

В. Б. Рудницкий, Н. Н. Дихтярук

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ  
БЕСКОНЕЧНОГО СТРИНГЕРА И ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ПОЛОС  
С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ**

*Хмельницкий национальный университет,  
ул. Институтская, 11, 29016, г. Хмельницкий, Украина; e-mail: massacran2@ukr.net*

**Abstract.** A solution of the plane contact problem on transition of a horizontal concentrated load from a infinite in both directions stringer to two compressed in one end identical strips with initial stresses is obtained. The study is carried out in the general form for the theory of large initial strains and different variants of the theory of small initial strains under the arbitrary structure of elastic potential. The problem on the normal and tangential contact stresses is reduced to the problem of solving the integro-differential equations that is obtained by use of Fourier integral transform. As a result, the contact stresses are represented by the Fourier integrals. It is shown that the initial stresses in strips effect essentially on the law of distribution of contact stresses: the contact stresses are decreased significantly under compression and increased under tension, whereas the displacements are increased significantly under compression and decreased under tension. The initial stresses effect more for the high-elastic materials and less for the stiff ones both quantitatively and qualitatively.

**Key words:** plane contact problem, system “strip-stringer-strip”, linearized theory of elasticity, initial (residual) stress, initial displacement.

**Введение.**

Одним из факторов, оказывающим существенное влияние на надежность и долговечность инженерных сооружений, механических конструкций и деталей машин, является наличие в них начальных (остаточных) напряжений. В связи с этим исследование контактного взаимодействия упругих тел с начальными напряжениями не перестаёт быть актуальным и в настоящее время [12, 13]. Можно указать много публикаций которые тесно связаны со статическими задачами классической теории упругости и проблематикой данной статьи. Отметим, что многие из них тесно примыкают к классической работе Е. Мелана [14]. Уникальность и важность работы [14] состоит в том, что в ней рассмотрены фундаментальные задачи для полуплоскости и полосы. Аналогичные задачи для полуплоскости с начальными напряжениями исследованы в монографии А.Н. Гузя [1].

Исследования контактного взаимодействия предварительно напряжённой полуплоскости и накладок представлены в работах [2, 6, 8]. Влияние начальных напряжений, присутствующих в упругой полосе, на контактное взаимодействие с упругими накладками исследовано в работах [3 – 5]. Продолжая исследования в этом направлении, в данной работе изучено контактное взаимодействие бесконечного стрингера не с одной, а с двумя предварительно напряжёнными полосами.

**§1. Постановка задачи. Основные соотношения.**

В данной работе в рамках линеаризированной теории упругости [1, 15, 16] изложены постановка и решение задачи о передаче нагрузки от бесконечного стрингера к двум одинаковым полосам с начальными напряжениями. Принято, что бесконечные упругие полосы изготовлены из одинаковых сжимающихся (или несжимающихся) материалов с потенциалом произвольной структуры. В данных полосах действуют одинаковые начальные или остаточные напряжения. Предполагается также, что полосы

толщины  $t = \text{const}$  по краям зашпелены и находятся в условиях плоской деформации. Примем также, что они соединены между собой бесконечным упругим стрингером с модулем упругости материала  $E_1$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_1$ . Усиленные таким образом полосы с начальными напряжениями загружены горизонтальной силой  $Q_0\delta(y_1)$ , которая приложена в средней точке стрингера (здесь  $\delta(y_1)$  – известная единичная дельта функция Дирака). Исследование рассматриваемой задачи проведем в координатах начального деформированного состояния (рис. 1).

