

В качестве конкретной краевой задачи исследуем свободные и вынужденные колебания четырехслойной цилиндрической оболочки с композитными слоями, которые повернуты относительно образующей на  $45^\circ$ ;  $-45^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $-45^\circ$  со следующими физико-механическими характеристиками:  $l/h = 5$ ;  $h/R = 1/3$ ;  $E_1^{(1)}/E_\theta^{(1)} = 30/1$ ;  $G_{1\theta}^{(1)}/E_\theta^{(1)} = 0,6/1$ ;  $E_\theta^{(1)} = E_r^{(1)}$ ;  $G_{1r}^{(1)} = G_{1\theta}^{(1)}$ ;  $G_{\theta r}^{(1)}/E_\theta^{(1)} = 0,3/1$ ;  $\nu_{12}^{(1)} = \nu_{13}^{(1)} = \nu_{23}^{(1)} = 0,25$ . Толщины слоев – одинаковые. Опора на контуре – шарнирно-подвижная. Оболочка нагружена на внешнем слое (слой № 4) нормальной динамической равномерно-распределенной нагрузкой по центру оболочки  $q_r \sin \Omega t$ . Зона нагрузки равна  $l/10$ , т.е. половине толщины оболочки. Рассматривается половина оболочки, которая разбивается на 100 конечных элементов; под нагрузкой находятся 10 конечных элементов (рис. 2).

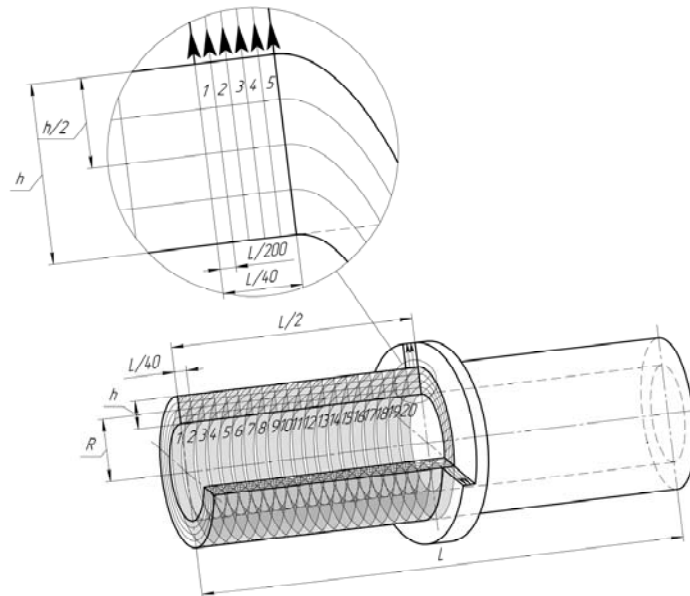


Рис. 2

На рис. 3 представлены перемещения оболочки (здесь и далее нормированы на максимальное перемещение с коэффициентом 0,3; рисунки, полученные по двум предлагаемым подходам совпадают) при статическом приложении нагрузки ( $\Omega = 0$ ). На рис. 3 и далее слева показаны перемещения  $U_r$  (отложено вертикально) и  $U_x$  (отложено горизонтально), справа  $U_\theta$  (отложено вертикально).

При использовании первого подхода слои, несмотря на высокий порядок аппроксимации, разбивались на четыре подслоя, во втором подходе такой необходимости не возникало.

