

С. Ю. Бабич<sup>1</sup>, Ю. П. Глухов<sup>2</sup>

**ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;  
e-mail: <sup>1</sup>desc@inmech.kiev.ua, <sup>2</sup>gluchov.uriy@gmail.com*

**Abstract.** The results of studying the effect of initial stress on the bending moment in a plate are presented when the plate lies on the initially stressed semi-space and experiences of the action of moving load. The equation of plate motion is written with taking into account the shear and inertia of rotation. The solution is obtained in the image domain for the general case of compressible and incompressible semi-space, different contact conditions, and speeds of load motion. The numerical study is carried out for the compressible material with harmonic potential and the incompressible material with Bartenew-Khazanovich potential. An analysis of numerical results is given in the form of plots and tables.

**Key words:** plate on elastic foundation, initial (residual) stresses, moving load, bending moment.

**Введение.**

Оценка напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций является сложной задачей, решение которой требует развития различных теоретических моделей, отвечающих определенным классам слоистых пластин и оболочек. Важная особенность деформирования слоистых пластин и оболочек – существенное влияние поперечных сдвигов. Теория пластин с учётом сдвиговых деформаций («теория Рейсснера – Миндлина») впервые изложена в середине прошлого века в статьях [7, 12, 15, 16]. Дальнейшее свое развитие эта теория получила в работах [1, 5, 6, 10, 11, 13, 14 и др.]. Обзор работ, посвященных данной теме, частично представлен в статьях [2, 17 и др.].

Широко распространенной моделью конструктивных элементов объектов машиностроения и строительства является пластина на упругом основании. Одной из многочисленных задач, которые рассматриваются в рамках данной модели, является изучение динамики пластинки, лежащей на полупространстве с начальными напряжениями, при воздействии подвижной нагрузки. В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными деформациями динамические процессы в упругом двухслойном полупространстве, состоящем из пластинки и подстилающего ее предварительно напряженного полупространства, посвящены работы [4, 8, 9 и др.].

Проблема изгиба пластин на упругом основании представляет собой одну из актуальных задач математической теории упругости. В данной работе проведено исследование влияния начальных напряжений и скоростей движения поверхностной нагрузки на изгибающий момент в пластине, лежащей на упругом основании с начальными напряжениями.

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим пластину толщиной  $2h$ , лежащую на полупространстве, начальное напряженно-деформированное состояние которого определяется следующими компонентами вектора перемещений и тензора обобщенных напряжений:

$$u_j^0 = \delta_{ij}(\lambda_i + 1)x_i; \quad \sigma_{ii}^{*0} \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $\lambda_i$  – удлинения ( $\lambda_i = \text{const}$ ) вдоль осей лагранжевой системы координат  $x_i$ , совпадающей в естественном состоянии с декартовой системой координат. Наряду с лагранжевыми координатами введем декартовы координаты  $\xi_i$  начального деформированного состояния, связанные с координатами  $x_i$  соотношениями  $\xi_i = \lambda_i x_i$ .

К свободной границе пластины приложена движущаяся с постоянной скоростью  $v$  нагрузка, не зависящая от координаты  $\xi_3$ . Такая нагрузка вызывает в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние.

Для решения задачи воспользуемся соотношениями линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями [3]. Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системы координат  $(y_1, y_2)$ , где  $y_1 = \xi_1 - vt$ ;  $y_2 = \xi_2$ , уравнение установившегося движения полупространства через функцию  $\chi(y_1, y_2)$  можно записать в виде

$$\left( \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left( \eta_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Функции  $\eta_1$  и  $\eta_2$  определяются из уравнения

$$\eta^4 + 2A\eta^2 + A_1 = 0, \quad (1.2)$$

где коэффициенты  $A$  и  $A_1$  в случае сжимаемого материала определяются из соотношений

$$\begin{aligned} 2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} &= \tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212})^2; \\ 2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} &= (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho, \end{aligned} \quad (1.3)$$

а в случае несжимаемого материала из соотношений –

$$\begin{aligned} 2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{z}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2\tilde{z}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{z}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{z}_{1122} + \tilde{z}_{1212}); \\ 2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{z}_{2112} &= \tilde{q}_{11}^2(\tilde{z}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \quad \tilde{\rho} = \rho. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В формулах (1.3) и (1.4)  $\rho$  – плотность материала полупространства в естественном состоянии,  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{z}$  – параметры, характеризующие материал элементов слоистой среды.

