**И.Ю.Хома**

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО НЕОДНОРОДНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ, ул. Нестерова 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: reolog@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** By using an expansion method of unknown functions in a Fourier series of Legendre polynomials the elastic equilibrium equations for an inhomogeneous along the thickness transversally isotropic plate are derived. A method of a representation of the general solution is suggested. A problem on a stress concentration around a circular hole in an unbounded plate under tangential forces is considered.

**Key words:** transversally isotropic plate, inhomogeneousness, circular hole, stress concentration.

**Введение.**

Решению задач о напряженном состоянии неоднородных оболочек и пластин посвящено много публикаций [7, 14, 15, 24], где используются методы прикладной теории, построенной при помощи упрощающих гипотез [5, 22, 23], или обобщенной теории, содержащей регулярный процесс замены решения трехмерной задачи последовательностью решений двумерных задач [3, 6, 21]. Для приведения трехмерных уравнений анизотропной среды к двумерным в [9] используется асимптотический метод. В рамках трехмерной теории в [16, 17] найдены решения уравнений равновесия неоднородных трансверсально-изотропных упругих тел. Задачи о концентрации напряжений около отверстий в однородных и неоднородных телах изложены в [4, 8, 13, 20].

В данной работе методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины излагается вывод уравнений равновесия трансверсально-изотропных пластин, модули упругости которых изменяются по толщине по линейному закону. Приводится метод представления общего аналитического решения данных уравнений и находится решение задачи о концентрации напряжений около кругового отверстия в неограниченной пластине, находящейся под действием постоянных касательных усилий, приложенных на бесконечности.

**§1. Постановка задачи. Исходные соотношения.**

Рассмотрим неоднородную трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины $2h$ $\left(h=\text{const}\right)$, упругие характеристики которой предполагаются непрерывными функциями поперечной координаты $\zeta = x_3 / h$ $\left(-1\le\zeta\le1\right)$. При этом допускается, что коэффициенты Пуассона $\nu$ и $\nu'$ постоянны, а модули упругости $\widehat{E}$, $\widehat{E}'$ и сдвига $\widehat{G}'$, $\widehat{G}'$ соответственно в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости представляют собой линейные функции координаты $\zeta$, т.е.

$$\widehat{E} = Ep(\zeta)\,;\ \widehat{E}' = E'p(\zeta)\,;\ \widehat{G} = \widehat{E}\big/2(1+\nu)\,;\ \widehat{G}' = G'p'(\zeta)\,,$$

где $p(\zeta)=1+\varepsilon\zeta$, $p'(\zeta)=1+\delta\zeta$, $E$, $E'$, $G'$ и $\varepsilon$, $\delta$ – константы.

На основании формул связи между параметрами $\widehat{c}_{ij}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$, $\widehat{c}_{44}$, $\widehat{c}_{66}$ и техническими характеристиками [2] получаем соотношения

$$\widehat{c}_{ij}=c_{ij}(1+\varepsilon\zeta)\,;\quad \widehat{c}_{66}=c_{66}(1+\varepsilon\zeta)\,;\quad \widehat{c}_{44}=c_{44}(1+\delta\zeta)\,, \tag{1.1}$$

в которых $c_{ij}$, $c_{44}$, $c_{66}$ – постоянные вида

$$c_{11}=\frac{(1-e\nu'^2)E}{\Delta}\,;\ \ c_{12}=\frac{(\nu+e\nu'^2)E}{\Delta}\,;\ \ c_{13}=\frac{\nu'(1+\nu)E}{\Delta}\,;\ \ c_{33}=\frac{(1-\nu^2)E}{e\Delta}\,;$$

$$c_{66}=E/2(1+\nu)=G\,;\ \ c_{44}=G'\,;\ \ e=E/E'\,;\ \ \Delta=(1+\nu)(1-\nu-2\nu'^2e)\,.$$

Уравнение состояния для трансверсально-изотропного тела записываются таким образом [11, 19]:

$$\sigma_{11}=\widehat{c}_{11}e_{11}+\widehat{c}_{12}e_{22}+\widehat{c}_{13}e_{33}\,;\ \ \sigma_{12}=2\widehat{c}_{66}e_{12}\,;\ \ \sigma_{22}=\widehat{c}_{12}e_{11}+\widehat{c}_{11}e_{22}+\widehat{c}_{13}e_{33}\,;$$

$$\sigma_{13}=2\widehat{c}_{44}e_{13}\,;\ \ \sigma_{33}=\widehat{c}_{13}(e_{11}+e_{22})+\widehat{c}_{33}e_{33}\,;\ \ \sigma_{23}=2\widehat{c}_{44}e_{23}\,, \tag{1.2}$$

где $e_{ij}$ – компоненты деформаций, выражающиеся через перемещения $u_j$ формулами

$$2e_{ij}=\partial_i u_j+\partial_j u_i\qquad \left(\partial_j=\partial/\partial x_j\right). \tag{1.3}$$

Представляем, следуя [1, 10, 12], компоненты вектора перемещений $u_j\left(x_1,x_2,x_3\right)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}\left(x_1,x_2,x_3\right)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\varsigma)$ координаты толщины

$$\left\{\ u_j(x_1,x_2,x_3),\ \sigma_{ij}(x_1,x_2,x_3)\right\}=\sum_{k=0}^{N}\left\{\ u_j^{(k)}(x),\ h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\right\}\ P_k(\varsigma)\,, \tag{1.4}$$

где $x=\left(x_1,x_2\right)$ – точка на серединной плоскости пластины, совпадающей с плоскостью изотропии; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра); $N$ – натуральное число, которое будем считать четным, т. е. $N=2n$ $(n=0,1,\ldots<\infty)$.

**§2. Уравнения равновесия.**

В предположении, что лицевые граничные плоскости $x_3=h$, $x_3=-h$ свободны от напряжений, упругое равновесие пластины описывается системой уравнений [19]

$$\partial_\alpha\,\sigma_{\alpha\beta}^{(0)}=0\ \left(\beta=1,2\right)\,;\ \ \partial_\alpha\,\sigma_{\alpha 3}^{(0)}=0\,; \tag{2.1}$$

$$\partial_\alpha\sigma_{\alpha j}^{(k)}-\left(2k+1\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]}\sigma_{3j}^{(k-2s-1)}=0\ \ \left(j=1,2,3;\ k=1,2,\ldots,N\right), \tag{2.2}$$

где $K=\left(k-1\right)/2;$ символ $\left[K\right]$ обозначает целую часть числа $K$; по индексу $\alpha$ подразумевается суммирование от 1 до 2.

