

А. В. Константинов¹, О. С. Лимарченко²

**ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ И КАПИЛЛЯРНОСТИ ЖИДКОСТИ
НА НЕЛИНЕЙНУЮ ДИНАМИКУ СИСТЕМЫ
«РЕЗЕРВУАР – ЖИДКОСТЬ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ»**

¹*Институт математики НАН Украины,*

ул. Терещенковская, 3, 01601, Киев, Украина; e-mail: akonst.im@mail.ru;

²*Киев. нац. ун-т им. Т.Г.Шевченко,*

просп. Глушкова, 4е, 01033, Киев, Украина; e-mail: olelim2010@yahoo.com

Abstract. The nonlinear oscillations of mechanical system «cylindrical reservoir – liquid with a free surface» under action of the changing by harmonic law horizontal force are studied. A process of forming the waves on the free surface is analyzed basing on a nonlinear multi-mode (twelve wave modes) that describes the combined motion of reservoir and liquid under action of active external forces. The gravitational-capillary and dissipative processes are taken into account as an additional factor that has an influence on nonlinear dynamics of the system. It is shown that the transition of system on the steady-state regime in the classical sense does not take place, what is confirmed by experimental results. A level of effect of the surface tension and dissipation on a near-resonance regime of oscillations in the system is shown.

Key words: nonlinear dynamics, combined motion, liquid with a free surface, generalized dissipation, weak gravity, surface tension.

Введение.

В данной статье рассмотрена нелинейная задача динамики совместного движения поступательно движущегося цилиндрического резервуара и частично заполняющей его жидкости. Движение системы возбуждается силой, приложенной к резервуару, которая изменяется по гармоническому закону. В предыдущих работах авторов [2 – 4] было показано, что в режиме совместного движения выход системы на режим установившихся колебаний не происходит. Эти результаты подтверждаются экспериментальными данными [7, 15]. При этом изучение поведения системы в окрестности резонанса показало [3], что в отличие от результатов теоретических работ, основанных на малоразмерных моделях, в которых опускаются колебания на собственных частотах форм колебаний, существенно проявляется модуляция, дрейф среднего значения и вовлечение широкого спектра частот, обусловленных высокочастотными формами колебаний и частотами комбинационных резонансов. Ставится задача: исследовать как влияет на выход механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» на режим установившихся колебаний учет реальных свойств жидкости: диссипативных свойств и капиллярности, которая существенно проявляется в условиях слабой гравитации (например, когда ускорение поля гравитационных сил меньше наземного в 1000 раз). Заметим, что рассмотрены простейшие модели диссипативных свойств жидкости и капиллярности, так как основной целью работы является исследование основных тенденций влияния этих факторов на поведение системы «резервуар – жидкость» в окрестности резонанса.

В [4] разработаны математическая модель и метод исследования совместного движения резервуара и частично заполняющей его жидкости. В рамках модели [4]

колебания в системе «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» могут происходить под действием сил и моментов, приложенных к стенке резервуара. Движение тела рассматривается как поступательное, так и вращательное. При этом модель [4] учитывает взаимное влияние колебаний жидкости и резервуара, поскольку массы резервуара и жидкости входят в эту модель в качестве параметров. В работе [2] развитый подход был модифицирован для случая слабо капиллярной жидкости, когда ее начальное состояние представляет собой некий мениск [1, 2, 14]. В значительной мере скорость выхода на установившийся режим определяется диссипативными характеристиками системы. Учитывая малую вязкость жидкости и характерные размеры резервуаров было показано, что диссипативные характеристики жидкости могут быть описаны на основе интегральных характеристик системы, полученных в рамках теории пограничного слоя [5, 6]. К аналогичным заключениям приводят и другие подходы [8, 9, 12]. В рамках развитого подхода [2, 4] выполнен анализ влияния диссипации и капиллярности на развитие динамических процессов в системе «резервуар – жидкость» в окрестности резонанса. При этом главное внимание уделено факторам совместности движения в системе «резервуар – жидкость», что традиционно представляет собой сложную задачу в динамике конструкций с жидкостью [2 – 6, 9 – 11, 13].

1. Объект и модель исследования.