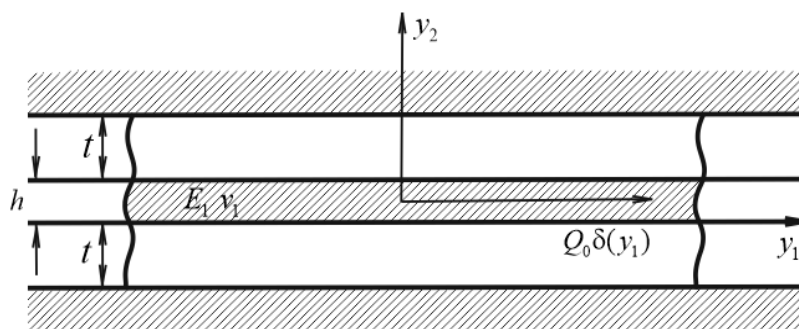


Рис. 1

Необходимо определить закон распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения стрингера с предварительно напряженными полосами. При рассмотрении данной задачи с учётом работ [2, 15, 16] также предполагаем, что взаимодействие происходит при выполнении известных четырех положений 1 – 4, которые являются основными в теории контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями. Кроме того, принимаем, что под действием приложенной нагрузки и только тангенциальных контактных напряжений, стрингер растягивается или сжимается как стержень (находится в одноосном напряженном состоянии [8, 14]). Предполагаем также, что вдоль горизонтальной оси вертикальные упругие перемещения постоянны, что обусловлено малой толщиной стрингера. Обозначим интенсивности нормальных и тангенциальных контактных напряжений как  $p(y_1)$  и  $q(y_1)$ , а вертикальные и горизонтальные перемещения стрингера, соответственно  $v^{(1)}(y_1)$  и  $u^{(1)}(y_1)$ . Тогда можно записать такие равенства:

$$\frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{1}{E_1 h} \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0\delta(t)] dt \quad (-\infty < y_1 < \infty); \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = 0 \quad \forall y_1 \in (-\infty < y_1 < \infty). \quad (1.2)$$

При условии полного контакта по линии контакта должны выполняться условия:

$$\frac{\partial v^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_2^{(2)}(y_1)}{\partial y_1}; \quad \frac{\partial u^{(1)}(y_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial u_1^{(2)}(y_1)}{\partial y_1} \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (1.3)$$

Здесь  $u^{(1)}(y_1)$ ,  $v^{(1)}(y_1)$  – компоненты вектора перемещений в упругом стрингере;  $u_1^{(2)}(y_1)$ ,  $u_2^{(2)}(y_1)$  – компоненты вектора перемещений в упругих полосах с начальными напряжениями. Если учесть контактные условия (1.3) вместе с условиями перемещения точек стрингера (1.1), (1.2), тогда выражения для вертикальных и горизонтальных перемещений граничных точек грани полосы  $y_1 = 0$ , свободных от зашпеления, согласно [3 – 5] принимают вид

$$\begin{aligned}
u_1(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt; \\
u_2(y_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

**§2. Сведение задачи к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.**

Приняв во внимание (1.1) – (1.4) относительно неизвестных контактных напряжений  $p(t)$ ,  $q(t)$ , опустив преобразования, получим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dy_1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_{11}(|y_1 - t|) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{12}(y_1 - t) q(t) dt \right] &= 0; \\
\frac{d}{dy_1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h_{21}(y_1 - t) p(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} h_{22}(|y_1 - t|) q(t) dt \right] &= \int_{-\infty}^{y_1} [2q(t) - Q_0 \delta(t)] dt,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – функции влияния для упругой полосы с начальными напряжениями, выражения которых задаются [3 – 5] и, соответственно, имеют вид в зависимости от вида нагрузки:

от действия единичной нормальной силы – для равных корней определяющего уравнения [1]  $n_1 = n_2$  :

$$h_{11}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{12}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha; \tag{2.2}$$

– для неравных корней  $n_1 \neq n_2$  :

$$h_{11}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{11}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad h_{12}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{12}(\alpha) \sin \alpha y_1 d\alpha. \tag{2.3}$$