Принимая во внимание рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра [1]

$$(2k+1)\zeta P_{k-1}(\zeta)=k\,P_k(\zeta)+(k+1)P_{k+1}(\zeta)\,,$$

из равенств (1.2) с учетом формул (1.1), (1.3), (1.4) получаем соотношения, связывающие моменты напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ и деформаций $e_{ij}^{(k)}$, т.е

$$\sigma_{11}^{(k)}=h\Big(c_{11}e_{11}^{(k)}+c_{12}e_{22}^{(k)}+c_{13}e_{33}^{(k)}\Big)\,;\ \ \sigma_{12}^{(k)}=2c_{66}he_{12}^{(k)}\,;\ \ \sigma_{22}^{(k)}=h\Big(c_{12}e_{11}^{(k)}+c_{11}e_{22}^{(k)}+c_{13}e_{33}^{(k)}\Big)\,;$$

$$\sigma_{13}^{(k)} = 2c_{44}he_{13}^{(k)}; \quad \sigma_{33}^{(k)} = h\left(c_{13}\theta^{(k)} + c_{33}e_{33}^{(k)}\right); \quad \sigma_{23}^{(k)} = 2c_{44}he_{23}^{(k)}, \tag{2.3}$$

где

$$\Big[2e_{\alpha\beta}^{(k)} = \partial_\alpha \underline{u}_\beta^{(k)} + \partial_\beta \underline{u}_\alpha^{(k)} \quad (\alpha,\beta = 1,2); \quad 2e_{\alpha 3}^{(k)} = \partial_\alpha \underline{u}_3^{(k)} + h^{-1}u_\alpha'^{(k)};$$

$$e_{33}^{(k)} = h^{-1}u_3'^{(k)}; \quad \theta^{(k)} = e_{11}^{(k)} + e_{22}^{(k)} = \partial_1 \underline{u}_1^{(k)} + \partial_2 \underline{u}_2^{(k)}\Big]; \tag{2.4}$$

$$\Big\{\underline{u}_\alpha^{(k)} = u_\alpha^{(k)} + \varepsilon\left(\frac{k}{2k-1}u_\alpha^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}u_\alpha^{(k+1)}\right); \quad \underline{u}_3^{(k)} = u_3^{(k)} + \delta\left(\frac{k}{2k-1}u_3^{(k-1)} + \frac{k+1}{2k+3}u_3^{(k+1)}\right);$$

$$u_\alpha'^{(2k)} = 2k\delta u_\alpha^{(2k)} + (4k+1)\sum_{s=k+1}^{n}\left(u_\alpha^{(2s-1)} + \delta u_\alpha^{(2s)}\right); \tag{2.5}$$

$$u_\alpha'^{(2k-1)} = -2k\delta u_\alpha^{(2k-1)} + (4k-1)\sum_{s=k}^{n}\left(u_\alpha^{(2s)} + \delta u_\alpha^{(2s-1)}\right)\Big\}.$$

Моменты перемещений $u_3'^{(2k)}$ и $u_3'^{(2k-1)}$ следуют из $u_\alpha'^{(2k)}$ и $u_\alpha'^{(2k-1)}$ путем замены индекса $\alpha$ на 3 и параметра $\delta$ на $\varepsilon$.

Равенства (2.3) – (2.5) совместно с (2.1), (2.2) образуют замкнутую систему уравнений для определения неизвестных функций. Полагая в данной системе параметры $\varepsilon$ и $\delta$ равными нулю, будем иметь уравнения упругого равновесия однородной трансверсально-изотропной пластины. По структуре она распадается на две независимые группы уравнений, описывающие, соответственно, симметричное и кососимметричное (по отношению к срединной плоскости) деформированное состояние. Наличие параметров $\varepsilon$ и $\delta$ связывает эти уравнения.

**§3. Общее аналитическое решение.**

Изложим метод представления общего аналитического решения системы уравнений (2.1) – (2.3). Очевидно, первые два равенства (2.1) будут выполнены, если ввести функцию напряжений $F(x_1,x_2)$ по формулам

$$\sigma_{11}^{(0)} = \partial_2^2 F(x_1,x_2); \quad \sigma_{12}^{(0)} = -\partial_1\partial_2 F(x_1,x_2); \quad \sigma_{22}^{(0)} = \partial_1^2 F(x_1,x_2). \tag{3.1}$$

Согласно равенствам (2.4), (2.5) соотношения (2.3) при $k=0$ принимают вид

$$\sigma_{11}^{(0)} = h\left[c_{11}\left(\varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)}\varepsilon/3\right) + c_{12}\left(\varepsilon_{22}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(1)}\varepsilon/3\right) + c_{13}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right)\right];$$

$$\sigma_{22}^{(0)} = h\left[c_{12}\left(\varepsilon_{11}^{(0)} + \varepsilon_{11}^{(1)}\varepsilon/3\right) + c_{11}\left(\varepsilon_{22}^{(0)} + \varepsilon_{22}^{(1)}\varepsilon/3\right) + c_{13}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right)\right]; \tag{3.2}$$

$$\sigma_{12}^{(0)} = 2c_{66}h\left(\varepsilon_{12}^{(0)} + \varepsilon_{12}^{(1)}\varepsilon/3\right); \quad \sigma_{33}^{(0)} = h\left[c_{13}\left(e^{(0)} + e^{(1)}\varepsilon/3\right) + c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right)\right];$$

$$\sigma_{\alpha 3}^{(0)} = 2c_{44}h\left[\partial_\alpha\left(u_3^{(0)} + u_3^{(1)}\delta/3\right) + h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(u_\alpha^{(2s-1)} + \delta u_\alpha^{(2s)}\right)\right] \quad (\alpha = 1,2)$$

$$\left[2\varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} = \partial_\alpha u_\beta^{(k)} + \partial_\beta u_\alpha^{(k)} \quad (\alpha,\beta=1,2); \quad e^{(k)} = \varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)} = \partial_1 u_1^{(k)} + \partial_2 u_2^{(k)}\right]. \tag{3.3}$$

Учитывая (3.1), определяем из первых трех равенств (3.2) моменты деформаций:

$$\varepsilon_{11}^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{3}\varepsilon_{11}^{(1)} + \frac{1}{4c_* c_{66}^2 h}(-c_{12}\partial_1^2 F + c_{11}\partial_2^2 F) - \frac{c_{13}}{2c_* c_{66} h}\sum_{s=1}^{n}(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)})\,;$$

$$\varepsilon_{22}^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{3}\varepsilon_{22}^{(1)} + \frac{1}{4c_* c_{66}^2 h}(c_{11}\partial_1^2 F - c_{12}\partial_2^2 F) - \frac{c_{13}}{2c_* c_{66} h}\sum_{s=1}^{n}(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)})\,; \qquad (3.4)$$

$$\varepsilon_{12}^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{3}\varepsilon_{12}^{(1)} - \frac{1}{2c_{66} h}\partial_1\partial_2 F\,.$$

Отсюда следует, что

$$e^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{3}e^{(1)} + \frac{1}{2c_* c_{66} h}\Delta F - \frac{c_{13}}{c_* c_{66} h}\sum_{s=1}^{n}(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon\, u_3^{(2s)})\,. \qquad (3.5)$$

Согласно (3.5) напряжение $\sigma_{33}^{(0)}$ примет вид

$$\sigma_{33}^{(0)} = \frac{c_{13}}{2c_* c_{66}}\Delta F + \frac{c_1 c_{11} c_{33}}{c_* c_{66}}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right). \qquad (3.6)$$

Здесь $\Delta$ – двумерный оператор Лапласа; $c_* = 1 + c_{12}/c_{66}$ ; $c_1 = c - c_{66} / c_{11}$; $c = 1 - c_{13}^2 / c_{11}c_{33}$ .