Рассмотрим цилиндрический резервуар, частично заполненный жидкостью. Резервуар принимаем абсолютно твердым телом, которое может двигаться поступательно под действием активных внешних сил. Жидкость является идеальной, несжимаемой, однородной, а ее начальное движение безвихревым. Математическая модель системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» строится на основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского

$$\delta I = 0, \text{ где } I = \int_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при этом функция Лагранжа задается в классической форме Гамильтона – Остроградского как разность между кинетической и потенциальной энергиями

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS - \sigma \int_S \sqrt{1 + (\vec{\nabla}_2 \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon}, \quad (1)$$

где ρ – плотность жидкости; τ – область, занимаемая жидкостью; r, θ, z – цилиндрические координаты, причем ось Oz направлена противоположно вектору ускорения свободного падения \vec{g} , а система координат неподвижно связана с резервуаром;

$\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$; φ – потенциал скоростей жидкости; ξ

– возмущение свободной поверхности жидкости по отношению к невозмущенной свободной поверхности некапиллярной жидкости; S – поперечное сечение цилиндрического резервуара; H – глубина жидкости в резервуаре; σ – поверхностное натяжение на свободной поверхности жидкости; θ_1 – контактный угол; L_0 – контур, ограничивающий S ; M_T – масса резервуара; M_F – масса жидкости; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ –

вектор поступательных перемещений резервуара; \vec{F} – главный вектор внешних сил, действующих на резервуар. Отметим, что в последнем ряду формулы (1) первый член соответствует потенциальной энергии капиллярных сил на свободной поверхности жидкости, а второй член – потенциальной энергии капиллярных сил на контуре трехфазного контакта тело – жидкость – газ.

Построение математической модели системы подробно изложено в работах [2, 3] и включает в себя следующие основные этапы:

определение равновесной формы слабо капиллярной жидкости;

определение форм разложений возмущений свободной поверхности жидкости ξ и потенциала скоростей φ

$$\xi(r, \theta, t) \equiv \xi_0(r) + \Delta z(r, \theta, t) = \xi_0(r) + \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta); \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z), \quad (2)$$

где $\xi_0(r)$ – уравнение равновесной формы свободной поверхности жидкости при наличии сил поверхностного натяжения; ψ_i – формы собственных колебаний на свободной поверхности жидкости;

исключение всех кинематических граничных условий на твердых границах области, занимаемой жидкостью (за счет выбора ψ_i), на свободной поверхности жидкости (за счет определения взаимосвязи между коэффициентами $a_i(t)$ и $b_i(t)$), что фактически эквивалентно переходу к системе независимых переменных минимальной размерности;

преобразование континуальной структуры функции Лагранжа (1) к ее дискретной форма путем подстановки разложений искомым переменных (2);

вывод уравнений движения системы на основе уравнений Лагранжа второго рода с независимыми переменными $\vec{\varepsilon}(t)$ и $a_i(t)$;

дополнение разрешающей системы уравнений совместного движения системы диссипативными членами, определенными согласно методике работы [5].

Заметим, что в основе подхода лежит теорема о том, что безвихревое движение идеальной однородной несжимаемой жидкости полностью определяется движением ее границ, из которой следует, что возмущения свободной поверхности жидкости ξ и радиус-вектор движения резервуара $\vec{\varepsilon}(t)$ полностью характеризуют движение самой жидкости; поэтому потенциал скоростей жидкости φ следует принять зависимой переменной. Разрешающая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} \alpha_r^s - g N_r a_r + \\ + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}_r + \sum_i a_i (\vec{B}_{ir}^2 - \vec{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}_{ijr}^3 - \vec{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}_{ijk}^4 - \vec{B}_{rijk}^4) \right\} - \end{aligned} \quad (3)$$

$$-\frac{\sigma}{\rho} \alpha_r^k - \frac{\sigma}{\rho} \sum_i a_i 2\beta_i^k - \frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j} a_i a_j (\gamma_{ijr}^k + 2\gamma_{irj}^k) - \frac{\sigma}{\rho} \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k 2(\delta_{ijk}^k + \delta_{ijk}^k) - \frac{\sigma}{\rho} \cos \theta_1 \lambda_r;$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \\ = \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2\vec{B}_{ijk}^3 \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты, входящие в систему уравнений (3) – (4) определяются как квадратуры от форм колебаний свободной поверхности жидкости. Модель реализована для произвольного числа форм колебаний свободной поверхности жидкости.

Проведенный ранее анализ динамического поведения системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» в окрестности резонанса показал, что выход колебаний свободной поверхности жидкости на установившийся режим в классическом смысле не происходит. Поведение системы «резервуар – жидкость» при действии горизонтального силового возбуждения приводит к проявлению таких нелинейных эффектов как амплитудная модуляция, существенное влияние высших гармоник, дрейф среднего значения амплитуд колебаний системы. Показано что увеличение массы жидкости по отношению к массе резервуара не способствует выходу системы на условно установившийся режим колебаний. Полученные результаты качественно согласуются с результатами новых теоретических и экспериментальных работ [2, 3, 7, 15].

2. Анализ поведения системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при гармоническом возбуждении при наличии диссипации.