Здесь  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – функции влияния, которые характеризуют перемещения предельных точек свободной от защемления грани бесконечной упругой полосы с начальными напряжениями от единичной нормальной силы. Ядра  $H_{ij}(\alpha)$  и  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ , соответственно, для равных и неравных корней  $n_i$  имеют такой вид:

$$H_{11}(\alpha) = H_1(\alpha, 0) = n_0 \left[ s_0 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 + s_1 s_0 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) + (\alpha \varphi_1)^2 - \bar{s}_1 \xi(\alpha) + \varphi_1 \right] \Delta_1^{-1}(\alpha); \tag{2.4}$$

$$H_{12}(\alpha) = H_2(\alpha, 0) = i \frac{m_1 n_0}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s_1 \xi(\alpha) - s_0 (\alpha \varphi_1) - \bar{s}_1 s_1 \xi(\alpha) + s_1 (\alpha \varphi_1) \right] \Delta_1^{-1}(\alpha);$$

$$\begin{aligned}
H_{11}(\alpha) = \tilde{H}_1(\alpha, 0) &= n_0 \left[ -s_1 \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 + s_0 \xi_1(\alpha) - s_1 s_0 (\alpha \varphi_1) \xi_1(\alpha) + s_0 (\alpha \varphi_1)^2 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \right. \\
&\quad \left. - s_0 \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 + s_1 \xi_1(\alpha) + \alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) \right] \times \Delta_2^{-1}(\alpha);
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$H_{12}(\alpha) = \tilde{H}_2(\alpha, 0) = i \frac{n_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s_0 s_1 \xi_3(\alpha) - s_0 (\alpha \varphi_1) \xi_1(\alpha) + s_1 (\alpha \varphi_1) \xi(\alpha) - s_1 \xi_1(\alpha) \right] \times \Delta_2^{-1}(\alpha).$$

Запишем функции влияния для упругой полосы с начальными напряжениями от действия единичной тангенциальной силы; для равных корней  $n_1 = n_2$  :

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{21}(\alpha) \sin(\alpha) y_1 d\alpha; \quad h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha; \quad (2.6)$$

для неравных корней  $n_1 \neq n_2$  :

$$h_{21}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{21}(\alpha) \sin(\alpha) y_1 d\alpha; \quad h_{22}(y_1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{H}_{22}(\alpha) \cos \alpha y_1 d\alpha. \quad (2.7)$$

Ядра  $H_{ij}(\alpha)$  и  $\tilde{H}_{ij}(\alpha)$ , соответственно, имеют вид

для  $n_1 = n_2$

$$\begin{aligned} H_{21}(\alpha) &= m_0 \left[ -(s+1)(s_1 \xi(\alpha) - \alpha \varphi_1) + \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s \right] = \\ &= m_0 \left[ -(s+1)(s_1 \text{sh} \alpha \varphi_1 \text{ch} \alpha \varphi_1 - \alpha \varphi_1) + \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 - s_1 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - s \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$H_{22}(\alpha) = i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ s \cdot s_1 \text{ch}^2 \alpha \varphi_1 + (\alpha \varphi_1)^2 - \alpha \varphi_1 \xi(\alpha) - s_1^2 \text{sh}^2(\alpha \varphi_1) - s \cdot s_1 \right] \cdot \Delta_1^{-1}(\alpha);$$

для  $n_1 \neq n_2$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{21}(\alpha) &= m_0 \left[ -s s_1 (\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) - s \xi_3(\alpha) + s (\alpha \varphi_1) \xi_2(\alpha) + \xi_3(\alpha) \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha); \\ \tilde{H}_{22}(\alpha) &= i \frac{m_0 m_1}{\sqrt{n_1}} \left[ 1 - s_1 \text{ch}(2\alpha \varphi_2) + s s_1 \xi_1(\alpha) + s \alpha \varphi_1 \xi_4(\alpha) + s s_1 (\alpha \varphi_1)^2 \text{sh}^2 \alpha \varphi_1 - \right. \\ &\quad \left. - s s_1 \text{ch}^2 \alpha \varphi_{21} - s_1^2 (\alpha \varphi_1) \xi_4(\alpha) + \xi_3(\alpha) \right] \cdot \Delta_2^{-1}(\alpha). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Отметим, что имеют место такие асимптотические формулы:

при  $\alpha \rightarrow 0$

$$H_{11}(\alpha) = \tilde{H}_{11}(\alpha) = 0(1); \quad H_{12}(\alpha) = \tilde{H}_{12}(\alpha) = 0(\alpha); \quad H_{22}(\alpha) = \tilde{H}_{22}(\alpha) = 0(1);$$