Если внести значения моментов (3.4) в условие совместности деформаций $\partial_1^2\varepsilon_{22}^{(0)} - 2\partial_1\partial_2\varepsilon_{12}^{(0)} + \partial_2^2\varepsilon_{11}^{(0)} = 0$ , то получим уравнение, из которого определим

$$\Delta F = \frac{2c_{13}c_{66}}{c_{11}}\sum_{s=1}^{n}(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon\, u_3^{(2s)}) + \frac{c_* c c_{66} h}{c_1 c_{11}}u\,, \qquad (3.7)$$

где $u$ – произвольная гармоническая функция. Исключая $\Delta F$ из равенств (3.5) и (3.6), получаем равенство

$$e^{(0)} = -\frac{\varepsilon}{3}e^{(1)} - \frac{c_{13}}{c_{11} h}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right) + \frac{c}{2c_1 c_{11}}u\,; \qquad (3.8)$$

$$\sigma_{33}^{(0)} = -\frac{c c_{13} h}{2c_1 c_{11}}u + c c_{33}\sum_{s=1}^{n}\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right).$$

Уравнения (2.1) с учетом формул (3.2) сводятся к следующим уравнениям:

$$c_{66}\Delta\left(u_\alpha^{(0)} + u_\alpha^{(1)}\varepsilon / 3\right) + \left(c_{12} + c_{66}\right)\partial_\alpha\left(e^{(0)} + e^{(1)}\varepsilon / 3\right) + c_{13}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\partial_\alpha\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u_3^{(2s)}\right) = 0 \;\; \left(\alpha = 1,\, 2\right);$$

$$3\Delta u_3^{(0)} = -\delta\Delta u_3^{(1)} - 3h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(e^{(2s-1)} + \delta e^{(2s)}\right). \qquad (3.9)$$

Продифференцируем первое $\left(\alpha = 1\right)$ уравнение (3.9) по $x_1$ , а второе $\left(\alpha = 1\right)$ – по $x_2$ и полученные равенства сложим. Учитывая при этом обозначение (3.3), получаем уравнение

$$\Delta\left(e^{(0)} + \frac{\varepsilon}{3}e^{(1)}\right) + \frac{c_{13}}{c_{11} h}\sum_{s=1}^{n}\Delta\left(u_3^{(2s-1)} + \varepsilon u^{(2s)}\right) = 0\,.$$

Отсюда, очевидно, следует равенство (3.8).

Если внести значения моментов (2.3) в равенства (2.2), то получим систему уравнений, соответственно, при четных значениях индекса $2k$ $\left(k = 1,\, 2,\, ...,\, n\right)$, т.е.

$$c_{66}\Delta\underline{u}_{\alpha}^{(2k)}+(c_{12}+c_{66})\partial_{\alpha}\theta^{(2k)}+c'_{2k}h^{-1}\partial_{\alpha}u_3^{(2k)}+(4k+1)h^{-1}\left[-c_{44}\sum_{s=0}^{k}\partial_{\alpha}\,(u_3^{(2s-1)}+\delta\,u_3^{(2s)})+\right.$$

$$\left.+\ c_{13}\sum_{s=k+1}^{n}\partial_{\alpha}\,(u_3^{(2s-1)}+\varepsilon\,u_3^{(2s)})-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\beta_{2s}^{(k)}u_{\alpha}^{(2s)}+\delta\alpha_{2s-1}^{*(k)}u_{\alpha}^{(2s-1)})\right]=0\quad(\alpha=1,2)\ ;\ (3.10)$$

$$c_{44}\Delta\underline{u}_3^{(2k)}+c''_{2k}h^{-1}e^{(2k)}+\left(4k+1\right)h^{-1}\left[-c_{13}\sum_{s=0}^{k}\left(e^{(2s-1)}+\varepsilon e^{(2s)}\right)+c_{44}\sum_{s=k+1}^{n}\left(e^{(2s-1)}+\delta e^{(2s)}\right)\ -\right.$$

$$\left.-\ c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\beta_{2s}^{(k)}u_3^{(2s)}+\varepsilon\alpha_{2s-1}^{*(k)}u_3^{(2s-1)}\right)\right]=0\qquad(3.11)$$

и при нечетных его значениях $2k-1\ \left(k=1,\,2,\,...,\,n\right)$:

$$c_{66}\Delta\underline{u}_{\alpha}^{(2k-1)}+\left(c_{12}+c_{66}\right)\partial_{\alpha}\theta^{(2k-1)}-c'_{2k-1}h^{-1}\partial_{\alpha}u_3^{(2k-1)}+\left(4k-1\right)h^{-1}-\left[c_{44}\sum_{s=0}^{k-1}\partial_{\alpha}\left(u_3^{(2s)}+\delta u_3^{(2s-1)}\right)+\right.$$

$$\left.+\ c_{13}\sum_{s=k}^{n}\partial_{\alpha}\left(u_3^{(2s)}+\varepsilon u_3^{(2s-1)}\right)-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)}u_{\alpha}^{(2s-1)}+\delta\beta_{2s}^{*(k)}u_{\alpha}^{(2s)}\right)\right]=0\quad\left(\alpha=1,2\right);\ (3.12)$$

$$c_{44}\Delta\underline{u}_3^{(2k-1)}-c''_{2k-1}h^{-1}e^{(2k-1)}+\left(4k-1\right)h^{-1}\left[-c_{13}\sum_{s=0}^{k-1}\left(e^{(2s)}+\varepsilon e^{(2s-1)}\right)\ +\right.$$

$$\left.+\ c_{44}\sum_{s=k}^{n}\left(e^{(2s)}+\delta e^{(2s-1)}\right)-c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)}u_3^{(2s-1)}+\varepsilon\beta_{2s}^{*(k)}u_3^{(2s)}\right)\right]=0\,.\qquad(3.13)$$

Здесь приняты обозначения:

$$c'_m=\begin{cases}2k\varepsilon c_{13}+\left(2k+1\right)\delta\,c_{44},\ m=2k;\\ 2k\varepsilon c_{13}+\left(2k-1\right)\delta\,c_{44},\ m=2k-1;\end{cases}\qquad c''_m=\begin{cases}\left(2k+1\right)\varepsilon\,c_{13}+2k\delta\,c_{44},\ m=2k;\\ \left(2k-1\right)\varepsilon\,c_{13}+2k\delta\,c_{44},\ m=2k-1;\end{cases}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)},\ \beta_{2s}^{(k)}$ и $\alpha_{2s-1}^{*(k)},\ \beta_{2s}^{*(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s-1}^{(k)}=\begin{cases}s\left(2s-1\right),\ 1\le s\le k,\\ k\left(2k-1\right),\ k\le s\le n;\end{cases}\qquad \beta_{2s}^{(k)}=\begin{cases}s\left(2s+1\right),\ 1\le s\le k,\\ k\left(2k+1\right),\ k\le s\le n;\end{cases}$$

$$\alpha_{2s-1}^{*(k)}=\begin{cases}s\left(2s-1\right),\ 1\le s\le k,\\ k\left(2k+1\right),\ k< s\le n;\end{cases}\qquad \beta_{2s}^{*(k)}=\begin{cases}s\left(2s+1\right),\ 1\le s< k,\\ k\left(2k-1\right),\ k\le s\le n.\end{cases}$$

Определим аналитическое решение системы уравнений (3.10) – (3.13). По аналогии с (3.9) продифференцируем первое $\left(\alpha=1\right)$ уравнение (3.10) по $x_1$, а второе $\left(\alpha=2\right)$ – по $x_2$ и полученные равенства сложим. В результате имеем уравнение

$$c_{11}\Delta\theta^{(2k)}+c'_{2k}h^{-1}\Delta u_3^{(2k)}+\left(4k+1\right)h^{-1}\left[-c_{44}\sum_{s=0}^{k}\Delta\left(u_3^{(2s-1)}+\delta u_3^{(2s)}\right)\ +\right.$$

$$\left.+\ c_{13}\sum_{s=k+1}^{n}\Delta\left(u_3^{(2s-1)}+\varepsilon u_3^{(2s)}\right)-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\beta_{2s}^{(k)}e^{(2s)}+\delta\alpha_{2s-1}^{*(k)}e^{(2s-1)}\right)\right]=0\,.\qquad(3.14)$$

