

Б. Н. Кифоренко

**СИНГУЛЯРНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ
ДВИЖЕНИЕМ РАКЕТ (ОБЗОР)**

*Институт механики им. С.П Тимошенко НАНУ,
ул. П. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: bkifor@ukr.net*

Abstract. A review of investigations of the dynamical systems control problems is presented with emphasis on mechanics of space flight. The main attention is drawn to perfecting the methods of solving the degenerate variational problems on motion of rockets in the gravitational fields with allowance for the atmospheric resistance. These problems are immediately associated with the permanently actual problem of the practical astronautics – increasing the mass of useful load that is orbited by the carrier rockets in the circumplanetary orbits. An analysis is given for the modern approaches to solving the problems of control of rockets and spacecrafts motion over the trajectories with singular arcs that are optimal for motion of the variable mass body in the medium with resistance. The presented in this review results of some practical problems enable to estimate an advantage of using the optimal control, realization of which needs the complication of the optimal control system of the rocket engines functioning in comparison with the recent simpler laws of control.

Key words: space flight mechanics, degenerate variation problems, optimum control trajectories, singular arcs, launch vehicle engines efficiency.

Введение.

Оценивая в начале третьего тысячелетия научно-технические достижения человечества, необходимо признать начало практического освоения космического пространства одним из наиболее впечатляющих и вместе с тем неожиданных свершений прошлого века. Преклонение перед дерзкими идеями провозвестников космической эпохи К. Э. Циолковского, Ф. А. Цандера, Ю.В. Кондратьюка, Р. Годдарда, Г. Оберта, В. Гомана, Р. Эно-Пельтри и гениальными достижениями практиков Вернера фон Брауна и С.П. Королева, которого «можно считать самым талантливым учеником заочной школы фон Брауна» [21, с. 146], ни в малейшей степени не снижает остроты проблемы оценки оправданности и своевременности тех поистине баснословных затрат, которые произведены космическими державами для обеспечения современного уровня космической деятельности. Следует признать, что неизбежный выход «из колыбели» (К. Э. Циолковский) цивилизация Третьей планеты Солнечной системы вынуждена была сделать в связи с негативными особенностями своего исторического развития: в связи с драматическим отставанием социально-этического совершенствования участников исторического процесса от экспоненциально ускоряющегося технического прогресса. Выпущенный для устрашения потенциального противника в борьбе за мировое господство джинн космической экспансии начал, однако, довольно скоро вносить все более весомый вклад в решение насущных проблем человечества. Одним из важнейших результатов появления в околоземном пространстве Спутника 1 стало осознание открытости всего, что происходит на поверхности планеты, для наблюдения из космоса. Ощущение невозможности изолироваться от остального мира привычными доселе границами стимулировало понимание актуальности поиска совершенно новых подходов к проблеме сохранения жизни на планете с учетом глобальности экологических, экономических и социальных ее аспектов. Подробный анализ состояния прикладных проблем современной космонавтики представлен в докладе [49] и в работах [63, 124].

В обзоре [93] дан краткий анализ проблем механики космического полета и обсуждается их связь с другими отраслями науки и современной техники. Основное отличие механики космического полета от классической аэродинамики – необходимость учета сил тяги двигателей космических аппаратов (КА). Еще один источник усложнения проблем механики космического полета – сложность структуры КА, ее отличие от абсолютно твердого тела: наличие емкостей, заполненных жидкостью, заметная гибкость конструкции (в связи с наличием солнечных батарей, например), сложность больших комбинированных многомодульных комплексов типа международной космической станции (МКС), наличие тросового соединения элементов. Из перечисленных в обзоре [93] проблем механики космического полета и практической космонавтики наиболее актуальными в настоящее время следует признать исследования Земли из космоса, связанные с проблемами экологии и энергообеспечения планеты, создание и обеспечение эффективного функционирования системы защиты планеты от астероидной опасности [26, 54, 66, 111], исследование астероидов, ядер комет и спутников планет с посадкой на их поверхность и доставкой на Землю образцов грунта [56, 123], освобождение околоземного космического пространства от космического мусора [17 – 19], исследование космического пространства за пределами Солнечной системы [83].

В обзорной работе [100] приведен анализ современного представления о программах исследования Луны и Марса в 21 столетии, с целью предложить политикам, принимающим ключевые решения, научно обоснованную информацию о том, когда, как и почему каждый из пунктов программы исследований должен выполняться. Проблема организации первых пилотируемых экспедиций к Марсу из разряда гипотетических перешла в стадию практического планирования [63, 100, 126]. В том, что Марс является убедительной астробиологической целью, ни у кого не вызывает сомнений. Однако только лишь научное исследование, само по себе, не может оправдать необычайно высокий риск для участников пилотируемой экспедиции. Не менее значимыми факторами, оправдывающими ее проведение, являются мощные импульсы процесса подготовки к этой экспедиции в образование и экономику [87] в связи с потребностью развития новых критически необходимых научных и инженерных дисциплин. Поскольку решение о подготовке пилотируемой миссии на Марс является политическим, образовательные и экономические преимущества становятся при этом решающими факторами, что отмечено в этой работе.

Исследуются различные аспекты комплексной проблемы планирования экспедиции. Предлагаются различные варианты ее реализации [46, 56, 100, 101]. Среди предложенных нестандартных схем следует отметить идею постоянно перемещающегося между Землей и Марсом транспортного аппарата с использованием гравитационных полей планет для перехода с подлетной к планете траектории на отлетную без включения ракетных двигателей [112, 113]. При этом основной межпланетный транспортный аппарат запускается с околоземной монтажной орбиты только один раз и обеспечивает «бесплатное сообщение» между планетами в течение длительного срока.

Оценивается эффективность использования различных типов двигательных систем [1, 78, 86, 117]. Предпочтение отдается перспективным двигателям, способным обеспечить минимизацию, при прочих равных условиях, времени пребывания экипажа под воздействием космической радиации [86, 91]. Оценки предполагаемой продолжительности перелета к Марсу колеблются от реалистических – порядка 180 суток, до 39 суток [92]. Последняя – по современным представлениям – вряд ли реализуема в обозримом будущем [127]. Осуществление марсианской экспедиции, создание постоянной базы на Луне, разработка системы противоастероидной защиты Земли, рынок спутниковых услуг, который диктуют стабильное увеличение массы спутников и ужесточение требований к их живучести, приведет, по-видимому, к разработке семейства новых или усовершенствованных двигателей с расширенными возможностями, при этом более простых в использовании и производстве.

В настоящем обзоре проведен анализ результатов исследования оптимизационных задач механики полета ракет и космических аппаратов, имеющих непосредственное отношение к перечисленным проблемам современной и перспективной практиче-

ской космонавтики. Выбор как круга обсуждаемых проблем, так и цитируемых работ других авторов, определяется, естественно, интересами автора. Хотя теоретические исследования в прикладных науках, как правило, непосредственно стимулируются запросами практики, относительная самостоятельность развития науки нередко приводит к получению результатов намного ранее времени их практического осуществления. Иногда ранее полученные результаты повторяются позднее и приоритет первооткрывателей часто остается утерянным. Для практики этот нюанс, возможно, не столь существенен. К сожалению вновь «открытые» результаты иногда оказываются ошибочными (см. напр. [76], комментарий в §7).

Theoria cum practice. Историки науки должны будут признать одним из основных факторов ее развития в XX веке ту острую необходимость решения необычайно сложных научно-технических задач, которая диктовалась космической гонкой. Многие разделы современной механики вызваны к жизни потребностями ракетно-космической техники. Необходимость достижения космических скоростей, многократно превосходящих привычные для наземных и воздушных транспортных средств значения, да еще в условиях ограниченности внутренних ресурсов разгоняемого объекта из-за невозможности энергетической подпитки с Земли, делает проблему рациональности управления беспрецедентно острой. В этой связи проблемы механики полета ракет почти с самых первых работ научного этапа исследования рассматриваются как вариационные. По-видимому, первой работой, содержащей анализ вариационной задачи о движении ракеты, была статья [90], опубликованная в 1927г. Однако, эта публикация оказалась преждевременной, не вызвав отклика исследователей в течение почти двух десятилетий. Определяющее влияние на окончательное закрепление оптимизационного подхода к задачам механики полета оказали послевоенные публикации [28, 47, 48, 62]. Очень скоро выяснилась неэффективность классического вариационного исчисления для решения задач, возникающих в практике управления движением ракет, что стимулировало создание современной математической теории оптимальных процессов, которая является одним из наиболее впечатляющих достижений механики и математики XX века. Одним из наиболее сложных разделов здесь считается теория особых (сингулярных) оптимальных управлений.

Систематическое изложение современных подходов к решению задач оптимизации управления движением ракет и космических аппаратов по траекториям с сингулярными дугами выполнено в настоящей публикации. Содержание обзора: анализ процесса формирования основ теории особых оптимальных управлений в связи с необходимостью решения практических задач создания космической техники; обсуждение проблем, связанных с вычислением соответствующих траекторий; иллюстрация прикладного значения теоретических результатов, подчас неожиданных с точки зрения здравого смысла; обсуждение нерешенных к настоящему времени вопросов теории особых управлений как раздела современной математической теории оптимальных процессов.

В обзоре рассмотрены только проблемы управления движением центра масс КА. Интересные задачи исследования особенностей движения КА вокруг центра масс, подчас неожиданные [4], проблемы определения ориентации и управления движением вокруг центра масс [104] и инерциальной навигации [106] не рассмотрены. Не обсуждены также имеющие непосредственное отношение к механике космического полета проблемы управления системами с неопределенностью [106], движение КА с учетом деформации его конструктивных элементов [134] и взаимодействия конструкции КА с содержащимся в баках топливом [89], проблемы устойчивости движения [110]. Значительная часть обзора посвящена анализу оптимальных движений ракет в среде с сопротивлением, решение которых связано с преодолением принципиальных трудностей, характерных для построения оптимальных траекторий с сингулярными дугами. Анализ принципиальных трудностей вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами и описание предложенного автором метода решения соответствующих оптимизационных задач изложены в §7. Там же изложены нерешенные к настоящему времени вопросы теории особых управлений, имеющие отношение к философии управления объектами любой природы, функционирование которых можно описать обыкновенными дифференциальными уравнениями.

§1. Математические модели ракетных двигателей и КА как объектов управления.

Богатый опыт взаимоотношений теоретиков и инженеров – создателей космической техники, накопившийся за период их исключительно интенсивного взаимодействия, породил стройную и достаточно четко отработанную иерархию модельных подходов, обеспечивающих распределение задач между различными этапами теоретического анализа и конструкторской проработки КА. Рассматриваемые ниже модели относятся к начальному уровню указанной иерархии, на котором определяются основные расчетные параметры КА и его конструктивных элементов при самых общих предположениях о влиянии указанных параметров на управление движением.

1.1. Некоторые соображения о логике развития системы математических моделей механики космического полета. Сведения об истории развития механики тел переменного состава, являющейся теоретической основой механики космического полета, изложены в монографиях и обзорных работах [57, 59, 67, 82, 133]. Как показывают результаты современного исторического анализа [59], задачи механики тел переменного состава формулировались и исследовались задолго до обоснования идеи использования реактивного принципа как способа достижения космических скоростей. С основополагающих работ [28, 47, 62] и до настоящего времени механика космического полета развивается, в основном, как механика материальной точки переменной массы. К настоящему времени установлены условия [6], определяющие адекватность использования упрощенного модельного представления о движении центра масс КА как материальной точки в конкретной задаче.

Современная форма записи уравнений движения центра масс ракеты восходит к работам Мещерского И.В. [58]. Достаточно подробный исторический анализ развития механики тела переменной массы представлен в обзоре [59]. Автор обзора отмечает, что «по-видимому, впервые динамикой систем с переменными массами в явном виде занялся в начале XIX века Георг фон Бюкуа [59, стр. 5] (Georg von Biquou, 1781 – 1851). «Гидродинамическая» концепция записи уравнений произвольной системы переменного состава, основанная на работе Н.Е. Жуковского [20] и развитая затем исследованиями [9], позволила обосновать возможность упрощенной записи уравнений движения без учета вариационных сил и сил Кориолиса.

Примерно до середины пятидесятих годов прошлого века внимание исследователей уделяется, в основном, движению тел переменной массы с тепловыми химическими реактивными двигателями, особенностью которых, существенной с точки зрения механики полета, является малый удельный вес двигательной системы (отношение веса двигательной системы к максимальной реактивной тяге порядка единиц процентов). Для работ этого этапа характерно пренебрежение массой двигателя, что дает возможность считать начальную массу космического аппарата M состоящей из постоянной массы «сухой» ракеты M_1 и убывающей массы рабочего тела M_μ :

$$M(t) = M_1 + M_\mu(t). \quad (1.1)$$

При этом основная задача механики космического полета [14] – задача выполнения заданного маневра с максимальной полезной нагрузкой при фиксированной начальной массе – сводится к определению условий выполнения маневра с минимальными топливными затратами $M_\mu(0)$. Применение формулы Циолковского позволяет сформулировать ее как задачу построения траектории полета, минимизирующей характеристическую скорость маневра. Полученное таким образом существенное упрощение основной задачи позволило уже на первом этапе развития механики космического полета решить, хотя и в первом приближении, ряд важнейших задач механики. Результаты этих исследований изложены в работах многих авторов и обобщены в известных монографиях [11, 14, 27].

Рассмотренные ниже математические модели обобщают классическую «двухкомпонентную» модель, разделяющую массу КА на отбрасываемую и «сухую». Обобщение проводилось с привлечением минимума вновь вводимых параметров. Стремление

к «минимальным» моделям вызвано не столько трудностями в получении решений, сколько желанием упростить возможность их однозначной физической трактовки. Конечно, такие модели существенно проще многопараметрических моделей, используемых при расчетах конкретных образцов проектируемых летательных аппаратов (ЛА), но и проблемы теоретического исследования отнюдь не идентичны задачам, решаемым в расчетно-конструкторских бюро. Довольно часто при использовании простой модели удается проинтегрировать уравнения движения ЛА в элементарных функциях. Уже одно это является решающим аргументом в пользу «минимальных» моделей, ибо «чем большие трудности порождает интегрирование дифференциальных уравнений динамики, тем с большей тщательностью мы должны исследовать те механические задачи, в которых интегрирование удастся свести к квадратурам» (Якоби; цитируется по книге И.В.Мещерского [58, стр. 42]. Так, для классической «двухкомпонентной» модели оптимален импульсный режим работы двигателя КА в поле массовых сил и уравнения межорбитальных переходов в центральном ньютоновском гравитационном поле, например, интегрируются в элементарных функциях, что сыграло немаловажную роль на начальном этапе развития механики космического полета [87].

В начале 60-х годов XX столетия возникает интерес к изучению возможностей использования перспективных видов космических двигательных систем, таких как электрореактивные двигатели, солнечный парус. Эти двигательные системы отличаются большими значениями отношения собственной массы M_x к максимальной тяге T_0 (либо к максимальной мощности N_0) [14], так что пренебречь массой двигательной установки при формулировке основной задачи не представляется адекватным цели исследования.

Анализ исследований по механике тел переменной массы с указанными двигательными системами позволил сделать вывод о развитии нового раздела механики, названного механикой космического полета с малой тягой (условное наименование, отвечающее современному уровню технической реализации физических принципов перспективных двигательных систем). Почти одновременно с первыми статьями, относящимися к механике полета с малой тягой, был опубликован ряд работ, в которых учитывалась и масса химических тепловых ракетных двигателей (двигатели большой тяги). Предложенная в [14] формулировка основной задачи дает возможность рассматривать задачи механики космического полета для всех исследуемых двигательных систем с единых позиций и утверждать, что для современного подхода к этим задачам характерно исследование оптимальных соотношений между компонентами ракеты с учетом массы основных элементов двигательной системы, оптимального управления двигательной системой и оптимальных траекторий космического полета в совокупности.

Следует отметить, что построение механики космического полета с учетом массы двигательной системы не перечеркивает полученных ранее результатов. Что касается результатов, полученных в предположении импульсного характера работы двигателей, то они могут служить хорошим первым приближением к точному решению динамической части задачи, если время работы двигателя t_k много меньше времени выполнения маневра t_f [12, 74]. Вместе с тем, в работе [13, стр.89] проанализированы случаи несовпадения решения задачи с конечным значением максимальной тяги при предельном переходе $T_0 \rightarrow \infty$ с решением в импульсной постановке: «математическая корректность такого перехода не очевидна и требует обоснования».

1.2. Ракетные двигатели как объекты управления. Абсолютное большинство результатов исследований оптимального управления тягой ракет получено при использовании упрощенного представления зависимости величины тяги от секундного массового расхода рабочего тела q и скорости реактивной струи V_e :

$$T = qV_e. \quad (1.2)$$

Эта формула справедлива для ракетных двигателей, работающих в вакууме. При движении в атмосфере указанная зависимость усложняется:

$$T = qV + (p_\sigma - p_h)\sigma. \quad (1.3)$$

Здесь V – скорость реактивной струи на срезе сопла двигателя; p_σ – давление истекающих газов на срезе; σ – площадь среза сопла; p_h – давление в атмосфере. В работе [62] предложено величину противодействия $p_h\sigma$ объединять с аэродинамическим сопротивлением ракеты F . При этом выражение суммы сил тяги и сопротивления преобразуется так:

$$T\vec{e} + \vec{F} = T_v\vec{e} + \vec{\Phi}, \quad (1.4)$$

где \vec{e} – единичный вектор направления тяги; T_v – величина тяги в вакууме. Первый член в правой части (1.4) содержит произведение основных управляющих функций T_v и \vec{e} , на величину второго

$$\vec{\Phi} = \vec{F} - p_h\sigma\vec{e}, \quad (1.5)$$

управление \vec{e} влияет незначительно, так как при скоростях полета, характерных для ракет, величина F в (1.5) существенно превосходит $p_h\sigma$ на большей части траектории. Это позволяет в первом приближении принять величину $\vec{\Phi}$ не зависящей от управления и заменить упрощенной $T_v = qV_e$ расходную характеристику двигателя

$$T = qV - p_h\sigma, \quad (1.6)$$

где q – массовый расход рабочего тела; V – коэффициент, имеющий размерность скорости и не зависящий, по одномерной теории сопла Лавалю, от q . Таким образом, в классической формуле (1.2), которая в большинстве работ используется и при анализе движения ракет в атмосфере, величина

$$V_e = V + \frac{(p_\sigma - p_h)\sigma}{q}, \quad (1.7)$$

называемая эффективной скоростью истечения [9], принимается постоянной.

Исследование вариационных задач механики полета позволило установить, что оптимальные траектории КА могут содержать участки максимальной, промежуточной и нулевой тяги. Что касается пассивных дуг, их анализ проводится в терминах небесной механики. Для анализа активных участков полета, в тех случаях, когда импульсная аппроксимация приложения тяги признается недостаточно точной, предложены приближенные подходы учета их реальной продолжительности, изложенные в известных монографиях (см., например, [27]). Участки промежуточной, как правило, переменной, тяги включаются в состав траекторий полета в двух принципиально различных случаях. «Вынужденное включение» связано с выходом на фазовые ограничения (на перегрузку, на тепловой поток, например). Вторая возможность включения участков переменной тяги в состав траектории возникает при выполнении на этих участках условий оптимальности особых (сингулярных) оптимальных управлений, которые встречаются в вырожденных вариационных задачах. Внимание к решениям этих задач обусловлено тем, что их практическая реализация – немалая «головная боль» конструкторов, как ракетных двигателей, так и систем управления. Поэтому оценить эффективность такого «экзотического» управления, требующего дросселирования тяги, выяснить потери при переходе к более простым, с точки зрения реализации, способам управления – безусловно, актуальная задача.

Движение ракеты вдоль участков особого управления связано с необходимостью существенного дросселирования величины тяги. При этом расход рабочего тела дви-

двигателя q и давление газов в струе p_σ уменьшаются пропорционально изменению величины тяги и гипотеза о постоянстве эффективной скорости истечения V_e становится тем менее обоснованной, чем глубже степень дросселирования тяги. Указанная особенность привела к необходимости разработки более точного математического описания ракетного двигателя как объекта управления. Соответствующая математическая модель предложена автором [29]. В этой работе представлена нелинейная, в отличие от упрощенной $T_v = qV$, расходная характеристика двигателя во всем диапазоне изменения расхода q : от нуля до максимального значения.

Переход от упрощенной формулы (1.2) к более точному соотношению (1.3) привел к неожиданному результату: замене дуг промежуточной переменной тяги участками скользящего режима работы двигательной системы [37]. Отличие между этими режимами принципиально: если особый режим связан с плавным, за исключением конечного числа точек разрыва, изменением управления, скользящий режим – это бесконечное число переключений управления на конечном отрезке времени. Получение скользящего режима при анализе любой оптимизационной задачи должно настоятельно исследователя, так как даже сама возможность включения соответствующей сингулярной дуги в состав траектории обеспечивается основной гипотезой современной теории управления – гипотезой о безинерционности управления. И лишь в том случае, когда управления описываемого объекта действительно малоинерционные, информация об оптимальности скользящих режимов имеет не только теоретический интерес. В задачах механики космического полета величина тяги может считаться безинерционным управлением лишь при конечном числе переключений на оптимальной траектории с конечным временем полета. Это подтверждается, в частности, диаграммами $T(t)$ для реальных ракетных двигателей, приведенными в монографиях по ракетодинамике (см., например, [2, 3]).

1.3. Минимально параметрическая математическая модель космического аппарата. Рассмотрим математическую модель космического аппарата, отличающуюся от классической учетом массы двигательной системы M_γ и массы контейнеров для хранения рабочего тела двигателя M_β . Начальная масса M_0 ракеты представляется в этом случае следующим образом:

$$M_0 = M_n + M_\gamma + M_\beta + M_\mu^0. \quad (1.8)$$

Здесь M_n – масса полезной нагрузки; M_μ^0 – масса начального запаса рабочего тела. Функциональные зависимости $M_\gamma(M_\mu^0, T_0)$ и $M_\beta(M_\mu^0, T_0)$, где T_0 – максимальная тяга ракетного двигателя, зависят от конструктивных особенностей конкретных двигательных систем, топливных баков и систем подачи рабочего тела в движитель. Однако общее свойство таких зависимостей, существенное с позиций механики полета, выражается следующими неравенствами:

$$\frac{\partial M_\gamma}{\partial M_\mu^0} \geq 0; \quad \frac{\partial M_\gamma}{\partial T_0} > 0; \quad \frac{\partial M_\beta}{\partial M_\mu^0} > 0; \quad \frac{\partial M_\beta}{\partial T_0} \geq 0. \quad (1.9)$$

При записи соотношений «минимальной» модели КА примем простейший из возможных способов представления зависимостей массы двигательной системы M_γ и контейнеров для хранения рабочего тела M_β от M_μ^0 и T_0 :

$$M_\gamma = \gamma_1 T_0; \quad M_\beta = \beta_1 M_\mu^0; \quad \gamma_1 = \text{const}; \quad \beta_1 = \text{const}, \quad (1.10)$$

При формулировке задачи об оптимальном выполнении некоторого динамического маневра удельные параметры γ_1 и β_1 принимаются фиксированными *a priori*, а

величины начальной массы рабочего тела M_μ^0 и массы двигательной системы M_γ (либо максимальная реактивная тяга P_0) являются искомыми параметрами оптимизационной задачи. Соотношения (1.8), (1.10) после перехода к безразмерным переменным по формуле $m = MM_0^{-1}$ преобразуются к виду:

$$1 = m_n + m_\gamma + m_\beta + m_\mu^0; \quad m_\gamma = \gamma_2 a_0; \quad m_\beta = \beta_1 m_\mu^0, \quad (1.11)$$

где $a_0 = P_0/(gM_0)$; $\gamma_2 = g\gamma_1$. Конечная масса КА $m(t_f)$ с учетом естественного граничного условия $m_\mu(t_f) = 0$ и формул (1.11) может быть представлена следующим образом:

$$m(t_f) = \frac{m_n + \beta_1}{1 + \beta_1} + \frac{\gamma_2}{1 + \beta_1} a_0. \quad (1.12)$$

После введения обозначений:

$$m_\pi = \frac{m_n + \beta_1}{1 + \beta_1}; \quad \gamma = \frac{\gamma_2}{1 + \beta_1} \quad (1.13)$$

выражение (1.12) для конечной массы преобразуется к виду

$$m(t_f) = m_\pi + \gamma a_0. \quad (1.14)$$

С использованием формулы (1.14) уравнения движения, краевые условия и ограничения на управления задачи о переходе КА с заданного начального многообразия S_0 на указанное конечное многообразие S_1 в фазовом пространстве с минимальным значением выбранного функционала: функции конечного состояния $\Phi(\vec{r}(t_f), \vec{v}(t_f), m_n(t_f))$ записываются следующим образом:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}; \quad \dot{\vec{v}} = \frac{a_0 T \vec{e} + \vec{F}}{m} + \vec{R}; \quad \dot{m} = -a_0 \frac{T}{V}; \quad (\vec{r}(0), \vec{v}(0)) \in S_0; \quad (\vec{r}(t_f), \vec{v}(t_f)) \in S_1 \quad (1.15)$$

$$(|\vec{e}| \equiv 1, \quad 0 \leq P \leq 1, \quad 0 \leq V \leq 1).$$

Здесь \vec{r} и \vec{v} – радиус-вектор и вектор скорости центра масс КА в инерциальной системе координат; \vec{e} – единичный вектор направления реактивной тяги; T – безразмерная управляющая функция – величина тяги, отнесенная к своему максимальному значению T_0 ; V – управляющая функция – скорость реактивной струи, отнесенная к своему максимальному значению V_0 ; \vec{F} – главный вектор поверхностных внешних сил, отнесенный к начальному весу ракеты; \vec{R} – главный вектор ускорения от внешних массовых сил, отнесенный к гравитационному ускорению в начальной точке.

В случае основной задачи механики космического полета – задачи о доставке максимальной полезной массы M_n при фиксированной стартовой массе M_0 [14] уравнения связей вариационной задачи и условия трансверсальности содержат лишь один обобщенный удельный конструктивный параметр γ . Переменная m в уравнениях движения (1.15) заменяется новой переменной m_σ , заданной соотношением: $m_\sigma(t) = m_\pi + m_\mu(t)$, так что $m(t) = m_\sigma(t) + \gamma a_0$. Уравнение изменения массы m_σ с граничными условиями записывается в виде

$$\dot{m}_\sigma = -aT/V; \quad m_\sigma(0) = 1 - \gamma a_0; \quad m_\sigma(t_f) \text{ max.}$$

Это равносильно принятию вместо четырехкомпонентной модели (1.11) трехкомпонентной модели КА, в которой начальная масса аппарата принимается состоящей из

полезной нагрузки m_π , запаса рабочего тела m_μ^0 и массы двигательной системы. В отличие от истинной массы полезной нагрузки m_n величину m_π условимся именовать приведенной полезной нагрузкой, величину γ – приведенной удельной массой двигателя. Связь значений этих величин с заданными при формулировке задачи параметрами m_n , γ_1 и β_1 задана соотношениями (1.13) и учитывает влияние массы баков. Ниже параметры m_π и γ будем именовать сокращенно, опуская определение «приведенный». Таким образом, возможность представления конечной массы ракеты в форме (1.13) позволяет уменьшить число используемых в модельном описании параметров с четырех (T_0 , m_n , γ_1 , и β_1) до трех (a_0 , m_π и γ).

1.4. Theoria cum praxis. Необходимо отметить, что этот результат получен в результате преобразованию массовых соотношений (1.9) к безразмерной форме (1.10). При этом получено предсказанное теорией подобия свертывание удельных конструктивных параметров β_1 и γ_1 в единую безразмерную комбинацию $\gamma = g \gamma_1 / (1 + \beta_1)$, а основных динамических параметров P_0 и M_0 – в комбинацию $a_0 = P_0 / (gM_0)$.

Относительно простоты выбора формул (1.9), выражающих зависимость масс двигательной системы и топливных баков от запаса топлива и максимальной тяги, необходимо отметить, что выбор определенных аппроксимирующих выражений в этом случае достаточно произволен. Имеющийся в распоряжении теоретика фактический материал, как правило, отрывочен, часто учитывает опыт различных конструкторских организаций, поэтому обоснованность выбора более точной нелинейной аппроксимации указанных зависимостей для широкого диапазона изменения входящих в них переменных представляется методически малооправданным. Напротив, определение коэффициентов γ_1 и β_1 , возможно различных – для различных по мощности классов двигательных систем, – дает надежную информацию о достигнутом уровне практической реализации принципов реактивного движения и степени конструктивного совершенства элементов ракет.