при  $\alpha \rightarrow \infty$

$$H_{11}(\alpha) = \tilde{H}_{11}(\alpha) = 0\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad H_{12}(\alpha) = \tilde{H}_{12}(\alpha) = 0\left(\frac{1}{\alpha}\right); \quad H_{22} = \tilde{H}_{22}(\alpha) = 0\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (2.10)$$

### §3. О решении систем разрешающих уравнений.

Умножив первое и второе уравнения системы (2.1) на  $e^{-i\alpha y_1}$  и проинтегрировав, применив теорему о свёртке, после элементарных преобразований получим систему алгебраических уравнений относительно трансформант Фурье  $\tilde{p}(\alpha)$  и  $\tilde{q}(\alpha)$  :

$$H_{11}(\alpha) \tilde{p}(\alpha) - i H_{12}(\alpha) \tilde{q}(\alpha) = 0; \quad E_1 t_0 \alpha^2 i H_{21}(\alpha) - \left[ E_1 t_0 \alpha^2 H_{22}(\alpha) + 2 \right] \tilde{q}(\alpha) = Q_0 \quad (3.1)$$

(здесь введены такие обозначения:

$$\tilde{p}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1) e^{i\alpha y_1} dy_1; \quad \tilde{q}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(y_1) e^{i\alpha y_1} dy_1. \quad (3.2)$$

Функции  $\tilde{p}(\alpha)$ ,  $\tilde{q}(\alpha)$  – суть трансформанты Фурье от функций  $F[p(y_1)]$  и  $F[q(y_1)]$  и являются контактными напряжениями по линии контакта упругого стрингера и полос с начальными напряжениями;  $Q_0$  – внешняя горизонтальная нагрузка; функции  $H_{ij}$  ( $i=1,2$ ), соответственно, для равных и неравных корней определяющего уравнения [1] задаются формулами (2.8), (2.9).

Для определения трансформант  $\tilde{p}(\alpha)$  и  $\tilde{q}(\alpha)$  запишем определители системы (3.1):

$$H^*(\alpha) = \begin{vmatrix} H_{11}(\alpha) & -iH_{12}(\alpha) \\ 0 & E_1 t_0 \alpha^2 H_{22}(\alpha) + 2 \end{vmatrix} = H_{11}(\alpha) [E_1 t_0 \alpha^2 H_{22}(\alpha) + 2] = H_{11}^*(\alpha) H_{22}^*(\alpha); \quad (3.3)$$

$$\Delta_1^*(\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & -iH_{12}(\alpha) \\ E_1 t_0 \alpha^2 iH_{21}(\alpha) - Q_0 & E_1 t_0 \alpha^2 H_{22}(\alpha) + 2 \end{vmatrix} = H_{21}^*(\alpha) \cdot H_{12}^*(\alpha);$$

$$\Delta_2^*(\alpha) = \begin{vmatrix} H_{11}(\alpha) & 0 \\ 0 & E_1 t_0 \alpha^2 iH_{21}(\alpha) - Q_0 \end{vmatrix} = H_{11}^*(\alpha) H_{21}^*(\alpha). \quad (3.4)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} H_{11}^*(\alpha) &= H_{11}(\alpha); \quad H_{12}^*(\alpha) = -iH_{12}(\alpha); \quad H_{21}^*(\alpha) = E_1 t_0 \alpha^2 iH_{21}(\alpha) - Q_0; \\ H_{22}^*(\alpha) &= E_1 t_0 \alpha^2 H_{22}(\alpha) + 2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Применив формулы Крамера и обратное преобразование Фурье, получим решение системы интегро-дифференциальных уравнений (2.1). Это решение даёт выражения для искомых контактных напряжений в виде

$$p(y_1) = \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^\infty \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \sin \alpha y_1 d\alpha; \quad q(y_1) = \frac{Q_0}{\pi} \mu \int_0^\infty \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \cos \alpha y_1 d\alpha. \quad (3.6)$$

Здесь величины  $H_i^*$ ,  $H_{ij}^*$  ( $i, j=1,2$ ) выражаются через известные функции  $H_{ij}$  ( $i, j=1,2$ ), которые определяются согласно формулам (2.8), (2.9) для равных и неравных корней определяющего уравнения [1], в случае конкретной структуры упругих потенциалов.