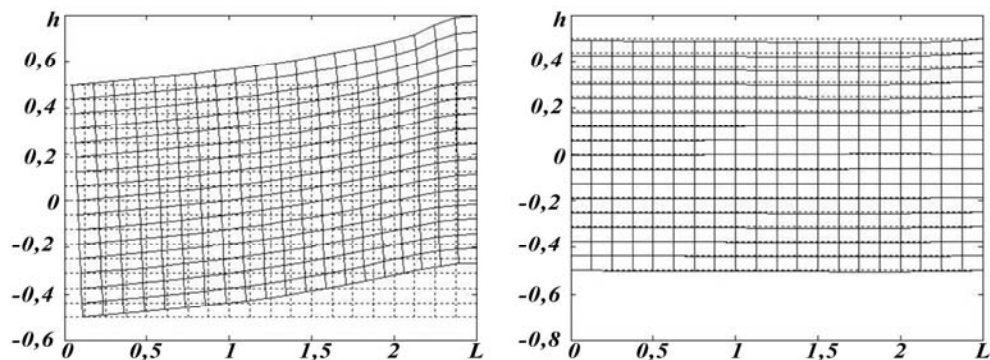


Рис. 3

В табл. 1 результаты расчета представлены в безразмерном виде ( $\bar{U}_r = U_r(l/2, r)E / (q_r h)$ ;  $\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx}(l/2, r) / q_r$ ;  $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(0, r) / q_r$ ;  $\bar{\sigma}_{rr} = \sigma_{rr}(l/2, r) / q_r$ ) для указанного вида нагрузки. Расчеты величины по первому подходу на основе уравнений (2.8) представлены в колонке П1, по второму подходу на основе уравнений (3.5) представлены в колонке П2. Величины напряженно-деформированного состояния приведены на границах слоев.

Таблица 1

Номер слоя	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	1,2282	1,2318	-1,5965	-1,6452	-0,4106	-0,4498	0,0000	0,0000
	1,2455	1,2491	0,1197	0,1319	1,0315	1,0472	0,1422	0,1421
2	1,2455	1,2491	-1,0453	-1,0764	-0,1335	-0,1610	0,1422	0,1421
	1,2999	1,3035	0,2574	0,2681	1,1033	1,1181	0,3542	0,3570
3	1,2999	1,3035	-0,5757	-0,6158	0,2702	0,2342	0,3542	0,3570
	1,4159	1,4202	1,4046	1,4511	2,2158	2,2663	0,6847	0,6886
4	1,4159	1,4202	-0,8807	-0,9495	-0,0695	-0,1343	0,6847	0,6886
	1,5973	1,6018	3,0053	3,1402	3,2984	3,4229	1,0000	1,0000

На рис. 4, а представлены формы колебаний на первой резонансной частоте ( $\bar{\omega}_1^2 = 1,8925e-001$ (П1);  $1,8904e-001$ (П2);  $\bar{\omega}^2 = \omega^2(\rho h^2 / E_2^{(1)})$ ), преимущественно изгибной с одной полуволной, а также перемещения при вынужденных колебаниях (рис. 4, б) при  $\Omega_1^2 = 0,9\omega_1^2$  (здесь и далее изображены в противофазе).