При формулировке любой задачи прикладной направленности необходимо помнить указание академика А.Н. Крылова [52, с. 9, 10]: «Всякому известно, что никакое измерение не может быть произведено абсолютно точно; погрешности в данных переходят и в определяемые по этим данным искомые [величины], даже и в том случае, когда вычисление производится по совершенно точным формулам и с полнейшей точностью. В технических вопросах искомые определяются для того, чтобы быть осуществленными на деле, [но]... для всякого изделия существуют «допуски»... . Отсюда ясно, что для прикладных вопросов нет надобности проводить вычисления по абсолютно точным формулам, ... лишь бы была уверенность, что происходящая от этого погрешность не превышает тех пределов, которые в данном вопросе допускаются». Отталкиваясь от приведенной рекомендации А.Н.Крылова, важно подчеркнуть, что, коль скоро задача построения математической модели, адекватной реальному исследуемому объекту, неисчерпаема, то необходимо добиваться адекватности описания цели исследования. Например, отказываться от модельного представления (1.9) необходимо в предельных случаях. Так, в задаче об определении оптимального числа ступеней ракеты параллельной схемы секционирования использование модели (1.9) приводит к тривиальному решению: оптимально бесконечно большое число бесконечно малых ступеней. В этом случае приходится формулы (1.9) заменить более сложными нелинейными выражениями, учитывающими возрастание трудности конструирования и, как следствие, удельной массы изделий, при уменьшении их характерного размера или мощности (см. например, [45]).

§2. Особенности движения ракет в атмосфере.

В соответствии с принятым в механике делением внешних сил на массовые и поверхностные в уравнениях (1.14) для сил, относящихся к различным классам, приняты разные обозначения: $\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}, \vec{v})$ – главный вектор ускорения центра масс КА, вы-

званного действием массовых сил; $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ – главный вектор поверхностных сил. Необходимо отметить, что различие в характере воздействия массовых и поверхностных внешних сил на движение тела существенно в механике протяженных объектов, в частности, в механике сплошных сред. Так, в гидромеханике приходится оперировать с различными критериями подобия: числа Рейнольдса и Эйлера связаны с учетом поверхностных сил; число Фруда – с влиянием массовых сил на изучаемый объект. В механике же материальной точки различие в воздействии массовых и поверхностных сил на движение становится ощутимым в случае точки переменной массы: если ускорение от действия массовых сил определяется лишь положением тела в фазовом пространстве, то величина ускорения $|\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})|/M$ от влияния поверхностных сил возрастает, при прочих равных условиях, в процессе уменьшения массы тела.

2.1. Массовые и поверхностные силы в механике точки переменной массы, $\gamma-h$ парадокс. При равномерном поступательном движении летательного аппарата сила тяги $T\vec{e}$ уравнивает сумму $\vec{F} + \vec{R}m$. Для этого тривиального случая модель материальной точки с сосредоточенной в центре инерции тела массой и силами $T\vec{e}$, $\vec{F} + \vec{R}m$ приложенными к той же точке, строго обоснована. Использование уравнений (1.14) для описания произвольных движений КА допустимо лишь с учетом следующего предположения: изменение направления силы реактивной тяги \vec{e} не вызывает вариаций аэродинамической силы $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$. Принятие этой гипотезы справедливо для ракет, не имеющих приспособлений для создания аэродинамической подъемной силы. В этом случае аэродинамическая сила практически может быть сведена к силе сопротивления, направленной противоположно скорости, а подъемной и боковой силами можно пренебречь. Это предположение с достаточной для формулировки задач механики полета степенью точности можно принять по отношению к современным ракетам [72], поскольку «участок траектории выведения, проходящий в плотных слоях атмосферы, характеризуется требованием $\alpha = 0$, что следует из стремления ограничить действующие на ракету аэродинамические моменты как для обеспечения прочности, так и для снижения требований к органам управления» ([72, с. 12], через α обозначен угол атаки).

Качественное различие характера воздействия массовых и поверхностных внешних сил на движение точки переменной массы можно проиллюстрировать на примерах простейших прямолинейных движений. Целесообразность такого анализа обусловлена возможностью получения аналитических решений модельных задач, сохраняющих, при простоте формулировок, учет основных факторов, влияющих на динамику полета. В работе [39] показано, что если разгон ракеты происходит в однородном поле массовой силы в направлении, противоположном этой силе, конечная скорость v_1 при уменьшении конечной массы m_1 может стать сколь угодно большой, даже в случае массовой силы, возрастающей по величине с ростом скорости, например: $R = -kv$. В этом случае имеем

$$v_1 = V_0 \int_{m_1}^{m_0} \exp \left[\frac{kV_0}{T_0} (m_1 - m) \right] \frac{dm}{m}, \quad (2.1)$$

причем $v_1 \rightarrow 0$ при $m_1 \rightarrow 0$.

Если же поверхностная сила задана аналогичной формулой $F = -\rho v$, конечная скорость v_{11} , приобретаемая точкой при изменении массы в тех же пределах, вычисляется по формуле

$$v_{11} = \frac{T_0}{\rho} \left[1 - \left(\frac{m_1}{m_0} \right)^\beta \right] \quad (\beta = T_0/V_0\rho), \quad (2.2)$$

и максимальное значение v_{11} при $m_1 \rightarrow 0$ равно T_0/ρ – значению скорости движения, при которой сила сопротивления уравновешивается реактивной тягой. Очевидно, что при движении в однородной среде ($\rho = \text{const}$) с сопротивлением $\vec{F}(\vec{v})$ и с ограниченной тягой ($T \leq T_0$) скорость движения не может превзойти величину корня уравнения $F(v) - T_0 = 0$. Интересно также сопоставить зависимость конечной высоты h_1 , на которую поднимается ракета при вертикальном движении в однородном гравитационном поле при $R = -g$ в среде с сопротивлением $F = -kv^2$ (кривые $\kappa \neq 0$ на рис. 1), и в пустоте ($\kappa = 0$). Здесь $\kappa = kV_0^2/gm_1$; высота h_1 отнесена к $V_0^2/(2g)$; V_0 – скорость реактивной струи. Несмотря на то, что начальная скорость подъема возрастает при уменьшении m_1 , $v_0 = V_0 \ln(m_0/m_1)$, функция $h_1(m_1)$ при $\kappa \neq 0$ немонотонна (см. рис. 1), и, более того, стремится к нулю при $m_1 \rightarrow 0$. Немонотонный характер этой зависимости сохраняется и в случае подъема с ограниченной тягой (см. рис. 2).

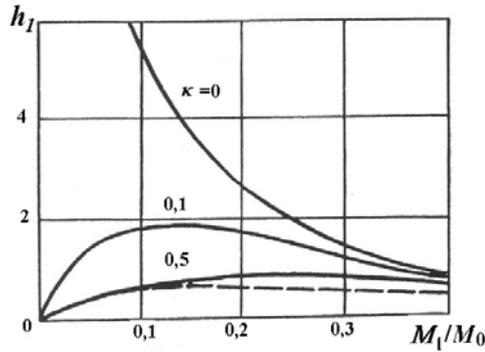


Рис. 1

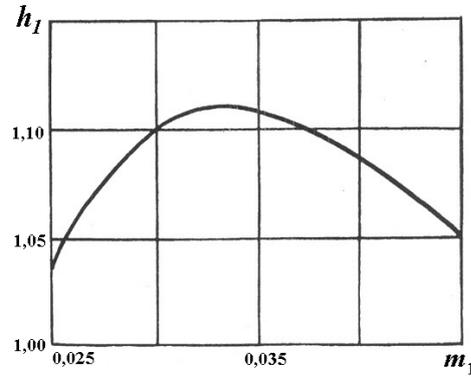


Рис. 2

Такой характер зависимости конечной высоты h_1 от конечной массы m_1 определяется взаимодействием двух факторов, связанных с уменьшением m_1 : увеличением скорости v_0 в конце разгона и ростом аэродинамического торможения kv^2/m_1 . Для достаточно больших значений m_1 увеличение начальной скорости приводит к росту конечной высоты, пока при некотором $m_1 = m_1^*(k)$ функция $h_1(m_1)$ не достигает максимума. При дальнейшем снижении m_1 увеличение начальной скорости v_0 не может компенсировать нарастание аэродинамического торможения, вследствие чего конечная высота уменьшается. Величина m_1^* возрастает при увеличении коэффициента аэродинамического сопротивления k .

Отмеченные особенности зависимости $h_1(m_1)$ позволяют объяснить, необычный на первый взгляд, характер зависимости конечной высоты h_1 от удельной массы двигательной системы γ . Приведенные на рис. 3 кривые получены при решении задачи о подборе оптимального двигателя постоянной тяги и однократного включения, обеспечивающего подъем ракеты при вертикальном движении на максимальную высоту. Начальная масса ракеты M_0 , масса полезной нагрузки M_n и удельные массы двигателя γ_1 и баков β_1 заданы. Безразмерная конечная масса ракеты представлена в виде (1.14): $m(T) = m_\pi + \gamma a_0$. Величина a_0 подлежит определению из условия достижения максимальной высоты. Безразмерная сила сопротивления задается формулой $F(h, v) = bv^2 e^{-ah}$. На рис. 3 представлена зависимость достигаемой ракетой конечной

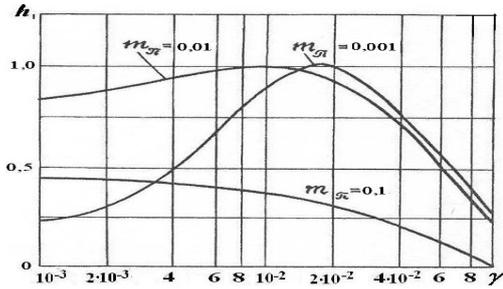


Рис. 3

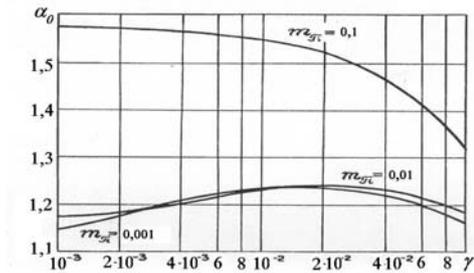


Рис. 4

высоты h_1 от приведенной удельной массы двигателя γ для трех значений приведенной массы полезной нагрузки: на рис. 4 – зависимость оптимального значения начального реактивного ускорения a_0 от γ при тех же значениях m_π . Кривые на рис. 3, 4 построены для $\beta = 3$, $\alpha = 10$.

При такой постановке задачи естественно было ожидать, что с уменьшением конструктивного параметра γ конечная высота h_1 , достигаемая ракетой, будет монотонно возрастать. Не может же более совершенный в весовом отношении движитель оказаться хуже более тяжелого. То, что видим на рис. 3 для $m_\pi = 0,01$ и $m_\pi = 0,001$ трудно назвать иначе, чем $\gamma - h$ – парадоксом.

Исследуя влияние удельной массы γ двигательной системы на величину

конечной высоты h_1 при движении с постоянной тягой, отметим, что параметры двигательной системы при малых m_π оказывают существенное влияние не только на движение ракеты на активном участке траектории, но и на высоту, набираемую в полете по инерции. Действительно, анализ уравнения движения ракеты при выключенном двигателе

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{F(h, v)}{m_\pi + \gamma a_0} \quad (2.3)$$

иллюстрирует влияние как величины m_π , так и γa_0 на величину аэродинамического торможения. Уже при $m_\pi = 0,01$ и $\gamma = 0,01$ масса движителя $m_\gamma = \gamma a_0$ соизмерима с конечной массой m_1 . Оптимальное значение a_0 должно выбираться, с одной стороны, как можно большим из-за необходимости уменьшить время подъема с включенным двигателем для снижения гравитационных потерь и увеличить знаменатель во втором члене формулы (2.3). С другой стороны, необходимо его уменьшить для увеличения доли массы начального запаса топлива m_μ^0 в начальной массе ракеты: $m_\mu^0 = 1 - m_\pi - \gamma a_0$. Компромисс указанных требований приводит к зависимостям, представленным на рис. 4

Замечание 1. Тело переменной массы с двигателем постоянной тяги однократного включения может достигать высот, превосходящих значения, соответствующие восходящим ветвям кривых на рис. 3, если конечное условие для массы $m(t_f) = m_\pi + \gamma a_0$ заменить менее жестким: $m(t_f) \geq m_\pi + \gamma a_0$. Увеличение конечной высоты в этом случае может быть получено при выключении двигателя в момент достижения массой тела некоторого оптимального значения $m_1 = m_1(\gamma, \alpha, \beta) \geq m_\pi + \gamma a_0$ до полного выгорания топлива (см. рис. 2). Ясно, что уменьшать m_1 имеет смысл лишь до достижения максимума функции $h_1(m_1)$. Оставшееся к этому моменту топливо целесообразнее сохранить на борту как инертную массу, разогнанную до уже набранной скорости, увеличив тем самым знаменатель второго члена в правой части

формулы (2.3), чем использовать для дополнительного разгона, сопряженного, увы, с таким уменьшением конечной массы m_1 , которое увеличит аэродинамическое торможение F/m_1 и уменьшит набираемую на заключительном пассивном участке высоту при движении по инерции.

Замечание 2. Из проведенного выше анализа зависимости конечной высоты от конечной массы следует нецелесообразность немедленного сброса элементов конструкции и двигателя ракеты на пассивном участке полета в атмосфере, если при этом не происходит уменьшение отношения c_x/m (c_x – коэффициент аэродинамического сопротивления ракеты), т.е. возможность появления пассивных участков полета в атмосфере от момента окончания работы двигателя i -ой ступени до момента ее сброса и включения двигателя $(i+1)$ -ой ступени, отмеченная в работе [121] и подробно исследованная в п. 3.4.

2.2. Внешние силы и оптимальное управление. Восходящие ветви графиков $\gamma-h$ – парадоксальной зависимости высоты подъема от удельной массы двигателя (см. рис. 3) убеждают в нерациональности закона управления тягой $T(t) = T_0$ до полного выгорания топлива. Проведем с помощью принципа максимума анализ оптимального управления движением ракеты, описываемым системой уравнений (1.14) при переходе с заданного начального многообразия S_0 на предписанное конечное многообразие S_1 с минимальным значением заданной функции конечного состояния: $\Phi(\bar{r}(T), v(T), M(T), T)$.

Управляющие функции: T – величина тяги; \bar{e} – единичный вектор направления тяги; V – средняя эффективная скорость реактивной струи – могут быть в первом приближении приняты независимыми [14], причем $0 \leq T \leq T_0$, $0 \leq V \leq V_0$, $|\bar{e}| \equiv 1$. В соответствии с процедурой принципа максимума записываем гамильтониан H и присоединенную систему:

$$H = -\psi_m \cdot \frac{T}{V} + \bar{\psi}_r \cdot \bar{v} + \bar{\psi}_v \left(\frac{T\bar{e} + \bar{F}(\bar{r}, \bar{v})}{M} + \bar{R}(\bar{r}, \bar{v}) \right); \quad \dot{\psi}_m = \frac{\bar{\psi}_v}{M^2} (T\bar{e} + \bar{F}(\bar{r}, \bar{v})); \quad (2.4)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_r = - \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \bar{F}(\bar{r}, \bar{v})}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{R}(\bar{r}, \bar{v})}{\partial \bar{r}} \right)^T \bar{\psi}_v; \quad \dot{\bar{\psi}}_v = -\bar{\psi}_r - \left(\frac{1}{M} \frac{\partial \bar{F}(\bar{r}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \bar{R}(\bar{r}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} \right)^T \bar{\psi}_v.$$

Здесь вектора – столбцы, верхний индекс T означает транспонирование. Регулярные оптимальные управления, доставляющие максимум функции H , записываются следующим образом:

$$\bar{e} = \frac{\bar{\psi}_v}{\psi_v}; \quad T = \begin{cases} T_0 & \text{при } H_1 > 0, \\ 0 & \text{при } H_1 < 0, \end{cases} \quad H_1 = \frac{\psi_v}{M} - \frac{\psi_m}{V} \quad (\psi_v = |\bar{\psi}_v|). \quad (2.5)$$

Следует отметить, что в абсолютном большинстве работ по механике полета величина скорости истечения V не включается в число управляющих функций и принимается $V = V_0$. Исключение составляет ряд работ, в которых принято, что запас энергии рабочего вещества ракеты ограничен (см. например, [55]). Оптимальность управления $V \equiv V_0$ на активных участках траектории в рассматриваемой в настоящем параграфе задаче очевидна: при любой заданной программе тяги $T = T(t)$ граничное управление $V = V_0$ обеспечивает минимальный расход топлива (см. первое уравнение системы (1.14), а выбор $V = V_0$ «ничего не стоит» – в отличие от работы [55]). При выполнении равенства $H_1(t) = 0$ на некотором интервале времени $[\tau, \vartheta] \subset [0, t_f]$

управление величиной тяги $T(t)$ – особое [8]. На этом участке необходимые условия оптимальности $H_1 = 0$, $dH_1/dt = 0$ приводятся к виду

$$\psi_v/M - \psi_m/V_0 = 0; \quad \frac{d\psi_v}{dt} + \frac{1}{MV_0} \bar{\psi}_v^T \bar{F}(\bar{r}, \bar{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Необходимое условие оптимальности особого управления распадается на классическое условие Лежандра–Клебша и условие Келли. Проверка этого утверждения и подтверждение выполнения условия Лежандра – Клебша в рассматриваемой задаче приведена в диссертации [23]. Если условие Келли

$$A = - \left\{ \frac{1}{\psi_v} \left[\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial \bar{F}^T}{\partial \bar{V}} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{V}} \right) + \frac{1}{\psi_v} \frac{\partial}{\partial \bar{V}} \left(\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{V}} + M \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{V}} \right)^T \bar{\psi}_v \right) \right] \bar{\psi}_v + \frac{1}{V_0^2} \bar{F} \right\} \frac{\bar{\psi}_v^T}{M^3} \geq 0 \quad (2.7)$$

выполняется при $t \in [\tau, \mathcal{G}]$, в состав оптимальной траектории может входит сингулярная дуга.

Необходимость одновременного выполнения при $t = \tau$ обоих условий (2.6) накладывает на выбор постоянных интегрирования системы уравнений движения (1.14) и присоединенной системы (2.4) одно добавочное условие в дополнение к стандартным начальным, конечным и условиям трансверсальности. Однако, кроме указанных постоянных интегрирования, в задаче имеется еще и один свободный параметр – момент $t = \mathcal{G}$ окончания сингулярной дуги. Следовательно, в этом случае включение участка особого управления тягой в состав траектории не противоречит возможности построения решения системы дифференциальных уравнений (1.14), (2.4), удовлетворяющего произвольным начальным и конечным условиям, и условиям трансверсальности. В типичном для механики полета случае $\bar{R} = \bar{R}(\bar{r})$ выполнение строгого неравенства в условии (2.7) возможно лишь при $\bar{F} \neq 0$. Иначе $A \equiv 0$ и особое управление должно вычисляться теперь из условия [8]: $d^4 H_1/dt^4 = 0$. При этом в начальной точке сингулярной дуги при $t = \tau$ в дополнение к двум условиям (2.6) должны выполняться новые соотношения: $d^2 H_1/dt^2 = 0$ и $d^3 H_1/dt^3 = 0$. Дополнительный свободный параметр \mathcal{G} по-прежнему один, так что начальные и конечные условия оказываются связанными тремя соотношениями, что указывает на возможность включения сингулярных дуг такого порядка вырождения в оптимальную траекторию только в задачах со специально подобранными условиями на концах траектории.

2.3. Theoria cum practice. Необходимо отметить, что ни в публикациях, рассматривающих проблему оптимизации управления в Задаче Годдарда, ни в монографиях [8, 50], в которых обсуждаются дуги переменной тяги, нет указаний на доказанную в п. 2.2 зависимость порядка вырождения особого оптимального управления от того, действуют ли на ракету поверхностные внешние силы. Интересно, что при движении КА с двигателем ограниченной мощности особое управление первого порядка вырождения также может быть оптимальным лишь в том случае, если на аппарат действуют силы аэродинамического сопротивления [32].

§3. Оптимальное управление движением ракет в атмосфере.

Проведем оценку эффективности включения сингулярных дуг в состав траектории движения ракет среде с сопротивлением. Оправдано ли оно? Дело в том, что включение в состав оптимальной траектории особых дуг – участков переменной тяги – связано с существенным усложнением конструкции двигательной системы: вместо движителя, рассчитанного на работу в режиме максимальной тяги и, возможно, допускающего неоднократное включение, необходим движитель, допускающий, кроме того, еще и изменение величины тяги, часто по достаточно сложной программе. Поэтому весьма важным этапом исследования после построения оптимальной траектории с участками особого управления является оценка эффективности оптимального

управления. Для этого значение функционала на оптимальной траектории необходимо сравнить с тем, что можно получить при других, пусть и не оптимальных, но легко реализуемых режимах управления.

3.1. Задача Годдарда. В классической задаче Годдарда [88] о подъеме ракеты до максимальной высоты при вертикальном движении уравнения движения центра масс ракеты с граничными условиями имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -a_0 T / V_0, \quad m(0) = 1, \quad m(t_f) = m_x + \gamma a_0; \\ \dot{h} &= v, \quad h(0) = 0, \quad -h(t_f) \Rightarrow \min; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{v} = \frac{a_0 T - F(h, v)}{m} - g(h), \quad v(0) = 0, \quad v(t_f) \text{ opt.}$$

Высота h в системе (3.1) отнесена к $V_0^2 g_0^{-1}$, скорость движения v – к V_0 , время – к $V_0 g_0^{-1}$, а тяга T и сила сопротивления F отнесены к максимальной тяге T_0 , причем $a_0 = T_0 / g_0 M_0$, g – к g_0 . Поскольку при формулировке задачи время выполнения подъема t_f не задано, как и максимизируемая величина высоты подъема $h(t_f)$, соответствующие условия трансверсальности приобретают форму: $H(t_f) = 0$, $\psi_h(t_f) = 1$. Функция H задачи линейна по управлению:

$$H = H_0 + T H_1 a_0; \quad H_0 = \psi_h v - \psi_v \left(\frac{F}{m} + g \right); \quad H_1 = \frac{\psi_v}{m} - \frac{\psi_m}{V_0}. \quad (3.2)$$

На особом участке должны выполняться соотношения:

$$H_0 = 0; \quad H_1 = 0; \quad \dot{H}_1 = 0 \quad \left(\dot{H}_1 = \frac{\psi_h}{m} - \psi_v \left(F'_v + \frac{F}{v} \right) \right) \quad (3.3)$$

при нетривиальном наборе ψ_h, ψ_v, ψ_m . Поскольку система (3.3) линейна и однородна относительно компонент вектора ψ , ее определитель $S(m, h, v)$ должен быть равен нулю. Так получаем уравнение поверхности особого управления

$$S(m, h, v) = F(h, v)(v - 1) + v F'_v(h, v) - m g(h) = 0. \quad (3.4)$$

Из условия $\dot{H}_1 = 0$ определяется величина особого управления

$$T_s a_0 = F + \frac{m^2 g'_h + m [g(F'_v + F''_{vv}) + F'_h(1 - v) - v F''_{vh}]}{F + 2F'_v + F''_{vv}}. \quad (3.5)$$

Полученные в статье [115] результаты упрощают процедуру вычисления оптимальной траектории, поскольку однозначно определяют управление на начальном участке траектории: $T(t) = 1$ при . Если параметры ракеты и атмосферы таковы, что на начальном участке максимальной тяги поверхность (3.4) достигается до выгорания топлива, за участком $T = 1$ может следовать особая дуга траектории, т.е. при $t = \tau + 0$ граничное управление величиной тяги $T = 1$ заменяется особым, вычисленным по формуле (3.5). Вдоль особой дуги должно выполняться условие Келли [8]:

$$\frac{\partial}{\partial u} \dot{H}_1 = \psi_v L(F) \geq 0; \quad L(F) = F + 2F'_v + F''_{vv} \quad (3.6)$$

и условие принадлежности особого управления открытому ядру области допустимых управлений: $0 < T_s < 1$. Обозначим момент сопряжения сингулярной дуги со следующей регулярной дугой оптимальной траектории символом \mathcal{G} . Особая дуга может сопрягаться как с дугой максимальной тяги, так и с пассивной дугой: обе возможности не противоречат необходимым условиям оптимальности. Разрешая систему уравнений (3.3) относительно компонент сопряженного вектора ψ при $t = \mathcal{G}$, получаем

$$\psi_m(\mathcal{G}) = \frac{\psi_v(\mathcal{G})}{m(\mathcal{G})}; \quad \psi_h(\mathcal{G}) = \frac{\psi_v(\mathcal{G})}{v(\mathcal{G})} \left(\frac{F(\mathcal{G})}{m(\mathcal{G})} + g(\mathcal{G}) \right). \quad (3.7)$$

На участке $t \in [\mathcal{G}, t_f]$ уравнения движения и присоединенная система интегрируются численно и управление определяется по принципу максимума:

$$T = \begin{cases} 1 & \text{при } H_1 > 0; \\ 0 & \text{при } H_1 < 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Таким образом, семейство экстремалей с особыми дугами в задаче Годдарда оказывается однопараметрическим (параметр \mathcal{G}). Применение метода вычисления оптимальной траектории от поверхности особого управления [33] позволяет отказаться от поиска недостающих начальных значений вектора $\vec{\psi}(0)$, заменив его определением величины \mathcal{G} , обеспечивающей выполнение конечных условий и условий трансверсальности. При этом не возникает трудностей, связанных с некорректностью задачи. Уменьшается время интегрирования присоединенной системы с интервала $[0, t_f]$ до интервала $[\mathcal{G}, t_f]$.

3.2 Эффективность оптимального управления. Ниже приводятся результаты оценки эффективности оптимального управления тягой ракеты при вертикальном движении в атмосфере, исследуется влияние на эффективность оптимального управления конструктивных параметров ракеты и ее двигательной системы. Принята описанная в п. 1.3 трехкомпонентная модель ЛА, в которой массы двигательной системы, топливных баков и полезной нагрузки сведены в два приведенных параметра m_π и γ . Рассмотрим ту же классическую задачу Годдарда, дополнив общепринятую формулировку (п. 3.1) требованием – определить еще и оптимальное распределение начальной массы между отдельными компонентами ракеты. Заданными считаются начальная масса ракеты M_0 , масса полезной нагрузки M_n , удельные конструктивные параметры γ_1 и β_1 .

Алгоритм вычисления оптимальной траектории при фиксированном значении a_0 , описанный в п. 3.1, рассматривается как способ задания функциональной зависимости $h_1(a_0)$, где h_1 – высота подъема при фиксированном a_0 . Оптимальное значение начальной тяговооруженности a_0 определяется из условия максимума функции $h_1(a_0)$.

Участок особого управления тягой не входит в состав оптимальной траектории, если поверхность (3.4) особого управления $S(m, h, v) = 0$ не достигается на начальном участке максимальной тяги. Динамика фазовых переменных, управления $T(t)$ и функции $S(m(t), h(t), v(t))$ проиллюстрирована на рис. 5. При вычислениях принято: $a_0 = 2,6$, $\gamma = 0,01$, $b = 3$, $m_\pi = 0,01$, $\alpha = 5$. Начальный разгон происходит с максимальной тягой. Около половины топлива расходуется на активном участке особого управления. Набор высоты происходит, в основном, на этом участке, причем скорость подъема при этом меняется незначительно. Траектория заканчивается пассивным участком.

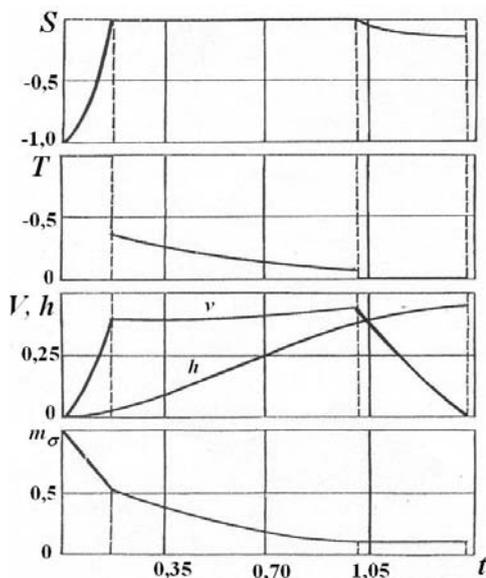


Рис. 5

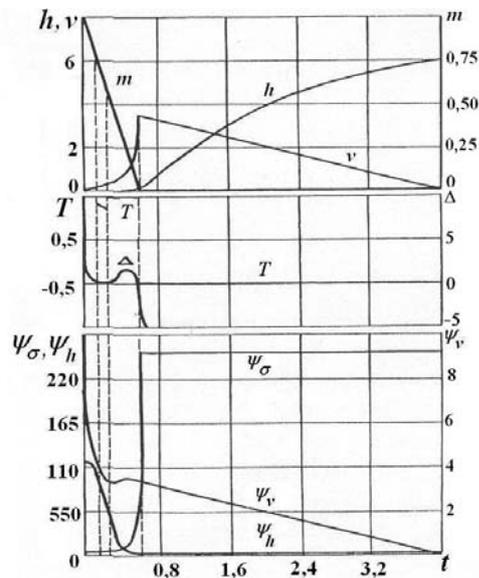


Рис. 6

Иной характер имеет управление при движении в атмосфере с быстро уменьшающейся по мере роста высоты плотностью (большие значения параметра α). Пример такой траектории при $b = 200$, $\alpha = 100$ приведен на рис. 6. За участком переменной тяги следует второй участок максимальной тяги, продолжающийся до израсходования всего запаса топлива. Такая последовательность объясняется быстрым уменьшением аэродинамического сопротивления из-за падения плотности атмосферы при наборе высоты.