Предположим, что движение пластины может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига. Для пластины, находящейся под воздействием поперечных и тангенциальных поверхностных сил, соответствующие уравнения приведены в [12]. В системе координат  $(y_1, y_2)$  уравнения теории пластин представлены в таком виде:

$$\begin{aligned} 2h \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \tau = P_1; \quad 2h (\kappa G_1 - \rho_1 v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - q = P_2; \\ \frac{2h^2}{3} \left( \frac{2G_1}{1-\nu_1} - \rho_1 v^2 \delta_0 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\kappa G_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y_1} - \varphi \right) - \tau = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

В уравнениях (1.5)  $G_1$ ,  $\nu_1$  и  $\rho_1$  – соответственно, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины;  $u$  и  $w$  – перемещения срединной поверхности пластины ( $y_2 = 0$ ), а  $\delta_0$  – постоянная, которая принимает значение 1 или 0

в зависимости от учета или пренебрежения инерцией вращения пластины при выводе уравнений (1.5);  $\varphi$  – угол поворота поперечного сечения пластины;  $\varkappa$  – коэффициент сдвига в теории С.П.Тимошенко;  $q$  и  $\tau$  – соответственно, нормальные и касательные напряжения, действующие на поверхности раздела пластины и полупространства;  $P_1$  и  $P_2$  – касательные и нормальные составляющие нагрузки на свободной поверхности пластины.

Величина изгибающего момента в пластине определяется по формуле

$$M = \frac{4}{3} \frac{G_1 h^3}{1 - \nu_1} \frac{d\varphi}{dy_1}. \quad (1.6)$$

Рассмотрим два случая контакта между пластиной и полупространством при  $y_2 = -h$ :

жесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = \tau; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w; \quad u_1 = u + h\varphi; \quad (1.7)$$

нежесткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tau = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = q; \quad u_2 = w. \quad (1.8)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнений движения (1.1) и (1.5) при граничных условиях (1.7) или (1.8).

Используя уравнения движения пластины (1.5) и условия (1.7) и (1.8) граничные условия представим в общем виде

$$\begin{aligned} \delta_1 \theta_1 \left( \frac{d^2 u_1}{dy_1^2} - h \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} \right) - \tilde{Q}_{21} &= \delta_1 P_1; \quad \theta_3 \frac{d^2 u_2}{dy_1^2} - 2\varkappa h G_1 \frac{d\varphi}{dy_1} - \tilde{Q}_{22} = P_2; \\ \theta_2 \frac{d^2 \varphi}{dy_1^2} + 2\varkappa G_1 \left( \frac{du_2}{dy_1} - \varphi \right) - \delta_1 \tilde{Q}_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\theta_1 = 2h \left( \frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_2 = \frac{2h^2}{3} \left( \frac{2G_1}{1 - \nu_1} - \delta_0 \rho_1 v^2 \right); \quad \theta_3 = 2h (\varkappa G_1 - \rho_1 v^2).$$

Параметр  $\delta_1$  в (1.9) равен 1 при жестком контакте и равен 0 – при нежестком контакте.

Значения функций  $\eta_1^2(v)$  и  $\eta_2^2(v)$  определяют вид уравнений движения (1.1) и, соответственно, выбор формы решения рассматриваемых уравнений. Влияние скорости движения нагрузки на значение корней уравнения (1.2) для сжимаемого и несжимаемого полупространства подробно исследовано в работах [4, 8, 9]. Запишем решение задачи в общем виде для равных и неравных корней уравнения (1.2).