После выполнения аналогичных преобразований над уравнениями (3.12) получаем равенство

$$
\begin{gathered}
c_{11}\Delta\theta^{(2k-1)} - c'_{2k-1}h^{-1}\Delta u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1}\left[-c_{44}\sum_{s=0}^{k-1}\Delta(u_3^{(2s)} + \delta u_3^{(2s-1)}) + \right. \\
\left. + c_{13}\sum_{s=k}^{n}\Delta\left(u_3^{(2s)} + \varepsilon u_3^{(2s-1)}\right) - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)}e^{(2s-1)} + \delta\beta_{2s}^{*(k)}e^{(2s)}\right)\right] = 0.
\end{gathered} \tag{3.15}
$$

Из (3.15) при $n=1$ с учетом значений (3.8), (3.9) имеем уравнение

$$
\Delta\left[e^{(1)} + \frac{2\varepsilon}{5\alpha_1'}e^{(2)} + \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_3^{(2s)} + \frac{2\varepsilon c_{13}}{\alpha_1' c_{11}h}\sum_{s=2}^{n}u_3^{(2s-1)}\right] = 0\,,
$$

из которого определим

$$
e^{(1)} = -\frac{2\varepsilon}{5\alpha_1'}e^{(2)} - \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_3^{(2s)} - \frac{2\varepsilon\, c_{13}}{\alpha_1' c_{11}h}\sum_{s=2}^{n}u_3^{(2s-1)} - \frac{ch}{c_{66}}\tilde{u}\,,
$$

где $\tilde{u}$ – произвольная гармоническая функция; $\alpha_1' = 1-\varepsilon^2/3$.

Равенства (3.14), (3.15) совместно с (3.11), (3.13) образуют систему уравнений порядка $2(4n-1)$ относительно моментов $u_3^{(1)}, e^{(k)}, u_3^{(k)}$ $(k = 2, 3, ..., 2n)$. Для интегрирования этой системы поступим следующим образом. Введем в рассмотрение функции $u_l$ $(l = 1, 2, ..., 4n-1)$ согласно формулам

$$
\begin{gathered}
c_{66}u_3^{(1)} = -\varkappa_1^* hu - \varepsilon\nu_2^* h^2\tilde{u} + u_1\,;\ c_{66}he^{(2)} = u_2\,; \\
c_{66}u_3^{(2)} = \nu_2^* h^2\tilde{u} + u_3\,;\quad c_{66}he^{(k)} = u_{2k-2}\,;\quad c_{66}u_3^{(k)} = u_{2k-1}\quad (k = 3, 4, ..., 2n)
\end{gathered} \tag{3.16}
$$

и выразим через данные функции моменты деформаций $e^{(0)}$, $e^{(1)}$ и перемещений $\Delta u_3^{(0)}$. Следовательно получим

$$
\begin{gathered}
c_{66}e^{(0)} = \frac{c_{66}}{2c_1c_{11}}u + \frac{\varepsilon h}{3}\tilde{u} - \frac{c_{13}}{c_{11}h}u_1 + \frac{2\varepsilon^2}{15\alpha_1' h}u_2 - \frac{c_{13}\left(1-\varepsilon^2\right)}{\alpha_1' c_{11}h}\sum_{s=2}^{n}u_{4s-3}\,; \\
c_{66}e^{(1)} = -h\tilde{u} - \frac{2\varepsilon}{5\alpha_1' h}u_2 - \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_{4s-1} - \frac{2\varepsilon c_{13}}{\alpha_1' c_{11}h}\sum_{s=2}^{n}u_{4s-3}\,; \\
c_{66}\Delta u_3^{(0)} = \tilde{u} - \frac{\delta}{3}\left(\Delta u_1 + \frac{3}{h^2}u_2\right) + \frac{2\varepsilon}{5\alpha' h^2}u_2 + \frac{3c_{13}}{c_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n}u_{4s-1} + \\
+ \frac{2\varepsilon c_{13}}{\alpha_1' c_{11}h^2}\sum_{s=2}^{n}u_{4s-3} - \frac{1}{h^2}\sum_{s=2}^{n}\left(u_{4s-4} + \delta u_{4s-2}\right),
\end{gathered} \tag{3.17}
$$

где $\varkappa_1^* = 2c_{13}c_{66}/c_1c_{11}c_{33}$, $\nu_2^* = c_{13}/3c_{33}$.

Если внести (3.16) и (3.17) в уравнения (3.11), (3.13) – (3.15), то получим относительно функций $u_l$ однородную систему уравнений, которую в стандартной форме запишем таким образом:

$$
\sum_{l=1}^{4n-1}\left(a_{kl} - b_{kl}h^2\Delta\right)u_l = 0 \quad \left(k = 1, 2, ..., 4n-1\right), \tag{3.18}
$$

где $a_{kl}, b_{kl}$ – константы, явные выражения которых нетрудно выписать.

Рассмотрим характеристическое уравнение $\det\left\|a_{kl}-kb_{kl}\right\|=0$, предполагая, что оно имеет простые и отличные от нуля корни $k_m$. Тогда решение системы (3.18) можно представить в виде [18]

$$u_k=\sum_{m=1}^{4n-1}G_m^{(k)}V_m\,, \tag{3.19}$$

где $V_m$ – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m-k_mh^{-2}V_m=0\,,$$

$G_m^{(k)}$ – константы, которые определяются алгебраическими дополнениями элементов какой-нибудь строки определителя $|\,a_{kl}-k_mb_{kl}\,|_{(4n-1)\times(4n-1)}$.

Согласно (3.19), моменты перемещений $u_3^{(k)}$ из (3.16), примут вид

$$\begin{gathered}c_{66}u_3^{(1)}=-\varkappa_1^*hu-\varepsilon\nu_2^*h^2\tilde{u}+\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(1)}V_m\,;\quad c_{66}u_3^{(2)}=\nu_2^*h^2\tilde{u}+\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(2)}V_m\,;\\ c_{66}u_3^{(k)}=\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(k)}V_m\quad\left(k=3,\,4,\,...,\,2n\right),\end{gathered} \tag{3.20}$$

а моменты деформаций определяем такими формулами:

$$c_{66}e^{(0)}=\varkappa_eu+\frac{\varepsilon h}{3}\tilde{u}+\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1}\tilde{c}_m^{(0)}V_m;\quad c_{66}e^{(1)}=-h\tilde{u}+\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1}\tilde{c}_m^{(1)}V_m\,;\quad c_{66}e^{(k)}=\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{4n-1}\tilde{c}_m^{(k)}V_m\,, \tag{3.21}$$

($\varkappa_e=c_{66}/2c_1c_{11}$, $c_m^{(k)}$, $\tilde{c}_m^{(k)}$ – постоянные, определяемые значениями констант $G_m^{(2k)}$).