Кривые на рис. 7 дают возможность оценить влияние включения участка особого управления тягой в состав оптимальной траектории на конечную высоту h_1 . Кривая I иллюстрирует зависимость значения h_1 от величины параметра a_0 при оптимальном управлении, кривая II – аналогичную зависимость для траектории, состоящей из активного участка максимальной тяги, на котором расходуется все топливо, и заключительного пассивного участка. Сравнение кривых указывает на заметное увеличение величины h_1 при включении особого участка в состав оптимальной траектории и на увеличение оптимального значения a_0 . Зависимости максимальной высоты h_1 и начальной тяговооруженности a_0 от удельной массы двигателя γ (сплошные кривые) представлены на рис. 8, 9, соответственно; штриховые линии представляют те же зависимости для ракеты с двигателем постоянной тяги однократного включения. Вычисления проведены при $b = 3$ и $m_x = 0,01$.

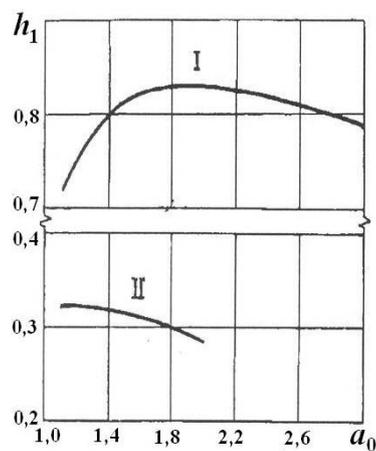


Рис. 7

Уменьшение γ приводит к росту a_0 и увеличению конечной высоты. Для сравнения на тех же рисунках представлены зависимости $h_1(\gamma)$ и $a_0(\gamma)$ для нерегулируемой двигательной системы однократного включения (штриховые линии). Сравнение штриховых и сплошных линий на рис. 8 указывает на большую эффективность опти-

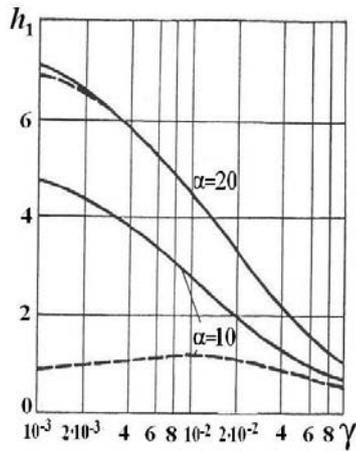


Рис. 8

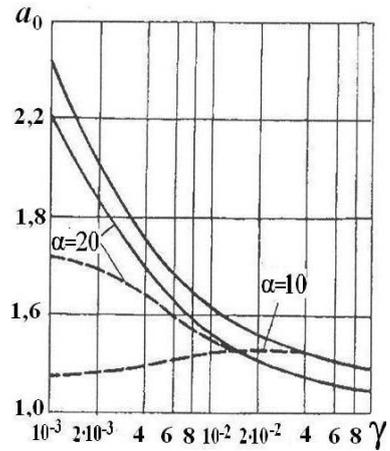


Рис. 9

мального управления для более легких двигательных систем. Немонотонность части штриховых линий ($\gamma - h$ -парадокс) пояснена в п. 2.1. При больших значениях γ оптимальные траектории не содержат особых участков (сплошные и штриховые линии совпадают). Необходимо отметить, что эффективность дросселирования тяги убывает с уменьшением коэффициента b и увеличением полезной массы.

3.3 Подъем на заданную высоту, оптимальный по быстродействию. Эффективность особого управления становится существенной при выполнении маневров, требующих высоких скоростей движения. Наибольшие скорости следует ожидать при необходимости выполнить маневр за минимальное время. Рассмотрим задачу Годдарда, заменив условие $t_f \text{ opt}$ требованием $t_f \rightarrow \min$.

Уравнения движения и остальные краевые условия (3.1) не изменяются, лишь требование максимизации конечной высоты заменится условием достижения высоты заданной: $h(t_f) = h_1$, значение скорости ракеты в конечной точке свободно: $v(T) \rightarrow \text{opt}$. Зависимости времени t_f достижения ракетой заданной высоты h_1 и оптимального значения начальной тяговооруженности a_0 представлены на рис. 10, 11, соответственно, для трех значений h_1 . Вычисления проведены для следующих значений параметров: $m_\pi = 0,1$, $b = 3$, $\alpha = 100$. Существенное отличие оптимального по быстродействию управления от управления, обеспечивающего подъем ракеты на максимальную высоту, состоит в том, что включение сингулярной дуги в состав траектории оптимально при значительно меньших значениях коэффициента b . Так, в задаче Годдарда при $\alpha = 100$

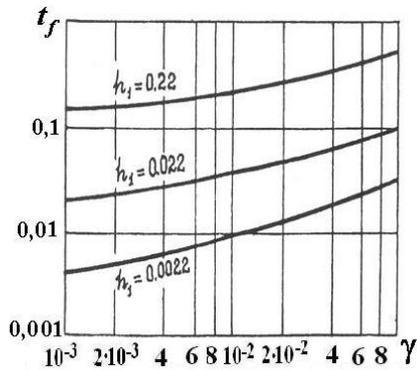


Рис. 10

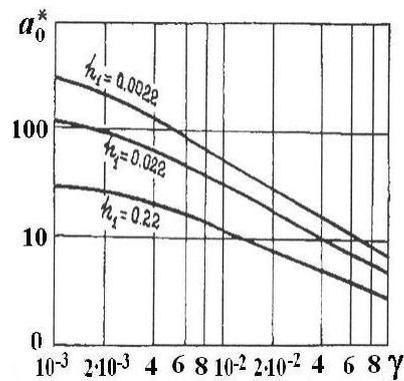


Рис. 11

и $\gamma = 0,001$ особое управление оптимально при $b > 47$. Для случая оптимального быстрогодействия при тех же значениях α, γ и m_π для $h_1 = 0,22$, например, участок особого управления входит в состав оптимальной траектории уже при $b = 3$. На рис. 12 приведены графики зависимости от γ оптимальных значений начальной тяговооруженности a_0 для выбранных высот (сплошные кривые). Штриховые линии иллюстрируют аналогичные зависимости для ракет с оптимально подобранными двигателями постоянной тяги.

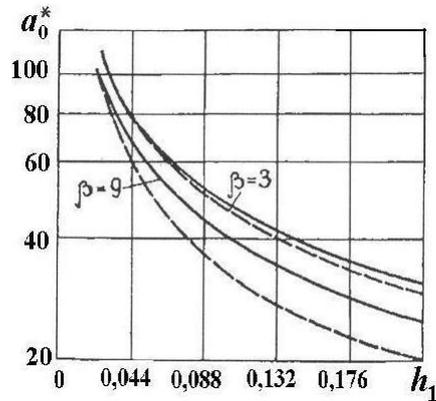


Рис. 12

Для оценки эффективности дросселирования тяги при наискорейшем подъеме рассмотрим случай использования ракеты с выбранным для некоторой расчетной высоты оптимальным двигателем для подъема на высоты, превышающие расчетную [25]. Пусть, например, на ракете установлен двигатель с $a_0 = 112,71$, который оптимален при $h_1 = 0,022$. Для этой высоты оптимально движение с постоянной тягой. На рис. 13 представлены кривые, иллюстрирующие оптимальные законы управления величиной тяги установленного на ракете двигателя в случае необходимости наискорейшего подъема на высоты, превосходящие расчетную.

Начиная с некоторой высоты за начальным участком разгона с постоянной тягой следует сингулярная дуга с дросселируемой тягой. Чем выше заданная высота, тем раньше особый участок начинается и тем продолжительнее он оказывается. Эффективность дросселирования тяги возрастает с увеличением превышения заданной высотой расчетного значения (см. рис. 14). Через t_f обозначено время подъема на высоту h_1 ракеты с регулируемым двигателем, через t_f^c — то же для ракеты с двигателем постоянной тяги, причем оба двигателя развивают одинаковую максимальную тягу. Проиллюстрированный выше результат демонстрирует еще одно ожидаемое преимущество регулируемых двигательных систем: неизбежные потери при переходе от одно-разовых конструкций к конструкциям, оптимальным для заданного диапазона маневров, уменьшаются при замене нерегулируемых двигателей двигателями с дросселируемой тягой.

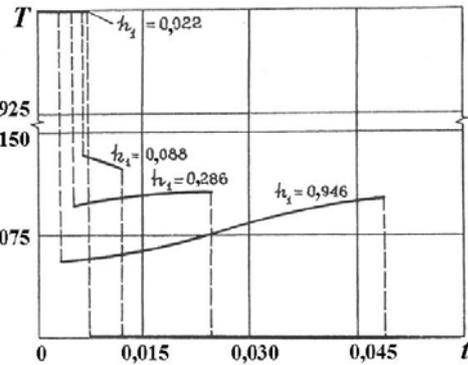


Рис. 13

3.4. Оптимальное управление тягой многоступенчатой ракеты в атмосфере. Указанное в п. 2.1 отличие воздействия массовых и поверхностных сил на движение ЛА оказывается существенным также и в механике полета многоступенчатых ракет. Если ракета движется в поле массовых сил, сброс обрабо-

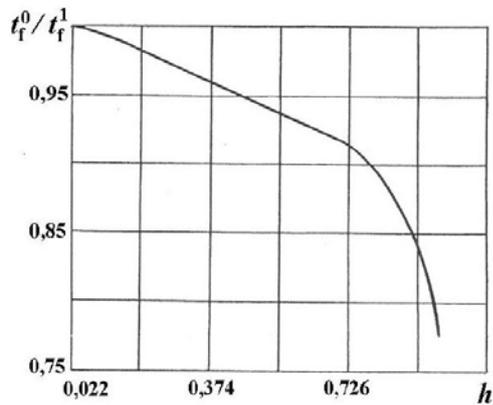


Рис. 14

тавших элементов конструкции увеличивает – при неизменной тяге – величину реактивного ускорения и не влияет на величину ускорения от внешних сил. При движении в среде с сопротивлением отделение части массы ракеты не только увеличивает реактивное ускорение, но и изменяет также величину ускорения от силы сопротивления. Величина этого изменения зависит как от величины отделяемой массы, так и от изменения аэродинамических характеристик ракеты, вызванного сбросом. Поэтому определение оптимального момента отделения отработавшей ступени при движении в среде с сопротивлением не является задачей с очевидным решением: отделять сразу по мере израсходования запаса топлива, как это оптимально при движении в поле массовых сил [3]. Впервые на это указано, по-видимому, в работе [121]. Уравнения движения многоступенчатого КА могут быть представлены с использованием видоизмененной системы (3.1):

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = \frac{T_0^i T \vec{e} + \vec{F}_i(\vec{r}, \vec{v})}{M} + \vec{R}(\vec{r}); \quad \dot{M} = -\frac{T_0^i T}{V_0^i}. \quad (3.9)$$

Здесь T_0^i и V_0^i – максимальная тяга и максимальная средняя эффективная скорость истечения реактивной струи двигателей, работающих на участке i -ой ступени; \vec{F}_i – главный вектор сил аэродинамического сопротивления после сброса $(i-1)$ -ой ступени; $T \in [0, 1]$ – управляющая функция (коэффициент дросселирования тяги).

Полученные в работе [121] результаты указывают на возможность включения в состав оптимальной траектории участков скольжения по поверхности $M = M_i$, то есть пассивных участков перед сбросом отработавшей ступени. Учитывая непрерывность $\vec{\psi}_r, \vec{\psi}_v$ и H в t_i и предполагая безударное разделение ступеней, имеем:

$$[T_0^i T H_1]_i = T_0^{i+1} T(t_i) H_1(t_i) - T_0^i T(t_i - 0) H_1(t_i - 0) = \psi_v [f_e]_i. \quad (3.10)$$

Здесь через H_1 обозначена переключающая функция – коэффициент при управлении T в выражении функции H ; f_e – проекция аэродинамического торможения – $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})/M$ на направление оптимальной тяги (\vec{e} – проекция аэродинамического торможения). Если при сбросе массы $[f_e]_i > 0$ – аэродинамическое сопротивление $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v})$ уменьшается в меньшей степени, чем масса M – участок последующей ступени обязательно начинается с максимальной тяги. При любом другом управлении произведение

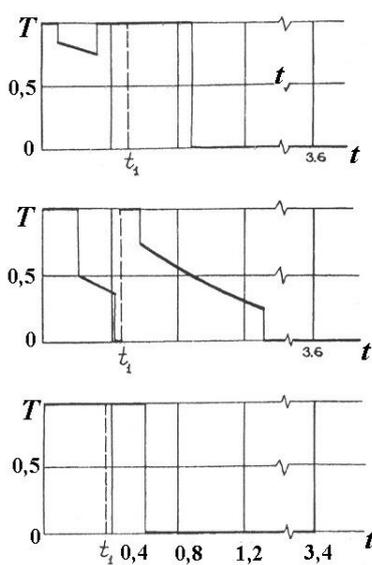


Рис. 15

$T_0^{i+1} T(t_i) H_1(t_i) = 0$ и условие (3.10) не выполняется. Относительно управления в конце участка предыдущей ступени, оно может быть любым. Таким образом, появление пассивного участка полета перед сбросом ступени, увеличивающим аэродинамическое торможение, не противоречит необходимым условиям оптимальности. На этом участке полета по инерции происходит использование кинетической энергии отбрасываемой затем массы конструкции, накопленной на предыдущем участке, для преодоления аэродинамического сопротивления. Указанная возможность отмечена выше при обсуждении $\gamma-h$ -парадокса (см. п. 2.1). На рис. 15 приведены различные варианты оптимального управления $P(t)$ тягой двухступенчатой ракеты при движении в однородном гравитационном поле ($g = 1$) и $F_i(h, v) = b_i v^2 \cdot \exp(-\alpha h)$ в задаче Годдарда [23].

Вычисления проведены при следующих значениях параметров:

- а) $\alpha = 100, b_i = 200, V_i = 1, \beta_1^i = 0,02, \gamma_2^1 = 0,01; a_0^1 = 2, a_0^2 = 0,15, m_1 = 0,925, m_\pi = 0,01;$
б) $\alpha = 10, b_i = 5, V_i = 1, \beta_1^i = 0,02, \gamma_2^i = 0,01; a_0^1 = 2, a_0^2 = 0,65, m_1 = 0,675, m_\pi = 0,01;$
в) $\alpha = 50, b_i = 25, V_i = 1, \beta_1^i = 0,02, \gamma_2^i = 0,01; a_0^1 = 2, a_0^2 = 0,9, m_1 = 0,775, m_\pi = 0,01.$

3.5 Оптимизация управления полетом крылатых ракет. Рассмотрим движения ЛА в вертикальной плоскости в ньютоновском центральном гравитационном поле в атмосфере. Безразмерные уравнения движения запишем в виде:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v \sin \theta; \quad \dot{\varphi} = \frac{v \cos \theta}{r}; \quad \dot{v} = \frac{T_0 u \cos \gamma - X}{m} - \frac{\sin \theta}{r^2}; \\ \dot{\theta} &= \frac{T_0 u \sin \gamma + Y}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{r^2 v} \right) \cos \theta; \quad \dot{m} = -qu, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где r – полярный радиус; φ – полярный угол центра масс аппарата, v – скорость; θ – угол наклона траектории к трансверсали; m – масса ЛА; T_0 – максимальная тяга; q – максимальный расход рабочего тела; u – коэффициент дросселирования тяги; X – аэродинамическое сопротивление; Y – аэродинамическая подъемная сила; γ – угол между вектором тяги и вектором скорости. Обезразмеривание произведено с использованием следующих масштабных множителей: $\tilde{r} = r_*$, $\tilde{t} = G^{-1/2} r_*^{3/2}$, $\tilde{v} = G^{1/2} r_*^{1/2}$. Здесь r_* – характерное расстояние от притягивающего центра; G – гравитационная постоянная притягивающего центра. Тяга, подъемная сила и сила сопротивления отнесены к $M_0 g$, расход q – к $M_0 \tilde{t}^{-1}$, где g – гравитационное ускорение на расстоянии r_* от притягивающего центра; M_0 – начальное значение массы ЛА. Зависимости силы сопротивления и подъемной силы от скорости, высоты и угла атаки γ заданы: $X = X(r, v, \gamma)$, $Y = Y(r, v, \gamma)$. Управляющие функции u и γ ограничены: $0 \leq u \leq 1$, $\gamma_1 \leq \gamma \leq \gamma_2$.

Система (3.11) относится к весьма распространенным при исследовании задач механики полета динамическим системам со скалярным управлением u , входящим линейно в уравнения движения, и r -мерным векторным управлением w , от которого вектор фазовой скорости зависит нелинейно:

$$\dot{x} = f_0(x, w) + u f_1(x, w) \quad (u \in [u_0, u^0]). \quad (3.12)$$

Введем в рассмотрение присоединенные функции $\psi_r, \psi_\theta, \psi_v, \psi_\gamma, \psi_m$ и гамильтониан. Необходимые условия оптимальности особого управления u при $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \gamma} &= \frac{T}{m} u \left(\frac{\psi_\theta}{v} \cos \gamma - \psi_v \sin \gamma \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{\psi_\theta}{v} Y_\gamma - \psi_v X_\gamma \right) = 0; \\ \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial \gamma} &= \frac{T}{m} \left(\frac{\psi_\theta}{v} \cos \gamma - \psi_v \sin \gamma \right) = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{T}{m} \left(\psi_v \cos \gamma + \frac{\psi_\theta}{v} \sin \gamma \right) - \psi_m q = 0; \quad (3.13) \\ \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= A(x, \psi, w) + u B(x, \psi, w) = 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений следует:

$$\psi_\theta \cos \gamma - \psi_v v \sin \gamma = 0; \quad \psi_\theta Y_\gamma - \psi_v v X_\gamma = 0. \quad (3.14)$$

Рассмотрим неособое управление γ , так что ψ_θ и ψ_v одновременно не равны нулю. Следовательно, определитель системы (3.14) равен нулю. Это условие запишем в виде

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial X / \partial \gamma}{\partial Y / \partial \gamma}. \quad (3.15)$$

С учетом формул $X = X(r, v, \gamma)$ и $Y = Y(r, v, \gamma)$ уравнение (3.15) позволяет определить оптимальное значение угла γ на особой дуге: $\gamma = \gamma_0(r, v)$. Обычно подъемная сила и сопротивление вычисляются по формулам $X = 0,5\rho(r)v^2 C_X(\gamma)S$, $Y = 0,5\rho(r)v^2 C_Y(\gamma)S$, где $\rho(r)$ – плотность атмосферы; S – характерная площадь; $C_X(\gamma)$ и $C_Y(\gamma)$ – коэффициенты сопротивления и подъемной силы. В этом случае уравнение (3.15) преобразуется к такому виду:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{C'_X(\gamma)}{C'_Y(\gamma)} = \frac{dC_X}{dC_Y}. \quad (3.16)$$

Подставляя γ_0 в первое уравнение системы (3.14), получаем первый интеграл системы уравнений движения и присоединенной системы при движении по сингулярной дуге: $\psi_\theta \cos \gamma_0 - \psi_v \cdot v \sin \gamma_0 = 0$. Дифференцируя левую часть этого соотношения по времени и приравнявая полученную производную нулю, получаем

$$\begin{aligned} \psi_v \left\{ \frac{\cos \theta}{ur^2 \cos \gamma_0} + \frac{v}{r} \operatorname{tg} \gamma_0 \sin(\theta + \gamma_0) + \frac{\sin \gamma_0}{m} \left[\frac{X}{v} - X_v + \operatorname{tg} \gamma_0 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(Y_v - \frac{Y}{v} \right) \right] \right\} - \psi_\theta \cos(\theta + \gamma_0) - u \psi_v \frac{P \operatorname{tg} \gamma_0}{v m} = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Видим, что значение управления u , удовлетворяющее уравнению (3.17), не совпадает с корнем четвертого уравнения (3.13), т.к. коэффициенты последнего зависят от частных производных функций $Y(r, v, \gamma_0)$, $X(r, v, \gamma_0)$ второго порядка. Следовательно, удовлетворить оба упомянутых уравнения выбором одного значения u невозможно и особое управление u неоптимально.

Таким образом, использование подъемной силы в качестве управляющего воздействия позволяет избежать дросселирования тяги, обусловленного стремлением снизить потери на преодоление аэродинамического сопротивления и вызывающего при этом увеличение гравитационных потерь. Отмеченное справедливо для аппаратов, управление величиной подъемной силы и направлением тяги у которых осуществляется одним воздействием – изменением ориентации аппарата по отношению к набегающему потоку (угол γ). Если система управления ЛА позволяет менять ориентацию хорды крыла и тяги движителя независимо, эффективность управления (как, впрочем, и его сложность) возрастает.

3.6. Подъем-разгон в атмосфере. Ниже обсуждаются дополнительные возможности, возникающие при усложнении системы управления движением ЛА, допускающей независимое регулирование угла атаки и угла направления тяги.

Движение центра масс летательного аппарата в центральном ньютоновском гравитационном поле описывается следующей системой уравнений (траектория – плоская, система координат – полярная, начало отсчета – в притягивающем центре) [24]:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = v \sin \theta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \theta; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{T \cos \gamma - X(\alpha, r, v)}{m} - \frac{\sin \theta}{r^2}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{T \sin \gamma + Y(\alpha, r, v)}{mv} + \left(\frac{v}{r} - \frac{1}{vr^2} \right) \cos \theta; \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{T}{V_0}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $X = C_x(\alpha)F$; $Y = C_y(\alpha)F$; $C_x(\alpha) = C_{x_0} + B\alpha^2$; $C_y(\alpha) = A\alpha$; $F = bv^2 \exp[-\beta(r-1)]$; α – угол атаки; C_x коэффициент сопротивления; C_{x_0} – коэффициент сопротивления при нулевом угле атаки; C_y – коэффициент подъемной силы; F – численно равно произведению скоростного напора при $\rho = \rho_0$ и $v = 1$ на характерную площадь летательного аппарата S ; A и B – коэффициенты функций, аппроксимирующих поляру аппарата (принимаются постоянными); $\rho(r) = \rho_0 \exp[-\beta(r-1)]$ – плотность воздуха (принимается убывающей по экспоненциальному закону с увеличением высоты). Соотношения (3.18) обезразмерены аналогично системе (3.11). На управляющие функции $T(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$ наложены ограничения: $0 \leq T \leq T_{\max}$, $|\alpha| \leq \alpha_0$, $|\gamma| \leq \gamma_0$, где T_{\max} , α_0 , γ_0 – заданные константы. Граничные значения r , v , θ , m на левом и правом концах траектории принимаются заданными, за исключением значения максимизируемой координаты $v(T)$; угловая дальность $\varphi(t_f)$ и время выполнения маневра t_f не фиксируются при формулировке задачи:

$$r(0) = r_0; \varphi(0) = 0; v(0) = v_0; \theta(0) = \theta_0; m(0) = 1; r(t_f) = r_1;$$

$$\varphi(t_f) \rightarrow \text{opt}; v(t_f) \rightarrow \text{max}; \theta(t_f) = 0; m(t_f) = m_1.$$

Необходимо определить траекторию перемещения летательного аппарата из заданного начального состояния в конечное с максимальной горизонтальной скоростью в конце траектории. Оптимальные значения управляющих функций определяются из условия максимума функции Гамильтона H , которую представим в следующем виде: $H = H_0 + TH_1$ где

$$H_0 = \psi_r v \sin \theta + \psi_\varphi r^{-1} v \cos \theta - \psi_v (m^{-1} X + r^{-2} \sin \theta) + \psi_\theta [v^{-1} m^{-1} Y + (r^{-1} v - r^{-2} v^{-1}) \cos \theta];$$

$$H_1 = \psi_v m^{-1} \cos \gamma + \psi_\theta v^{-1} m^{-1} \sin \gamma - \psi_m V_c^{-1}.$$

Оптимальные значения управляющих функций определяются соотношениями:

$$T = \begin{cases} T_{\max} & \text{при } H_1 > 0 \\ T_s & \text{при } H_1 \equiv 0 \\ 0 & \text{при } H_1 < 0 \end{cases} \quad (0 < T_s < T_{\max}); \quad \gamma = \begin{cases} \hat{\gamma} & \text{при } |\hat{\gamma}| < \gamma_0; \\ \gamma_0 & \text{при } |\hat{\gamma}| \geq \gamma_0 \wedge \psi_\theta > 0; \\ -\gamma_0 & \text{при } |\hat{\gamma}| \geq \gamma_0 \wedge \psi_\theta < 0; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \hat{\alpha} & \text{при } |\hat{\alpha}| < \alpha_0 \wedge \psi_v > 0; \\ \alpha_0 & \text{при } \psi_\theta > 0 \wedge (\psi_v < 0 \vee |\hat{\alpha}| \geq \alpha_0); \\ -\alpha_0 & \text{при } \psi_\theta < 0 \wedge (\psi_v < 0 \vee |\hat{\alpha}| \geq \alpha_0), \end{cases} \quad (3.19)$$

где обозначено: $\hat{\gamma} = \arctg(\psi_\theta / v\psi_v)$; $\hat{\alpha} = A\psi_\theta / 2Bv\psi_v$.

При обращении в ноль переключающей функции $H_1(t)$ на отрезке $[\tau, \vartheta) \subset [0, t_f]$ управление величиной тяги особое: $T(t) = T_s(t)$. При этом вдоль особой экстремали одновременно выполняются соотношения: $H_1 = 0$, $\dot{H}_1 = 0$, а величина особого управления определяется из уравнения $\ddot{H}_1 = 0$, линейного относительно T_s [8].

В результате проведенного анализа исходная задача оптимального управления сведена к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений движения и сопряженной системы. Численное решение этой краевой задачи проводится методом Ньютона. В рассматриваемой задаче из четырех подлежащих определению в начальный момент времени компонент сопряженного вектора: $\psi_r(0), \psi_v(0), \psi_\theta(0), \psi_m(0)$ достаточно определить лишь два, потому что, во-первых, сопряженная система линейна и однородна (поэтому одну из компонент вектора $\psi(0)$ можно выбрать произвольно), во-вторых, первый интеграл $H(t) = 0$ позволяет исключить еще одно значение сопряженной функции в начальный момент времени. Относительно функции $\psi_\varphi(t)$, то она равна тождественно нулю, поскольку правые части уравнений движения не зависят от фазовой переменной φ , и конечное значение $\varphi(t_f)$ не фиксируется при постановке задачи; следовательно $\dot{\psi}_\varphi(t_f) \equiv 0$ и $\psi_\varphi(t_f) = 0$. Для решения задачи предлагается вместо поиска двух начальных значений компонент вектора $\psi(0)$ искать две их комбинации ξ и ω , непосредственно связанные с начальными значениями управляющих функций: определяющих значения сопряженных функций в начальный момент времени:

$$\xi = \begin{cases} H_1(0) & \text{при } \theta_0 \neq 0, \\ \psi_r(0) & \text{при } \theta_0 = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

и угол $\omega \in [-\pi, \pi]$, значение которого задается таким образом: $\psi_\theta(0) = \sin \omega$; $\psi_v(0) = \cos \omega / v(0)$. Задавшись некоторым значением вектора $z = (\xi, \omega)$, определяем начальные значения всех сопряженных функций. Затем система уравнений оптимального движения численно интегрируется на $[0, t_f]$ с учетом условий выбора оптимальных управлений (3.19). При $t = t_f$ вычисляется невязка $R = (r(t_f) - r_1)^2 + \theta^2(t_f) + (m(t_f) - m_1)^2$, которая является функцией двух параметров: ξ и ω . Если будет найден минимум невязки $R(\xi_*, \omega_*) = 0$, то тем самым будет решена двухточечная краевая задача. Расчеты проведены при следующих числовых значениях параметров: $C_{x_0} = 0,05$; $A = 0,7$; $B = 0,7$; $b = 6200$; $\beta = 500$; $T_{\max} = 3$; $V_c = 0,5$; $\alpha_0 = 0,2618$; $\gamma_0 = 0,5236$; $r_0 = 1,00016$; $v_0 = 0,021$; $\theta_0 = 1,48$.