Рассмотрим условия выхода на резонанс механической системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» с учетом дополнительного фактора – наличия в жидкости обобщенной диссипации. В предыдущем разделе рассматривалась нелинейная динамика системы «резервуар – жидкость» в предположении, что жидкость идеальная, а стенки резервуара – абсолютно гладкие. Однако во многих практических приложениях необходимо учитывать вязкость жидкости или наличие конструктивных демпфирующих элементов (стрингеры, шпангоуты, перегородки, сетки, гофрированность или шероховатость стенок резервуара) [5, 6]. Для чисел Рейнольдса в диапазоне $10000 \leq Re \leq 50000$ (для исследуемой системы число Рейнольдса $Re \approx 48000$) учет вязкости жидкости, по существу, сводится к учету рассеяния энергии в системе при колебаниях жидкости, т.е. к учету демпфирующих свойств жидкости. При этом вследствие слабого рассеяния энергии колебаний жидкости демпфирующие свойства жидкости достаточно учесть интегрально путем определения обобщенных характеристик диссипации, например, логарифмического декремента затухания [5] на основе теории пограничного слоя. Как известно [5, 6], различают линейное (вязкое) и нелинейное демпфирование. Линейное демпфирование обусловлено, в основном, рассеянием энергии колебаний жидкости в тонком пограничном слое у стенок полости и характерно для полостей с гладкими стенками. Нелинейное демпфирование возникает при наличии конструктивных элементов. Оба вида демпфирования можно свести к введению в систему обобщенных коэффициентов диссипации, если число Рейнольдса системы лежит в диапазоне $10000 \leq Re \leq 50000$ или эффективная площадь конструктивных элементов невелика [5, 6, 9].

Таким образом, учет вязкости в системе вводится как линейное трение в модели гармонического осциллятора с линейной диссипацией $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2x = 0$. Коэффициенты обобщенной диссипации α_r^p в уравнениях движения (2) определяются по известной методике Г.Н.Микишева [5]. Как показано в теоретических [4] и экспериментальных [5] работах, только существенное увеличение значений полученных коэффициентов (в 8 – 35 раз) приводит к тому, что при вынужденных колебаниях системы происходит значительное уменьшение амплитуд форм колебаний. Вычислительные эксперименты подтвердили, что для достижения качественного влияния диссипации на развитие колебательных процессов в жидкости рассчитанные коэффициенты обобщенной диссипации необходимо увеличить в 30 раз.

Покажем, как развиваются нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда соотношение масс резервуара и жидкости $M_T = 0,1M_F$, а частота внешней возбуждающей силы лежит в дорезонансном диапазоне, т.е. $p = 0,7\omega_1$ (рис. 1, 2). Сравнение со случаем отсутствия диссипации позволяет сделать вывод, что наличие обобщенной диссипации в жидкости действует подобно избирательному фильтру – подавляются гармоники на высших и комбинационных частотах, оставляя только доминантную гармонику на частоте внешнего возбуждения. Присут-

ствующая в спектре гармоника на собственной частоте системы имеет амплитуду почти на порядок меньшую амплитуды доминантной гармоники. Из этого можно сделать вывод, что при наличии обобщенной диссипации возбуждение движения резервуара в дорезонансном диапазоне частот выводит (через ≈ 40 периодов после завершения переходных процессов) колебания свободной поверхности жидкости на режим условно установившихся (близких к одночастотному) колебаний (рис. 1). Увеличение массы резервуара уменьшает длительность переходных процессов и способствует более быстрому выходу колебаний свободной поверхности жидкости на условно установившийся режим.