С учетом выражений (3.20), (3.21) определяем из второго равенства (3.9) перемещение $u_3^{(0)}$, т.е.

$$c_{66}u_3^{(0)}=\tilde{U}+\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(0)}V_m\qquad\left(c_m^{(0)}=-\tilde{c}_m^{(1)}\delta/3-\sum_{s=1}^{n}k_m^{-1}\left[\tilde{c}_m^{(2s-1)}+\delta\tilde{c}_m^{(2s)}\right]\right), \tag{3.22}$$

а из уравнений (3.7) – функцию напряжений $F$:

$$F=hU+h^2\sum_{m=1}^{4n-1}\tilde{a}_m^{(0)}V_m\qquad\left(c_{11}\tilde{a}_m^{(0)}=2c_{13}\sum_{s=1}^{n}k_m^{-1}\left[c_m^{(2s-1)}+\varepsilon c_m^{(2s)}\right]\right). \tag{3.23}$$

Здесь $U$ и $\tilde{U}$ – бигармонические функции ($\Delta U=u$, $\Delta\tilde{U}=\tilde{u}$).

Принимая во внимание обозначения (3.3), представим соотношения (3.21) в виде

$$c_{66}(\partial_1u_1^{(0)}+\partial_2u_2^{(0)})=\varkappa_e\Delta U+\varepsilon\,h\Delta\tilde{U}/3+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(0)}\Delta V_m\,;$$

$$c_{66}(\partial_1u_1^{(1)}+\partial_2u_2^{(1)})=-h\Delta\tilde{U}+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(1)}\Delta V_m\,;$$

$$c_{66}\left(\partial_1u_1^{(k)}+\partial_2u_2^{(k)}\right)=h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(k)}\Delta V_m;\quad a_m^{(k)}=k_m^{-1}\tilde{c}_m^{(k)}\quad\left(k=2,\,3,\,...,\,2n\right).$$

Отсюда определим моменты перемещений, т.е.

$$c_{66}u_\alpha^{(0)}=\varkappa_e\partial_\alpha U+\varepsilon\,h\partial_\alpha\tilde{U}/3+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(0)}\partial_\alpha V_m+(-1)^\alpha\,h\partial_\beta Y_0\,;$$

$$c_{66}u_\alpha^{(1)} = -h\partial_\alpha \tilde{U} + h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(1)}\partial_\alpha V_m + (-1)^\alpha h\partial_\beta Y_1 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2;\ \alpha \ne \beta)\ ;$$

$$c_{66}u_\alpha^{(k)} = h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(k)}\partial_\alpha V_m + (-1)^\alpha h\partial_\beta Y_k \quad \left(k = 2,\ 3,\ ...,\ 2n\right). \tag{3.24}$$

Здесь $Y_k$ – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Их необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись равенства (3.9), (3.10) и (3.12). Следовательно, если внести в (3.9) значения моментов (3.20) и (3.21), (3.24), то получим уравнение

$$(-1)^\alpha \partial_\beta \Delta\left(Y_0 + \varepsilon Y_1/3\right) + \gamma\sum_{m=1}^{4n-1} O_m^{(0)}\partial_\alpha V_m + c\left(2c_1 h\right)^{-1}\partial_\alpha u = 0\,, \tag{3.25}$$

где $\gamma = c_{11}/c_{66}h^2$, $O_m^{(0)}$ – постоянные вида $O_m^{(0)} = \tilde{c}_m^{(0)} + \dfrac{\varepsilon}{3}\tilde{c}_m^{(1)} + \dfrac{c_{13}}{c_{11}}\sum\limits_{s=1}^{n}\left(c_m^{(2s-1)} + \varepsilon c_m^{(2s)}\right)$. Нетрудно видеть, учитывая (3.8), что $O_m^{(0)} = 0\ \ \forall m \in \left[1, 4n-1\right]$.

Для интегрирования уравнения (3.25) воспользуемся сопряженной гармонической функцией $v$, связанной с функцией $u$ равенствами Коши – Римана

$$\partial_1 u = \partial_2 v\ ,\ \ \partial_2 u = -\partial_1 v\,. \tag{3.26}$$

Тогда из (3.25) получаем (с точностью до константы) уравнение вида

$$\Delta Y_0 = -\frac{\varepsilon}{3}\Delta Y_1 + \frac{c}{2c_1 h}v\,. \tag{3.27}$$

Аналогичным способом из уравнений (3.10), (3.12) после подстановки в них выражений (3.20), (3.21), (3.24) и некоторых преобразований с учетом формул (3.26), (3.27) получим систему уравнений

$$\Delta\underline{Y}_1 - \frac{3c_{44}}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\left(Y_{2s-1} + \delta Y_{2s}\right) = \frac{3c_{44}}{c_{66}h^2}\left(\delta\varkappa_2^* hv + b_1 h^2\tilde{v}\right); \tag{3.28}$$

$$\Delta\underline{Y}_{2k-1} - \frac{(4k-1)c_{44}}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)}Y_{2s-1} + \delta\beta_{2s}^{*(k)}Y_{2s}\right) = \frac{(4k-1)c_{44}}{c_{66}h^2}\left(3\delta\varkappa_2^* hv + b_{2k-1}h^2\tilde{v}\right)\ \left(k = 2,\ 3,\ ...,\ 2n\right);$$

$$\Delta\underline{Y}_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\left(\beta_{2s}^{(k)}Y_{2s} + \delta\alpha_{2s-1}^{*(k)}Y_{2s-1}\right) = \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2}\left(3\varkappa_2^* hv + \delta b_{2k}h^2\tilde{v}\right)\quad \left(k = 1,\ 2,\ ...,\ 2n\right),$$

в которой $\tilde{v}$ – сопряженная с $\tilde{u}$ функция;

$$\Big\{\underline{Y}_1 = \alpha_1' Y_1 + \frac{2\varepsilon}{5}Y_2\ ;\quad \underline{Y}_k = Y_k + \varepsilon\left(\frac{k}{2k-1}Y_{k-1} + \frac{k+1}{2k+3}Y_{k+1}\right)\quad \left(k = 2,\ 3,\ ...,\ 2n\right);$$

$$b_1 = -\frac{c_{11}}{3c_{44}}\left(c\alpha_1' - \frac{\varepsilon\delta c_{13}c_{44}}{3c_{11}c_{33}}\right);\quad b_2 = -\frac{c_{11}}{3c_{44}}\left[\frac{2c\varepsilon}{5} - \frac{c_{13}c_{44}}{c_{11}c_{33}}\left(\varepsilon - \frac{2\delta}{5}\right)\right];$$

$$b_{2k-1} = -\frac{c_{13}\left(1-\varepsilon\delta\right)}{3c_{33}};\quad b_{2k} = \frac{c_{13}\left(\varepsilon - \delta\right)}{3c_{33}},\quad k \ge 2\,;\quad \varkappa_2^* = \varkappa_1^*/3\Big\}\,.$$

Далее представим решение уравнений (3.28) в виде

$$Y_1 = y_1 - \nu_1 h^2\tilde{v}\ ;\ Y_2 = y_2 - \varkappa_2^* hv - \nu_2 h^2\tilde{v}\ ;\quad Y_k = y_k - \nu_k h^2\tilde{v}\quad \left(k = 3,\ 4,\ ...,\ 2n\right), \tag{3.29}$$

где функции $y_k$ – общее решение однородной системы, которую в стандартной форме предложим таким образом:

$$\sum_{l=1}^{2n}\left(p_{kl}-q_{kl}h^2\Delta\right)y_l=0 \quad \left(k=1,\,2,\,...,\,2n\right).$$