Исследуем на сходимость несобственные интегралы [7, 9], которые входят в формулы (3.6). Приняв во внимание значение  $H_{ij}^*(\alpha)$  (3.5) и значение  $H_{ij}(\alpha)$  (2.8), (2.9), а также асимптотические формулы для  $H_{ij}(\alpha)$  (2.10), опуская громоздкие элементарные преобразования, получим следующие асимптотические выражения:

$$\text{при } \alpha \rightarrow 0 \quad \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \sim 0(\alpha); \quad (3.7)$$

$$\text{при } \alpha \rightarrow \infty \quad \frac{H_{12}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \sim 0(\alpha^{-1}). \quad (3.8)$$

Из асимптот (3.7), (3.8) следует, что в (3.6) второй интеграл, который выражает закон распределения нормальных контактных напряжений, достаточно быстро сходится. Относительно первого интеграла  $\int_0^\infty \left[ \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \right] \cos \alpha y_1 d\alpha$ , который выражает закон распределения тангенциальных контактных напряжений, отметим, что его сходимость можно ускорить, представив  $(H_{11}^*(\alpha))/H^*(\alpha)$  в таком виде:

$$\frac{H_{11}^*}{H^*(\alpha)} \approx \frac{C_2}{c_2 + \alpha} + 0(\ell^{-2t\alpha}) \quad (t > 0) \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty; \quad (3.9)$$

здесь  $C_2$  и  $c_2$  – константы, которые существенным образом зависят от значения корневой определяющей уравнения [1], конкретной формы упругого потенциала и определяются из формул [2, 15, 16] и для конкретных сжимаемых и несжимаемых конструкционных материалов. Из непрерывности контактных касательных напряжений, учитывая толщину упругого стрингера  $h$  и упругие константы материала  $\lambda$  и  $\mu$ , из которого изготовлен упругий стрингер, константу  $C_2$  можно представить в виде

$$C_2 = \frac{2c + 1}{E_1 t_0 (c + 1)}; \quad c = \frac{\lambda + \mu}{2\mu} \quad (c_2 = 2\mu C_2). \quad (3.10)$$

Если принять во внимание (3.9) и (3.10), произведя преобразования, получим

$$\int_0^\infty \frac{H_{11}^*(\alpha)}{H^*(\alpha)} \cos \alpha y_1 d\alpha = -C_2 (\cos c_2 y_1 \text{ci} c_2 y_1 + \sin c_2 y_1 \text{si} c_2 y_1 + \int_0^\infty \left[ \frac{(c_2 + \alpha)H_{11}^*(\alpha) - C_2 H^*(\alpha)}{(c_2 + \alpha)H^*(\alpha)} \right] \cos \alpha y_1 d\alpha, \quad (3.11)$$

где  $\text{si}(c_2 y_1) = -\int_{c_2 y_1}^\infty \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$ ;  $\text{ci}(c_2 y_1) = -\int_{c_2 y_1}^\infty \frac{\cos \alpha}{\alpha} d\alpha$  (это, соответственно, интегральный синус и косинус). Теперь интеграл, фигурирующий в правой части (3.11), с учетом (3.9) достаточно быстро сходится [7, 8, 10], так как

$$\frac{(c_2 + \alpha)H_{11}^*(\alpha) - C_2 H^*(\alpha)}{(c_2 + \alpha)H^*(\alpha)} \sim 0(\alpha) \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Следовательно, приняв во внимание (3.11), для контактных касательных напряжений (3.6) от действия горизонтальной внешней силы  $Q_0 \delta(y_1)$  получим равенство

$$q(y_1) = -\frac{Q_0}{2\pi} \left[ c_2 (\cos c_2 y_1 \text{ci}(c_2 y_1) + \sin c_2 y_1 \text{si}(c_2 y_1)) - \int_0^\infty \frac{2\mu(c_2 + \alpha)H_{11}^*(\alpha) - c_2 H^*(\alpha)}{(c_2 + \alpha)H^*(\alpha)} \cos \alpha y_1 d\alpha \right] \quad (-\infty < y_1 < \infty). \quad (3.13)$$

В последней формуле первым числом с точностью до константы имеем известное решение Мелана [14].