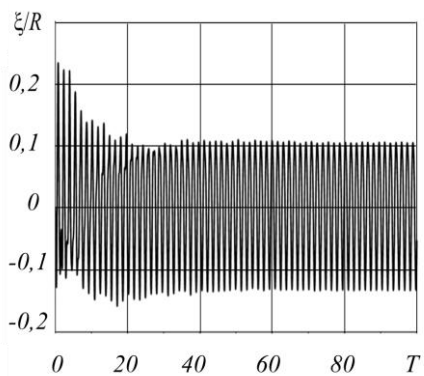


Рис. 1

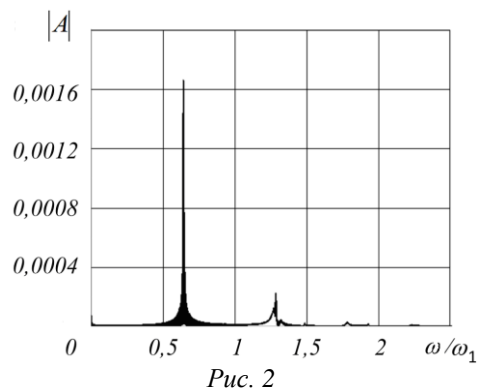


Рис. 2

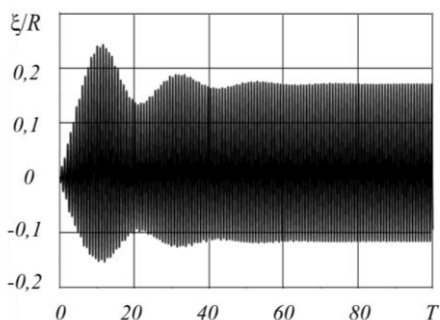


Рис. 3

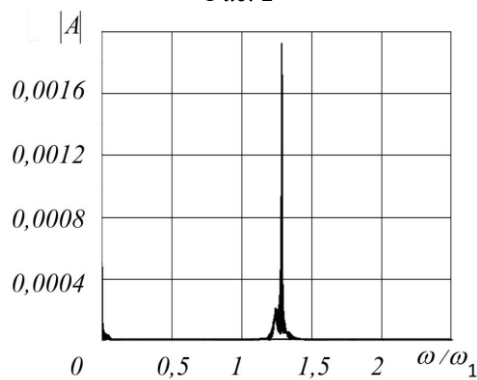


Рис. 4

Для внешней возбуждающей силы F , расположенной в резонансном диапазоне, т.е. $p = 1,25\omega_1 \approx \omega_e$, и при соотношении масс резервуара и жидкости $M_T = 0,1M_F$ нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре при наличии обобщенной диссипации колебания свободной поверхности жидкости выходят на условно установившийся режим (рис. 3, 4). Как видно из частотного спектра (рис. 4), доминирующей является гармоника на частоте внешнего возбуждения (очень близка к собственной частоте системы). Гармоника на нулевой частоте имеет существенную амплитуду, но ее влияние выражается только в том, что колебания свободной поверхности происходят не около нуля, а в окрестности некоторого положительного значения. Увеличение массы резервуара способствует более быстрому выходу колебаний свободной поверхности на условно установившийся режим.

Проанализируем также нелинейные колебания свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда частота внешней возбуждающей силы F расположена в зарезонансном диапазоне, т.е. $p = 1,66\omega_1$, соотношение масс резервуара и жидкости также

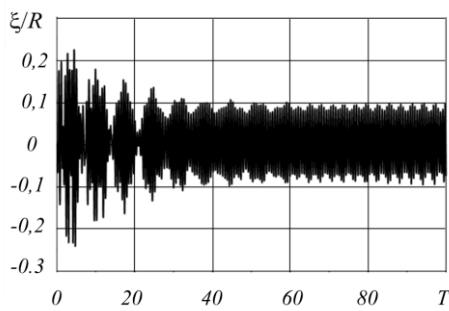


Рис. 5

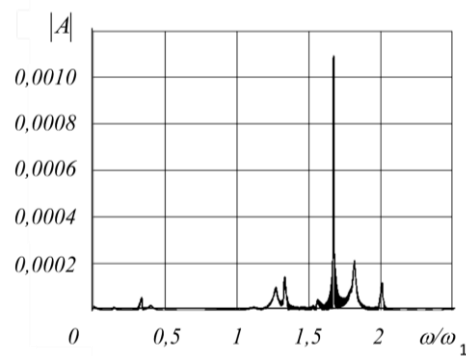


Рис. 6

полагаем $M_T = 0,1M_F$ (рис. 5, 6). Внесение в систему обобщенной диссипации оставляет в частотном спектре только одну доминирующую гармонику на частоте внешнего возбуждения (рис. 6). Однако амплитуды гармоник на частотах $\omega \approx 1,28\omega_1$ и $\omega \approx 1,8\omega_1$ имеют такой порядок, что их присутствие в частотном спектре после завершения переходных процессов приводит к наличию в колебаниях свободной поверхности жидкости амплитудной модуляции.

Таким образом, в резонансном диапазоне внешнего возбуждения движения при малой массе резервуара и учете обобщенной диссипации, увеличенной по сравнению с расчетной даже в 30 раз, не производит к выходу колебаний свободной поверхности жидкости даже на условно установившийся режим. Только существенное увеличение массы резервуара (более чем в 100 раз) способствует выходу колебаний свободной поверхности жидкости на условно установившийся режим. Заметим, что для значений коэффициентов обобщенной диссипации до 20 выход системы на режим установившихся колебаний не происходит, т.е. для реальных жидкостей выход на установившийся режим за счет диссипации может быть достигнут только на основе внесения в систему конструктивных демпферов. Заметим также, что для рассматриваемой системы наблюдаются разные режимы поведения в до-, около- и зарезонансном диапазонах динамического возбуждения, что предопределяется, прежде всего, тем, что рассматриваемые процессы описываются многомодовой моделью. Подобные эффекты для систем с одной степенью свободы не проявляются.