Постоянные $\nu_k$ в (3.29) определяем из алгебраической системы уравнений

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\alpha_{2l-1}^{(k)}\nu_{2l-1}+\delta\beta_{2l}^{*(k)}\nu_{2l-1}\right)=b_{2k-1};\sum_{l=1}^{n}\left(\delta\alpha_{2l-1}^{*(k)}\nu_{2l-1}+\beta_{2l}^{(k)}\nu_{2l}\right)=b_{2k} \quad \left(k=1,\,2,\,...,\,n\right).$$

В предположении, что характеристическое уравнение $\det\left\|p_{kl}-\lambda q_{kl}\right\|=0$ имеет простые (не равные нулю) корни $\lambda_s$ $\left(s=1,\,2,\,...,\,2n\right)$, решение системы (3.29) принимает вид

$$y_k=\sum_{s=1}^{2n}b_s^{(k)}\omega_s\,, \qquad (3.30)$$

где $\omega_s$ – метагармонические функции, обеспечивающие выполнение равенств $\Delta\omega_s-\lambda_s h^{-2}\omega_s=0$; постоянные $b_s^{(k)}$ определяются алгебраическими дополнениями элементов какой-нибудь строки определителя $\left|p_{kl}-\lambda q_{kl}\right|_{2n\times 2n}$.

Учитывая формулы (3.29), (3.30) и равенства Коши – Римана (3.26), получим из (3.24) выражения для моментов вектора $u_\alpha^{(k)}$, т.е.

$$c_{66}u_\alpha^{(1)}=-h\partial_\alpha(\tilde U+\nu_1^*h^2\tilde u)+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(1)}\partial_\alpha V_m+(-1)^\alpha h\sum_{s=1}^{2n}b_s^{(1)}\partial_\beta\omega_s\,;$$

$$c_{66}u_\alpha^{(2)}=\varkappa_2^*h^2\partial_\alpha u+\nu_2h^3\partial_\alpha\tilde u+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(2)}\partial_\alpha V_m+(-1)^\alpha h\sum_{s=1}^{2n}b_s^{(2)}\partial_\beta\omega_s \quad (\alpha,\beta=1,2;\ \alpha\neq\beta)\,; \qquad (3.31)$$

$$c_{66}u_2^{(k)}=\nu_{\mathrm{k}}h^3\partial_2\tilde u+h\sum_{m=1}^{4n-1}a_m^{(k)}\partial_2 V_m+(-1)^\alpha h\sum_{n=1}^{2n}b_s^{(k)}\partial_\beta\omega_s \quad \left(k=3,\,4,\,...,\,2n\right).$$

Таким образом, значения функций (3.20) – (3.23) и (3.31) составляют общее решение системы уравнений (2.1) – (2.3).

**§4. Напряженное состояние пластины с круговым отверстием.**

На основании полученного решения рассмотрим задачу о напряженном состоянии около кругового отверстия в неограниченной пластине, находящейся под действием линейно изменяющихся по толщине касательных усилий

$$\sigma_{12}^\infty=\tau\left[1-\lambda\left(1-\zeta\right)\right], \quad \tau=\mathrm{const}\,, \quad \lambda\in\left(0;1\right]. \qquad (4.1)$$

При этом воспользуемся комплексной формой записи данного решения. Полагая

$$U=2\,\mathrm{Re}\left[\bar z\varphi\left(z\right)+\psi_*\left(z\right)\right];\quad \tilde U=2\,\mathrm{Re}\left[\bar z\varphi_*\left(z\right)+\chi_*\left(z\right)\right],$$

где $\varphi\left(z\right)$, $\psi_*\left(z\right)$, $\varphi_*\left(z\right)$, $\chi_*\left(z\right)$ – произвольные голоморфные функции переменной $z=x_1+ix_2$, запишем моменты нормального перемещения (3.20), (3.22) в виде

$$c_{66}u_3^{(0)}=\bar z\varphi_*\left(z\right)+z\overline{\varphi_*\left(z\right)}+\chi_*\left(z\right)+\overline{\chi_*\left(z\right)}+\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(0)}V_m\,;$$

$$c_{66}u_3^{(1)}=-4\varkappa_1^*h\left[\varphi'\left(z\right)+\overline{\varphi'\left(z\right)}\right]+4\varepsilon\nu_2^*h^2\left[\varphi_*'\left(z\right)+\overline{\varphi_*'\left(z\right)}\right]+\sum_{m=1}^{4n-1}c_m^{(1)}V_m\,;$$

$$c_{66}u_3^{(2)} = 4\nu_2^* h^2\left[\varphi_*'(z)+\overline{\varphi_*'(z)}\right]+\sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(2)}V_m\ ;\quad c_{66}u_3^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n-1} c_m^{(k)}V_m \quad (k=3,\,4,\,...,\,2n),$$

а составляющие тангенциальных перемещений (3.31) представим таким образом:

$$c_{66}u_+^{(0)} = -2h\left[\varphi_*(z)+z\overline{\varphi_*'(z)}+4\nu_1^* h^2\varphi_*''(z)+\overline{\chi(z)}\right]+2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(1)}\partial_{\bar z}V_m+2ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(1)}\partial_{\bar z}W_s\ ;$$

$$c_{66}u_+^{(2)} = 8\varkappa_2^* h^2\overline{\varphi''(z)}+8\nu_2 h^3\overline{\varphi_*''(z)}+2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(2)}\partial_{\bar z}V_m+2ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(2)}\partial_{\bar z}W_s\ ;$$

$$c_{66}u_+^{(k)} = 8\nu_k h^3\overline{\varphi_*''(z)}+2h\sum_{m=1}^{4n-1} a_m^{(k)}\partial_{\bar z}V_m+2ih\sum_{s=1}^{2n} b_s^{(k)}\partial_{\bar z}W_s \quad (k=3,\,4,\,...,\,2n).$$

Здесь $2\partial_{\bar z} = \partial/\partial x_1 + i\,\partial/\partial x_2$, $\psi(z)=\psi_*'(z)$, $\chi(z)=\chi_*'(z)$, $u_+^{(k)}=u_1^{(k)}+iu_2^{(k)}$. Соотношения упругости (2.3) в комплексной форме имеют вид

$$\sigma_{11}^{(0)}+\sigma_{22}^{(0)}=\Delta F\ ;\quad \sigma_{11}^{(0)}-\sigma_{22}^{(0)}+2i\sigma_{12}^{(k)}=-4d_{\bar z}^2F\ ;$$

$$\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}=2h\left[(c_{12}+c_{66})\theta^{(k)}+2c_{13}h^{-1}u_3'^{(k)}\right]; \tag{4.2}$$

$$\sigma_{11}^{(k)}-\sigma_{22}^{(k)}+2i\sigma_{12}^{(k)}=4c_{66}h\partial_{\bar z}\underline{u}_+^{(k)}\ ;\quad \sigma_{13}^{(k)}+i\sigma_{23}^{(k)}=c_{44}h\left(2\partial_{\bar z}\underline{u}_3^{(k)}+h^{-1}u_+'^{(k)}\right).$$