Напряжения, перемещения и скорости перемещений в полупространстве через функции  $\chi^{(j)}$  определяются по формулам [3]

$$\tilde{Q}_{ij} = \left( \alpha_{ij}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}} + \left( \alpha_{ij}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{ij}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}} \quad (i, j = 1, 2); \quad (1.10)$$

$$u_i = -\beta_{i1}^{(i)} \frac{\partial^2 \chi^{(i)}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left( \beta_{i1}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{i2}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(j)} \quad (i, j = 1, 2; \quad i \neq j), \quad (1.11)$$

где в случае сжимаемого материала –

$$\begin{aligned}
\alpha_{ii}^{(11)} &= \tilde{\omega}_{i22} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - \tilde{\omega}_{i11} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); \quad \alpha_{ii}^{(12)} = \tilde{\omega}_{i11} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \\
\alpha_{ii}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{i22} \tilde{\omega}_{2112}; \quad \alpha_{ii}^{(22)} = \tilde{\omega}_{i11} \tilde{\omega}_{2222} - \tilde{\omega}_{i22} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); \quad \alpha_{ij}^{(11)} = \tilde{\omega}_{j21} (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2); \\
\alpha_{ij}^{(22)} &= \tilde{\omega}_{j12} \tilde{\omega}_{2222}; \quad \alpha_{ij}^{(12)} = \tilde{\omega}_{j12} (\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - \tilde{\omega}_{j21} (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121}); \\
\alpha_{12}^{(21)} &= \tilde{\omega}_{j21} \tilde{\omega}_{2112} - \tilde{\omega}_{j12} (\tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}); \quad \beta_{11}^{(1)} = \beta_{21}^{(2)} = \beta = \tilde{\omega}_{1212} + \tilde{\omega}_{2211}; \\
\beta_{12}^{(j)} &= \tilde{\omega}_{2jj2}; \quad \beta_{i1}^{(j)} = \tilde{\omega}_{1j11} - \tilde{\rho}v^2 \quad (i, j = 1, 2; i \neq j),
\end{aligned}$$

а в случае несжимаемого материала имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_{ii}^{(ii)} &= (-1)^i \tilde{q}_{jj}^{-1} \tilde{\chi}_{1212} - \delta_{j2} \tilde{\rho}v^2 \tilde{q}_{11}^{-1}; \\
\alpha_{jj}^{(ii)} &= \tilde{q}_{jj} \tilde{q}_{ii}^{-2} (\tilde{\chi}_{iii} - \delta_{j2} \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\chi}_{jjj} \tilde{q}_{jj}^{-1} - \tilde{q}_{ii}^{-1} (2\tilde{\chi}_{1122} + \tilde{\chi}_{1212}); \quad \alpha_{ij}^{(12)} = -\tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\chi}_{ij21}; \\
\alpha_{ij}^{(22)} &= \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\chi}_{ij12}; \quad \alpha_{ij}^{(11)} = \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\chi}_{ij21}; \quad \alpha_{ij}^{(21)} = -\tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\chi}_{ij12} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j); \\
\alpha_{22}^{(12)} &= \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\chi}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \alpha_{11}^{(12)} = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \alpha_{22}^{(12)}; \quad \alpha_{11}^{(21)} = \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\chi}_{2112}; \\
\alpha_{22}^{(21)} &= \tilde{q}_{22} \tilde{q}_{11}^{-1} \alpha_{11}^{(21)}; \quad \beta_{11}^{(1)} = \beta_{12}^{(2)} = \beta = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \beta_{21}^{(2)} = \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(1)} = 0.
\end{aligned}$$

Учитывая (1.10) и (1.11), граничные условия (1.9) представим в виде

$$\begin{aligned}
&\left[ \delta_1 \theta_1 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left( \beta_{11}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{12}^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \alpha_{21}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(2)} - \\
&- \left[ \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left( \alpha_{21}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{21}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} - \delta_1 \theta_1 h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = \delta_1 P_1; \\
&- 2\kappa h G_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} - \left[ \theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{\partial^3}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \left( \alpha_{22}^{(12)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_1} + \\
&+ \left[ \theta_3 \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \left( \beta_{21}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \beta_{22}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \alpha_{22}^{(11)} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \alpha_{22}^{(21)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \right] \chi^{(1)} = P_2; \\
&\theta_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} - 2\kappa G_1 \varphi - \left[ (2\kappa G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \delta_1 \alpha_{21}^{(22)} \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial y_2} + \\
&+ \left[ (2\kappa G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(11)}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + (2\kappa G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(21)}) \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right] \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial y_1} = 0.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Таким образом, задача об установившемся движении двухслойного полупространства при воздействии подвижной нагрузки сводится к определению функций  $\chi^{(j)}$  и  $\varphi$  из граничных условий (1.12).