3. Анализ поведения системы «резервуар – слабо капиллярная жидкость» при гармоническом возбуждении.

Покажем особенности поведения системы «резервуар – жидкость со свободной поверхностью» при учете действия сил поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости. При этом для повышения вклада сил поверхностного натяжения принимается, что ускорение свободного падения меньше наземного в 1000 раз.

С учетом параметров системы исследование проводится для числа Бонда $Bo \approx 12$ и значений контактного угла в диапазоне $75^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$ (слабая капиллярность). В этом случае максимальный прогиб в центре резервуара (максимальный подъем на стенке) равновесной формы свободной поверхности жидкости $\xi_0(0) \sim \xi_0(R) \sim 0,1R$ и с учетом порядка амплитуды первой формы колебаний в нелинейном диапазоне возмущений $a_1 \sim 0,3R$ получаем, что равновесная форма ξ_0 в разложении (1) для $\xi(r, \theta, t)$ имеет второй порядок малости. Это означает, во-первых, что в разложении (1) для ξ можно использовать одну и ту же систему координатных функций ψ_i как для случая отсутствия, так и для случая наличия сил поверхностного натяжения, и, во-вторых, нелинейное граничное условие на контуре контакта вырождается и точное

решение задачи о равновесной форме свободной поверхности можно заменить приближенным, полученным на основе линейной модели. В работе [2] равновесная форма свободной поверхности жидкости представлена в виде параболоида вращения $\xi_0 = ar^2 + b$, эллипсоида вращения $\xi_0 = a\sqrt{1-r^2} + b$, а также через функцию Бесселя $\xi_0 = aJ_0(r) + b$. Полученные уравнения равновесной формы подставлены в квадратуры, по которым вычислены коэффициенты $\beta_{ir}^q, \dots, \vec{B}_{rijk}^4$ в уравнениях дискретной модели системы (3) – (4). Вычисленные по этим методикам коэффициенты отличались не более чем на 1%, поэтому качественно результаты вычислительного моделирования для трех методов определения равновесной формы ничем не отличались. Поэтому в дальнейшем, в работе [4] и в настоящем изложении равновесная форма свободной поверхности жидкости была аппроксимирована параболоидом вращения $\xi_0 = ar^2 + b$.

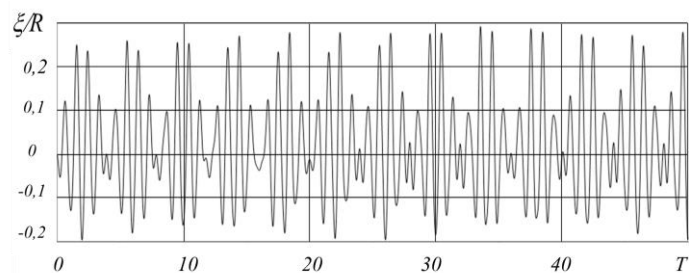


Рис. 7

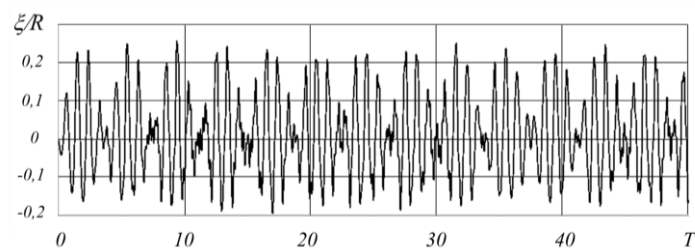


Рис. 8

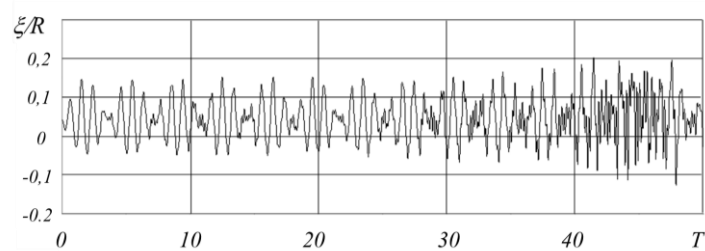


Рис. 9

Для случая колебаний свободной поверхности жидкости в резервуаре в нелинейном диапазоне, когда частота внешней возбуждающей силы F лежит в дорезонансном диапазоне, т.е. $p = \omega_1$, на рис. 7 – 9 приведены графики возмущения амплитуды свободной поверхности жидкости для трех случаев учета сил поверхностного натяжения: отсутствие сил поверхностного натяжения (рис. 7); наличие сил поверхностного натяжения по свободной поверхности жидкости без учета поверхностного натяжения на контуре контакта (рис. 8), наличие сил поверхностного натяжения по свободной поверхности жидкости и на контуре контакта (рис. 9). Как видно из рис. 8, 9, учет сил