Введем полярную систему координат $r,\theta$ и воспользуемся формулами преобразования

$$\sigma_{rr}^{(k)}-\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)}-2i\sigma_{r\vartheta}^{(k)}=e^{2i\vartheta}\left(\sigma_{11}^{(k)}-\sigma_{22}^{(k)}-2i\sigma_{12}^{(k)}\right);$$

$$\sigma_{rr}^{(k)}+\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)}=\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}\ ;\quad \sigma_{r3}^{(k)}+\sigma_{\vartheta 3}^{(k)}=e^{-i\vartheta}\left(\sigma_{13}^{(k)}+\sigma_{23}^{(k)}\right). \tag{4.3}$$

Отсюда получаем выражения для граничных условий. В частности, для свободного от внешних усилий кругового отверстия радиуса $R$ имеют место равенства

$$\sigma_{rr}^{(k)}(r,\vartheta)+i\sigma_{r\vartheta}^{(k)}(r,\vartheta)\Big|_{r=R}=0\ ;\quad \sigma_{r3}^{(k)}(r,\vartheta)\Big|_{r=R}=0 \quad (k=0,1,...,2n). \tag{4.4}$$

Примем голоморфные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_*(z)$, $\chi(z)$ в виде

$$\varphi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n}\ ;\quad \psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^{-n}\ ;\quad \varphi_*'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nz^{-n}\ ;\quad \chi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_nz^{-n}\ ,$$

где $a_n$, $b_n$, $\alpha_n$, $\beta_n$ $(n\ge 1)$ – произвольные постоянные; $a_0$, $b_0$, $\alpha_0$, $\beta_0$ – константы, определяемые значениями напряжений на бесконечности [20]

$$a_0+\bar a_0=\left(\sigma_{11}^{(0)\infty}+\sigma_{22}^{(0)\infty}\right)\Big/4h;\quad b_0=\left(\sigma_{22}^{(0)\infty}-\sigma_{11}^{(0)\infty}+2i\sigma_{12}^{(0)\infty}\right)\Big/4h;$$

$$\alpha_0+\bar\alpha_0=-\frac{1}{8\alpha_1'\nu^*h^2}\left(\sigma_{11}^{(1)\infty}+\sigma_{22}^{(1)\infty}-\varepsilon\left(\sigma_{11}^{(0)\infty}+\sigma_{22}^{(0)\infty}\right)\right)\quad \left(\nu^*=c_1c_{11}/c_{66}\right);$$

$$\beta_0=\frac{1}{8\alpha_1'h^2}\left(\sigma_{22}^{(1)\infty}-\sigma_{11}^{(1)\infty}+2i\sigma_{12}^{(1)\infty}-\varepsilon\left(\sigma_{22}^{(0)\infty}-\sigma_{11}^{(0)\infty}+2i\sigma_{12}^{(0)\infty}\right)\right).$$

При заданных значениях касательных напряжений (4.1) отличными от нуля на бесконечности будут сдвигающие усилия $\sigma_{12}^{(0)\infty}=(1-\lambda)\tau$ и скручивающий момент $\sigma_{12}^{(1)\infty}=\lambda\tau$. В этом случае имеем:

$$a_0 + \bar{a}_0 = 0 ; \quad b_0 = i(1-\lambda)/2h ; \quad \alpha_0 + \bar{\alpha}_0 = 0 ; \quad \beta_0 = -i\left(\lambda - \varepsilon(1-\lambda)\tau\right)/4\alpha_1' h^2 .$$

Вид метагармонических функций $V_m$ зависит от значений корней характеристического уравнения, которые могут быть действительными и комплексными. Если, в частности, $k_1$ – действительный положительный корень, а $k_2$ и $k_3$ – комплексно-сопряженные, то

$$V_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n K_n(\rho x_1) e^{in\vartheta} ; \quad V_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\vartheta} ; \quad V_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\vartheta} .$$

Здесь $K_n(\rho x_1)$, $H_n^{(1)}(\rho x_2)$, $H_n^{(2)}(\rho x_3)$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода, $\rho = r/R$, $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$, $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{-k_2}$, $x_3 = \bar{x}_2$; $B_n$, $C_n$ и $D_n$ – произвольные постоянные. Аналогичный вид имеют метагармонические функции $W_s$.

Подставляя значения голоморфных и метагармонических функций в формулы (4.2), (4.3) и учитывая граничные условия (4.4), получим алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных констант. Согласно данным функциям определяем компоненты напряженного состояния пластины. Так, в частности, окружные напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ определяются формулой

$$\frac{1}{\tau}\sigma_{\vartheta\vartheta} = \left[-1 + \lambda(1-\zeta) + \sum_{k=0}^{2n} T_{\vartheta\vartheta}^{(k)}(\rho) P(\zeta)\right]\sin 2\vartheta ,$$

в которой через $T_{\vartheta\vartheta}^{(k)}(\rho)$ обозначены выражения, содержащие цилиндрические функции [20].

**§5.** Числовые результаты и их анализ**.**

Изложим результаты числового анализа неоднородной по толщине трансверсально-изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием. Контур отверстия – свободен от внешних усилий, а на бесконечности пластина находится под действием линейно изменяющихся по толщине касательных усилий. Численные результаты получены для пластины с упругими постоянными $\nu = 0{,}3$, $\nu' = 0{,}25$, $E/E' = 1{,}25$, $E/G' = 2{,}5$.

На рис. 1 и 2 представлены графики изменения коэффициента концентрации напряжений $\sigma_{\vartheta\vartheta}/\tau$ на контуре отверстия в точке $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ на срединной и граничных плоскостях пластины в зависимости от параметра $\delta$, соответственно, при $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. При $\lambda = 0$ пластина находится под действием сдвигающих усилий на бесконечности, а при $\lambda = 1$ – скручивающих моментов.