В результате расчетов установлено, что достижение горизонтальной скорости на траектории возможно лишь при условии $z \in \text{int } \Omega$. Область Ω состоит из пяти подобластей и показана на рис. 16.

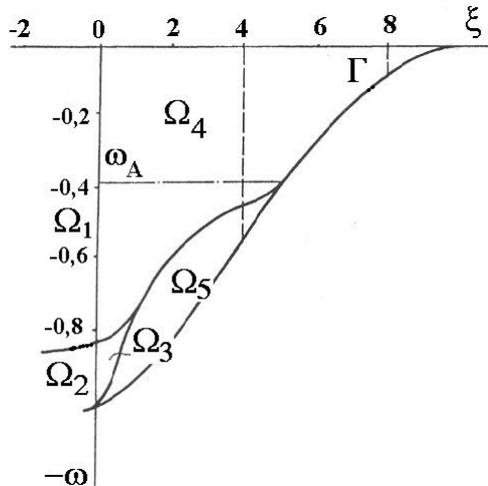


Рис. 16

Траектории, соответствующие значениям z из различных подобластей, отличаются числом и/или последовательностью граничных участков управления величиной тяги [24]. На рис. 17 представлены зависимости конечных значений высоты $r(t_f)$ и массы $m(t_f)$ ЛА от параметра ω при двух постоянных значениях ξ (сплошные кривые: $\xi = 4$; штриховые: $\xi = 8$). Видно, что при регулярном управлении не все конечные состояния достижимы: кривые имеют разрывы первого рода. Для значений (ξ, ω) , удаленных от точек разрыва, применение методов подбора недостающих начальных

значений компонент вектора $\bar{\psi}(0)$ типа метода Ньютона вполне оправданно, т. к. решение задачи непрерывно зависит от начальных условий. Вблизи же точек разрыва кривых на рис. 17 малым вариациям начальных условий отвечают большие изменения положения конечной точки в фазовом пространстве. На рис. 18 приведен пример динамики фазовых переменных, на рис. 19 – переключающей функции $H_1(\xi, \omega)$ и управляющих функций рассматриваемой задачи.

Сплошные кривые получены при начальных значениях $\zeta = 8,0217$, $\gamma = -0,085$, штриховые – при $\zeta = 8,0218$, $\gamma = -0,085$. Ход кривых на эти рисунках наглядно иллюстрирует некорректность задачи и проясняет существо трудностей, возникающих при ее решении методом типа метода Ньютона. Как отмечено в диссертации [23, с. 106], «при этом итерационный процесс минимизации невязки $R(z)$ практически прекращается в связи с тем, что поверхность $R = R(z)$ вблизи линии Γ имеет четко выраженный овражный характер, причем последовательность $R(z_n)$ не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ ».

Таким образом, в вырожденных задачах оптимального управления установить однозначное соответствие между полем экстремалей и системой параметров, связанных с начальными значениями сопряженных функций $\psi(0)$, не удается. Такая параметризация не охватывает траекторий, в состав которых входят особые участки. Процедура вычисления оптимальных траекторий в рассматриваемой задаче отличается от использованной при решении задачи Годдарда (см. п. 3.1), поскольку здесь отсутствует поверхность особого управления. Для решения задачи применялся следующий метод. Зададимся двумя числами $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и обозначим

$$o_\varepsilon = \{(x, \psi) : |H_1(x, \psi)| < \varepsilon\};$$

$$o_\delta = \left\{ (x, \psi) : \left| \frac{dH_1(x, \psi)}{dt} \right| < \delta \right\}. \quad (3.21)$$

Далее, как и в методе Ньютона, выбирается произвольным образом вектор

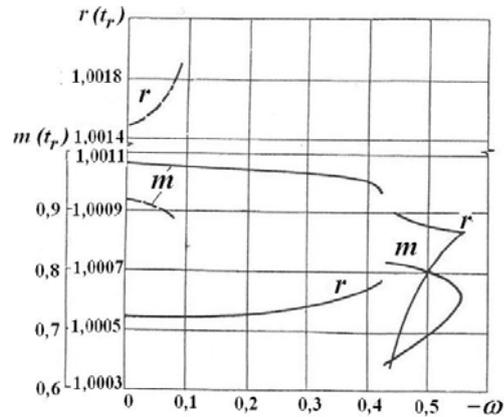


Рис. 17

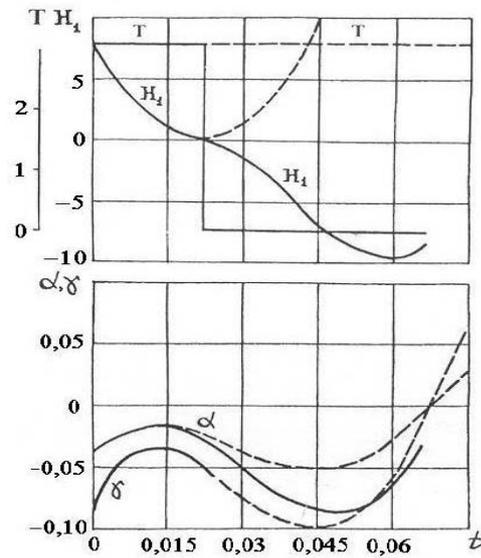


Рис. 18

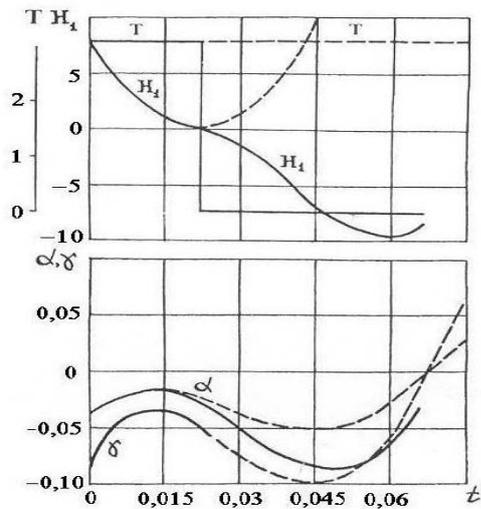


Рис. 19

$z = (\xi, \omega)$. Система уравнений движения и сопряженная численно интегрируются. Если в процессе минимизации невязки при интегрировании окажется, что в некоторый момент времени $t = \tau$ вектор $(x(\tau), \psi(\tau)) \in O_\varepsilon \cap O_\delta$, то состояние $x(\tau)$ динамической системы принимается за начало сингулярной дуги. При этом значения сопряженных функций $\psi(\tau)$ несколько подправляются с тем, чтобы равенства $H_1 = 0$, $\dot{H}_1 = 0$ выполнялись строго, в отличие от (3.21). Проверка корректности такого изменения сопряженных функций, а также контроль правильности выбора чисел ε и δ осуществляется интегрированием системы уравнений оптимального движения из вновь полученной (после указанной коррекции точки $(x(\tau), \psi(\tau))$ в окрестность начального состояния) системы. Следующим этапом построения оптимальной траектории является поиск момента схода с особого участка на регулярную дугу.

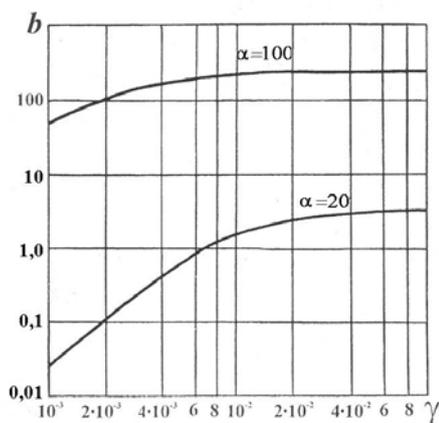


Рис. 20

3.7. Theoria cum practice: тише едешь

– дальше будешь! В этом разделе проанализируем некоторые следствия описанных выше результатов решения задачи о движении ракеты в атмосфере и в ньютоновском центральном гравитационном поле в вакууме. На рис. 20 представлены полученные для задачи Годдарда границы областей оптимальности использования дросселирования тяги на плоскости конструктивных параметров (γ, b) , характеризующих степень конструктивного совершенства ракетного двигателя и аэродинамики корпуса ракеты. Участок особого управления входит в состав оптимальной траектории подъема для тех значений

γ и b , при которых соответствующая точка лежит выше граничной кривой [15].

Анализ этих граничных кривых дает основание сформулировать следующий принцип соответствия при конструктивном совершенствовании ракет:

1) весовое совершенствование двигательной системы должно сопровождаться – при достижении некоторого порогового значения удельной массы γ^* – переходом от нерегулируемого двигателя к двигателю, допускающему дросселирование величины тяги в достаточно широких пределах;

2) величина γ^* уменьшается при совершенствовании аэродинамических характеристик ракеты.

Таким образом, проведенный в данном разделе анализ оптимального управления движением ракеты в среде с сопротивлением показал, что подтверждается справедливость на первый взгляд парадоксальной мудрости: «Тише едешь – дальше будешь!». Оказывается, при этом можно и подняться выше (п. 3.1), и даже достичь заданной высоты быстрее (п. 3.2). Если удельная (относительно величины тяги) масса двигателя становится меньше, то можно использовать двигатель побольше. Но принцип: сила есть – ума не надо, – не рационален! Большой двигатель должен быть «умнее»!

Отметим также, что наличие атмосферы позволяет использовать для улучшения характеристик РН как аэродинамическую, так и аэростатическую подъемную силу. В работе [30] автор данной монографии показал принципиальную возможность набора нулевой энергии ракетой, поднимаемой на начальном этапе с помощью аэростата. В статье [34] эта идея анализировалась для старта аппарата с образцами грунта с поверхности Венеры с последующим выходом на круговую орбиту ожидания ее спутника. В результате расчетов, выполненных с актуальными ко времени их проведения

(1986 год) значениями параметров ракеты, двигателя и аэростата, оптимальная высота аэростатического подъема оказалась равной примерно 80 км. Почти через 30 лет после этой публикации подразделение НАСА (NASA's Systems Analysis and Concepts Directorate at Langley Research Center) предлагает миссию HAVOC (High Altitude Venus Operational Concept). «Миссия... предполагает несколько этапов реализации, включая посещение Венеры роботами для изучения текущей ситуации... Затем становится возможной реализация следующего этапа миссии, с пребыванием на орбите Венеры в течение 30 дней, а также еще один этап – с путешествием в верхние слои атмосферы Венеры (и 30-дневным пребыванием)». Исследования предлагается проводить с аэростатического аппарата в атмосфере на высоте около 50 км (<http://geektimes.ru/post/243103/>).

§4. Оптимальные скользящие режимы работы ракетных двигателей.

Проанализированные в разделе §3 прикладные аспекты особого управления величиной тяги ракет при движении в атмосфере стимулируют необходимость углубленного анализа теоретической обоснованности полученных выводов. Приведенные на рис. 5 и 12 примеры зависимости тяги ракетного двигателя от времени при движении вдоль сингулярных дуг оптимальных траекторий дают наглядное представление о характере возникающих здесь проблем. Глубина дросселирования тяги на особых участках траектории ставит под сомнение допустимость использования гипотезы о возможности применения в анализе и расчетах приближенного представления расходной характеристики ракетного двигателя в форме (1.1) вместо (1.2), поскольку влияние второго слагаемого в формуле (1.2) перестает быть несущественным при уменьшении величины первого. Ниже проведем анализ оптимального управления движением ракет в атмосфере с более точным описанием зависимости величины тяги двигателя от расхода топлива и высоты полета.

4.1. Расходные характеристики реальных двигателей ограниченной скорости истечения. Величина тяги ракетного двигателя T при движении в атмосфере отличается от значения T_v тяги в вакууме

$$T = T_v - p_h \sigma, \quad (4.1)$$

где p_h – давление в среде, в которой работает двигатель; σ – площадь выходного сечения сопла двигателя. Как отмечено в п. 2.1, в большинстве работ по механике полета ракет в атмосфере расходная характеристика (4.1) заменяется приближенной: $T = qV_e$, а эффективная скорость истечения V_e (см. (1.7)) принимается постоянной.

Для более строгой формулировки задачи об управлении тягой в атмосфере может быть введена новая релейная управляющая функция δ , принимающая значение единицы на активном и равная нулю на пассивном участках движения:

$$T\vec{e} + \vec{F} = (qV - p_h\sigma)\delta\vec{e} + \vec{F}; \quad \dot{m} = -q\delta. \quad (4.2)$$

При записи уравнений движения ракеты с использованием представления (4.2) принимается, что управление производится включением ($\delta = 1$) или выключением ($\delta = 0$) двигателя, дросселированием расхода $p_h\sigma/V < q \leq q_0$ и поворотом вектора тяги. Анализ, приведенный в [37], показал, что при использовании такого описания ракетного двигателя как объекта управления оптимальным оказывается граничное управление расходом рабочего тела $q = q_0$ на всех активных ($\delta = 1$) участках полета. Этот результат противоречит основному выводу, полученному в предыдущей главе, о том, что в состав оптимальных траекторий в среде, оказывающей сопротивление движущемуся телу, могут входить особые дуги, движение вдоль которых происходит с некоторой оптимальной скоростью, меньшей максимально возможной. В той же работе показано, что движение с указанной оптимальной скоростью может быть осуществлено на участках скользящего режима управления.

Для проведения более тщательного анализа оптимального управления построим более точную зависимость величины тяги от расхода рабочего тела. Применение одномерной теории сопла Лавала дает для идеального (без учета потерь) двигателя следующие формулы для тяги и расхода рабочего вещества [14]:

$$T = p\sigma_* \left(\frac{2}{\chi+1} \right)^{1/(\chi-1)} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - p_h\sigma; \quad q = p\sigma_* \left(\frac{2}{\chi+1} \right)^{(x+1)/(2(\chi-1))} \sqrt{\frac{\chi}{RT}}. \quad (4.3)$$

Здесь p и T – давление и температура рабочего тела в камере сгорания двигателя; χ и R – показатель адиабаты и газовая постоянная рабочего тела; λ – скоростной коэффициент рабочего тела в выходном сечении сопла; σ_* – площадь критического сечения сопла. Соотношение (4.3) справедливо, пока течение в закритической части сопла остается сверхзвуковым. При дальнейшем уменьшении p ниже некоторого значения p_2 внутри сопла размещается система скачков уплотнения и зависимость $T(p)$ становится нелинейной. Расчет величины тяги производится при этом с использованием полуэмпирических формул [61], так как соотношения, полученные по одномерной теории, не соответствуют наблюдаемым в эксперименте зависимостям. Формула (4.3) для расхода газа на этом режиме работы сопла остается неизменной. При значениях p , меньших некоторого p_1 , движение газа в сопле двигателя полностью дозвуковое. Для этого случая по одномерной теории потока идеального совершенного газа формулы тяги и расхода могут быть представлены следующим образом [29]:

$$T = \frac{2\chi}{\chi-1} p_h\sigma \left[\left(\frac{p}{p_h} \right)^{\chi-1} - 1 \right]; \quad q = p_h\sigma \left\{ \frac{2\chi}{(\chi-1)RT} \left[\left(\frac{p}{p_h} \right)^{\frac{2(\chi-1)}{\chi}} - \left(\frac{p}{p_h} \right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (4.4)$$

Функциональная зависимость $T(q)$, заданная параметрически (параметр p) формулами (4.3), (4.4) и полуэмпирическими соотношениями из [61], является основой математической модели ракеты, исследуемой ниже. Качественное представление о характере этой зависимости дают кривые на рис. 21, 22.

В качестве управляющей функции при постановке задач оптимизации движения с использованием такой регулировочной характеристики удобно выбирать величину давления в камере сгорания $p \in [p_h, p_0]$; температура газов в камере принимается максимальной, что соответствует управлению $V = V_0$, оптимальному для идеально регулируемых двигателей ограниченной скорости истечения [14], поскольку отвечает минимальному значению расхода топлива.

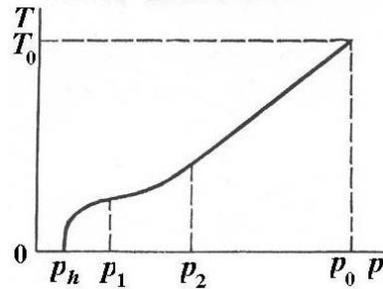


Рис. 21

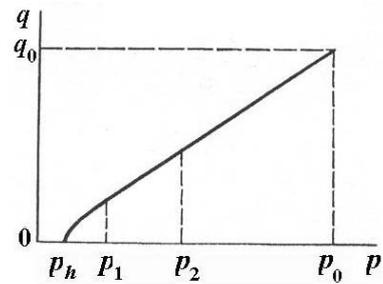


Рис. 22

4.2. Состав оптимальной траектории. Регулировочную характеристику $T(p)$ и $q(p)$, описанную в п. 4.1 и представленную качественно на рис. 21, 22, используем для анализа оптимального управления тягой в задачах механики полета КА. Уравнения движения запишем в форме, аналогичной (1.14):

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}; \quad \dot{\vec{v}} = (T(p)\vec{e} + \vec{F})/m + \vec{R}; \quad \dot{m} = -q(p). \quad (4.5)$$

Управляющие функции p и \vec{e} ограничены: $p_h \leq p \leq p_0$, $|\vec{e}| = 1$. Ниже рассмотрена вариацион-

ная задача Майера о выполнении некоторого динамического маневра с минимальным значением выбранного критерия качества – заданной функции фазовых координат в конечной точке. Из условия максимума гамильтониана H системы (4.5)

$$H = \bar{\psi}'_r \bar{v} + \bar{\psi}'_v \left[\frac{T(p)\bar{e} + \bar{F}}{m} + \bar{R} \right] - \psi_m q(p) \quad (4.6)$$

при $T(p) \neq 0$ заключаем о коллинеарности единичного вектора тяги \bar{e} базис-вектору Лоудена $\bar{\psi}'_v$.

Введем обозначение $H_1 = \psi_v T(p)/m - \psi_m q(p)$. Зависимость $H_1(p)$ на интервале $p \in [p_2, p_0]$ – линейна (см. (4.3)). При работе двигателя с системой скачков уплотнения внутри сопла ($p \in (p_1, p_2)$) функция $H_1(p)$ выпукла

$$\frac{\partial^2 H_1(p)}{\partial p^2} = \frac{\psi_v}{m} \cdot \frac{\partial^2 T(p)}{\partial p^2} - \psi_m \frac{\partial^2 q(p)}{\partial p^2} > 0, \quad (4.7)$$

так как на рассматриваемом интервале функция $q(p)$ линейна (см. (4.3)), а выпуклость функции $T(p)$ удается показать как для полуэмпирических формул [61], так и для соотношений (4.4), полученных по одномерной теории. Поэтому точка максимума функции $H_1(p)$ не может принадлежать интервалу $[p_1, p_2]$. То же справедливо и относительно интервала (p_h, p_1) [29]. Следовательно, функция (4.6) может принимать максимальные значения лишь в граничных точках области допустимых значений управления p (см. кривые 1, 3 на рис. 23) и оптимальные значения p на регулярных дугах оптимальной траектории, доставляющие максимум функции H , определяются следующим образом: $p = p_0$ при $H_1(p_0) > 0$, $p = p_h$ при $H_1(p_0) < 0$. Выполнение равенства $H_1(p_0) = H_1(p_h)$ (кривая 2 на рис. 23) вдоль некоторой дуги траектории есть необходимое условие оптимальности скользящего режима первого рода [94]. Участки промежуточной тяги $p \in (p_h, p_0)$ не оптимальны.

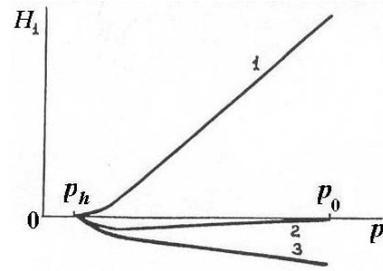


Рис. 23

Для изучения линии нулевой близости скользящего режима проводится стандартное преобразование исходной задачи, состоящее в переходе к ослабленной задаче путем дополнения множества допустимых фазовых скоростей до его выпуклого замыкания. Уравнения ослабленной задачи с учетом обращения в нуль тяги T и расхода q при $p = p_h$ могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}; \quad \dot{\bar{v}} = (T(p_0)\bar{e}\delta + \bar{F})/m + \bar{R}; \quad \dot{m} = -q(p_0)\delta. \quad (4.8)$$

В этой системе управляющая функция $\delta \in [0, 1]$ и множество допустимых управлений выпукло, в отличие от (4.2). Необходимые условия оптимальности скользящего режима в исходной задаче могут быть получены теперь как необходимые условия оптимальности особого управления δ :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_v}{m} T(p_0) - \psi_m q(p_0) = 0; \quad \psi_v \frac{\partial T(p_0)'}{\partial \bar{r}} \bar{v} - \frac{T(p_0)}{\psi_v} \left(\bar{\psi}'_r \bar{\psi}'_v + \frac{1}{m} \bar{\psi}'_v \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{v}} \bar{\psi}'_v \right) - \frac{q(p_0)}{m} \bar{\psi}'_v \bar{F} = 0; \\ 2T(p_0) \bar{\psi}'_v \frac{\partial T(p_0)}{\partial \bar{r}} - 2 \frac{T(p_0)q(p_0)}{m\psi_v} \bar{\psi}'_v \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{v}} \bar{\psi}'_v - \frac{T(p_0)}{m} \frac{\bar{\psi}'_v}{\psi_v^2} \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\bar{\psi}'_v \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{v}} \bar{\psi}'_v \right) - \frac{q^2(p_0)}{m} \bar{\psi}'_v \bar{F} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При записи соотношений (4.9) вектора представлены матрицами-столбцами, штрих – знак транспонирования. При тождественном обращении в нуль левой части неравенства (4.9) (условие Келли) порядок вырождения управления возрастает и особое управление δ может быть оптимально лишь при специальном подборе граничных условий маневра. Таким образом, переход от классического представления регулярированной характеристики $T = qV_e$ к более точной (рис. 21, 22) связан с существенным изменением состава оптимальной траектории: заменой дуг переменной тяги участками оптимального скользящего режима. Отметим, что этот результат отнюдь не представляется очевидным на уровне здравого смысла.

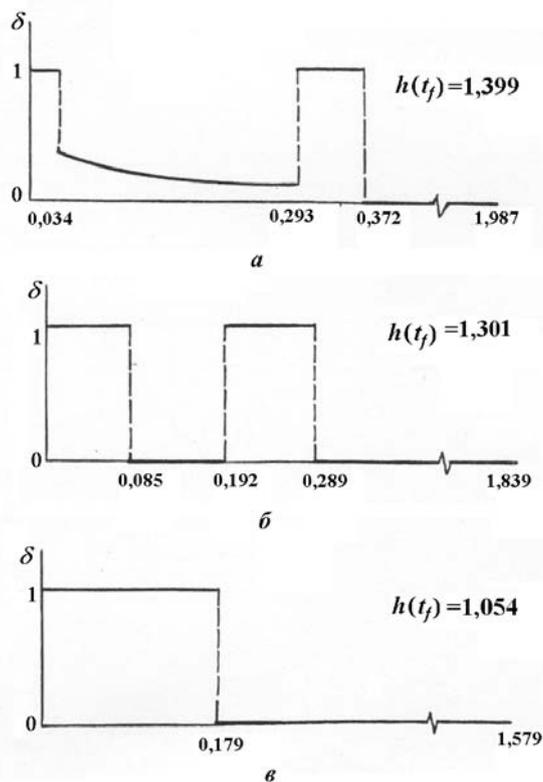


Рис. 24

Кривые на рис. 24 построены для таких значений параметров [37]: $b = 60$, $\alpha = 75$, $\omega_0 = 0,5$, $v = 100$, $\gamma = 0,01$, $a_0 = 5$, $m_\pi = 0,01$. Данные, приведенные на рис. 24, и формулы (24) – безразмерны. Обезразмеривание проведено с использованием тех же масштабных множителей, что и в уравнениях (3.1) п. 3.1.

Рассмотрим задачу оптимизации движения в вертикальной плоскости. Движение центра масс ЛА без подъемной силы с тангенциальным направлением тяги описывается системой

$$\frac{dr}{dt} = v \sin \vartheta; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \cos \vartheta; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{a_0(1 - p_h(r))\delta - F(r, v)}{m} - \frac{\sin \vartheta}{r^2};$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left(v - \frac{1}{rv} \right) \frac{\cos \vartheta}{r}; \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{a_0}{V_0} \delta. \quad (4.10)$$

Здесь r и φ – полярные координаты центра масс ЛА в выбранной инерциальной системе координат, полюс которой расположен в притягивающем центре; v – скорость

4.3. Оптимальные траектории с участками скользящего режима в вертикальной плоскости.

Ниже приведены результаты решения некоторых задач об оптимизации движения КА в вертикальной плоскости с использованием модели (4.8). Для построения оптимальных траекторий применено преобразование исходной задачи к ослабленной. На рис. 24 приведена зависимость управления $\delta(t)$ в ослабленной задаче, соответствующей задаче Годдарда. Рис. 24, а соответствует оптимальному управлению, рис. 24, б – его кусочно постоянная аппроксимация с тремя переключениями, рис. 24, в – аппроксимация с одним переключением. Вычисления проведены при следующих предположениях о сопротивлении $F(h, v)$ и противодействии $p_h \sigma$:

$$F = bv^2 \exp(-\alpha h);$$

$$p_h \sigma = \omega_0 \exp(-vh).$$

полета; \mathcal{A} – угол наклона вектора скорости, измеряемый от местной трансверсали. Гравитационное поле планеты примем ньютоновским центральным.

Уравнения (4.10) обезразмерены стандартным образом [14], описанным при обезразмеривании уравнения (3.12). Рассмотрим вычисление оптимальной траектории выведения ЛА на орбиту спутника планеты, сформулировав для этого вариационную задачу о переводе объекта, описанного системой (4.11) из начального состояния ($r(0) = r_0$, $v(0) = v_0$, $m(0) = 1$, $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}_0$, $\varphi(0) = 0$) в конечное ($r(t_f) = r_1$, $\mathcal{A}(t_f) = 0$, $m(t_f) = m_1$) с максимальным значением скорости $v(t_f)$. Угловая дальность точки выхода на орбиту $\varphi(t_f)$ и время выполнения маневра t_f не заданы. Процедура вычисления оптимальной траектории в этой задаче представлена в работе [43]. На рис. 25 приведен пример изменения правления δ и переключающей функции H_1 вдоль оптимальной траектории выведения КА на орбиту спутника Земли. За участком разгона с максимальной тягой следует примерно такой же длительности сингулярная дуга и протяженный пассивный участок. Короткий участок максимальной тяги завершает разгон КА до орбитальной скорости. Динамика фазовых переменных представлена на рис. 26, сопряженных переменных – на рис. 27. Вычисления выполнены при:

$$F(r, v) = D e^{-\alpha(r-1)} C_x(v) v^2;$$

$$C_x(v) = C_x^0 + b_1 v^4 (b_2 v^4 + b_3 v + b_4)^{-1}; P_h(r) = P_h^0 e^{-\omega(r-1)}$$

при следующих числовых значениях параметров:

$$C_x^0 = 0,05, b_1 = 0,15, b_2 = 1, b_3 = 3,23 \cdot 10^{-4},$$

$$b_4 = 1,63 \cdot 10^{-5}, D = 480, P_h^0 = 0,15.$$

Зависимость эффективности оптимального управления при выполнении выведения КА на почти круговую орбиту спутника планеты проиллюстрирована на рис. 28. По оси ординат отложено отнесенное к $v_1(T)$ превышение Δv конечной скорости $v(T)$ при оптимальном управлении над величиной скорости $v_1(T)$, до которой удастся разогнать аппарат при более простом управлении: два активных участка максимальной тяги, разделенных пассивным участком. При $a_0 = 1$ скользящий режим не оптимален, так что $\Delta v = v(T) - v_1(T) = 0$. С увеличением a_0 эффективность оптимального управления возрастает. Отметим, что та же тенденция наблюдается и в задаче Годдарда

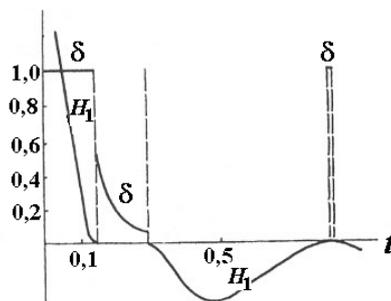


Рис. 25

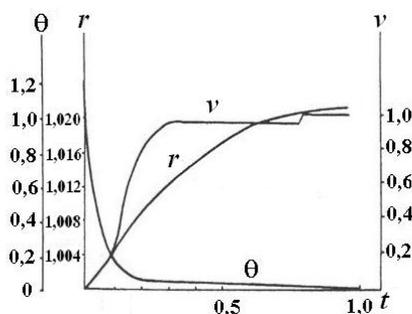


Рис. 26

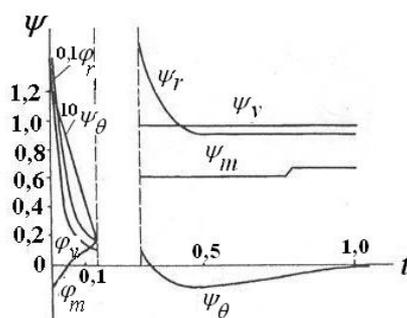


Рис. 27

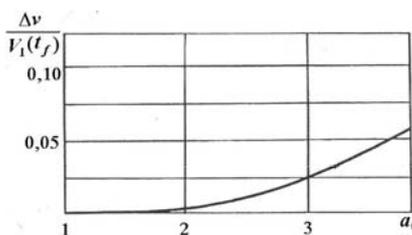


Рис. 28

(п. 3.1). Протяженность участков скользящего режима существенно возрастает в задаче на быстродействие, для которой характерны более высокие значения оптимальной начальной тяговооруженности a_0 [44].