поверхностного натяжения приводит к появлению на графиках изломов, причем при уменьшении контактного угла колебания становятся иррегулярными, что является результатом углубления внутренних связей между формами колебаний и усиления влияния (увеличение амплитуд) высших форм колебаний. При отсутствии сил поверхностного натяжения (рис. 7) и при наличии сил поверхностного натяжения только на свободной поверхности жидкости (рис. 8) колебания происходят с существенной амплитудной модуляцией при практически неизменном среднем значении. Однако, при наличии сил поверхностного натяжения по контуру контакта (рис. 9) влияние высших форм колебаний становится настолько существенным, что две доминирующие частоты исчезают, и явление амплитудной модуляции через некоторое время (около 40 периодов) уже более не наблюдается.

В дорезонансном диапазоне внешнего возбуждения движения резервуара только при отсутствии сил поверхностного натяжения система выходит в режим колебаний, близкий к установившемуся (рис. 7, условно установившийся режим). Для такого условно установившегося режима колебаний характерна существенная амплитудная модуляция при практически неизменном среднем значении амплитуд. Учет в системе сил поверхностного натяжения и, особенно, наличия поверхностного натяжения на контуре контакта приводит к заметному увеличению влияния высших форм колебаний и выход даже на условно установившийся режим не происходит (рис. 8, 9).

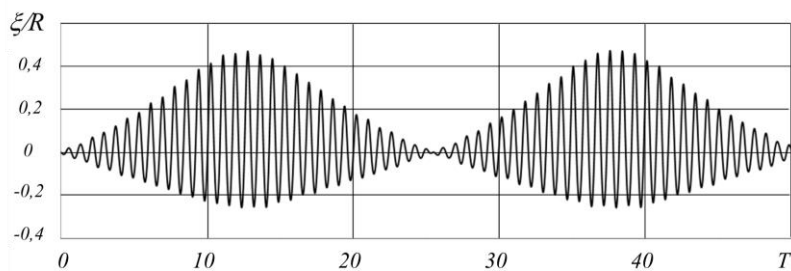


Рис. 10

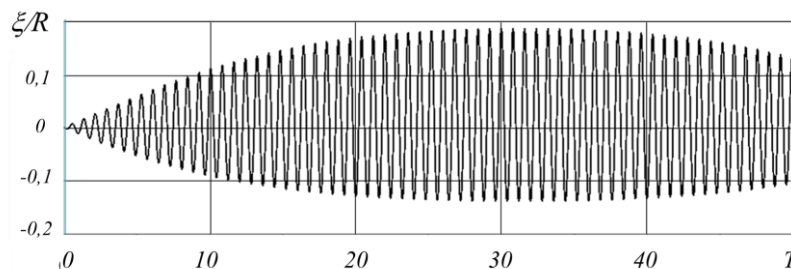


Рис. 11

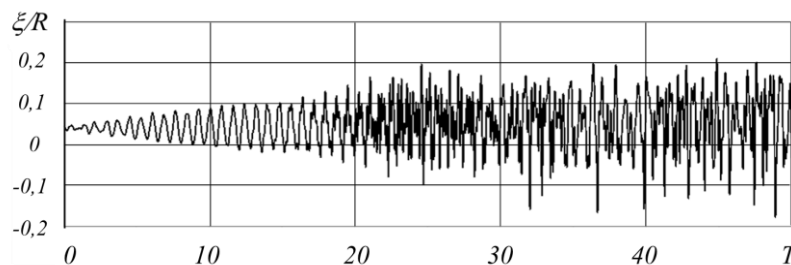


Рис. 12

Развитие нелинейных колебаний свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда частота внешней возбуждающей силы F расположена в малой области в окрестности резонанса, т.е. $p = 1,25\omega_1$, показано на рис. 10 – 12. Как видно из графиков, при отсутствии сил поверхностного натяжения (рис. 10) и при наличии сил поверхностного натяжения по свободной поверхности (рис. 11) колебания происходят с заметной модуляцией, и при этом среднее значение (тренд) очень существенно изменяется во времени. При уменьшении контактного угла (рис. 12) амплитуды высших форм колебаний приближаются по своим величинам к амплитудам двух близких доминирующих частот (собственной и вынужденной), и колебания свободной поверхности начинают носить иррегулярный характер. Кроме того, для колебаний свободной поверхности при отсутствии сил поверхностного натяжения (рис. 10) и при наличии сил поверхностного натяжения по свободной поверхности (рис. 11) характерно явление антирезонанса: амплитуда колебаний свободной поверхности падает до уровня $\xi \approx (0,01 \div 0,015)R$, т.е. уменьшается на порядок на протяжении нескольких периодов колебаний первой антисимметричной формы ψ_1 . При учете сил поверхностного натяжения явление антирезонанса при возбуждении движения системы в дорезонансном и зарезонансном диапазонах не наблюдается.