На основании формулы (3.13) выполнен численный анализ [10, 11], результаты которого представлены на графиках (рис. 2, 3). На графиках показано распределение контактных усилий под накладкой для двух потенциалов простейшей структуры: гармонического потенциала (рис. 2) и потенциала Бартенева – Хазановича (рис. 3). Здесь  $h(q(t))/Q$  – безразмерные контактные тангенциальные напряжения. Значение  $\lambda_1 = 1$  (на графиках пунктирная линия) – соответствует классической теории упругости и совпадает с результатами работы [7];  $\lambda_1 = 0,7; 0,8; 0,9$  – соответствует начальным напряжениям сжатия;  $\lambda_1 = 1,1; 1,2; 1,3$  соответствует начальным напряжениям растяжения;  $t$  – безразмерная координата начального напряжённого состояния в упругих полосах с начальными напряжениями.

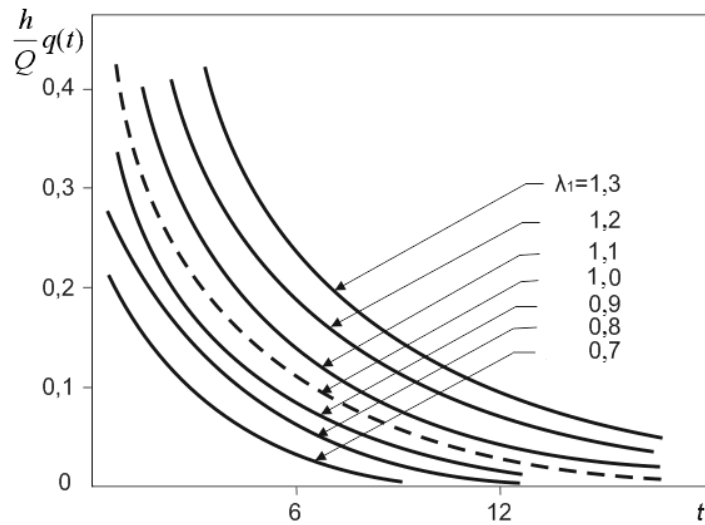


Рис. 2

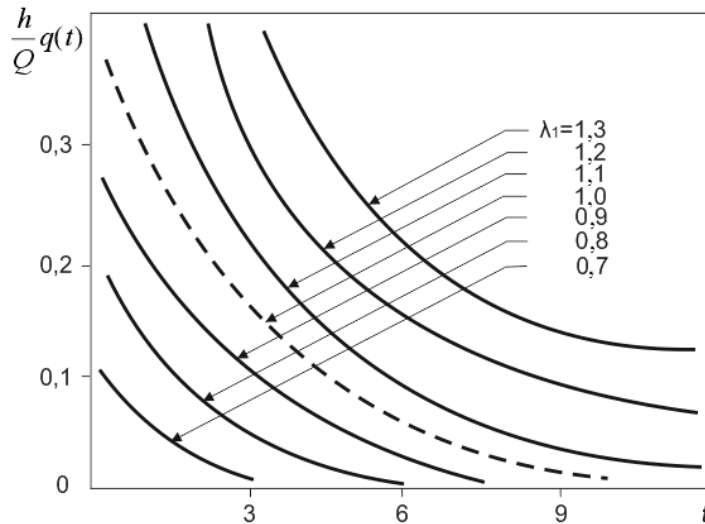


Рис. 3

### Заключение.

В рамках линеаризированной теории упругости получено решение плоской задачи о передаче горизонтальной сосредоточенной нагрузки от бесконечного в двух направлениях стрингера к двум защемлённым по одному краю одинаковым полосам с начальными напряжениями. Исследования проведены в общем виде для теории больших начальных деформаций и разных вариантов теории малых начальных деформаций при произвольной структуре упругого потенциала. Решение задачи сведено относительно нормальных и тангенциальных контактных напряжений к системе интегро-дифференциальных уравнений, которая строится при помощи интегрального преобразования Фурье. В конечном итоге контактные напряжения представлены в виде интегралов Фурье.