4.4. Оптимальная аппроксимация скользящих режимов. Как отмечено в п. 4.1, в связи с ощутимым временем переходных процессов при включении или выключении реальных химических тепловых ракетных двигателей [2,3], необходимо дальнейшее совершенствование математической модели ЛА как объекта управления, учитывающее указанную особенность. Одним из наиболее распространенных способов аппроксимации практически нереализуемого скользящего режима является режим с конечным числом переключений. В монографии [72] отмечено, что при решении вырожденных задач «...часто удается получить решение, очень точное по значению функционалов, в то время, как сама управляющая функция является довольно грубым приближением к точной». Даже если удастся получить точное решение, оно «... не может быть описано сравнительно простым аналитическим выражением, и создание автоматики, обеспечивающей расход в точном соответствии с формой оптимального закона, было бы чрезвычайно трудным». Однако слабую чувствительность значения функционала к вариациям закона управления вблизи оптимума «... следует расценивать как благоприятное обстоятельство: ведь этим облегчается задача аппроксимации оптимального управления фактически реализуемыми средствами» [72, с. 355]. Проще всего ограничиться априорным предположением о конечности допустимого числа переключения управления N . Плата за эту простоту – отсутствие оптимального элемента среди допустимых: минимальное значение функционала достигается при $N \rightarrow \infty$. В этой связи практически приемлемой представляется следующая схема. Вначале задача решается без ограничения на число переключений. Если в состав оптимальной траектории входит участок скользящего режима, строится новое решение с фиксированным *a priori* значением N и полученная при этом величина функционала сравнивается с минимальной, отвечающей траектории со скользящим режимом. Если степень близости этих значений неудовлетворительна, строится новое решение с $N_1 > N$. На рис. 24, а) представлена зависимость $\delta(t)$ в задаче Годдарда. Аппроксимация этой зависимости траекторией с одним (рис. 24, в) и тремя переключениями (рис. 24, б) приводит к снижению достигаемой ракетой высоты. Так, при недостижимом оптимальном скользящем режиме безразмерная высота равна 1,399, при $N=1$ высота падает до значения 1,054, а при $N=3$ возрастает, по сравнению с подъемом с одним переключением, до 1,301. Сравнение приведенных значений $h(T)$ показывает, что при переходе от $N=1$ к $N=3$ потери высоты, по отношению к нереализуемому скользящему режиму, снижаются с 25 % до 7 %.

Замена участков скользящего режима дугами с конечным числом переключений управления – традиционный универсальный прием аппроксимации в теории оптимальных скользящих режимов [50]. Для двигательных систем, выполненных конструктивно в виде пакетов, собранных из отдельных двигателей, может быть предложен более удобный, как с точки зрения практической реализации, так и возможности приближения оптимальной программы $\delta(t)$, способ: ступенчатая аппроксимация. При этом величина δ при аппроксимации линии нулевой близости скользящего режима должна трактоваться как отношение числа включенных секций к полному числу секций двигательной системы. Оптимальное управление $\delta(t)$ на участке скользящего режима «отслеживается» в таком случае точно лишь для двигательной системы, составленной из бесконечного числа бесконечно малых секций. При решении задачи об оптимальной аппроксимации скользящего режима при конечном числе секций n необходимо фиксировать *a priori* и допустимое число переключений N , так как в противном случае неизбежно возникает скользящий режим работы одной или нескольких секций.

Если для вычисления массы двигателя в пакете использовать нелинейное соотношение $M_\gamma = \gamma T_0^\chi$ ($0 < \chi < 1$), учитывающее усложнение конструирования при уменьшении размеров объекта, суммарная масса пакета неограниченно возрастает с увеличением n . Указанного уточнения линейной зависимости достаточно для формулировки задачи об оптимальном числе секций двигательной системы. На рис. 29 представлена зависимость времени t_f достижения заданной

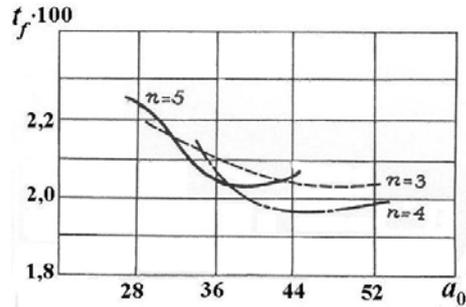


Рис. 29

высоты h от начальной тяговооруженности a_0 и числа секций двигательной системы, полученная при решении задачи об оптимальном быстродействии при вертикальном движении в атмосфере [73]. В приведенном примере оптимально значение $n = 4$.

4.5. Исследование эффективности сопла изменяемой геометрии. При исследовании влияния внешних факторов на полет ракеты еще К.Э. Циолковский указал на непосредственное воздействие давления атмосферы на величину тяги, развиваемой ракетным двигателем. Это отмечено уже в первой редакции работы «Исследование мировых пространств реактивными приборами» (Изд-во Тип. С.А.Семенова. – 1914. – 20с). В издании той же работы 1926 г. К.Э.Циолковский указывает на возможность уменьшения отрицательного воздействия атмосферных газов на реактивную струю и, следовательно, на величину тяги путем изменения конфигурации сопла. Скептическая оценка возможности практической реализации этой идеи у К.Э. Циолковского вполне оправдана состоянием технического уровня и научных исследований в ракетодинамике конца двадцатых годов прошлого века.

В настоящее время в связи со стремлением к снижению затрат на запуск космических аппаратов возрастает интерес к изучению способов повышения экономичности ракетных двигателей. Исследование двигателей с соплом управляемой геометрии представляется целесообразным именно в этом аспекте, особенно для аппаратов с малым числом ступеней, вплоть до одноступенчатых. Теоретический интерес к этой проблеме обусловлен еще и тем, что описанная выше особенность управления величиной тяги – оптимальность скользящего режима – результат учета именно влияния противодействия на величину тяги ракетных двигателей.

При движении ЛА в атмосфере оптимальная степень расширения сопла изменяемой геометрии подбирается из условия максимума величины тяги по λ [14]. При $\lambda < \lambda_0$ в указанном режиме давление газа на срезе сопла p_c связано с атмосферным давлением

p_h следующим образом: $p_c = p_h / \gamma_c$. Коэффициент потерь γ_c меньше единицы и для современных двигателей весьма близок к ней, так что сопло оптимальной степени расширения должно работать в режиме несколько недорасширенного истечения $p_c > p_h$, близком к расчетному $p_c = p_h$.

На рис. 30, 31 представлены зависимости от времени управляющих функций и фазовых переменных для регулируемого (сплошные кривые) и нерегулируемого (штриховые) двигателей в задаче Годдарда. Активный участок оптимальной траектории состоит из двух дуг максимальной

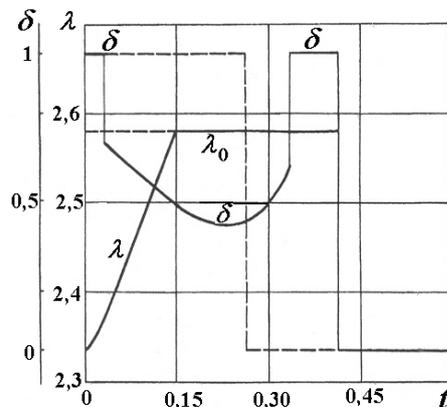


Рис. 30

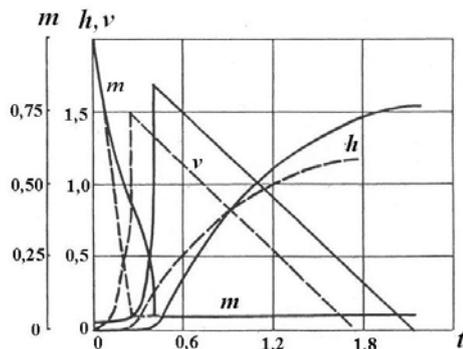


Рис. 31

разреженной атмосферой, на сопло надвигается надставка, доводящая значение λ до λ_0 . При заданных значениях λ_1 и λ_0 высота переключения с λ_1 на λ_0 определяется условием выравнивания значений тяги с надставкой и без нее. Сравнение величин конечной высоты (регулируемое сопло: $h(T) = 1,7424$, двухпозиционное: $h(T) = 1,7223$) свидетельствует о приемлемой точности.

Среди различных способов технической реализации ракетного двигателя с соплом переменной геометрии особый интерес представляет собой двигатель с соплом с центральным телом [14]. Характерной особенностью этого двигателя является существенное уменьшение потерь тяги при работе в условиях, когда давление в окружающей среде больше расчетного. В этом случае расширение газов в реактивной струе, омывающей центральное тело, происходит лишь до давления в среде. Следовательно, двигатель работает в этих условиях как двигатель с расчетным соплом, т.е. развивает максимальную на данной высоте тягу [39, 41]. Анализ экспериментальных результатов, приведенных в монографии [61] позволяет, с определенной степенью идеализации, принять двигатель с центральным телом двигателем с расчетным соплом до тех пор, пока внешняя граничная характеристическая поверхность течения расширения в реактивной струе не достигает конца центрального тела.

4.6. Theoria cum practice. В большинстве работ по исследованию оптимальных режимов движения ракет противодавление при вычислении тяги не учитывается и введенная в монографии [9] эффективная скорость истечения принимается постоянной. Естественное для послевоенного уровня ракетной техники обоснование такого подхода приведено в [47]. Исключение составляют отдельные публикации, в которых тяга либо удельный импульс двигателя принимаются заданными функциями высоты полета. Из работ, посвященных непосредственно анализу оптимального управления движением ЛА с учетом противодавления, автору известны публикации [53, 125]. К сожалению, автор работы [125] не учел того обстоятельства, что при нулевом расходе рабочего тела ($q = 0$) тяга T , вычисленная по формуле $T = qV - p_h \sigma$, в нуль не обращается. В работе [53] записаны различные системы уравнений движения для активных и пассивных участков, однако этот факт не учитывается при анализе оптимального управления. Таким образом, полученные в указанных публикациях результаты справедливы для частного случая движения с непрерывным активным участком, т.е. с двигателем однократного включения. Использование соотношений одномерной газодинамики при записи формул для вычисления тяги в сочетании с необходимыми условиями оптимальности подтвердило преимущество управления тягой с сохранением максимального давления в камере сгорания [37, 41]. Во многих технических монографиях также отмечается это требование, однако обосновывается оно учетом ухудшения характеристик процесса сгорания при снижении давления в реальных двигателях.

Проведенный в п.п. 4.1, 4.2 анализ, основанный на использовании принятых в ракетодинамике представлений о регулировочной характеристике реальных двигателей,

тяги, разделенных участком скользящего режима. Скорость в конце активного участка на оптимальной траектории больше и достигается на большей высоте, что и обеспечивает приращение конечной высоты.

Простейшим способом практической реализации изменения геометрии сопла является создание многопозиционного сопла. Из технических соображений наиболее приемлемым является сопло двухпозиционное [61]. При движении с большим противодавлением сопло имеет малую степень расширения, соответствующую значению $\lambda = \lambda_1 < \lambda_0$. При подъеме на высоту с более

дал возможность установить оптимальность скользящего режима работы двигателя. Принципиальная несводимость последнего к непрерывному дросселированию расхода поясняет трудности, с которыми столкнулись авторы работ [7, 53, 125] в попытке исследовать новую, по сути, задачу в рамках классической модели, подправленной формальным учетом противодействия, трудности, преодолеть которые пытались авторы работ [7, 70] априорным заданием геометрии регулировочной характеристики. Отметим, что указание на необходимость замены дуг переменной тяги участками скользящего режима работы двигателя дано в работе [37]. Первым обратил на это внимание В.Т.Злацкий. В статье [29] этот результат подтвержден анализом более точной модели двигателя как объекта управления.

В заключение данного параграфа обратим внимание на серьезнейшую проблему математического моделирования движения ракет в атмосфере. На самом деле давление в кормовой части ракеты, в области, куда вытекает реактивная струя, не равно давлению p_h в неподвижной атмосфере на высоте полета ракеты. Оно равно так называемому донному давлению p_δ , которое является результатом воздействия на поверхность ракеты вблизи сопла (или сопел – при пакетной двигательной системе) как встречного потока набегающего на ракету атмосферного воздуха, обтекающего корпус ракеты, так и реактивной струи, вытекающей из сопла (сопел) двигателя.

Для построения более адекватной, чем (4.5), (4.6) модели движения ракеты, необходимо заменить p_h на p_δ и учесть изменение силы аэродинамического сопротивления F при изменении расхода топлива. Если судить строго, расходная характеристика $T = T(q, T_0, p_h)$, описанная в п. 4.1, описывает зависимость тяги от расхода топлива и атмосферного давления для неподвижной ракеты. С точки зрения управления ситуация усложняется тем, что сама величина p_δ зависит не только от условий обтекания корпуса ракеты (числа Маха и Рейнольдса), но и от давления и скорости газов, истекающих из сопла, т. е., от управляющей функции K сожалению, вычисление донного давления ракеты с работающим двигателем является столь сложной задачей газовой динамики, что надеяться на получение достаточно простых формул для аппроксимации зависимостей $p_\delta = p_\delta(q, r, v)$ и $F = F(q, r, v)$ пригодными для постановки оптимизационных задач механики полета аналитическими выражениями в форме, допускающей аналитическое исследование на максимум функции Гамильтона $H(q)$, в ближайшее время при современном состоянии газодинамических расчетов, по-видимому, не представляется возможным.

Необходимость отказа от использования классической формулы вычисления тяги ракетного двигателя по формуле $T = qV + \sigma(p_\sigma - p_h)$ актуальна для перспективной ракетной техники. В конце 2018 года в США должен состояться первый полет новой сверхтяжелой ракеты Space Launch System. На первой ступени ракеты планируют использовать двигатели RS-25D/E, применявшиеся еще для шаттлов (<http://ria.ru/science/20110914/437459751.html>), хотя необходимость их совершенствования очевидна. Для проведения поиска новых форм сопла основной проблемой является разработка более эффективных алгоритмов вычислительной газовой динамики, а также проведение экспериментальных исследований [22, 119]. Публикации, в которых исследуются особые управления движением ракет с регулируемым соплом двигателя (см. п. 4.5), автору не известны.

§5. Оптимизация многоступенчатых ракет.

Первые исследования проблемы достижения космических скоростей показали, что энергетические характеристики возможных компонент реактивного топлива и прочностные параметры конструкционных материалов не позволяют осуществить выход в космос с помощью одноступенчатой ракеты. Поэтому единственная возможность разогнать полезную нагрузку до необходимой скорости, предложенная основоположниками космонавтики и реализованная на практике, состояла в использовании

ракет многоступенчатых с незамедлительным отделением отработавших ступеней по мере выгорания топлива. Тем самым часть массы конструкции, выполнившая свою функцию, отбрасывалась и оставшееся топливо не расходовалось на разгон уже ненужных элементов.

При всей видимой целесообразности этого приема остается не выясненным один вопрос: в абсолютном большинстве современных ракет сбрасываемые ступени – это не только топливные баки, но и конструктивно связанные с ними двигатели. А имеет ли смысл сбрасывать, хоть и по частям, двигатель?

5.1. Управление массой двигательной системы. Исторически первой задачей механики космического полета, при формулировке которой учитывалась масса двигательной системы, была задача оптимизации многоступенчатых ракет. Примем массу двигательной системы M_x состоящей из массы двигателя M_γ и массы контейнеров для хранения рабочего тела M_β : $M_x = M_\gamma + M_\beta$. Решение задачи об оптимальном уменьшении массы M_β баков по мере израсходования запаса M_μ рабочего тела двигателя получено в ряде работ в классе кусочно-постоянных функций $M_\beta(t)$ (см., напр., [47]).

Задача об оптимальном управлении массой двигателя M_γ существенно отличается от задачи сброса освободившихся элементов конструкции, не связанных с двигателем. Если необходимость немедленного отделения освободившихся контейнеров для хранения топлива не вызывает сомнения даже на уровне здравого смысла (что, как было отмечено в п. 3.4, оказывается не всегда целесообразным!), уменьшение массы двигателя сопряжено со снижением максимальной тяги T_0 , поскольку M_γ и P_0 связаны функциональной зависимостью: $M_\gamma = M_\gamma(T_0)$, $\partial M_\gamma / \partial T_0 > 0$. Очевидно, реактивное ускорение $a = T_0 / (M_x + M_\mu + M_\gamma)$ при этом убывает. Действительно, при сбросе части двигателя массой ΔM_γ уменьшается не только знаменатель, но и числитель этого выражения, причем на большую величину $\Delta T_0 = \Delta M_\gamma / \gamma_1$, поскольку произведение ускорения тяготения g на удельную массы γ_1 двигателя (см. (1.13)) для современных ЖРД – величина порядка 0,01. Поэтому необходимость сброса части двигателя в процессе выполнения маневра отнюдь не очевидна. Указанные соображения побудили автора исследовать проблему управления массой двигательной системы с позиции управления массой собственно двигателя в чистом виде, принимая при формулировке вариационной задачи, что $M_x = M_\gamma(T_0)$, т.е. вообще не учитывая массу контейнеров. Следует иметь при этом в виду, что полученные результаты имеют ценность не только с методической точки зрения, поскольку могут быть пересчитаны с учетом массы топливных баков на основе соображений, приведенных в п. 1.3.

В качестве примера, иллюстрирующего целесообразность включения участка изменения массы двигателя ограниченной скорости истечения в состав оптимальной траектории, рассмотрим маневр набора в однородном гравитационном поле максимальной скорости в направлении, противоположном силе тяжести:

$$\begin{aligned} \dot{m}_\sigma &= -a_0 \chi \frac{T}{V}; \quad m_\sigma(0) = 1 - \gamma a_0 \chi(0); \quad m_\sigma(t_f) = m_\pi; \\ \dot{v} &= \frac{a_0 \chi T}{m_\sigma + \gamma a_0 \chi} - 1; \quad v(0) = 0; \quad -v(t_f) = \min; \quad \dot{\chi} = \eta; \quad \chi(0) = 1, \quad \chi(t_f) = opt. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Фазовая координата χ в системе (5.1) определяет текущее относительное значение массы двигательной системы: $\chi(t) = m_x(t) / m_x(t_f)$. Удастся показать [14], что оптимальные управления величиной тяги T и скорости истечения V в этой задаче гра-

ничные: $T = 1, V = 1$. Это позволяет применить для построения оптимальной траектории метод, предложенный в работе [114], и осуществить синтез оптимального управления массой двигательной системы. Подставляя $T = 1$ и $V = 1$ в систему (5.1) и исключая время t и управление η , представим конечную скорость в виде криволинейного интеграла по оптимальной траектории L на плоскости (m_σ, χ) :

$$v(T) = \int_L \left(\frac{1}{a_0 \chi} - \frac{1}{m_\sigma + \gamma a_0 \chi} \right) dm_\sigma + 0 \cdot d\chi.$$

Состав оптимальной траектории определяется путем исследования знака фундаментальной функции:

$$\omega = \frac{\gamma a_0}{(m_\sigma + \gamma a_0 \chi)^2} - \frac{1}{a_0 \chi^2}.$$

На рис. 32 проиллюстрирован метод построения оптимального решения рассматриваемой задачи. Точкой O здесь отмечена проекция начала оптимальной траектории на плоскость (χ, m_σ) . Если точка O лежит выше линии $\omega = 0$, оптимальная траектория состоит из отрезков границы области $\omega < 0$, проходимых в следующем порядке:

1) Om – движение с постоянной массой двигателя: $(\chi = 1, \eta = 0)$;

2) mf – движение по сингулярной дуге $(\sqrt{\gamma} - \gamma)a_0 \chi - m_\sigma = 0$

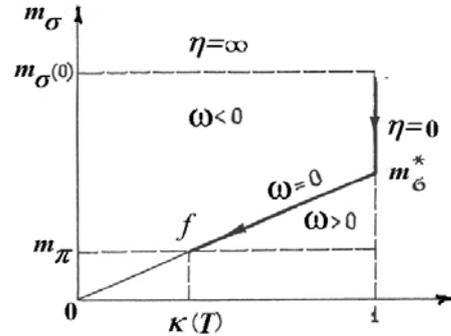


Рис. 32

до некоторого (заранее не фиксированного) значения $\chi(t_f)$, достигаемого при выполнении граничного условия $m_\sigma(t_f)$. Уравнения движения (5.1) на обоих участках оптимальной траектории интегрируются в элементарных функциях. Выражение для вычисления конечной скорости может быть представлено следующим образом:

$$v_s(t_f) = (1 - \sqrt{\gamma})^2 \left\{ \ln \left[(\sqrt{\gamma} - \gamma) a_0 \right] - \ln m_\pi \right\} - \frac{1 - a_0 \sqrt{\gamma}}{a_0} - \ln(a_0 \sqrt{\gamma}) \quad (5.2)$$

Оптимальное значение начальной тяговооруженности $a_0 = a_s$, определенное из условия максимума по a_0 величины $v_s(t_f)$, не зависит от величины полезной массы m_π и определяется только величиной γ , характеризующей массовое совершенство двигателя: $a_s = 1 / (2\sqrt{\gamma} - \gamma)$. Особый участок начинается при выполнении условия $m_\sigma = m_\sigma^* = (1 - \gamma) / (2 - \gamma)$. Конечное значение относительной массы двигателя вычисляется по формуле $\chi(t_f) = m_\pi (2 - \sqrt{\gamma}) / (1 - \sqrt{\gamma})$. Если прямая $\omega = 0$ проходит выше точки O , оптимальная траектория начинается с мгновенного ($n \rightarrow -\infty$) сброса двигателя до некоторого значения χ^* при постоянном $m_\sigma(t) = m_\sigma(0)$, далее следует особый участок.

Рассмотренный случай соответствует неоптимальному (завышенному) значению начальной массы двигательной системы. При выполнении неравенства $m_\pi > (1 - \sqrt{\gamma}) / (2 - \sqrt{\gamma})$ вся область допустимых положений лежит выше линии $\omega = 0$

и оптимальная траектория не содержит сингулярной дуги. Следовательно, выполнение этого неравенства свидетельствует об неоптимальности уменьшения массы двигательной системы при наборе максимальной скорости в однородном гравитационном поле.

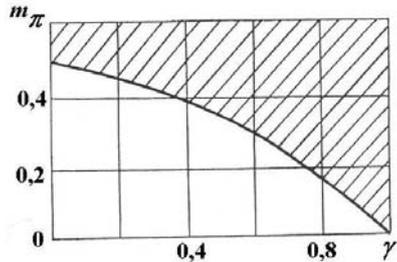


Рис. 33

На рис. 33 заштрихована область отсутствия сингулярной дуги в составе оптимальной траектории. Таким образом, исследование непрерывной модели позволило указать на плоскости (m_π, γ) область, в которой любое (как непрерывное, так и ступенчатое) уменьшение массы двигательной системы не приводит к увеличению конечной скорости ракеты.

Представляет интерес определение эффективности оптимального управления массой двигателя путем сравнения величины конечной скорости (5.2), соответствующей оптимальному значению начальной тяговооруженности и оптимальному управлению, с конечной скоростью ракеты с постоянной массой m_κ :

$$v_0(T) = \ln \frac{1}{(m_\pi + \gamma a_0)} - \frac{1 - (m_\pi + \gamma a_0)}{a_0}, \quad (5.3)$$

вычисленной при оптимальном значении a_0 двигателя постоянной массы:

$$a_0 = \frac{1 - m_\pi}{2} + \sqrt{\frac{(1 - m_\pi)^2}{4} + (1 - m_\pi) \frac{m_\pi}{\gamma}}. \quad (5.4)$$

Зависимость отношения v_s (5.2) к v_0 (5.3) от удельной массы двигателя γ представлена на рис. 34 для различных значений полезной массы ракеты. Эффективность сброса массы двигателя возрастает с уменьшением массы полезной нагрузки. Сравнение оптимальных значений $a_s = 1/(2\sqrt{\gamma} - \gamma)$ (кривая I на рис. 35) и a_0 (5.4) (кривая II при $m_\pi = 0,01$) указывает на существенное увеличение оптимального значения начальной тяговооруженности при переходе к двигателям с изменяемой массой.

Проведенное исследование подтверждает эффективность сброса части массы движителя независимо от положительного влияния сброса освободившихся топливных баков. Интересной особенностью оптимального решения является независимость оптимального начального ускорения $a_s = 1/(2\sqrt{\gamma} - \gamma)$ от одного из двух определяющих параметров задачи – от относительной массы разгоняемой полезной нагрузки $m_\pi = M_\pi/M_0$. Преобразуя дифференциальное уравнение изменения скорости (второе уравнение системы (5.1)) с учетом соот-

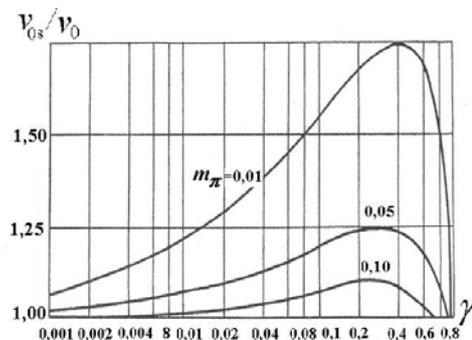


Рис. 34

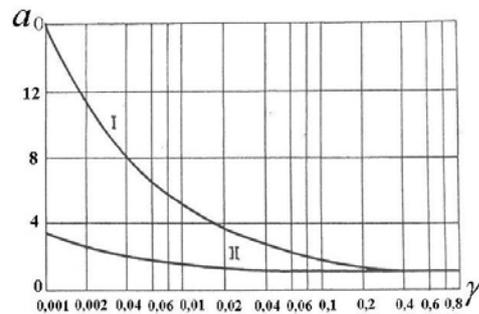


Рис. 35

ношения $m_\sigma + \gamma a_0 \chi = \sqrt{\gamma} a_0 \chi$, выполняющегося вдоль сингулярной дуги, убеждаемся в том, что движение на участке уменьшения массы движителя происходит с постоянным ускорением $(1/\sqrt{\gamma} - 1)$, также не зависящим от m_π . Таким образом, режим набора скорости $\gamma_s(T)$ определяется степенью конструктивного совершенствования движителя (значение γ), кроме момента окончания разгона t_f , который находим из условия $m_\sigma(t_f) = m_\pi$.