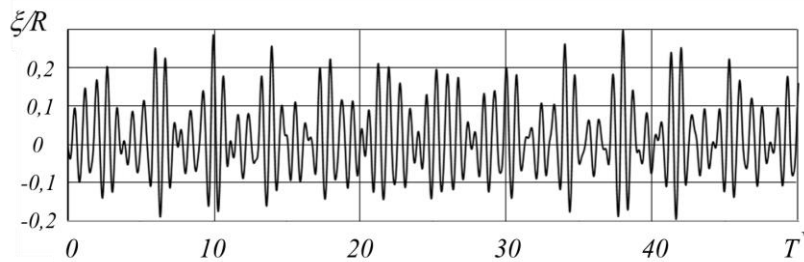


Рис. 13

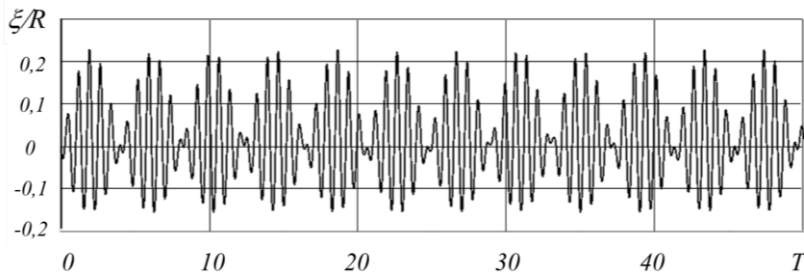


Рис. 14

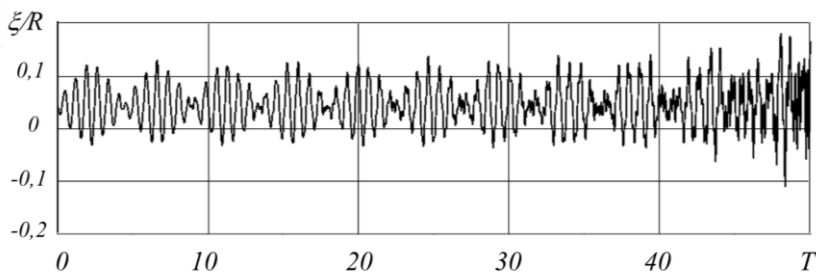


Рис. 15

При возбуждении движения системы в окрестности резонансной частоты выход на режим, близкий к установившемуся, наблюдается при отсутствии сил поверхностного натяжения (рис. 10) и при наличии сил поверхностного натяжения по поверхности жидкости (рис. 11). Уменьшение контактного угла приводит к тому, что колебания приобретают иррегулярный характер, а сам закон колебаний существенно искажается высшими гармониками частотного спектра (рис. 12, присутствие на графике супергармоник и двугорбых пиков). Развитие нелинейных колебаний свободной поверхности жидкости в резервуаре, когда частота внешней возбуждающей силы F находится в зарезонансном диапазоне, т.е. $p = 1,5\omega_1$, показано на рис. 13 – 15. Как видно из рис. 13, колебания свободной поверхности при отсутствии сил поверхностного натяжения происходят с заметной амплитудной модуляцией и изменяющимся во времени средним значением, причем форма амплитудной огибающей существенно искажается влиянием высших форм колебаний.

В отличие от дорезонансного диапазона возбуждения, в котором наличие сил поверхностного натяжения по свободной поверхности приводит к усилению влияния высших форм колебаний (рис. 8), в резонансном и зарезонансном диапазоне возбуждения наличие сил поверхностного натяжения по свободной поверхности приводит к обратному эффекту, т.е. проявление высших форм колебаний практически отсутствует. В спектре колебаний свободной поверхности доминируют две частоты – собственная и вынужденная (рис. 11, 14). Это означает, что силы поверхностного натяжения по свободной поверхности жидкости действуют подобно избирательному фильтру, который подавляет в спектре гармоники на высших и комбинационных частотах и оставляет только гармоники на собственной и вынужденной частотах.