Начальные напряжения в упругих полосках приводят к существенному изменению закона распределения контактных напряжений, при этом в случае сжатия контактные напряжения значительно уменьшаются (в случае растяжения – увеличиваются), а перемещения в случае сжатия значительно возрастают (при растяжении – уменьшаются). Более существенное влияние (количественного характера) начальные (остаточные) напряжения оказывают в высокоэластичных материалах по сравнению с более жесткими материалами; качественное влияние имеет идентичный характер.

РЕЗЮМЕ. В рамках лінеаризованої теорії пружності отримано розв'язок плоскої контактної задачі про передачу горизонтального зосередженого навантаження від нескінченного в обох напрямках стрингера до двох затиснених по одному краю однакових смуг з початковими напруженнями. Дослідження проведено в загальному вигляді для теорії великих початкових деформацій та різних варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу. Розв'язок задачі відносно нормальних і тангенціальних контактних напружень зведено до системи інтегродиференціальних рівнянь, яку отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. В кінцевому результаті контактні напруження представлено у вигляді інтегралів Фур'є. Початкові напруження в пружних смугах істотно впливають на закон розподілу контактних напружень: при стиску контактні напруження значно зменшуються (при розтягу – збільшуються), а переміщення при стиску значно зростають (при розтягу – зменшуються). Більш істотний вплив початкові напруження мають у високоеластичних матеріалах в порівнянні з жорсткішими матеріалами; якісний вплив має аналогічний характер.

1. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія тіл з початковими напруженнями. К.: Вища шк., 1995. – 305 с.
3. Діхтярук М.М. Визначення функції впливу для пружної смуги з початковими (залишковими) напруженнями. Пр. 4-го Міжнародного симпозіуму з трибофатики (ISTF), 23 – 27 вересня 2002 р. Тернопіль (Україна) / Відп.ред. В.Т.Трощенко. – Тернопіль: Терноп. держ. техн. ун-т ім. Івана Пулюя, 2002. – С. 426 – 431.
4. Діхтярук Н.Н. О равновесии полосы с начальными напряжениями, усиленной упругими накладками. // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3, С. 63 – 70.
5. Рудницький В.Б., Діхтярук Н.Н. Упругая полоса с начальными напряжениями, усиленная упругими накладками. Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 11, – С. 81 – 88.
6. Рудницький В.Б. Контактное взаимодействие полуплоскости с начальными напряжениями и упругой накладкой / Тез. докл. II Всесоюз. науч. техн. с. по неклассическим проблемам механики композиционных материалов и конструкций из них. – К., 1984. – С. 92.
7. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд. Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
8. Akopyan V.N., Mirzoyan S.A., Mkhitarjan S. M. The Problem of the Contact Between a Broken Stringer and an Elastic Infinite Strip Containing a Vertical Edge Crack // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 2. – P. 176 – 186.
9. Aleksandrov V.M. Optimal control of linear systems with interval constraints // Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 55:5 (2015). – P. 758 – 775.
10. Bosakov S.V. Finite Integral Transform Method in Static Problems for Inhomogeneous Plates // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 6. – P. 651– 663.
11. Guz A.N. Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231– 252.
12. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
13. Guz A.N. Recognition of the Achievements of the S. P. Timoshenko Institute of Mechanics by the World's Scientific Community // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 1. – P. 1– 11.
14. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweiss der Verbindungen // Ingenieur Archiv. – 1932. – **3**, N 2. – S. 126 – 128.
15. Yaretskaya N.A. Three-Dimensional Contact Problem for an Elastic Layer and a Cylindrical Punch with Prestresses // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 4. – P. 378 – 388.
16. Yaretskaya N.A. The impact of the initial (residual) stresses on the contact interaction of elastic cylindrical punch and an elastic layer // Bulletin of NAS of Ukraine. – 2014. – N 1. – P. 57 – 62.

Поступила 27.12.2015

Утверждена в печать 29.11.2016