5.2. Оптимальная ступенчатая реализация идеальной оптимальной программы управления массой двигателя. Рассмотрим задачу об оптимальной ступенчатой реализации изображенной на рис. 3.2 программы управления массой движителя. Исследуем задачу о наборе максимальной скорости при вертикальном подъеме в однородном гравитационном поле без сопротивления с двигательной системой, секционированной параллельно [16]. Предельный случай бесконечно большого числа бесконечно малых секций соответствует непрерывному управлению массой M_γ , изученному выше. Уравнения движения при оптимальных значениях управлений интегрируются в элементарных функциях, конечная скорость $v(T)$ вычисляется по формуле

$$v(t_f) = \sum_{i=1}^n \ln \frac{m_\pi^{i-1} + \gamma a_0^i}{m_\pi^i + \gamma a_0^i} - t_f.$$

Здесь через m_π^i обозначена сумма полезной нагрузки m_π и запаса рабочего тела, остающегося к моменту сброса i -ой секции двигательной системы, так что $m_\pi^n = m_\pi$, γa_0^i – масса движителя после сброса $i-1$ -ой секции. Величина конечной скорости зависит от $2n$ параметров: $a_0^1, a_0^2, \dots, a_0^n; m_\pi^1, m_\pi^2, \dots, m_\pi^n$. Зафиксировав значения $m_\pi^1, m_\pi^2, \dots, m_\pi^{n-1}$ ($m_\pi^n = m_\pi$ задано), определим оптимальные значения a_0^i из условия максимума функции $v(t_f)$:

$$a_{opt}^1 = \frac{1 - m_\pi^1}{2} + \sqrt{\frac{(1 - m_\pi^1)^2}{4} + \frac{(1 - m_\pi^1)m_\pi^1}{\gamma}};$$

$$a_{opt}^i = \frac{m_\pi^i + m_\pi^{i-1}}{2(1 - \gamma)} + \sqrt{\frac{(m_\pi^i + m_\pi^{i-1})^2}{4(1 - \gamma)^2} + \frac{m_\pi^i m_\pi^{i-1}}{\gamma(1 - \gamma)}} \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Поиск максимума конечной скорости по $n-1$ переменной $m_\pi^1, m_\pi^2, \dots, m_\pi^{n-1}$; $m_\pi^1 \geq m_\pi^2 \geq \dots \geq m_\pi^{n-1}$ проводится численно. Проведем сравнение полученных результатов со случаем непрерывного управления массой двигательной системы. На рис. 36 представлены оптимальные законы управления массой движителя на плоскости (m_γ, m_σ) при различном числе n секций (линия с меткой $n = \infty$ – непрерывное управление). Приведенные зависимости соответствуют следующим значениям параметров: $m_\pi = 0,1$; $\gamma = 0,01$. Эффективность управления массой движителя может быть оценена с помощью кривых на рис. 37. Здесь по оси ординат отложено

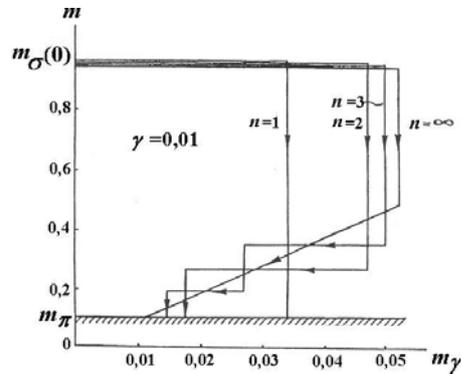


Рис. 36

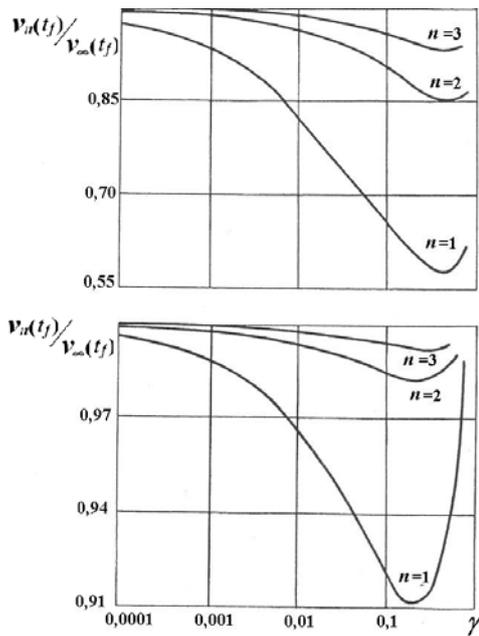


Рис. 37

отношение конечной скорости $v_n(t_f)$ аппарата, двигательная система которого состоит из n секций, к конечной скорости $v_\infty(t_f)$, соответствующей непрерывному управлению величиной m_γ . Сравнение приведенных данных показывает, что уже при $n = 3$ потери конечной скорости $v_1(t_f)$ от замены оптимального непрерывного закона ступенчатым не превосходят 6% при $m_\pi = 0,01$. При увеличении массы полезной нагрузки до $m_\pi = 0,1$ оценка потерь снижается до приемлемого уровня – 1%.

5.3. Theoria cum practice. Из большого числа работ, в которых проведен весовой анализ многоступенчатых ракет отметим монографию [3], в которой обсуждаются различные системы безразмерных весовых параметров, применявшихся разными авторами при оптимизации многоступенчатых систем. Приведем в заключение неко-

торые соображения относительно применения секционированных двигательных систем. Хотя преимущества параллельной схемы очевидны уже при простом массовом анализе, трудности практической реализации, особенно для ракет, движущихся в атмосфере, привели к тому, что в современной космонавтике получила распространение смешанная схема: первые две ступени соединены параллельно, последующие – последовательно. Вместе с тем, уже реализованная схема без принципиальных конструктивных изменений может быть усовершенствована с целью повышения ее эффективности.

Рассмотрим двухступенчатую ракету, выполненную по схеме: центральный блок (вторая ступень) параллельно соединен с четырьмя боковыми блоками первой ступени (РН «Восток», «Союз»). Боковые блоки первой ступени выполняются одинаковыми, так что первая ступень пакетной по сути схемы используется как обычная моноблочная ракета, хотя и разделенная на четыре блока. Выполнение же первой ступени из блоков с различным запасом топлива, отделяемых по мере его израсходования, позволяет при непринципиальных конструктивных изменениях повысить доставляемую полезную массу. Это повышение при реализованных в настоящее время значениях удельной массы баков β и движителя γ имеет порядок единиц процентов. Однако в специальных случаях, когда требуется повышенная прочность корпуса ракеты и высокие значения начальной тяговооруженности (твердотопливные ускорители, например), а, следовательно, относительно большая сухая масса блока, первая ступень пакетной схемы, выполненная из двух пар блоков разного объема, оказывается весьма эффективной. Во вторых строках таблиц, 1, 2 приведены результаты расчетов величины полезной массы m_π двухступенчатой ракеты с первой ступенью из двух пар разнообъемных блоков. Во третьих строках приведены для сравнения полезные массы m_π^0 для двухступенчатой ракеты с первой ступенью с равнообъемными блоками. В третьих строках указано превышение m_π над m_π^0 в процентах от m_π^0 . Через μ обозначена масса части конструкции блока, не зависящая от объема топливных баков. Все значения масс отнесены к начальной массе ракеты. Полезные массы рассчитывались для маневра с заданным отношением характеристической скорости к скорости истечения, равным $\ln 10$. Данные табл. 1 получены при $\mu = 0,01$, табл. 2 – при $\beta = 0,1$.

Таблица 1

β	0,1	0,15	0,175
m_x	0,03386381	0,01340836	0,00386084
m_x^0	0,03263547	0,01269703	0,00248092
$\delta\%$	3,8251	11,5	56,4274

Таблица 2

μ	0,01	0,015	0,02
m_x	0,03386381	0,02552555	0,01752164
m_x^0	0,03263547	0,01206719	0,00444582
$\delta\%$	3,8251	111,5285	294,1149

Таким образом, переход от равноблочной схемы первой ступени к двум парам разнообъемных блоков повышает полезную массу ракеты. Дальнейшее повышение полезной массы при переходе к первой ступени из блоков трех разных объемов оказывается уже несущественным. Так, при $\beta = 0,1$ и $\mu = 0,015$ получаем $\delta = 114,7\%$ (ср. с $111,5\%$ в табл. 2).

§6. Проблемы математического описания ракетных двигателей как объектов управления.

Проблема формализованного описания свойств и особенностей функционирования изучаемых объектов, перманентно актуальная для научного познания, особенно обострилась на современном этапе в связи с беспрецедентной экспансией количественных подходов, стимулируемой безудержной компьютеризацией, с одной стороны, и осознанием научным сообществом роли математики как единственного языка междисциплинарного общения, способного укротить хаос вавилонского столпотворения современной науки, не дать «реке знаний ...распасться на отдельные ручейки и иссякнуть» [60, стр. 14]. Важной особенностью процесса формирования идеологии формализованного описания является его *принципиальная неисчерпаемость*, отражающая как объективную структурно-функциональную бесконечность мира объектов, так и неограниченность целей исследующих этот мир субъектов. Поэтому интерес к совершенствованию инструментария формализованного описания не снижается даже среди специалистов тех разделов науки, которые уже обладают развитой системой апробированных математических моделей. Не является исключением в этом смысле и теория управляемых систем.

Любую математическую модель можно сделать еще более полной. Но «никому не объять необъятного», тем более что чем полнее, тем сложнее. И не только количественно (помни «проклятие размерности!»), но часто и качественно. Яркий пример – последовательность моделей зависимости величины тяги от расхода топлива: от классической прямой пропорциональности до далекой от разрешения проблемы вычисления тяги ракеты, движущейся в атмосфере с учетом взаимодействия реактивной струи с потоком, обтекающим корпус ракеты. Очевидно, *модель объекта должна быть адекватной лишь одному: цели исследования*. Только в этом представляется выход из Бермудского треугольника В. С. Шеховцова (КБ «Южное»):

- 1) необходимость получить результаты наиболее точно;
- 2) необходимость просмотреть как можно больше вариантов;
- 3) необходимость выполнить работу к сроку – часто при жестких ограничениях на доступные для этого ресурсы.

Каким образом такая модель может быть построена, обсуждается ниже. Основная масса существующих и вновь создаваемых человеком технических объектов относится к разряду управляемых. При формализованном описании их функционирования к

обычным трудностям отображения естественных закономерностей, обеспечивающих их функционирование как объектов косной материи, добавляется необходимость учета возможностей управляющего субъекта влиять на их движение. Это свойство отражает их принципиальное отличие от описания естественно протекающих неуправляемых процессов и добавляет к традиционным при исследовании последних проблемам существования, единственности и устойчивости решений уравнений движения специфические проблемы управляемости и выбора желаемого варианта из бесконечного (как правило) множества способов достижения целей управления. Указанная особенность стимулирует использование возможно более простых математических моделей, хотя бы на начальных этапах разработки концепции будущего технического объекта, когда представления о его возможностях, целях и оценках качества функционирования еще не сформулированы окончательно. Вместе с тем, в естественном стремлении создать объект, который должен будет функционировать наилучшим образом, заложена возможность строить такие упрощенные модели. Эта возможность базируется на том, что совокупность «хороших» движений, как правило, составляет собственное подмножество множества движений допустимых, имеющее меньшие не только размеры, но часто и размерность, по крайней мере в пространстве управлений. Понятно, что математическая модель объекта, представляющая собой, по сути, отображение уже редуцированного множества управлений на множество допустимых фазовых скоростей, может быть сформулирована с использованием более простых формализмов. Ниже рассматривается реализация предложенного подхода при формулировке математических моделей ракетных двигателей.

Как отмечено в п. 1.2, абсолютное большинство классических и современных работ по оптимизации траекторий КЛА выполнено с использованием наиболее простой математической модели зависимости величины тяги ракетного двигателя T от расхода рабочего тела q : $T = qV$, где эффективная скорость истечения газов из сопла двигателя принимается постоянной. Эта формула, справедливая для ракеты, движущейся в вакууме, требует коррекции при описании маневров ЛА с ракетным двигателем в атмосфере. К каким неожиданным результатам может привести уточнение классического математического описания процесса генерирования тяги с учетом внешнего фактора – давления атмосферы – видно из содержания §4. Как будет показано ниже, более точный учет внутренних характеристик процесса генерирования тяги ракетного двигателя также в значительной степени корректирует полученные ранее результаты.

Традиционно мерой эффективности генерирования реактивной тяги принимается отношение величины тяги T к весу рабочего вещества gq , расходуемого в единицу времени: $I_{sp} = T/(gq)$. Величина I_{sp} , именуемая удельным импульсом ракетного двигателя, имеет размерность *сек*. Трактовка такой размерности: «кГ тяги на кГ топлива в секунду», – была естественной при привычном в прошлом использовании системы единиц МКГСС. Отношение же величины тяги в Н к массовому секунднему расходу рабочего тела q в *кг/сек* имеет размерность скорости $V = T/q$ и является так называемой эффективной скоростью реактивной струи [9]. В современных исследованиях оптимальных движений космических аппаратов продолжают использоваться классические математические модели ракетных двигателей как объектов управления. В работе [96] автором настоящего обзора предложены описания двигателей, учитывающих некоторые основные особенности генерирования реактивной тяги и приближающих соответствующие математические модели к реальным жидкостным, электрическим и ядерным ракетным двигателям. При использовании этих моделей для анализа оптимального управления движением ракет установлено, что множество управлений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности, состоит из дуги границы конструктивно допустимого множества, заключенной между точками максимальной тяги и максимальной скорости реактивной струи. Результат инвариантен по отношению к краевым условиям маневра и функционалу задачи Майера.

6.1. Оптимальное управление тягой жидкостных ракетных двигателей.

Оценка эффективности генерирования реактивной тяги величиной скорости реактивной струи V , как отмечено выше, хотя и соответствует здравому смыслу, требует дополнительного анализа. Вместо классического представления о возможности независимого регулирования величин P и V примем следующую двухрасходную математическую модель жидкостного ракетного двигателя ЖРД [36]: расход рабочего тела q состоит из расходов топлива u и окислителя w , которые принимаются независимыми управлениями, определяющими величину тяги T . Тогда имеют место соотношения

$$T = T(u, w); \quad q = u + w. \quad (6.1)$$

Введем в рассмотрение функцию $\omega = w/u$ (аналог коэффициента избытка окислителя) в (6.1) и выразим зависимость $T(u, w)$ в виде

$$T = q \cdot V(q, \omega). \quad (6.2)$$

Такое представление удобно для дальнейшего анализа в связи с тем, что практически для всех используемых в ЖРД двухкомпонентных топливных смесей зависимость скорости истечения V от q и ω обладает следующими свойствами: 1) при фиксированном $q = q_f$ скорость струи $V(q_f, \omega)$ – унимодальная функция ω с максимумом в точке, близкой к стехиометрическому соотношению ω_s , расходов компонентов u и w , обеспечивающему полноту экзотермической реакции их взаимодействия в камере сгорания; 2) при фиксированном же $\omega = \omega_f$ функция $V(q, \omega_f)$ в формуле (6.2) – монотонно возрастающая (с горизонтальной асимптотой) – за счет возрастания давления и температуры в камере сгорания двигателя, имеющей заданный объем, при увеличении расхода топливной смеси [2]. При этом уравнения движения центра масс ракеты могут быть представлены в виде

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}; \quad \dot{\vec{v}} = \frac{T}{M} \vec{e} + \vec{R}(\vec{r}); \quad \dot{M} = -q. \quad (6.3)$$

Рассмотрим задачу о переводе ракеты из заданного начального многообразия S_0 на предписанное конечное многообразие S_1 в пространстве – времени (\vec{r}, \vec{v}, t) с минимальным значением выбранной функции конечного положения $\Phi(\vec{r}(t_f), \vec{v}(t_f), t_f)$. Анализ оптимального управления проведем с использованием принципа максимума. Сформируем функцию H :

$$H = \vec{\psi}_v \frac{T}{M} \vec{e} - \psi_m q + H_0, \quad (6.4)$$

где $\vec{\psi}_v$ и ψ_m – сопряженные функции. Часть H_0 функции H , не зависящая от управляющих функций $q(t)$, $\omega(t)$ и $\vec{e}(t)$, вычисляется по формуле: $H_0 = \vec{\psi}_r \cdot \vec{v} + \vec{\psi}_v \cdot \vec{R}(\vec{r})$.

Анализ формулы (6.4) иллюстрирует ошибочность общепринятого представления об оптимальности работы двигателя с минимальным значением скорости истечения. На самом деле, управляющие функции T и q должны выбираться из условия максимума их линейной комбинации (6.4), а не отношения $V = T/q$. Исследуя функцию H (6.4) на максимум по управлениям q и ω , удалось установить, что оптимальные значения $q(t)$ и $\omega(t)$ принадлежат границе множества допустимых управлений Q . Действительно, часть функции H , зависящая от управлений, после выбора оптимального направления тяги: $\vec{e}(t) = \arg \max_{\vec{e}} H(\vec{e}, q, \omega) = \vec{\psi}_v / \psi_v$ преобразуется к виду

$$H_1 = q \left[\frac{\psi_v}{m} V(q, \omega) - \psi_m \right] \quad (6.5)$$

и не может принимать максимального значения во внутренней точке множества Q . При фиксированном $\omega = \omega_f$ величина H_1 , как функция q , может обращаться в ноль не более чем в двух точках: (1) при $q = 0$ и (2) при единственном – в силу монотонности $V(q, \omega_f)$ – значении $q = q_1$, при котором равно нулю выражение в квадратной скобке в формуле (6.5). Последнее может иметь место лишь при $\psi_m > 0$. При этом $H_1(q, \omega) \leq 0$ при $q \leq q_1$. При $q > q_1$ $H_1(q, \omega_f)$ возрастающая функция q – как произведение двух положительных монотонно возрастающих сомножителей. Следовательно, оптимальное значение q либо равно нулю, если максимально допустимое значение $q(\omega_f)$, отвечающее ω_f , меньше $q_1(\omega_f)$, либо равно максимально допустимому – граничному $q(\omega_f)$ – в противном случае. Если $Q = [0, u_0] \times [0, w_0]$, оптимальные значения (u, w) принадлежат части отрезка границы Q от точки максимальной тяги до точки максимальной скорости истечения. Если двигатель выключается в какой либо внутренней точке оптимальной траектории, это точка максимального значения скорости реактивной струи [36]. Поскольку указанные при любых значениях соображения выполняются при любых значениях сопряженных функций, полученный вывод инвариантен относительно целей и цены управления.

В работе [41] описана математическая модель ядерного ракетного двигателя, учитывающая ограниченность температуры и скорости разогрева реактора. Показано, что после разогрева реактора до максимально допустимой температуры и выхода на режим максимальной мощности оптимальное значение реактивной тяги также принадлежит отрезку границы множества допустимых управлений от точки максимальной тяги до точки максимальной скорости реактивной струи. То же справедливо по отношению к двухрежимным (bi-modal) двигательным системам [95].

6.2. Эффективность оптимального управления величиной тяги ЖРД. В качестве примера рассмотрим задачу о наборе максимальной скорости при вертикальном подъеме в однородном гравитационном поле с использованием ЖРД. Начальную массу ракеты m_0 представим в виде

$$m_0 = m_\pi + (1 + \beta_u)m_u^0 + (1 + \beta_w)m_w^0.$$

Здесь m_u^0 и m_w^0 – начальные массы компонентов топливной смеси. Баковые коэффициенты β_u и β_w различаются в связи с разными плотностями компонентов. Остальные элементы конструкции включены в m_π . Значения $m_0, m_\pi, m_u^0, m_w^0, \beta_u$ и β_w – заданы. Необходимо определить управления $u(t)$ и $w(t)$ расходами компонентов, обеспечивающими разгон ракеты до максимальной скорости при полном израсходовании компонентов рабочего тела.

Как показано в работе [36], расход одного из компонентов рабочего тела на активных участках траектории постоянен. Примем $w = w_0$. Оптимальное значение расхода второго компонента $u(t)$ либо равно максимально допустимому $u = u_0$, либо определяется из уравнения

$$T(u, w_0) - T'(u, w_0) \cdot (u + w_0) = m\chi, \quad (6.6)$$

где χ – постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий. Скорость $v(\tau)$, набираемая ракетой при подъеме, вычисляется по формуле

$$v(\tau) = \int_{u(\tau)}^{u(0)} \frac{T(u, w_0) \cdot T(u, w_0) du}{T(u, w_0) \cdot (u + w_0) - T(u, w_0)} - g\tau, \quad (6.7)$$

где τ – время подъема. Пределы интегрирования в этой формуле задаются соотношениями, следующими из формулы (6.6), записанной при $t = 0$ и $t = \tau$. Входящая в (6.6) постоянная χ определяется из условия полного израсходования w -компонента топливной смеси к моменту $t = \tau$ окончания разгона. Если зависимость $T(u, w_0)$ конкретного двигателя аппроксимирована полиномом, квадратура в формуле (6.7) вычисляется в элементарных функциях, так как подынтегральная функция рациональна. Заметим, что при $g = 0$ формула (6.7) – обобщение формулы Циолковского на случай независимого регулирования расходов компонентов топливной смеси ЖРД. В этом случае $u(t)$ – монотонно убывает. Следовательно, тяга также монотонно убывает в процессе подъема. Таким образом, подъём начинается с наибольшей допустимой тяги. Оптимальность такого начала подъема вполне отвечает здравому смыслу: ведь масса ракеты в начальный момент наибольшая. По мере набора скорости подъема и уменьшения массы из-за расходования топливной смеси, тяга монотонно убывает, а локальная мера экономичности расходования рабочего тела для генерирования тяги – скорость реактивной струи V – монотонно возрастает, достигая наибольшего значения в конечный момент времени. Чем меньше остается топлива, тем стремление его экономить становится все более приоритетным при выборе управления. Более того, в работе [36] показано, что при выключении двигателя во внутренней точке траектории ($t < T$) скорость V достигает своего максимального, на множестве допустимых управлений, значения. В общем случае внутренние на интервале $[0, T]$ точки окончания активных дуг – единственные точки траекторий, где управление тягой и расходом топлива отвечает здравому смыслу: отношение $V = T/q$ – максимально.

Замечание 1. При использовании топливной смеси с $\beta_u = \beta_w$ и при разгоне в бессиловом поле ($g = 0$) условие (6.6) есть условие максимума скорости реактивной струи $V = T(u, w_0)/(u + w_0)$. Расходы компонентов топливной смеси $u(t)$ и $w(t)$ при этом постоянны в течение всего времени разгона. Это единственный случай выполнения всего маневра при $V = V_0$ [36]. Напомним, что именно этот режим работы ЖРД предполагается оптимальным при решении задач управления движением ракет в классической ракетодинамике [27].

Замечание 2. Существенное отличие полученного режима управления тягой ракетного двигателя от классического – с максимальной тягой – управления состоит в переменности величины тяги, хотя и при принадлежности управления вдоль активных дуг оптимальной траектории границе множества допустимых управлений. Участки переменной тяги, оптимальность которых подтверждена с использованием классической математической модели двигателя, являются либо участками особого управления (см. §3), либо дугами траектории, лежащими на границах множества допустимых положений в фазовом пространстве.

Замечание 3. Необходимые условия оптимальности [8] особого управления расходом $u(t)$: $\partial H / \partial u \equiv 0$, $\partial^2 H / \partial u^2 \equiv 0$ в рассматриваемой математической модели ЖРД не выполняются, поскольку $\partial^2 H / \partial u^2 \equiv \psi_v \partial^2 T(u, w_0) / \partial u^2 m^{-1} \neq 0$, т. к. базис-вектор Лоудена $\psi_v \neq 0$, а функция $T(u, w_0)$ – строго выпукла вверх. Поэтому реализация предсказанного в п. 3 движения с тягой, меньшей, чем та, которую развивает двигатель в точке максимума скорости истечения, возможна лишь при скользящем режиме управления величиной тяги.

Таким образом, управления расходами топлива $u(t)$ и окислителя $w(t)$, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, в общем случае, принадлежат

дуге границы множества допустимых управлений, заключенной между точками максимальной тяги и максимальной скорости истечения. Оценка эффективности оптимального управления по сравнению с традиционным ($u(t) = \text{const}$, $w(t) = \text{const}$) приведена в работах [36, 41]. Преимущество оптимальных управлений существенно в аварийных ситуациях при потере части запаса одного из компонентов топливной смеси ЖРД [42].

6.3. Оптимальное управление тягой электрических ракетных двигателей.

Большая часть результатов классической и современной теории оптимальных движений КА с электрическими ракетными двигателями (ЭРД) получена с использованием двух моделей двигательных систем [14]. Модель идеально регулируемого двигателя предполагает возможность неограниченного независимого регулирования величин тяги T и расхода q рабочего вещества; модель нерегулируемого двигателя – постоянство величин тяги и расхода и возможность многократного включения-выключения движителя. Общим для всех моделей ЭРД является ограниченность подводимой к движителю электрической мощности максимальным значением N_0 мощности бортового источника энергии.

Теория рабочих процессов в реальных ЭРД дает следующие формулы для вычисления величины тяги и расхода рабочего вещества [99]:

$$T = \eta_b \mu I \sqrt{2U\eta(U)}; \quad q = \frac{\eta_b \mu^2}{\eta_c} I. \quad (6.8)$$

Здесь η_c – отношение ионного тока, непосредственно обеспечивающего генерирование тяги, к току I , складывающемуся из ионного и электронного токов; η_c – отношение анодного расхода к полному расходу рабочего вещества через движитель. Коэффициент $\eta(U)$ учитывает потери натяжения в реальных движителях. Постоянная μ определяется типом рабочего вещества: $\mu = \sqrt{m_a e^{-1}}$, где m_a – масса атома; e – заряд электрона. Формула (6.8) используется в качестве математической модели плазменного ЭРД с ограниченной мощностью: $N = I \cdot U \leq N_0$. Максимальная электрическая мощность N_0 , подводимая к движителю, принимается, как и раньше [14], пропорциональной массе M_v источника мощности: $N_0 = M_v \alpha^{-1}$. Массовый коэффициент α , зависящий от мощности $\alpha = \alpha(N_0)$, принимается в большинстве современных публикаций постоянным.

Рассмотрим вариационную задачу Майера с уравнениями движения центра масс КА (6.3), записанными с учетом соотношений (6.8). Управляющими функциями выберем I и U . Функция Понтрягина H принимает вид

$$H = I \left[\frac{\psi_v}{m} \sqrt{2U\eta(U)} - \psi_m \frac{\mu}{\eta_c} \right] \eta_b \cdot \mu + H_0. \quad (6.9)$$

Формула (6.9) записана с учетом условия совпадения оптимального направления вектора тяги с базис-вектором Лоудена $\vec{\psi}_v$. Как видно из (6.9), точки поверхности $H = H(I, U)$ – точки гиперболического типа, поэтому максимальные значения функция H принимает в граничных точках множества допустимых управлений. Отметим, что на активных участках траектории $I \cdot U = N_0$. Подставляя $I = N_0/U$ в (6.9) и исследуя полученную при этом функцию \tilde{H} на максимум по U , получаем уравнение для определения оптимального значения напряжения U :

$$U[U\eta'(U) - \eta(U)] + \varphi \sqrt{2U\eta(U)} = 0 \quad (\varphi = \psi_m M \mu / (\psi_v \eta_c)). \quad (6.10)$$

Заметим, что $\eta_c \neq 0$ и базис-вектор Лоудена $\vec{\psi}_v$ на регулярных дугах в нуль не обращается. В стационарной точке функции $\tilde{H}(U)$ выполняется условие (6.10), при этом вторая производная функции \tilde{H} по U отрицательна:

$$\text{sign} \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial U^2} = \text{sign} \left[U^2 \eta''(U) - \frac{[\eta(U) - U\eta'(U)]^2}{2\eta(U)} \right] = -1, \quad (6.11)$$

поскольку коэффициент $\eta(U)$ реальных двигателей – возрастающая функция с убывающей первой производной. Следовательно, корень уравнения (6.10) – точка максимума функции $\tilde{H}(U)$, поэтому полученное при решении этого уравнения значение напряжения – оптимально. Поскольку (6.11) выполняется в любой стационарной точке функции $\tilde{H}(U)$, корень уравнения (6.10) – единственный.

Замечание 1. Величина тяги T , вычисленная при $I \cdot U = N_0$, принимает значение $\eta_b \mu N_0 \sqrt{2\eta(U)U^{-1}}$; если же U – корень уравнения (6.10), оптимальная величина тяги вычисляется по формуле

$$T = \frac{\eta_b \mu N_0}{\varphi[\eta(U) - U\eta'(U)]}.$$

Выражение в квадратных скобках – возрастающая функция U , поскольку его производная по U : $-U\eta''(U) \geq 0$, т.к. $\eta''(U) \leq 0$; следовательно, величина $T(t)$ оптимальной тяги убывает при увеличении $U(t)$ и увеличивается при $U(t) \rightarrow 0$, причем значение $U(t) = 0$ не достигается в связи с тем, что $I(t) \rightarrow \infty$ при $U(t) \rightarrow 0$ (расход рабочего тела движителя бесконечно возрастает (см. (6.8)) с учетом $I = N_0/U$). Таким образом, как и в классической теории оптимальных движений с идеально регулируемым двигателем, в состав оптимальной траектории не входят пассивные участки.

Замечание 2. Упрощение уравнений обсуждаемой математической модели заменой $\eta(U) = \eta_0 = \text{const}$, приводит, с учетом изложенного выше, уравнение изменения массы КА к виду

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{a^2 M^2}{2\eta_* N_0} \left(a = \frac{\eta_b \mu I \sqrt{2\eta_0 U}}{M}, \quad \eta_* = \eta_0 \cdot \eta_b \cdot \eta_c \right), \quad (6.12)$$

где a – реактивное ускорение. Уравнение (6.12) интегрируется в квадратурах. Это позволяет, подобно тому, как это было сделано для идеально регулируемого двигателя, разделить задачу доставки максимальной полезной массы при фиксированной стартовой массе КА на динамическую и параметрическую части. В классических формулах распределения начальной массы КА на полезную, массу двигательной системы и массу начального запаса рабочего вещества [14] необходимо заменить удельную массу двигательной системы α на отношение α/η_* .

Замечание 3. В реальных плазменных ЭРД ограничение $N = I \cdot U \leq N_0$ уточняется заданием вольтамперной характеристики источника мощности. В работах [96, 99] представлены результаты исследования оптимального управления движением КА с ЭРД с солнечной батареей. В дополнение к отмеченным выше свойствам управления показано, что оптимальное значение напряжения $U(t) \in [U_T, U_{xx}]$, где U_T – напряжение, соответствующее максимальной тяге, U_{xx} – напряжение холостого хода (точка максимальной скорости истечения). Оптимальное значение тока $I(t)$ определяется уравнением вольтамперной характеристики $I = I_v(U)$.