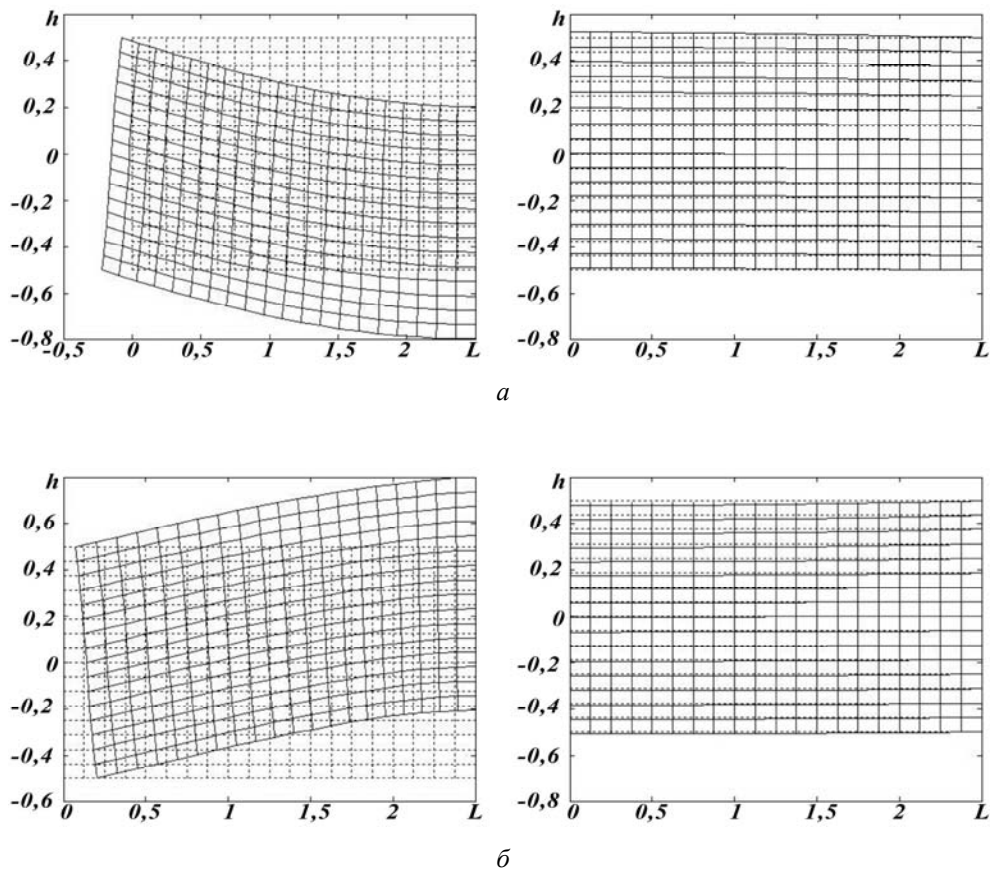


Рис. 4

В табл. 2 представлены результаты расчета для динамической нагрузки ( $\Omega_1^2 = 0,9\omega_1^2$ ).

Таблица 2

Номер слоя	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	10,050	10,080	-8,1840	-8,2800	0,5760	0,5211	0,0000	0,0000
	10,061	10,090	-2,3368	-2,3181	5,0612	5,1021	0,0299	0,0234
2	10,061	10,090	-6,3226	-6,3806	1,0755	1,0397	0,0299	0,0234
	10,067	10,095	-1,5466	-1,5452	4,9636	4,9851	0,1587	0,1613
3	10,067	10,095	-1,6982	-1,7369	4,8120	4,7934	0,1587	0,1613
	10,129	10,158	4,7321	4,8101	10,450	10,544	0,6745	0,6747
4	10,129	10,158	-1,9375	-2,0005	3,7808	3,7332	0,6745	0,6747
	10,253	10,281	6,3964	6,5602	10,546	10,706	1,0000	1,0000

Первая форма колебаний близка к распределению перемещений при нагрузке оболочки статической нагрузкой. Характер вынужденных колебаний при  $\Omega_1^2 = 0,9\omega_1^2$  практически совпадает с формой свободных колебаний на первой резонансной частоте. Коэффициент динамики значительный (сравнение табл. 1 и 2).

На рис. 5, а представлены формы свободных колебаний на второй резонансной частоте ( $\bar{\omega}_2^2 = 8,9890e-001$ (П1);  $8,9500e-001$ (П2)), преимущественно изгибной с тремя полуволнами, а также характер перемещений в вынужденных колебаниях при  $\Omega_2^2 = 0,9\omega_2^2$  (рис. 5, б). Характер распределения перемещений в свободных и вынужденных колебаниях близок. В табл. 3 представлены результаты расчета для динамической нагрузки  $\Omega_2^2 = 0,9\omega_2^2$ . Коэффициент динамики при такой нагрузке меньше, чем в предыдущем случае.