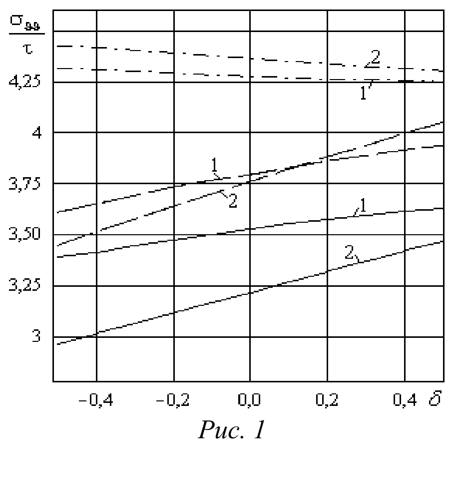


*Рис. 1*

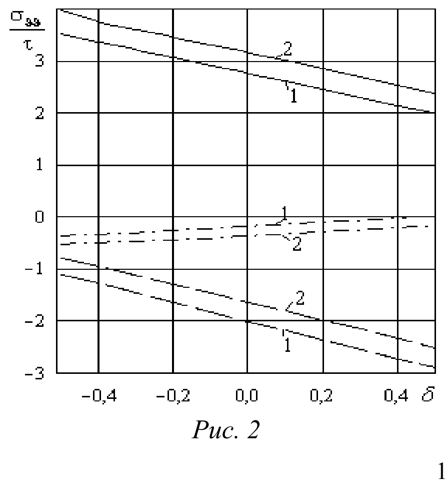


*Рис. 2*

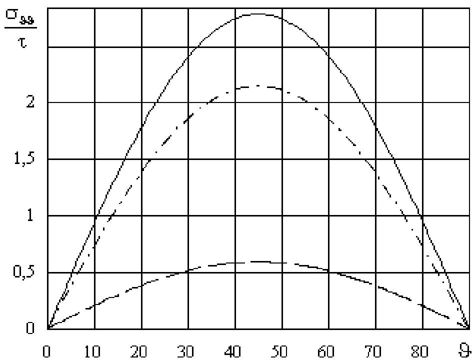


*Рис. 3*

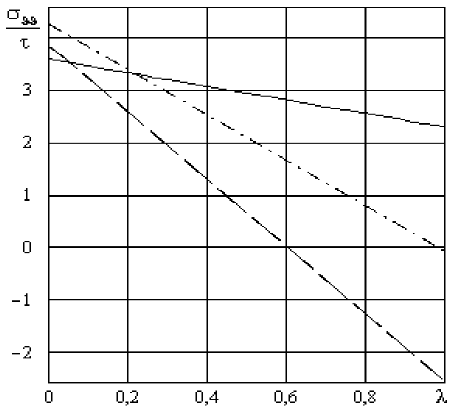


*Рис. 4*

Сплошные линии на рисунках характеризуют изменение напряжений на срединной плоскости пластины $\xi = 0$, пунктирные и штрих-пунктирные – на граничных плоскостях $\xi = 1$ и $\xi = -1$, соответственно. При этом цифра *1* соответствует графикам, построенным при $\varepsilon = 0{,}15$, а цифра *2* – при $\varepsilon = 0{,}3$.

Как видно из рис. 1, максимальных значений напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ достигают на серединной плоскости пластины. Неравенство напряжений на лицевых граничных плоскостях обусловлено неоднородностью материала, характеризуемой параметром $\varepsilon$. При заданных на бесконечности скручивающих моментах (рис. 2) максимальных значений напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ достигают на граничных плоскостях пластины; они противоположного знака и отличаются (в зависимости от величины параметра $\varepsilon$) по модулю.

Кривые на рис. 3 характеризуют изменение напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ по контуру отверстия ($0 \le \vartheta \le \pi/2$) при значениях параметров $\varepsilon = 0{,}15$, $\delta = 0{,}3$, соответственно, на срединной (сплошная кривая) и граничных (сплошная для $\xi = 1$ и пунктирная – для $\xi = -1$ кривые) плоскостях пластины.

При тех же значениях $\varepsilon$ и $\delta$ на рис. 4 представлены графики изменения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ от параметра $\lambda$, т.е. при постепенном переходе от сдвигающих усилий к скручивающим моментам. С увеличением $\lambda$ напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ на граничных плоскостях выравниваются, принимая противоположные по знаку значения (сплошная кривая – для $\xi = 1$ и пунктирная – для $\xi = -1$).

Р Е З Ю М Е . Методом розкладу невідомих функцій в ряди Фур’є за поліномами Лежандра побудовано рівняння пружної рівноваги неоднорідних по товщині трансверсально-ізотропних пластин. Викладено спосіб представлення загального аналітичного розв’язку даних рівнянь. Дано розв’язок задачі про концентрацію напружень біля кругового отвору в необмеженій пластині, що перебуває під дією дотичних зусиль.

1. *Векуа И.Н.* Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилиск. матем. ин-та. – 1965. – 30. – С. 3 – 103.
2. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – К: Вища шк. – 1989. – 352 с.
3. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.* Неклассическая теория оболочек и ее применение к решению инженерных задач. – Львів: Вища шк. – 1978. – 190 с.

4. *Хома І.* Напружений стан біля кругового отвору в неоднорідній по товщині трансверсально ізотропній пластині // Theoretical Foundations of Civil Engineering / Polish-Ukrainian Transactions. – 2011. – **19**. – P. 105 – 112.
5. *Хорошун Л.П., Козлов С.В., Іванов Ю.А.,Кошевой И.К.* Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. – К.: Наук. думка. – 1988. – 152 с.
6. *Чибиряков В.К., Смоляр А.М.* Напряженно-деформированное состояние кусочно-неоднородных пластин // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1986. – № 48. – С. 48 – 53.
7. *Aliage I.W., Reddy I.N.* Nonlinear Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Plates Using the Third-Order Deformation Theory // Int. J. Comput. Eng. Sci. – 2004. – **5**, N 4. – P. 753 – 779.
8. *Burniston E. E.* On the Extension of an Infinite Elastic Plate Containing an Axisymmetric Hole // J. Appl. Mech. – 1972. – **39**, N 2. P. 507 – 512.
9. *Cheng Zhen-Qiang, Lim C.W., Kitipornchai S.* Three-Dimensional Asymptotic Approach to Inhomogeneous and Laminated Piezoelectric Plates // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 33. – P. 3153 – 3175.
10. *Cicala P.* Sulla Teoria Elastica Della Plate Soltile // Giorn. Genio Civile. – 1959. – **97**, N 4. – P. 238 – 256.
11. *Ding H.J., Chen W.Q., Zhang LC.* Elasticity of Transversely Isotropic Materials. – Dordrecht: Springer. – 2006. – 435 p.
12. *Fellers J.I., Soler A.I.* Approximate Solution of the Finite Cylinder Problem Using Legendre Polynomials // AIAA J. – 1970. – **8**, N 11. – P. 2037 – 2042.
13. *Folias E.S., Wang J.S.* On the Three-dimensional Stress Fields around a Circular Hole in a Plate of Arbitrary Thickness // Comput. Mech. – 1990. – **6**, N 5. – P. 379 – 391.
14. *Grigorenko A.Ya., Efimova T.L., Korotkin Yu.A.* Free Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 6. – P. 654 – 663.
15. *Huang Xiao-Lin, Shen Hui-Shen* Nonlinear Vibration and Dynamic Response of Functionally Graded Plates in Thermal Environments // Int. J. Solids and Struct. – 2004. – **41**, N 9 – 10. – P. 2403 – 2427.
16. *Kashtalyan M.* Three-Dimensional Elasticity Solution for Bending of Funtionally Graded Rectangular Plates // European J. of Mechanics, A/Solids. – 2004. – **23**, N 5. – P. 853 – 864.
17. *Kashtalyan M., Rushchitsky J.J.* Revisiting Displacement Functions in Three-dimensional Elasticity of Inhomogeneous Media // Int. J. of Solids and Structures. – 2009. – **46**. – P.3463 – 3470.
18. *Khoma I.Yu*. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates // J. of Mathem. Sci. – 2000. – **101**, N 6. – P. 3577 – 3584.
19. *Khoma I.Yu*. Tension of a Non-thin Transversely Isotropic Plate with a Noncircular Cylindrical Cavity // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 11. – P. 1285 – 1292.
20. *Khoma I.Yu*., *Dashko O.G.* Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Curved Hole // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P. 461 – 473.
21. *Khoma I.Yu., Starygina O.A*. Influence of Elastic Properties on the Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 67 – 79.
22. *Ma L.S., Wang T.J.* Relationships between Axisymmetric Bending and Buckling Solution of FGM Circular Plates Based on Third-order Plate Theory and Classical Plate Theory // Int. J. of Solids and Struct. – 2004 – **41**, N 1. – P. 85 – 101.
23. *Nosier A., Follah F.* Non-Linear Analysis of Functionally Graded Circular Plates under Asymmetric Transverse Loading // Int. J. Non-Linear Mech. – 2009. – **44**, N 8. – P. 928 – 942.
24. *Reddy J.N.* Analysis of Functionally Graded Plates // Int. J. Numerical Methods in Engineering. – 2000. – **47**. – P. 663 – 684.

Поступила 21.03.2016 Утверждена в печать 29.11.2016