## §2. Решение задачи в области изображений.

Решение задачи получим с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной  $y_1$  и соответствующей формулы обращения. Применяя преобразование Фурье к уравнениям (1.1), имеем

$$\left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_1^2\right) \left(\frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \eta_2^2\right) \chi^{(j)F} = 0 \quad (j=1, 2). \quad (2.1)$$

Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой).

Граничные условия (1.12) в пространстве изображений Фурье имеют вид

$$\begin{aligned} & \left(-\alpha_{21}^{(22)} \frac{d^3}{dy_2^3} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{12}^{(2)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \alpha_{21}^{(12)} \frac{d}{dy_2} + k^4 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(2)}\right) \chi^{(2)F} - \\ & - i k \left(\alpha_{21}^{(21)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \frac{d}{dy_2} - k^2 \alpha_{21}^{(11)}\right) \chi^{(1)F} + k^2 \delta_1 \theta_1 h \varphi^F = \delta_1 P_1^F; \\ & - 2ikz h G_1 \varphi^F + ik \left(-\alpha_{22}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2} + k^2 \theta_3 \beta_{21}^{(2)} \frac{d}{dy_2} + k^2 \alpha_{22}^{(12)}\right) \chi^{(2)F} - \\ & - \left(\alpha_{22}^{(21)} \frac{d^3}{dy_2^3} + k^2 \theta_3 \beta_{22}^{(1)} \frac{d^2}{dy_2^2} - k^2 \alpha_{22}^{(11)} \frac{d}{dy_2} - k^4 \theta_3 \beta_{21}^{(1)}\right) \chi^{(1)F} = P_2^F; \\ & (k^2 \theta_2 + 2z G_1) \varphi^F - \left[k^2 (2z G_1 \beta_{21}^{(2)} + \delta_1 \alpha_{21}^{(12)}) - \delta_1 \alpha_{21}^{(22)} \frac{d^2}{dy_2^2}\right] \frac{d \chi^{(2)F}}{dy_2} + \\ & + ik \left[k^2 (2z G_1 \beta_{21}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(11)}) - (2z G_1 \beta_{22}^{(1)} - \delta_1 \alpha_{21}^{(21)}) \frac{d^2}{dy_2^2}\right] \chi^{(1)F} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решение преобразованного уравнения (2.1) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\chi^{F(j)} = [1 - \delta_{j2} (1 - \delta_{\eta \eta_2})] \{C_1^{(j)} e^{k_1 \eta_1 (y_2 + h)} + [\delta_{\eta \eta_2} (y_2 + h) + 1 - \delta_{\eta \eta_2}] C_2^{(j)} e^{k_2 \eta_2 (y_2 + h)}\}, \quad (2.3)$$

где  $C_m^{(j)}$  ( $j, m = 1, 2$ ) – постоянные интегрирования,

$$\gamma_j = k_j \eta_j; \quad j = 1, 2; \quad \delta_{\eta \eta_2} = \begin{cases} 0, & \eta_1 \neq \eta_2; \\ 1, & \eta_1 = \eta_2; \end{cases} \quad \delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j = 1; \\ 1, & j = 2. \end{cases}$$

Введем постоянные интегрирования

$$C_1^{(1)} = iC_1; \quad C_2^{(1)} = iC_2; \quad C_1^{(2)} = C_1; \quad C_2^{(2)} = C_2. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $C_1, C_2$  и  $\varphi^F$  такого вида:

$$\begin{aligned} & k(a_{11}^{(1)} + ka_{11}^{(2)})C_1 + (a_{12}^{(1)} + ka_{12}^{(2)} + k^2 a_{12}^{(3)})C_2 + a_{13} \varphi^F = k^{-2} \delta_1 P_1^F; \\ & k^2(a_{21}^{(1)} + ka_{21}^{(2)})C_1 + k(a_{22}^{(1)} + ka_{22}^{(2)} + k^2 a_{22}^{(3)})C_2 + a_{23} \varphi^F = -ik^{-1} P_2^F; \end{aligned}$$