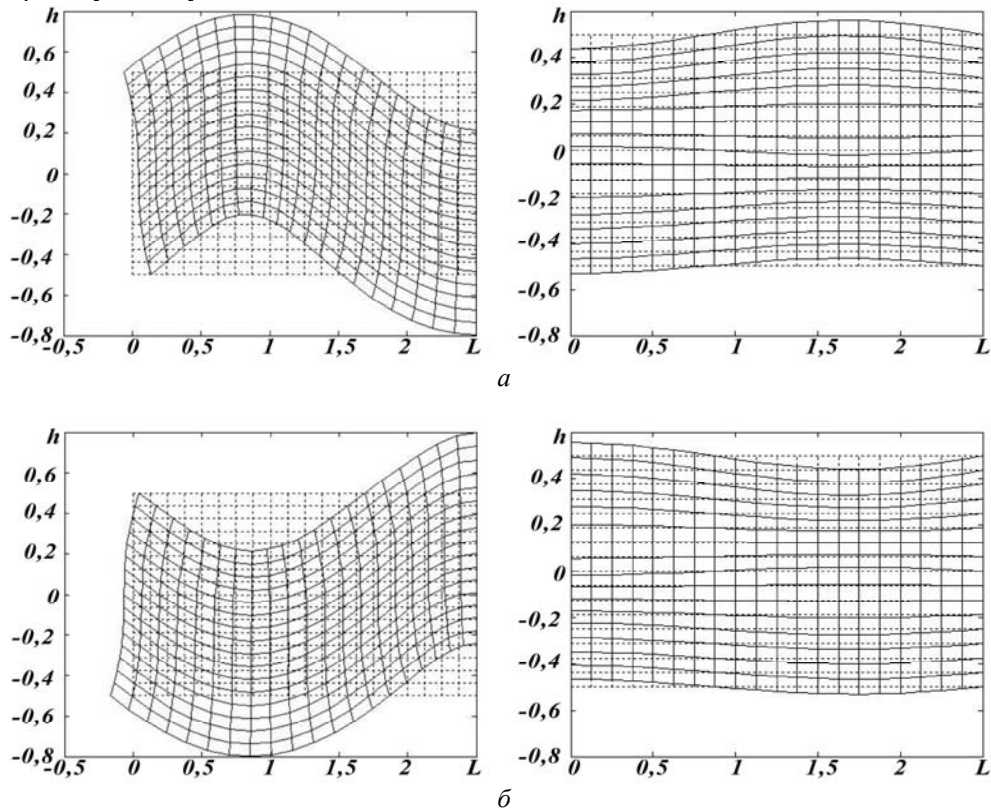
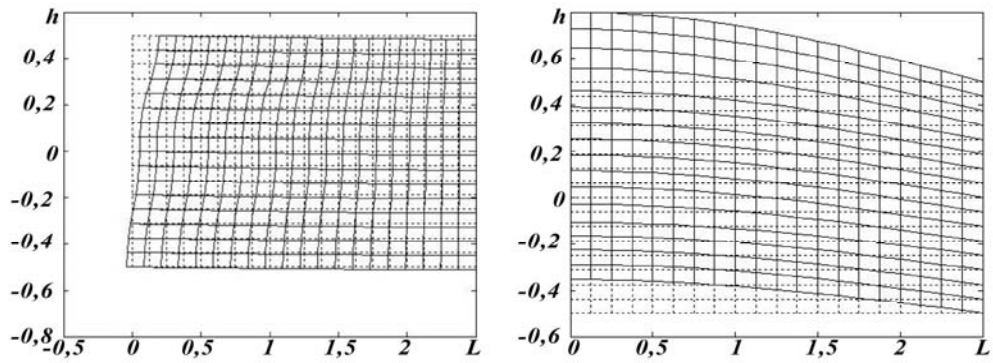


Рис. 5

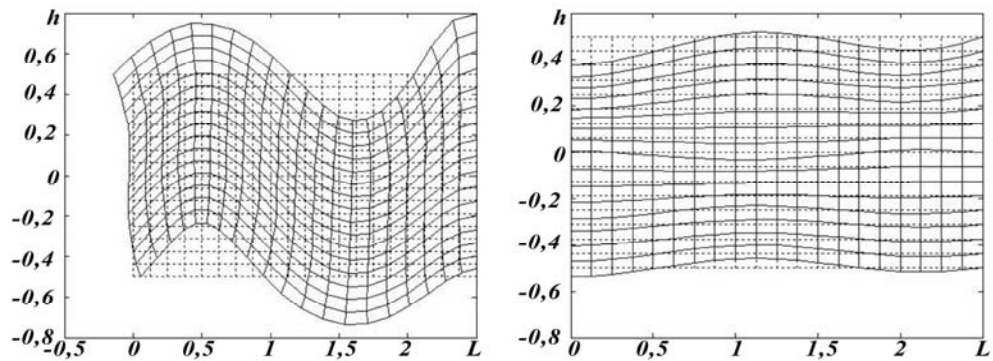
Таблица 3

Номер слоя	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	2,1061	2,1320	-7,0923	-7,2969	-4,2173	-4,3730	0,0000	0,0000
	2,1211	2,1466	2,0117	2,0550	3,5926	3,6573	0,0340	0,0307
2	2,1211	2,1466	-4,1786	-4,2892	-2,5976	-2,6870	0,0340	0,0307
	2,1512	2,1760	2,1667	2,2192	3,5437	3,6121	0,3534	0,3558
3	2,1512	2,1760	-2,4424	-2,4989	-1,0654	-1,1060	0,3534	0,3558
	2,2733	2,2983	5,2477	5,4167	6,4414	6,6197	0,8151	0,8195
4	2,2733	2,2983	-2,7400	-2,8199	-1,5464	-1,6169	0,8151	0,8195
	2,4243	2,4490	8,0043	8,2849	7,4629	7,7222	1,0000	1,0000