Таким образом, для обсуждаемых в данном разделе математических моделей жидкостных, ядерных и электрических ракетных двигателей оптимальное управление величиной тяги принадлежит границе конструктивного множества допустимых управлений и изменяется в диапазоне от точки максимума тяги до точки максимума скорости реактивной струи. Это утверждение инвариантно относительно краевых условий выполняемого маневра и функционала оптимизационной задачи Майера [96].

6.4. Математические модели оптимально управляемых объектов. Подведем итог вышеизложенному. В тех случаях, когда анализ необходимых условий оптимальности, примененных к некоторой достаточно общей математической модели объекта управления, позволяет сузить в пространстве управлений (и, возможно, состояний) исходное множество положений объекта, которые могут встречаться на оптимальных режимах, появляется возможность построения уточненного математического описания функционирования объекта с редуцированным множеством возможных положений. Такое описание назовем математической моделью *оптимально управляемого объекта*. Цель построения таких моделей – уточнение и конкретизация математического описания возможно более простыми средствами. В упомянутой в разделе 6.2 работе [41] описан процесс построения математической модели оптимально управляемого ЖРД, работающего на топливной смеси кислород–водород.

6.5. Theoria cum practice. При обсуждении описанных выше математических моделей ракетных двигателей часто высказывались сомнения относительно целесообразности их формулировки вместо простейших классических, в то время, когда существуют сложные многопараметрические описания, учитывающие специфические особенности столь сложной конструкции, которой является современный ракетный двигатель. Ответом на замечания подобного рода служит утверждение о том, что математическая модель изучаемого объекта должна быть адекватна цели исследования. Например, нелинейная математическая модель ЖРД 11Д58МФ, разрабатываемого в РКК «Энергия», соответствует поставленным при ее разработке задаче: «моделировать маршевый режим работы двигателя, осуществлять энергетическую увязку параметров двигателя в условиях отклонения статических характеристик трубопроводов и всех его агрегатов (насосов, турбин, камеры сгорания (КС), газогенератора (ГГ), дросселей, шайб и прочего и проводить всевозможные исследования связанные: с изменением схемы двигателя; с аномальными и аварийными ситуациями; с работой двигателя совместно со стендовыми и ракетными системами и т. п.» [5, с. 16]. Но разрабатывать такую подробную модель для понимания необходимости работы ЖРД с регулируемым отношением компонентов топливной смеси, по меньшей мере, нерационально.

Динамический смысл подъема ракеты с ЖРД с переменным соотношением расходов компонентов топлива понятен: в начале движения необходимость разгона требует использовать режим, обеспечивающий максимальную тягу, пусть даже за счет не слишком выгодной расходной эффективности. По мере набора скорости и уменьшения разгоняемой массы соображения экономии сокращающегося запаса топлива начинают в возрастающей степени влиять на выбор управления расходами, повышая удельный импульс с некоторой потерей силы тяги. Возможность практической реализации этой идеи подсказана здравым смыслом. В 70-е годы изучается концепция двухрежимных ЖРД с трехкомпонентной топливной смесью [118]. Разработан двигатель, который «умеет работать в двух режимах: сначала как двигатель первой ступени, при этом в камере сгорания сжигаются традиционные для «околоземного» участка кислород (81,4%) с керосином (12,6%) и к ним еще добавляется водород (6%), а затем как двигатель второй ступени: на этот раз в той же камере сгорания сжигаются доказавшие свою эффективность на «космическом» этапе полета кислород (86%) и водород (14%)» [65].

Отказываться от выбора идеального стехиометрического соотношения расходов приходится из-за того, что плотности горючего и окислителя часто очень различаются и требуемые для идеального соотношения баки слишком отличаются друг от друга по

объему и, следовательно, по массе. Несколько уменьшив больший бак, можно уменьшить суммарную массу баков, проиграв при этом в величине удельного импульса. В результате некоторая часть одного из компонентов топливной смеси не участвует в экзотермической химической реакции компонентов, происходящей в камере сгорания, активно сбрасывается через сопло вместе с продуктами сгорания как инертная масса. Часть энергии, выделившаяся при реакции, расходуется на ускорение этой инертной массы, что уменьшает удельную – на единицу сбрасываемой через сопло массы – энергию. В результате этих потерь скорость реактивной струи уменьшается, а величина тяги, напротив, возрастает, в чем можно убедиться элементарным подсчетом [73].

Необходимо отметить, что инертная масса уже давно и эффективно используется, например, в твердотопливных ракетных двигателях, а её использование для повышения эффективности жидкостных или ядерных ракетных двигателей не является в настоящее время принципиально сложной технической проблемой. Теоретический же анализ проблемы управления работой двигателя ракеты с некоторым запасом инертной массы приведен в работе [71]. Результаты этого исследования подтвердили предположение об эффективности активного сброса имеющейся на борту инертной массы за счет энергии реактивной струи как способа увеличения полезного груза ракеты. В статье [82] при оценке перспективных ракетных двигателей сделан акцент на использование в водородно-кислородном двигателе углеводородов и алюминия в качестве инертной массы и регулируемого отношения расходов компонентов топливной смеси. В 1975 автор настоящего обзора предложил идею активного сброса отходов системы обеспечения жизнедеятельности (СОЖ) экипажа, естественно накапливающихся на борту КА [31]. Результаты подробного исследования возникающей при этом вариационной проблемы на примере длительной пилотируемой экспедиции на Марс представлены в работах [35, 97, 98]. Выполненное сравнение эффективности активного сброса отходов СОЖ с использованием системы регенерации рабочих веществ СОЖ из отходов для повторного использования показало, что активный сброс может обеспечить соизмеримую по величине массу стартового комплекса на околоземной орбите при существенном снижении требований к степени замкнутости системы регенерации. Этот результат свидетельствует о принципиальной возможности выполнения длительных пилотируемых экспедиций с современными СОЖ. Однако необходимость разработки биорегенеративных СОЖ нового поколения диктуется не только стремлением обеспечить экспедиции к планетам. Они нужны и для обеспечения функционирования постоянно действующих поселений, где бы они не находились, и для снижения затрат на жизнеобеспечение экипажей пилотируемых станций на околоземных орбитах. Поэтому речь должна идти о сочетании активного сброса и регенерации!

Использование активного сброса отходов дает возможность способствовать решению и других проблем реализации длительных пилотируемых межпланетных экспедиций. В монографии [77, с. 89] отмечается: «Регенерированная вода... является практически деминерализованной и в длительных полетах не может быть использована для питьевых целей... . Учитывая отрицательное воздействие на организм человека условий невесомости, проявляющиеся... в снижении водопотребления и возможности нарушений в работе сердечнососудистой системы, необходимо для водопотребления экипажа использовать полноценную питьевую воду». Если взять весь запас питьевой воды с Земли, то контейнеры с водой (и с отходами после ее использования) целесообразно разместить в виде дополнительной защитной оболочки жилого модуля КА [10]. Как показывают современные оценки [69], приведенные в статье большого международного коллектива исследователей (16 авторов), такая конструкция позволит ослабить дозы облучения в отсеке. При подлете к цели накопившиеся отходы сбрасываются через сопло двигателя за счет энергии реактивной струи при тормозном импульсе, увеличивая тягу. Указанный прием даст возможность также не иметь проблем с очисткой регенерированной воды от дейтерия, содержащегося в ней в непри-

емлемой для длительного употребления для питья концентрации [122]. В заключение отметим развитие обсуждавшейся в 1974 г. с коллегами в ЦАГИ идеи производить горючее для ракетных двигателей из углеродосодержащих компонентов отходов СОЖ, которая, наконец, признана актуальной совсем недавно [84].

Обратим внимание на еще один чрезвычайно важный аспект проблемы осуществления первых пилотируемых экспедиций к планете Марс. Одним из основных рисков экспедиции является возможность выхода из строя компонентов СОЖ. Попытка увеличения надежности за счет дублирования этих компонентов не решает проблемы кардинально – с учетом невозможности быстрой доставки необходимого оборудования с Земли. Единственный выход – выбор наиболее простых способов обеспечения условий существования экипажа. Понятно, что самый надежный способ – это СОЖ на запасах. Понятно, что плата за надежность – существенное увеличение стартовой массы экспедиционного комплекса. Идея активного сброса отходов СОЖ для увеличения тяги маршевых двигателей при активном участии перехода с межпланетной орбиты на орбиту спутника Марса, при старте к Земле и при переходе на орбиту спутника Земли (all rocket scheme – наиболее надежная схема, сохраняющая все элементы комплекса!) может оказаться достаточно эффективной.

В работе [35] этот подход использован для оценки его эффективности по сравнению с общепринятой в современной научно-технической литературе идеей применения биорегенеративных СОЖ с высокой степенью замкнутости. Расчеты проводились для различных вариантов выполнения пилотируемой экспедиции к планете Марс. На рис. 38, 39 представлены зависимости отношения начальной массы стартового комплекса M_0 к массе M_π возвращаемого на орбиту спутника Земли модуля от величины коэффициента регенерации СОЖ η . Рис. 39 соответствует использованию перспективных ЖРД в качестве маршевых двигателей ($V_0 = 4500 \text{ m/s}$), рис. 38 – ядерных ракетных двигателей ($V_0 = 8250 \text{ m/s}$), принято $M_\pi = 51 \text{ m}$.

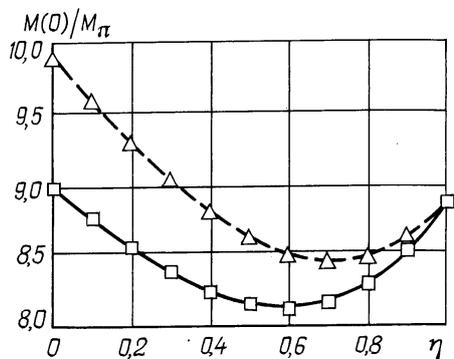


Рис. 38

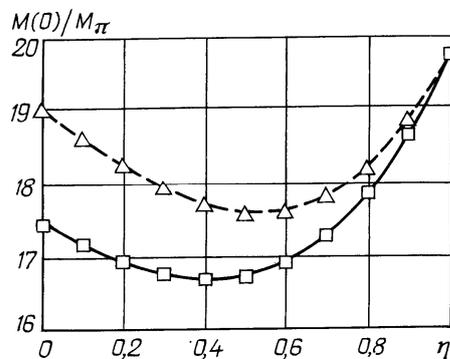


Рис. 39

Сопоставление сплошных (с использованием активного сброса) и штриховых (без сброса) кривых указывает на высокую эффективность сброса при малых значениях η . Интересно, что в случае применения ЖРД активный сброс без регенерации ($\eta = 0$) дает результаты, соизмеримые с оптимальной СОЖ ($\eta \approx 0,5$) без сброса. Для ЯРД эффективность оптимальной СОЖ ($\eta \approx 0,7$) достигается уже при $\eta \approx 0,2$ с активным сбросом. Полученные результаты подтверждают возможность выполнения первых пилотируемых полетов к Марсу с современными СОЖ с низкими значениями коэффициента регенерации, не ожидая разработки биорегенеративных СОЖ, для чего, по современным оценкам, может уйти не менее 10 – 15 лет.

Осуществление предложенного варианта пилотируемой экспедиции на Марс и обсуждаемой в новых публикациях пилотируемой экспедиции к Венере с пребыванием космонавтов в верхних слоях атмосферы не требует разработки принципиально новой техники. Поэтому эти полеты можно выполнить намного раньше, до разработки биорегенеративных СОЖ с намного меньшими затратами, исключив из сметы подготовки экспедиций разработку этих СОЖ. Главное преимущество обсуждаемой схемы – высокая надежность уже апробированной техники. А что касается безаварийной реализации этих экспедиций – она, безусловно, не может быть предметом какой-либо дискуссии с гуманитарной и психологической точек зрения.

§7. Особые оптимальные управления: история, достижения, проблемы.

При характеристике типичных задач механики полета в монографии [50, с. 186] отмечается: «из определения вырожденного режима следует, что искомый оптимальный режим будет заведомо невырожденным лишь тогда, когда функция Гамильтона строго выпукла на множестве допустимых управлений. Но это гораздо более редкая ситуация, чем противоположная, в которой вырожденный режим нельзя исключить из рассмотрения в процессе исследования. Это подтверждается и на практике. Например, решения типичных задач оптимального управления полетом летательных аппаратов как атмосферных, так и космических, оказываются вырожденными... По-видимому, этим следует объяснить то внимание, которое уделяется проблемам вырожденных (иначе – «особых») режимов...».

7.1. Краткий обзор основных этапов становления теории особых оптимальных управлений. Первая вариационная задача, связанная с развитием ракетной техники, попытки решения которой продемонстрировали неэффективность классического вариационного исчисления и стимулировали углубленный анализ ее особенностей, приведший к формулировке необходимых условий оптимальности особых управлений, была сформулирована Р. Годдардом в 1919 году [88]. Постановка и решение этой задачи приведены в п. 3.1. Результаты анализа оптимального управления, приведенные в работах [62, 94], указали на особенность задачи, вызванную ее вырожденностью: уравнение Эйлера оказалось конечным соотношением между фазовыми переменными, а не дифференциальным уравнением. «Существенно, что мы получили не дифференциальное уравнение, а конечное соотношение... Это означает, что данная ракета с данной массой ... на данной высоте...должна подниматься с вполне определенной скоростью..., которая является наивыгоднейшей» [62, с. 263]. Речь идет об уравнении поверхности особого управления (3.4).

Стало ясно, что удовлетворить условиям задачи на концах траектории, используя только экстремаль Эйлера, в общем случае невозможно. Первое решение задачи [62] получено методом непосредственного исследования вариации задолго до введения Л.И. Розоноэром [64] понятия особого оптимального управления. В опубликованной в 1962 году работе Д.Ф. Лоуден [107] установил возможность включения в состав траектории движения КЛА в ньютоновском центральном гравитационном поле участков переменной тяги (сингулярных дуг). Исследование условий оптимальности дуг переменной тяги в задаче Годдарда и спиралей Лоудена вызвало широкую дискуссию и стимулировало разработку необходимых условий более высокого порядка, чем уравнения Эйлера и принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Краткий исторический обзор процесса разработки современной теории особых оптимальных управлений приведен во Введении в монографию [8], в которой проанализированы основные из сформулированных к настоящему времени необходимых условий оптимальности особого управления. Отметим, что этот обзор охватывает работы, вышедшие после публикации 1959 года Л.И. Розоноэра [64], и не уделяет внимания роли перечисленных выше более ранних исследований задач механики полета ракет как заказа практической ракетодинамики на разработку методов, более адекватных проблематике современной техники, чем классическое вариационное исчисление, поскольку в монографии [8] рассмотрены лишь теоретические аспекты проблемы оп-

тимальности особых управлений. Напротив, в обзорной работе [108] авторов, непосредственно связанных с космическими исследованиями: экс-директора ONERA (Национальное агентство по исследованию аэрокосмического пространства, Франция) П. Контенсу (P. Contensou) и научного консультанта ONERA К. Маршала (C. Marshal), – прямо отмечается: «С исторической точки зрения научные исследования в области оптимизации появились сравнительно недавно... До наступления космической эры такие работы были редкими и носили, преимущественно, теоретический характер... Широкие возможности для развития теории оптимизации открылись в связи с изучением космоса.» [108, с.138)].

7.2. Метод вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами интегрированием от особого многообразия. Возможность включения участков переменной тяги в состав оптимальной траектории усложняет задачу вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами, поскольку вырожденные задачи, в которых такие траектории могут быть оптимальными, являются некорректными. К общеизвестным трудностям решения некорректных задач (см. например, [72]) при построении оптимальных траекторий с использованием необходимых условий оптимальности добавляются специфические особенности, связанные с «переопределенностью» особых участков. На этих дугах должны выполняться как условия оптимальности регулярных управлений, так и необходимые условия оптимальности особых управлений, что затрудняет вычисление соответствующих траекторий общепринятыми численными методами.

Остановимся на проблеме построения оптимальных траекторий с сингулярными дугами первого порядка вырождения [8]. На особых участках кроме уравнений движения и присоединенной системы, выполняются соотношения $H_1 = 0$ и $\dot{H}_1 = 0$, представляющие собой первые интегралы указанных уравнений с нулевыми значениями постоянных интегрирования. Необходимость одновременного выполнения этих двух соотношений в начальной точке сингулярной дуги $t = \tau$ накладывает на начальные значения фазового $\vec{x}(0)$ и присоединенного $\vec{\psi}(0)$ векторов ограничение $(\vec{x}(0), \vec{\psi}(0)) \in \Phi_0$, причем многообразие Φ_0 может быть описано до начала численного решения задачи лишь в тех редких случаях, когда уравнения движения и присоединенная система интегрируются в элементарных функциях. В большинстве же практически интересных задач построение оптимальных траекторий с использованием принципа максимума и необходимых условий оптимальности особых управлений сопряжено с поиском недостающих начальных значений $\vec{\psi}(0)$ на неизвестном *a priori* многообразии Φ_0 , выход на которое в процессе поиска представляется весьма маловероятным, а варьирование $\vec{\psi}(0)$ без схода с Φ_0 практически невозможно. Даже если в процессе поиска при одной из проб выполняется условие $(\vec{x}(0), \vec{\psi}(0)) \in \Phi_0$, последующее варьирование значений $\vec{\psi}(0)$, приводящее к сходу с многообразия Φ_0 , существенно меняет характер траектории (особый участок вновь отсутствует) даже при малых вариациях $\delta\vec{\psi}(0)$, в чем, в частности, и состоит одно из проявлений некорректности вырожденной задачи. Иллюстрацией к изложенному могут служить кривые на рис. 18 и рис. 19, демонстрирующие пример вариации траектории и управления в процессе поиска начальных значений компонент сопряженного вектора при замене значения одного из искомых параметров с $\xi = 8,0127$ на $\xi = 8,0128$.

Для вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами автором настоящего обзора предложен метод вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами интегрированием от поверхности особого управления [33], развитый затем совместно со Злацким В.Т. до метода интегрирования от особого многообразия [24]. Суть предложенного метода состоит в переходе от поиска вектора $\vec{\psi}(0)$ на неизвестном многообразии Φ_0 к поиску «под фонарем» (Р. Беллман): вначале на множе-

стве точек, удовлетворяющем всем необходимым условиям оптимальности особого участка, определяется точка $X_{\psi}(\bar{x}^*, \bar{\psi}^*)$, такая, что полученная интегрированием уравнений движения при обратном течении времени траектория проходит в фазовом пространстве через заданное начальное положение (с разумно выбранной степенью точности). Затем строится особый участок и определяется момент схода с него из условия попадания в конечное состояние и выполнения условий трансверсальности.

Предложенный метод получил признание специалистов. Реакцией на публикацию в 1983 году статьи [24], в которой был предложен метод вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами интегрированием от особого многообразия, был доклад одного из разработчиков современной математической теории оптимального управления, автора классического условия оптимальности особого управления первого порядка вырождения, Г. Келли (Henry J. Kelley) в соавторстве с Р. Кумером (Ranjith Kumar), на Fifth AIAA Conference on Guidance, Navigation and Control (Monterey, California. – August 17–19, 1987), опубликованный затем в Journal of Guidance, Control and Dynamics [102]. Во введении к тексту доклада и статьи отмечается, что численное решение как прямыми, так и непрямыми методами задач сингулярного оптимального управления вызывает существенные трудности. Предложенный в нашей статье эффективный подход («An effective approach») воспроизводится ими в связи с недоступностью нашей статьи («This is capitulated herein on account of inaccessibility of [11]»; 11 – номер ссылки на эту статью в тексте упомянутого доклада, стр. 1). Подробный анализ предложенного подхода представлен в статье [128], в которой рассмотрена задача о подъеме– разгоне ЛА в вертикальной плоскости и проведено подробное исследование зависимости структуры оптимальной траектории от краевых условий маневра. С использованием этого подхода исследована задача Годдарда с ограниченным временем подъема [130]. Исследования особенностей управления тягой при достижении максимальной высоты продолжаются с учетом фазовых ограничений. Например, в работе [120] рассмотрено влияние ограничений на величину скорости напора набегающего потока. В статье [115] исследовано влияние кризиса сопротивления на управление тягой в задаче Годдарда.

Из современных публикаций необходимо отметить исследование особых управлений в задаче оптимизации выведения спутника на геостационарную орбиту тяжелым многоступенчатым носителем Ариан 5. Проведенный анализ показал, что при некотором увеличении («slightly modifying» [109, с. 55]) площади миделевого сечения ракеты и удельного импульса двигателя оптимальной становится траектория с сингулярной дугой. По сообщению <http://mediasat.info/2014/12/16/ariane-6/> разрабатываемый к 2020 году новый европейский носитель Ариан 6 будет снабжен четырьмя ускорителями, в отличие от двух на ракете Ариан 5. Эта модификация заметно – примерно на 30 процентов – увеличит площадь миделя ракеты. Кроме того, полученные оценки эффективности особого управления при выведении Ариан 5 в статье [109] следует расценить лишь как весьма первоначальные. Авторы ограничивают анализ траектории участком подъема до отделения ускорителей, на котором скорость движения еще сравнительно невелика. Необходимо исследовать весь участок работы двигателя первой ступени. Судя по фото новой индийской ракеты-носителя GSLV Mark III (см. <http://lenta.ru/news/2014/12/18/ind/>) и китайской Long March 2F (<http://www.spaceflight101.com/long-march-2f.html>), их форма подтверждает целесообразность проведения подобного анализа. То же относится и к российским РН «Союз», «Протон», «Ангара», носителям США SLS-1/EM-1, «Falcon Heavy», «Титан-34D», РН КБ Южное «Маяк 43-2Т», «Маяк-33-4Н». Необходимо отметить также, что речь идет о баллистической целесообразности дросселирования тяги. «Собственно глубокое гибкое регулирование тяги (ГГРТ) целесообразно для задач выведения с фиксированным временем полета при отработке больших или неопределенных возмущений... Увеличение глубины регулирования тяги позволяет существенно расширить диапазоны допустимых начальных ошибок по дальности и времени запуска РН. Для первых ступеней ракет ГГРТ позво-

ляет решить проблему обеспечения движения с ограничением величины скоростного напора. Кроме того, для всех ступеней становится возможным формирование траектории полета с ограниченным (комфортным) значением перегрузки» [75, с. 13].

В больших обзорных работах [81, 128] состояние проблемы численного решения задач оптимального управления в механике космического полета анализируется с акцентом на возможность преодоления трудностей [81] путем использования методов геометрического оптимального управления [132], метода гомотопии, а также некоторых подходов теории динамических систем, успешно применяемых в астродинамике. Преодоление трудностей решения в значительной степени зависит от наличия и достоверности информации о структуре искомой траектории, количестве и расположении особых участков до начала вычислений [72, 128]. Информация такого рода может быть получена путем тщательного анализа необходимых условий оптимальности с учетом особенностей конкретной задачи.

Подводя итог изложенному, подчеркнем перманентную актуальность формулировки накопленного к настоящему времени опыта численного решения задач оптимизации траекторий с сингулярными дугами, приведенной в [128, с. 727]: «Remark 2.9. It must be noted that, when implementing a shooting method, the structure of the trajectory should be known in advance, particularly in the case where the trajectory involves singular arcs This remark shows the importance of being able to determine at least locally the structure of optimal trajectories: this is one of the main issues of geometric optimal control theory...» (Перевод: Замечание 2.9. Следует отметить, что при использовании метода стрельбы, структура траектории должна быть известна заранее, особенно в том случае, когда траектория включает в себя особые дуги... . Это замечание показывает важность иметь возможность определить, по крайней мере, локально структуру оптимальных траекторий: это один из основных вопросов геометрической теории оптимального управления). Отметим, что именно определение указанной структуры обеспечивает эффективность предложенного автором настоящего обзора метода построения оптимальных траекторий с сингулярными дугами.

Как указано в упомянутой выше монографии ([8, с. 15]), «условие особенности не есть признак ... исключительности ситуации, скорее, – это сигнал о том, что задача достаточно сложна и ее нельзя до конца исследовать лишь принципом максимума (необходимым условием первого порядка)». «А переход к условиям высокого порядка диктуется не только потребностями конкретных вычислений, но и общим уровнем развития науки..., где, как правило, работа с первыми приближениями признается уже недостаточной, грубой» ([8, с. 19]). Поэтому поток публикаций по методам решения задач оптимизации с особыми управлениями не иссякает [79]. По-видимому, именно сложность проблемы является причиной появления работ с ошибочными результатами. Так, авторы статьи [76, с. 302], опубликованной в научном журнале мирового уровня, приводят собственное исследование оптимальности особого управления в задаче Годдарда и делают вывод о том, «что в этой задаче, в законе изменения тяги промежуточного участка не может быть», отвергая достижения мировой науки.

7.3. Нерешенная проблема: особая оптимальность особых управлений. Рассмотрим некоторые особенности, возникающие при вычислении сингулярных управлений. Ниже рассматриваются сингулярные дуги первого порядка вырождения, входящие в состав оптимальных траекторий динамической системы со скалярным управлением в задаче

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + u f_1(x); \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}'; \quad J(u) = \varphi(x(t_f)) \rightarrow \min_u. \quad (7.1)$$

Здесь x – n -мерный фазовый вектор, скалярное управление $u(t) \in (0, 1)$, ' (штрих) – операция транспонирования. Сопряженная система записывается в виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial f_0'}{\partial x} \psi - u \frac{\partial f_1'}{\partial x} \psi. \quad (7.2)$$

Для системы (7.1), (7.2) представим гамильтониан в виде

$$H(x, \psi, u) = H_0(x, \psi) + uH_1(x, \psi); \quad H_0(x, \psi) = \psi' f_0(x); \quad H_1(x, \psi) = \psi' f_1(x).$$

В случае движения в трехмерном ($n = 3$) фазовом пространстве с заданным временем выполнения маневра все особые дуги лежат на поверхности особого управления, поскольку вдоль этих дуг выполняются три соотношения

$$H_1 = \psi' f_1 = 0; \quad H_0 = \psi' f_0 = 0; \quad \frac{dH_1}{dt} = \psi' \left(\frac{df_1}{dx} f_0 - \frac{df_0}{dx} f_1 \right) = 0. \quad (7.3)$$

Выполнение этих соотношений с ненулевыми компонентами сопряженного вектора ψ возможно лишь в случае равенства нулю определителя системы (7.3). Это условие и дает уравнение поверхности особого управления $S(x) = 0$. Важным свойством этой поверхности является *независимость самого уравнения от вектора ψ* . Следовательно, поверхность особого управления инвариантна относительно как условий на концах траектории, так и терминального функционала. Понятно, что полное решение задачи, включающее не только сингулярные, но и регулярные дуги, будет строиться с учетом указанных условий, но если в состав оптимальной траектории войдет сингулярная дуга, фазовые координаты управляемого объекта необходимо должны быть связаны соотношением $S(x) = 0$. Более того, поскольку это соотношение – первый интеграл системы (7.1), (7.2) то управление $u(t)$ при движении вдоль сингулярной дуги должно определяться из условия обращения в нуль производной по времени от функции $S(x)$, т.е.

$$u(x) = - \frac{\partial S'(x)}{\partial x} f_0(x) / \frac{\partial S'(x)}{\partial x} f_1(x), \quad (7.4)$$

а величина управления в каждой точке сингулярной дуги определяется только положением объекта в фазовом пространстве и не зависит ни от цели управления $x(t_f)$, ни от оценки качества $J(u)$!

Понятие «поверхность особого управления» используется в работах по теории особых управлений достаточно часто, однако, насколько известно автору, без указаний на инвариантность поверхности и, естественно, без обсуждения этого удивительного с точки зрения философии управления свойства. В частном случае задачи Годдарда уравнение поверхности особого управления (см. (3.4), (7.4))

$$F(h, v)(v-1) + vF'_v(h, v) - mg(h) = 0 \quad (7.5)$$

можно рассматривать как условие выбора скорости v движения ракеты массой m на высоте h . Напомним, что об этом отмечено еще в работе Д.Е.Охочимского [62] задолго до введения самого термина «особое управление». Для обеспечения движения по поверхности (7.5) величина тяги должна вычисляться по формуле (3.5)

$$T_s a_0 = F + \frac{m^2 g'_h + m[g(F'_v + F''_{vv}) + F'_h(1-v) - vF''_{vh}]}{F + 2F'_v + F''_{vv}}. \quad (7.6)$$

Формула (7.5) – первый интеграл уравнений движения и сопряженной системы в задаче Годдарда, выполнение которого есть необходимое условие оптимальности особого управления. По-видимому, *это запись некоего закона сохранения*, выполняющегося при оптимальном целенаправленном движении вдоль вертикальной прямой в произвольном гравитационном поле с ускорением $g = g(h)$. Но это *закон сохранения чего?* Отметим только, что уравнение $S(x) = 0$ (уравнение (7.5) в задаче Годдарда) – это уравнение Эйлера в задаче Майера (7.1), т.е. условие равенства нулю вариации любого терминального функционала.