Учет в системе сил поверхностного натяжения по контуру контакта (рис. 15) приводит к иррегулярным колебаниям, когда в спектре проявляются практически все частотные гармоники. Таким образом, в зарезонансном диапазоне возбуждения выход колебаний свободной поверхности даже на условно установившийся режим не происходит – колебания носят характер бесконечного переходного процесса.

Заключение.

Исследована нелинейная динамика совместного движения жидкости со свободной поверхностью и цилиндрического резервуара при действии на резервуар горизонтальной гармонической силы. Для трех диапазонов изменения частоты внешнего силового возбуждения (резонансная, дорезонансная и зарезонансная частоты) произведен анализ поведения системы и изучена возможность выхода системы на режим установившихся колебаний с учетом реальных свойств жидкости. Изучено влияние обобщенной диссипации в жидкости и сил поверхностного натяжения в условиях слабой гравитации на резонансные свойства системы. Показано, что в отличие от идеальной некапиллярной жидкости частично меняется проявление эффектов модуляции колебаний, наличия дрейфа среднего значения, вклада высших гармоник спектра и проявления антирезонанса.

В целом проведенное исследование показало, что классический выход системы на установившийся режим колебаний вообще не происходит. Только при наличии обобщенной диссипации, увеличенной по сравнению с расчетной на порядок (далекий от практики вариант), колебания свободной поверхности жидкости в дорезонансном и резонансном диапазонах возбуждения выходили на условно установившийся режим. Показано, что в отличие от большинства работ по исследованию резонансных явлений при заданном движении несущего тела, существенные отличия в развитии резонансных процессов проявляются при изменении частоты возбуждения в дорезонансной, околорезонансной и зарезонансной зонах.

РЕЗЮМЕ Досліджено нелінійні коливання механічної системи «циліндричний резервуар – рідина з вільною поверхнею» під дією горизонтальної сили, яка змінюється за гармонічним законом. Процес утворення хвиль на вільній поверхні вивчено на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує сумісний рух резервуара та рідини під дією активних зовнішніх сил. Як додатковий фактор, що впливає на нелінійну динаміку системи, враховано гравітаційно-капілярні та

дисипативні ефекти. На основі проведених досліджень показано, що вихід системи в класичному сенсі на усталений режим коливань взагалі не відбувається, що підтверджується експериментальними результатами. Вказано ступінь впливу поверхневого натягу і дисипації на білярезонансний режим коливань системи.

1. Бабський В.Г., Копачевський Н.Д., Мьшикус А.Д. и др. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
2. Константінов О.В. Вплив сил поверхневого натягу на нелінійну динаміку системи резервуар-рідина в слабкому гравітаційному полі // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – К.: Ін-т математики НАН України, 2006. – 3. – № 4. – С. 198 – 213.
3. Лимарченко О.С., Губська В.В. Задача про вимушені нелінійні коливання резервуару у формі усіченого конуса, частково заповненого рідиною // Вісник Київського нац. ун-та ім. Тараса Шевченка. – 2012. – 1, № 4. – С. 73 – 76.
4. Лимарченко О.С., Ясинський В.В. Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — К.: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
5. Микшиев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
6. Abramson H. (Ed.). The dynamic behavior of liquid in moving container. – Washington: NASA SP-106, 1966. – 467 p.
7. Faltinsen O.M., Rognebakke O.M., Timokha A.N. Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth // Physics of Fluids. – 2006. – 1, N 18. – P. 1–14.
8. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // J. Fluid Mech. – 1994. – 275. – P. 285 – 299.
9. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 950 p.
10. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Modeling the Nonlinear Interaction of Standing and Traveling Bending Waves in Fluid-Filled Cylindrical Shells Subject to Internal Resonances // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 4. – P. 353 – 364.
11. Kubenko V.D., Koval'chuk P.S. Stability and Nonlinear Vibrations of Closed Cylindrical Shells Interacting with a Fluid Flow (Review) // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 1. – P. 12 – 63.
12. La Rocca M., Sciortino G., Adduce C., Boniforti M. A. Experimental and theoretical investigation on the sloshing of a two-liquid system with free surface // Physics of Fluids. – 2005. – 17, 062101 – P. 1 – 17.
13. Limarchenko O.S., Semenova I.Yu. Nonlinear Wave Generation on a Fluid in a Moving Parabolic Tank // Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N 8. – P. 864 – 868.
14. Miles J. Capillary-viscous forcing of surface waves // J. Fluid Mech. – 1980. – 219. – P. 635 – 646.
15. Pal P. Sloshing of liquid in partially filled container – an experimental study // Int. J. of Recent Trends in Engineering. – 2009. – 1, N 6. — P. 1 – 5.

Поступила 28.12.2015

Утверждена в печать 05.07.2016