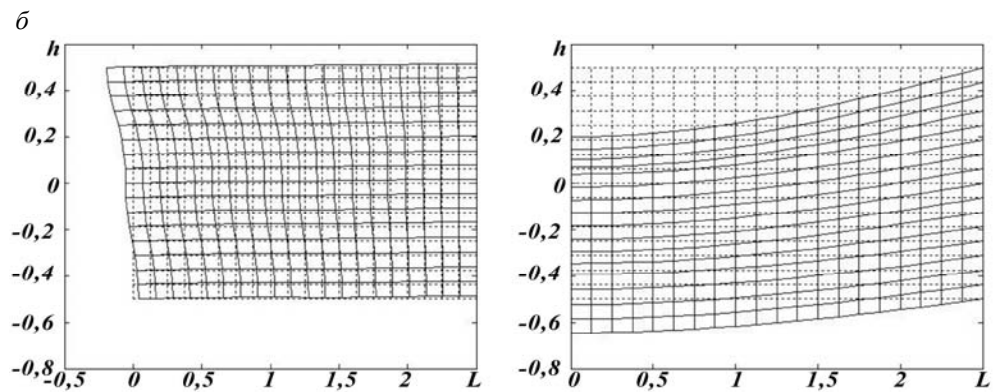
На рис. 6, *a* представлены формы свободных колебаний на третьей резонансной частоте ( $\bar{\omega}_3^2 = 2,3642(\text{П1}); 2,3625(\text{П2})$ ), которая является преимущественно планарной с присутствием значительного закручивания (планарно-крутильная), а также формы распределения перемещений при динамической нагрузке с частотой  $\Omega_3^2 = 0,9\omega_3^2$  (рис. 6, *б*) и  $\Omega_3^2 = 0,9999\omega_3^2$  (рис. 6, *в*).



*a*



*б*



*в*

Рис. 6

Расчеты по первому подходу проведены с разделением каждого слоя на восемь подслоев. Распределение перемещений при динамической нагрузке  $\Omega_3^2 = 0,9\omega_3^2$  не

совпадает с формой колебаний на третьей резонансной частоте. Статическая нагрузка вызывает изгибной характер деформирования, а форма колебаний – планарно-крутильная. Характер деформирования при  $\Omega_3^2 = 0,9\omega_3^2$  близок к форме колебаний на четвертой резонансной частоте ( $\bar{\omega}_4^2 = 2,6809(\text{П1}); 2,6580(\text{П2})$ ) (рис. 7), которая является, преимущественно, изгибной с пятью полуволнами при заметном закручивании. Лишь при  $\Omega_3^2 = 0,9999\omega_3^2$  характер распределения перемещений близок к распределению перемещений на третьей резонансной частоте.

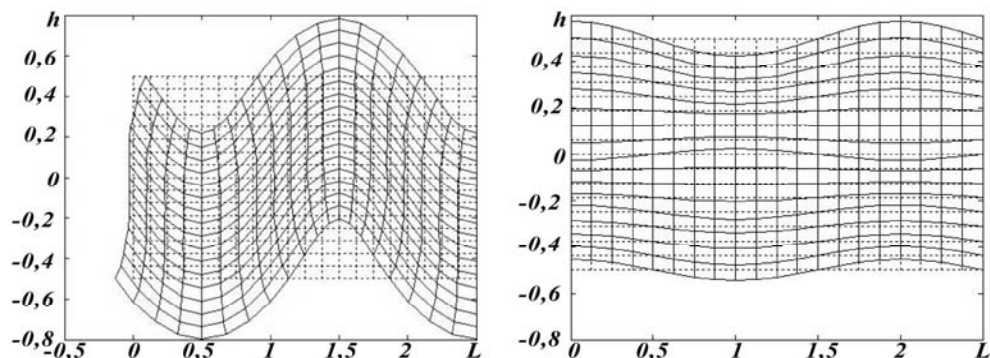


Рис. 7

В табл. 4 представлены результаты расчета при динамической нагрузке  $\Omega_3^2 = 0,9\omega_3^2$ . Коэффициент динамики в таком случае – меньше единицы. Исследовать напряженно-деформированное состояние при  $\Omega_3^2 = 0,9999\omega_3^2$  не представляется возможным; удалось получить только относительный характер распределения перемещений, который совпадает для двух подходов.