Метафизический принцип достаточного основания Лейбница: «Ни одно явление не может оказаться истинным или действительным, ни одно утверждение справедливым, – без достаточного основания, почему именно дело обстоит так, а не иначе...», – стимулирует поиск объяснения обсуждаемой инвариантности. Вычисления по формулам $S(x) = 0$ и (7.4) – в общем случае, или (7.5), (7.6) – в задаче Годдарда, *могут быть выполнены до (или вообще без!)* формулировки какой-либо вариационной задачи для объекта, движение которого описывается системой дифференциальных уравнений (7.1). Следовательно, они выражают некоторое свойство этого объекта, которое проявляется при реализации его любых целенаправленных движений. В чем состоит это свойство? Автору не удалось получить ответ на этот вопрос – ни в общем случае, ни при $n = 3$, ни в конкретной задаче Годдарда.

Единственное наблюдение, которым следует поделиться с заинтересованными читателями, состоит в «гидродинамической» трактовке системы уравнений (7.1). Обратимся для начала к системе дифференциальных уравнений движения при $n = 3$. В этом случае скорость dx/dt движения объекта складывается из двух составляющих. Поле скоростей $f_0(x)$ переносит объект независимо от желания управляющего субъекта. Изменить скорость движения управляющий может, добавляя к $f_0(x)$ часть $u \in [0,1]$ скорости второго поля $f_1(x)$. Первые два уравнения системы (7.3) в совокупности свидетельствуют об ортогональности вектора ψ плоскости, в которой лежат вектора $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Таким образом, $\psi = \lambda[f_0(x) \times f_1(x)]$, где $\lambda = \text{const}$. Понятно, что в этой же плоскости будет расположен и выбранный в этот момент времени $t \in [t_0, t_1]$ результирующий вектор dx/dt при любом значении управления $u(t)$. Третье уравнение системы (7.3), имеющее вид $\psi((f_0 \text{ grad})f_1 - (f_1 \text{ grad})f_0) = 0$, может быть, с учетом $\psi = \lambda[f_0(x) \times f_1(x)]$, представлено в форме $\psi \times \text{rot} \psi = 0$, но в чем смысл этого представления – по-прежнему не ясно.

Заключение.

В данной статье представлен обзор исследований проблем управления движением динамических систем с акцентом на механику космического полета. Основное внимание уделено совершенствованию методов решения вырожденных вариационных задач о движении ракет в гравитационных полях с учетом сопротивления атмосферы, поскольку эти задачи непосредственно связаны с перманентно актуальной проблемой практической космонавтики – увеличением массы полезной нагрузки, выводимой ракетами-носителями на околопланетные орбиты. Обсуждены современные подходы к решению задач управления движением ракет и космических аппаратов по траекториям с сингулярными дугами, оптимальными при движении тела переменной массы в среде с сопротивлением.

Предложенный автором обзора метод вычисления оптимальных траекторий с сингулярными дугами оказался эффективным при решении указанных задач. Представленные в обзоре результаты решения некоторых практически интересных задач дают возможность оценить выигрыш от использования оптимального управления, реализация которого требует усложнения системы управления работой ракетных двигателей, по сравнению с современными более простыми законами управления. В обзоре проанализированы возможности улучшения характеристик ракетных двигателей путем использования сопел регулируемой геометрии, оптимизации независимого управления расходами компонентов топлива, использования отходов системы обеспечения жизнедеятельности экипажа в качестве ускоряемой в двигателе инертной массы при длительных межпланетных экспедициях, использования аэростатической подъемной силы на начальном этапе подъема. Показано, что необходимое для более тщательного анализа оптимизационных задач уточнение математической модели ракетного двигателя, как объекта управления, требует дальнейших теоретических и экспериментальных исследований взаимодействия потока воздуха, обтекающего корпус ракеты, и струй газов, вытекающих из сопел двигателя. Обсуждена также нерешенная проблема инвариантности некоторых свойств сингулярных управлений относительно цели выполняемого ракетой маневра и оценки качества управления.

РЕЗЮМЕ. Дано аналіз сучасного стану і обговорено проблеми удосконалення методів дослідження вироджених варіаційних задач з акцентом на механіку космічного польоту. Основну увагу приділено дослідженню руху ракет в атмосфері. Включення до складу оптимальних траєкторій дуг сингулярного управління дозволяє в цьому випадку збільшити економічність ракетних двигунів шляхом заміни традиційних двигунів постійної тяги двигунами, що допускають дроселювання величини тяги. Наведені в огляді результати розрахунків для конкретних маневрів можуть служити джерелом інформації для прийняття рішень при конструюванні перспективної ракетно-космічної техніки.

1. Акимов В. Н., Конохов В. Г., Коротеев А. А. Эффективность применения космических многорежимных ядерных энергодвигательных установок с машинным преобразованием энергии // Изв. РАН, Энергетика. – 2008. – № 3. – С. 20 – 27.
2. Алемасов В. Е., Дрегалин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей – М.: Машиностроение, 1980. – 533 с.
3. Баррер М., Жомотт А., Вебеке Б. Ф., Ванденкерхоне Ж. Ракетные двигатели – М.: Оборонгиз. – 1962. – 799 с.
4. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел – М.: Наука, 1977. – 432 с.
5. Беляев Е. Н., Воробьев А. Г., Гнесин Е. М. Разработка нелинейной математической модели жидкостного ракетного двигателя, работающего в стационарном режиме // Труды МАИ. – 2014. – № 73. – С. 16 – 33.
6. Борзов В. И. Задача о разделении движений в динамике полета // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 5. – С. 3 – 11.
7. Брэввелл Д. Ф. Оптимизация траекторий // Вопросы ракетной техники. – 1961. – № 1. – С. 46 – 69.
8. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
9. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. – М.: Гос. изд-во физ.-матем. лит.-ры, 1959. – 360 с.
10. Глухих И. Н., Челяев В. Ф., Щербаков А. Н. Использование воды для защиты обитаемых космических объектов от высокоскоростных частиц: микрометеоров, космического мусора // Изв. РАН. Энергетика. – 2009. – № 1. – С. 92 – 95.
11. Гребенников Е. А., Демин В. Г. Межпланетные полеты. – М.: Наука, 1965. – 200 с.
12. Григорьев И. С., Григорьев К. Г. К проблеме решения в импульсной постановке задач оптимизации траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем большой тяги в произвольном гравитационном поле в вакууме // Космические исследования. – 2002. – № 1. – С. 88 – 111.
13. Григорьев И. С., Григорьев К. Г. Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивными двигателями ограниченной тяги // Космические исследования. – 2007. – № 4. – С. 358 – 366.
14. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
15. Гродзовский Г. Л., Кифоренко Б. Н., Кузьменко В. В. Влияние весовых ограничений на набор максимальной высоты при движении в атмосфере // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – № 1. – С. 53 – 59.
16. Гродзовский Г. Л., Кифоренко Б. Н. Оптимальное секционирование материальной точки переменной массы // Вычисл. и прикл. математика. – 1972. – № 18. – С. 17 – 24.
17. Дронь Н. М., Кондратьев А. И., Хорольский П. Г., Дубовик Л. Г. Сравнительная оценка характеристик космических траекторий при трех вариантах маневра их выведения // Авиационно-космическая техника и технология. – 2010. – № 10(77). – С. 21 – 23.
18. Дронь Н. М., Дубовик Л. Г., Кондратьев А. И., Хорольский П. Г. Массовые характеристики космических мусорособирающих аппаратов, выводимых известными ракетами-носителями с использованием электроракетной двигательной установки // Механика та машинобудування. – 2010. – № 1. – С. 8 – 12.
19. Дронь Н. М., Хорольский П. Г., Хитько А. В., Дубовик Л. Г. К выбору двигателя для маневрирования космического мусоросборщика на этапе очистки околоземного пространства // Механика та машинобудування. Прикладная механіка. – 2012. – № 2. – С. 3 – 8.
20. Жуковский Н. Е. К теории судов, приводимых в движение силой реакции вытекающей струи. Собрание сочинений. Т. IV. – М.– Л.: ОНТИ НКТП СССР, гл. ред. авиац. лит., 1937. – 324 с.
21. Задонцев В. А. Две жизни и две ракеты Вернера фон Брауна (1912 – 1977) / К столетию со дня рождения // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 9(96). – С. 146 – 158.
22. Засухин О. Н., Булат П. В., Продан Н. В. Развитие методов расчета донного давления // Фундаментальные исследования. – 2012. – № 6. – С. 273 – 279.
23. Злацкий В. Т. Исследование вырожденных задач механики полета / Дисс. канд. физ.-матем. наук. – К., 1982. – 179 с.
24. Злацкий В. Т., Кифоренко Б. Н. О вычислении оптимальных траекторий с участками особого управления // Вычисл. и прикл. математика – 1983. – № 49. – С. 55 – 62.
25. Злацкий В. Т., Кифоренко Б. Н. Оптимальное быстроедействие при вертикальном движении тела переменной массы в атмосфере // Труды ЦАГИ. – 1976. – Вып. 1729. – С. 7 – 13.
26. Ивашкин В. В., Смирнов В. В. Качественный анализ некоторых методов уменьшения астероидной опасности для Земли // Астрономический вестник. – 1993. – № 6. – С. 46 – 54.
27. Ильин В. А., Кузьмак Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов. – М.: Наука. – 1976. – 744 с.
28. Ишлинский А. Ю. Два замечания к теории движения ракет // Докл. АН СССР. – 1946. – № 7. – С. 599 – 610.
29. Кифоренко Б. Н. К вопросу об оптимальном управлении величиной тяги ракет в атмосфере // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 3. – С. 21 – 27.
30. Кифоренко Б. Н. Об использовании аэростатической подъемной силы при наборе максимальной энергии телом переменной массы // Труды ЦАГИ. – 1976. – Вып. 1729. – С. 3 – 6.
31. Кифоренко Б. Н. Об оптимизации параметров тела переменной массы при движении с активным сбросом отходов системы жизнеобеспечения // Космические исследования. – 1975. – № 2. – С. 201 – 205.

32. Кифоренко Б.Н. Об особом управлении в механике полета с ограниченной мощностью и накоплением энергии // Космические исследования. – 1971. – 9, № 4. – С. 536 – 540.
33. Кифоренко Б.Н. Оптимальные траектории с участками особого управления // Сложные системы управления. – К.: Институт кибернетики АН УССР, 1974. – С. 45 – 55.
34. Кифоренко Б.Н., Багнюк Г.К. Использование аэростатической подъемной силы при движении тела переменной массы в плотной атмосфере // Труды XX науч. чтений, посвящен. разработке научн. наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1987. – С. 21 – 28.
35. Кифоренко Б.Н., Васильев И.Ю. Проблемы оптимизации пилотируемых межпланетных экспедиций // Космічна наука і технологія. – 2000. – 6, № 1. – С. 3 – 55.
36. Кифоренко Б.Н., Даулетов Г.К. Аналитическое исследование оптимального управления составом рабочего тела // Труды IX научн. чтений памяти С.П. Королева. – М., 1987. – С. 100 – 109.
37. Кифоренко Б.Н., Злацкий В.Т., Кожуховский Н.Н. Особенности оптимального управления тягой ракеты в плотной атмосфере // Труды XI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1978. – С. 132 – 147.
38. Кифоренко Б.Н., Злацкий В.Т., Кузьменко В.В. Об эффективности оптимального управления степенью расширения газов в сопле ракетного двигателя // Труды XII чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1979. – С. 61 – 64.
39. Кифоренко Б.Н., Кузьменко В.В. О влиянии внешних сил на движение материальной точки переменной массы // Труды VIII чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1975. – С. 114 – 119.
40. Кифоренко Б.Н., Сидорчук А.П. Оптимальное управление ракетным двигателем с квазирасчетным соплом // Научное творчество К.Э. Циолковского и современное развитие его идей. – М.: Наука, 1984. – С. 35 – 37.
41. Кифоренко Б.Н., Харитонов А.М. Математическое моделирование оптимально управляемых динамических объектов // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 4. – С. 35 – 48.
42. Кифоренко Б.Н., Харитонов А.М. Оптимальное управление расходами компонентов топлива в аварийной ситуации // Проблемы управления и информатики. – 1988. – № 3. – С. 25 – 33.
43. Кифоренко Б.Н., Хасенов Е.А. Вычисление оптимальных траекторий движения тела переменной массы в атмосфере // Вычисл. и прикл. математика. – 1983. – № 51. – С. 98 – 103.
44. Кифоренко Б.Н., Хасенов Е.А. Оптимальные плоские движения материальной точки переменной массы // Труды XVI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1982. – С. 22 – 28.
45. Кифоренко Б.Н., Хасенов Е.А. Ступенчатое регулирование тяги в задаче о наборе высоты // Труды VIII научных чтений по космонавтике памяти С.П. Королева. – М., 1986. – С. 119–125.
46. Константинов М.С., Лёб Х.В., Петухов В.Г., Попов Г.А. Проектно-баллистический анализ пилотируемой марсианской миссии с ядерной электроракетной двигательной установкой // Труды МАИ. – 2011. – № 42. – 21 с.
47. Космодемьянский А.А. Общие теоремы механики тела переменной массы // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. – 1946. – № 184. – 16 с.
48. Космодемьянский А.А. Экстремальные задачи механики точки переменной массы // ДАН СССР. – 1946. – 53, № 1. – С. 17 – 19.
49. Космонавтика в XXI веке. Доклад президента РКК «Энергия» им. С.П.Королева чл.-корр. РАН В.А.Лопоты // Вестник РАН. – 2011. – 81, № 9. – С. 771 – 793.
50. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 448 с.
51. Кротов В. Ф., Хрусталева М.М. Оптимальное управление тягой и углом атаки летательного аппарата при маневре подъем – разгон. Проблемы аналитической механики, теории устойчивости и управления. – М.: Наука, 1975. – С. 168 – 174.
52. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. – М.: Гос. Изд-во техн.-теорет. л-ры, 1954. – 398 с.
53. Кузьменко В.В. Особое управление движением ракеты в атмосфере // Труды IX чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э.Циолковского. Секция: Проблемы ракетной и космической техники. – М.: ИИЕТ, 1975. – С. 138 – 146.
54. Ломакин И. В., Мартынов М.Б., Поль В.Г., Симонов А.В. Астероидная опасность, реальные проблемы и практические действия // Вестник ФГУП НПО им. С.А. Лавочкина. – 2009. – № 1. – С. 53 – 62.
55. Макаров О.В. О движении точки переменной массы с минимальным расходом энергии // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. – № 5. – С. 178 – 173.
56. Мартынов М.Б., Зеленый Л.М., Хартов В.В. Космическая программа исследования планет и малых тел Солнечной системы: принципы формирования, концепция технической реализации // Полет. – 2011. – N 4. – С. 107 – 118.
57. Мачабели Л.И. История развития механики тел переменной массы с 1917 по 1967 г.г. // Вопросы динамики и прочности. – 1969. – Вып. – 18. – С. 181 – 194.
58. Мецнерский И.В. Работы по механике тела переменной массы – М.: Гостехиздат, 1949. – 276 с.
59. Михайлов Г.К. К истории динамики систем переменного состава и теории реактивного движения (до начала второй мировой войны). – М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1974. – Препринт № 49. – 105 с.
60. Моисеев Н. Н. Человек, среда, общество. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
61. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей / Под ред. Кудрявцева В.М. – М.: Высш. шк., 1975. – 656 с.
62. Охоцимский Д.Е. К теории движения ракет // Прикл матем. и механика – 1946. – 10, № 2. – С. 251 – 272.
63. Пилотируемая экспедиция на Марс (Под ред. А.С. Коротева). – М.: Российская академия космонавтики им. К.Э. Циолковского, 2006. – 320 с.
64. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, II // Автоматика и телемеханика. – 1959. – 20, № 11. – С. 1442 – 1458.
65. Рубан О. Достаточно одной ступени // n-t.ru/tp/ts/dos.htm

66. Рыхлова Л.В., Шустов Б.М., Поль В.Г., Суханов К.Г. Насущные проблемы астероидной опасности // Околосемная астрономия. – 2007. – С. 25 – 33.
67. Санин Ф.П., Савчук В.С. К исследованиям истории развития ракетно-космической техники и физико-технической проблематики в Украине // Вісник Дніпропетровського нац. ун-ту. Ракетно-космічна техніка. – 2001. – № 5. – С. 11 – 16.
68. Сапа В.А. О вариационных принципах в механике переменной массы // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия математика и механика. – 1961. – Вып. 9. – С. 116 – 123.
69. Сато Т., Ниита К., Шуришаков В.А. и др. Оценка ослабления дозы в отсеке космического аппарата при использовании воды как дополнительной защиты // Космические исследования. – 2011. – 49, № 4. – С. 329 – 334.
70. Тарасов Е.В. Космонавтика. – М.: Машиностроение, 1977. – 216 с.
71. Фаткин Ю.М. Использование инертной массы в двигателе ограниченной скорости истечения // Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С.164 – 168.
72. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
73. Хасенов Е.А. Аппроксимация оптимального управления в вырожденных задачах механики полета. – Дисс. канд. физ.-матем. наук – К., 1985. – 122 с.
74. Хендельсмен М. Оптимальные траектории полета в безвоздушном пространстве с постоянной тягой при использовании импульсных траекторий в качестве начальных приближений // Ракетная техника и космонавтика. – 1966. – № 6. – С. 151 – 158.
75. Хорольский П.Г. Баллистическая целесообразность глубокого гибкого регулирования маршевых двигателей ракет-носителей //Авиационно-космическая техника и технология. – 2006. – № 10. – С. 11 – 13.
76. Шахвердян А.С., Шахвердян С.В. Теория особых оптимальных управлений с приложением к механике космического полета // Космические исследования. – 2004. – 42, № 3. – С. 302 – 312.
77. Шибанов Г.П. Обитаемость космоса и безопасность пребывания в нем человека. – М.: Машиностроение, 2007. – 544 с.
78. Accettura A.G., Bruno C., Casotto S., Marzari F. Mission to Mars using integrated propulsion concepts: considerations, opportunities, and strategies // Acta Astronautica. – 2004. – 54, N 7. – P. 471 – 486.
79. Aronna M. S., Bonnans J. F., Martinon P. A shooting algorithm for optimal control problems with singular arcs // J. of Optimization Theory and Applications. – 2013. – 158, N 2. – P. 419 – 459.
80. Beichel R., O'Brien C.J., Taylor J.P. The next generation rocket engines // Acta Astronautica. – 1989. – 20. – P. 111 – 116.
81. Betts J.T. Survey of numerical methods for trajectory optimization // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1998. – 21, N 2. – P. 193 – 207.
82. Caisso P., Souchier A., Rothmund C. et al. A liquid propulsion panorama // Acta Astronautica. – 2009. – 65, N 11. – P. 1723 – 1737.
83. Chiravalle V.P. Nuclear electric ion propulsion for three deep space missions //Acta Astronautica. – 2008. – 62. – N 6. – P. 374 – 390.
84. Dhoble A.S., Pullammanappallil P.C. Design and operation of an anaerobic digester for waste management and fuel generation during long term lunar mission // Advances in Space Research. – 2014. – 54. – N 8. – P. 1502 – 1512.
85. Ehlmann B. L., Chowdhury, J., Marzullo T.C. et al. Humans to Mars: A feasibility and cost-benefit analysis // Acta Astronautica. – 2005. – 56, N 9. – P. 851 – 858.
86. Fedotov G.G. Possibilities of Combining High- and Low-Thrust Engines in Flights to Mars // Acta Astronautica. – 2004. – 55. – P. 79 – 94.
87. Gobetz F.W., Doll J.R. A survey of impulsive trajectories // AIAA Journal. – 1969. – 7, N 5. – P. 801 – 834.
88. Goddard R.H. A Method of Reaching Extreme Altitudes // Nature. – 1920. – 105, N 2. – P. 809 – 811.
89. Guz A.N., Kubenko V.D., Babaev A.E. Dynamics of Shell Systems Interacting with a Liquid // Int. Appl. Mech. – 2002. – 38, N 3. – P. 260 – 301.
90. Hamel G. Uber eine mit dem Problem der Rakete zusammenhangende Aufgabe der Variationsrechnung // ZAMM. – 1927. – 7, N 6. – P. 451 – 452.
91. Howe S.D. High energy-density propulsion – reducing the risk to humans in planetary exploration // Space Policy. – 2001. – Is. 17. – P. 275 – 283.
92. Ilin A.V., Cassidy L.D., Glover T.W., Chang Diaz F.R. VASIMR @Human Mission to Mars // Space, Propulsion & Energy Sciences Int. Forum (March 15 – 17, 2011, University of Maryland). – 12 p.
93. Ivashkin V.V. Analysis of space flight mechanics problems //Acta Astronautica. – 2003. – 52, Is. 8. – P. 663 – 670.
94. Kelley H.J., Kopp R.E., Moyer H.G. Singular extremals. Topics in optimization / Ed.G. Leitmann. – N.Y.: Acad. Press, 1967. – P. 63 – 101.
95. Kharytonov O.M., Kiforenko B.M. Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion // Acta Astronautica. – 2011. – 69, N 3. – P. 223 – 233.
96. Kiforenko B.N. Problems of the Mathematical Description of Rocket Engines as Plants //Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 5. – P. 608 – 612.
97. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. How we will go to Mars // Acta Astronautica. – 2003. – 54, N 1. – P. 61 – 67.
98. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. How Shall We Do Go to Mars // Proc. 46th Int. Astronautical Cong. (IAC-95)(Oslo, Norway, 1995). – IAF Pap. 95-A.6.0. – 9 p.
99. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu., Tkachenko Ya.V. On the problem of optimal control of the thrust value of the electric propulsion rocket with solar energy source // Acta Astronautica. – 2013. – 89, August–September. – P. 121 – 125.
100. Koelle H.H., Stephenson D.G. International Academy of Astronautics 5th cosmic study –preparing for a 21st century program of integrated, Lunar and Martian exploration and development (executive summary) // Acta astronautica. – 2003. – 52, N 8. – P. 649 – 662.
101. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. The analysis of manned Mars mission with duration of 1000 days //Acta Astronautica. – 2012. – 73. – P. 122 – 136.
102. Kumar R., Kelley H.J. Singular optimal atmospheric rocket trajectories // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1988. – 11, N. 4. – P. 305 – 312.
103. Landau D.F., Longuski J.M. Comparative assessment of human-Mars- mission technologies and architectures // Acta Astronautica. – 2009. – 65, N 7. – P. 893 – 911.

104. *Larin V.B.* Attitude-Determination Problems for Rigid Body // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 7. – P. 870 – 898.
105. *Larin V.B.* Compensation of External Perturbations under Uncertainty // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 9. – P. 1145 – 1150.
106. *Larin V. B., Tunik A.A.* On Inertial-Navigation System without Angular-Rate Sensors // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**. – N 4. – P. 488 – 499.
107. *Lawden D.F.* Optimal intermediate-thrust arcs in a gravitational field // *Astronautica Acta.* – 1962. – **8**, N 2. – C. 106 – 123.
108. *Marshall C., Contensou P.* Singularities in Optimization of Deterministic Dynamic Systems. Contensou P. // *J. of Guidance, Control, and Dynamics.* – 1981. – **4**, N 3. – P. 240 – 252.
109. *Martinon P., Bonnans F., Laurent-Varin J., Trélat E.* Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher // *J. of Guidance, Control, and Dynamics.* – 2009. – **32**, N 1. – P. 51 – 55.
110. *Martynjuk A.A.* Stability Analysis of Continuons Systems with Structural Perturbations // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – **38**, N 7. – P. 783 – 805.
111. *Mazanek D.D., Brohpy J.R., Merrill R.G.* Asteroid Retrieval Mission Concept–Trailblazing Our Future in Space and Helping to Protect Us from Earth Impactors // 3rd IAA Planetary Defense Conference; 15 – 19 Apr. 2013; Flagstaff, AZ; United States, 2013. – 16 p.
112. *McConaghy T.T., Longuski J.L., Byrnes D.V.* Analysis of a class of Earth–Mars cycler trajectories // *J. of Spacecraft and Rockets.* – 2004. – **41**, № 4. – P. 622 – 628.
113. *Meyer R.X.* The «Flying Carpet» concept: A possible alternative to nuclear space propulsion // *Acta Astronautica.* – 2006. – **58**, N 10. – P. 499 – 505.
114. *Miele A.* General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket-Powered Aircraft, Missile, and Satellite Carriers // *Astronautica Acta.* – 1958. – **4**, N 4. – P. 264 – 288.
115. *Munick H.* Goddard problem with bounded thrust // *AIAA Journal.* – 1965. – **3**, N. 7. – P. 1283 – 1285.
116. *Oberle H.J.* Numerical computation of singular control functions in trajectory optimization problems // *J. of Guidance, Control, and Dynamics.* – 1990. – **13**, N 1. – P. 153 – 159.
117. *Renk F., Hechler M., Messerschmid E.* Exploration missions in the Sun-Earth-Moon system: A detailed view on selected transfer problems // *Acta Astronautica.* – 2010. – **67**, N 1. – P. 82 – 96.
118. *Salkeld R.J., Beichel R.* Mixed-mode rocket vehicles for international space transportation systems // *Acta Astronautica.* – 1977. – **4**, N 1. – P. 213 – 227.
119. *Sanoob S.N., Prince M.G., Sundar B.* Numerical Analysis of Aero–spike Nozzle for Spike Length Optimization // *Int. J. of Research in Engineering & Technology.* – 2013. – **1**, N 6. – P. 1 – 14.
120. *Seywald H., Cliff E.M.* Goddard problem in presence of a dynamic pressure limit // *J. of Guidance, Control, and Dynamics.* – 1993. – **16**, N 4. – P. 776 – 781.
121. *Shaver R.D.* The Two–Stage Sounding Rocket Problem // *J. of Spacecraft and Rockets.* – 1967. – **4**, N 10. – P. 1310 – 1315.
122. *Sinyak Y., Grigoriev A., Gaydadimov V., et al.* Deuterium-free water (H₂O)in complex life–support systems of long-term space missions // *Acta Astronautica.* – 2003. – **52**, N 7. – P. 575 – 580.
123. *Strange, N., Landau, T. M., Lantoine, G., et al.* Overview of mission design for NASA asteroid redirect robotic mission concept // 33rd Int. Electric Propulsion Conference. – Washington: The George Washington University, 2013. – 13 p.
124. *Summerer L.* Thinking tomorrows' space – Research trends of the ESA advanced concepts team 2002–2012 // *Acta Astronautica.* – 2014. – 95, February–March – P. 242 – 259.
125. *Tawakley V.B.* On Optimization Problem of Rocket Vehicles for a Generalised Thrust Characteristics // *Zeitschrift für Flugwissenschaften* – 1969. – **17**, N 9. – P. 305 – 312.
126. *Taraba M., Zwintz K., Bombardelli C. et al.* Project M3 – a study for a manned Mars mission in 2031 // *Acta Astronautica.* – 2006. – **58**, N 2. – P. 88 – 104.
127. *The Space Review:* VASIMR: hope or hype for Mars exploration? <http://t.co/YyHg9xAPns>
128. *Tre'lat E.* Optimal control and applications to aerospace: some results and challenges // *J. of Optimization Theory and Applications.* – 2012. – **154**, N 3. – P. 713 – 758.
129. *Tsiotras P., Kelley H.J.* Drag-law Effects in the Goddard Problem // *Automatica.* – 1991. – **27**, N 3. – P. 481 – 490.
130. *Tsiotras P., Kelley H.J.* Goddard problem with constrained time of flight // *J. of Guidance, Control, and Dynamics* – 1992. – **15**, N 2. – P. 289 – 296.
131. *Weeks E. E., Faiyetole A.A.* Science, technology and imaginable social and behavioral impacts as outer space develops // *Acta Astronautica.* – 2014. – **95**. – P. 166 – 173.
132. *Willems J.C., Kitapci A., Silverman L.M.* Singular optimal control: a geometric approach // *SIAM J. of Control and Optimization.* – 1986. – **24**, N 2. – P. 323 – 337.
133. *Winter F.H., Neufeld M.J., Dougherty K.* Was the rocket invented or accidentally discovered? Some new observations on its origins // *Acta Astronautica.* – 2012. – **77**. – P. 131 – 137.
134. *Zakrzhevsky A.E.* The Dynamics of Systems of Rigid and Elastic Bodies as Applied to Spacecraft // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, N 8. – P. 1001 – 1036.

Поступила 10.03.2016

Утверждена в печать 14.03.2017.