Таблица 4

Номер слоя	$\bar{U}_r$		$\bar{\sigma}_{xx}$		$\bar{\sigma}_{\theta\theta}$		$\bar{\sigma}_{rr}$	
	П1	П2	П1	П2	П1	П2	П1	П2
1	0,0666	0,0705	-1,0289	-1,0769	-0,7498	-0,7880	0,0000	0,0000
	0,0897	0,0935	1,0642	1,0796	1,0947	1,1133	0,2186	0,2187
2	0,0897	0,0935	-0,4226	-0,4480	-0,3921	-0,4143	0,2186	0,2187
	0,1694	0,1732	0,8896	0,9058	0,9821	1,0014	0,4963	0,4981
3	0,1694	0,1732	-0,3789	-0,4060	-0,2864	-0,3104	0,4963	0,4981
	0,3219	0,3259	1,8155	1,8462	1,9918	2,0251	0,8254	0,8277
4	0,3219	0,3259	-1,1821	-1,2152	-1,0363	-1,0363	0,8254	0,8277
	0,5232	0,5271	3,4469	3,4973	3,0072	3,0523	1,0000	1,0000

#### Заключение.

В данной статье разработано два подхода к исследованию свободных и вынужденных колебаний толстостенных цилиндрических оболочек под воздействием локальных нагрузок. Оба подхода имеют свои преимущества и недостатки. Они весьма точны. Недостатки (в модели с полиномиальной аппроксимацией – значительное количество жёсткостных характеристик и высокий порядок разрешающих уравнений; в модели с аналитическим определением искомых функций по толщине оболочки – необходимость определения корней характеристической системы уравнений и её собственных векторов) в свете современных возможностей вычислительной техники в

рассматриваемом классе задач незначительны. При определении частот свободных колебаний по полуаналитическому методу конечных элементов методом последовательного сужения интервала поиска в качестве начального значения удобно брать значение частоты свободных колебаний, полученной по модели с полиномиальной аппроксимацией искомых функций. Эти подходы дополняют друг друга, обосновывая достоверность получаемых результатов. Проведенные исследования поведения цилиндрических оболочек при их локальной гармонической нагрузке с частотами, близкими к резонансным, показывают, что коэффициент динамики тем выше, чем ближе форма свободных колебаний к форме распределения перемещений при их статической нагрузке. В случае приложения статической нагрузки, приводящей к, преимущественно, изгибному характеру распределения перемещений на частотах, близких к частотам планарно-крутильных свободных колебаний, интервал возле резонансной частоты, на которой можно достичь резонанса, очень мал. Форма вынужденных колебаний на частотах, близких к резонансным, близка к соответствующим формам свободных колебаний.

**РЕЗЮМЕ.** У рамках просторової теорії пружності запропоновано два підходи щодо дослідження вільних і вимушених осесиметричних коливань циліндричних оболонок. Вони базуються на поділі даної оболонки на ряд складових оболонок по товщині. У першому підході для апроксимації функцій, що визначаються у плані й по товщині, використано поліноми. У другому – для апроксимації функцій, що визначаються у плані, застосовано лінійні поліноми, а їх розподіл по товщині визначено на основі аналітичного розв'язку відповідної системи диференціальних рівнянь. Необхідність побудови двох підходів обумовлена тим, що їм властиві похибки апроксимації й арифметичних обчислень. При визначенні частот вільних коливань напіваналітичним методом скінченних елементів у комбінації з методом послідовного звуження інтервалу пошуку за початкові зручно приймати значення частот, що отримано на основі скінченно-елементного підходу. Проведено аналіз поведінки оболонок при вільних і вимушених коливаннях у випадку, коли зона навантаження вдвічі менша від товщини оболонки.

1. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
2. Баженов В.А., Гуляев О.И., Сахаров О.С., Солодей И.И. Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – К., 2012. – 248 с.
3. Altay Gulai, Dokmeci Cengiz M. A polar theory for vibrations of thin elastic shells // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, N 9. – P. 2578 – 2601.
4. Amabili M. Effect of boundary conditions on nonlinear vibrations of circular cylindrical panels. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2007. – **74**, N 4. – P. 645 – 657.
5. Callanhan J., Baruh H. A Closed-Form Solution Procedure for Circular Cylindrical Shell Vibrations. //Int. J. Solids and Struct. – 1999. – **36**, N 20. – P. 2973 – 3013.
6. Grigorenko O.Ya., Efimova T.L. Free Axisymmetric Vibrations of Solid Cylinders: Numerical Problem Solving // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, N 5. – P. 499 – 508.
7. Grigorenko A. Ya., Loza I.A. Non-Symmetric Waves in a Hollow Layered Cylinder with Piezoceramic Layers Polarized in the Axial Direction // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 2. – P. 150 – 158.
8. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya. Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
9. Hutchinson S.R., El-Arhari S.A. Vibration of free hollow circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1986. – **53**. – P. 641 – 646.
10. Loy C.T., Lam K.Y. Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity // J. Sound and Vibration. – 1999. – **226**, N4. – P. 719 – 737.
11. Marchuk A.V., Piskunov V.G. Statics, vibrations and stability of composite panels with gently curved orthotropic layers. 1. Statics and vibrations // Mechanics of Comp. Materials. – 1999. – **35**, N 4. – P. 285 – 292.
12. Marchuk A.V., Gnidash S.V. Analysis of the Effect of Local Loads on Thick-Walled Cylindrical Shells with Different Boundary Conditions // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 368 – 377.

13. *Piskunov V.G., Marchuk A.V., IlchenkoYa.L.* Free vibrations of thick layered cylindrical shells // *Mechanics of Comp. Materials.* – 2011. – **47**, N 2. – P.177 – 184.
14. *Singal R.K., Williams K.A.* A theoretical and experimental study of vibration of thick circular cylindrical shells and rings // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.* – 1988. – **110**. – P. 532 – 537.
15. *Sheng H.Y., Ye J.Q.* A three-dimensional state space finite element solution for laminated composite cylindrical shells // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* – 2003. – **192**. – P. 2441 – 2459.
16. *Shuvalov A.I., Soldatos K.P.* On the successive approximation method for three-dimension analysis of radially inhomogeneous tubes with an arbitrary cylindrical anisotropy // *J. Sound Vibr.* – 2003. – **259**, N 1. – P. 233. – 239.
17. *So J.I., Leissa A.W.* Free vibrations of the thick hollow circular cylinders from 3-d analysis // *Trans. ASME. J. of Vibr. Acoust.* – 1997. – **119**. – P. 89 – 95.
18. *Soldatos K.P.* Mechanics of cylindrical shells with noncircular cross-section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N8. – P.237 – 274.
19. *Sofiyev A.H.* Vibration and Stability of Composite Cylindrical Shells Containing a FG Layer Subject to Various Loads // *Structural Engineering and Mechanics.* – 2007. – **27**. – P. 365 – 391.
20. *Suzuki K., Leissa A.W.* Free vibrations of noncircular shells having circumferentially varying thickness // *J. Appl. Mech.* – 1985. – **52**, N1. – P. 149 – 154.
21. *Suzuki K., Shikanai G., Leissa A.W.* Free vibrations of laminated composite noncircular thin cylindrical shells // *J. Appl. Mech.* – 1994. – **61**, N 4. – P. 861 – 871.
22. *Swaddiwudhipong S., Tian, J., Wang C.M.* Vibration of Cylindrical Shells with Intermediate Supports // *J. of Sound and Vibration* . – 1995. – **187**, N 1. – P.69 – 93.
23. *Tahbaldar V.G., Gladwell G.M.* Finite element analysis of axisymmetric vibration of cylinders // *J. of Sound and Vibration* . – 1972. – **2**, N 1. – P.143 – 157.
24. *Wang H., Williams K.* Vibrational modes of thick cylinders of finite length // *J. of Sound and Vibration.* – 1996. – **191**, N 5. – P. 955 – 971.
25. *Zhang L., XiangY.* Vibration of open circular cylindrical shells with intermediate ring supports // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, N 13. – P. 3705 – 3722.

Поступила 08.10.2015

Утверждена в печать 29.11.2016