$$k^3 a_{31} C_1 + k^2 \left( a_{32}^{(1)} + k a_{32}^{(2)} \right) C_2 + \left( a_{33}^{(1)} + k^2 a_{33}^{(2)} \right) \varphi^F = 0, \quad (2.5)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} &= -\gamma_{21}^{(11)} + \delta_{\eta\eta_2} \gamma_1 \gamma_{21}^{(21)}; \quad a_{12}^{(1)} = \delta_{\eta\eta_2} \left[ \gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2 \left( \alpha_{21}^{(21)} - \alpha_{21}^{(22)} \gamma_2 \right) \right]; \\ a_{11}^{(2)} &= \delta_1 \theta_1 \left( \delta_{\eta\eta_2} \theta_1^{(21)} - \beta_{11}^{(1)} \gamma_1 \right); \quad a_{12}^{(2)} = - \left[ \delta_1 \delta_{\eta\eta_2} \theta_1 \left( \beta_{11}^{(1)} + 2\beta_{12}^{(2)} \gamma_2 \right) + \left( 1 - \delta_{\eta\eta_2} \right) \gamma_{21}^{(12)} \right]; \\ a_{12}^{(3)} &= -\delta_1 \theta_1 \beta_{11}^{(1)} \gamma_2 \left( 1 - \delta_{\eta\eta_2} \right); \quad a_{13} = \delta_1 \theta_1 h; \\ a_{21}^{(1)} &= \gamma_1 \gamma_{22}^{(11)} + \delta_{\eta\eta_2} \gamma_{22}^{(21)}; \quad a_{21}^{(2)} = \theta_3 \left( \theta_2^{(11)} + \delta_{\eta\eta_2} \beta_{21}^{(2)} \gamma_1 \right); \quad a_{22}^{(1)} = \delta_{\eta\eta_2} \left[ \gamma_{22}^{(12)} - 2\gamma_2 \left( \alpha_{22}^{(22)} + \alpha_{22}^{(21)} \gamma_2 \right) \right]; \\ a_{22}^{(2)} &= \delta_{\eta\eta_2} \theta_3 \left( \beta_{21}^{(2)} - 2\beta_{22}^{(1)} \gamma_2 \right) + \left( 1 - \delta_{\eta\eta_2} \right) \gamma_2 \gamma_{22}^{(12)}; \quad a_{22}^{(3)} = \theta_3 \theta_2^{(12)} \left( 1 - \delta_{\eta\eta_2} \right); \quad a_{23} = -2\kappa h G_1; \\ a_{31} &= 2\kappa G_1 \left( \theta_2^{(11)} + \delta_{\eta\eta_2} \gamma_1 \beta_{21}^{(2)} \right) + \delta_1 \left( \delta_{\eta\eta_2} \gamma_1 \gamma_{21}^{(21)} - \gamma_{21}^{(11)} \right); \quad a_{32}^{(2)} = \left( 1 - \delta_{\eta\eta_2} \right) \left( 2\kappa G_1 \theta_2^{(12)} - \delta_1 \gamma_{21}^{(12)} \right); \\ a_{32}^{(1)} &= \delta_{\eta\eta_2} \left\{ 2\kappa G_1 \left( \beta_{21}^{(2)} - 2\gamma_2 \beta_{22}^{(1)} \right) + \delta_1 \left[ \gamma_{21}^{(22)} + 2\gamma_2 \left( \alpha_{21}^{(21)} - \alpha_{21}^{(22)} \gamma_2 \right) \right] \right\}; \quad a_{33}^{(1)} = -2\kappa G_1; \\ a_{33}^{(2)} &= -\theta_2; \quad \theta_m^{(kj)} = \beta_{m1}^{(k)} - \beta_{m2}^{(k)} \gamma_j^2; \quad \gamma_{mk}^{(nj)} = \alpha_{mk}^{(1n)} - \alpha_{mk}^{(2n)} \gamma_j^2 \quad (j, k, m = 1, 2). \end{aligned}$$

Решение системы (2.5) можно записать следующим образом:

$$C_j = \frac{\delta_1 P_1^F U_1^{(j)} + i P_2^F U_2^{(j)}}{\Delta(k)} \quad (j=1, 2); \quad \varphi^F = \frac{\delta_1 P_1^F U_1 + i P_2^F U_2}{\Delta(k)}, \quad (2.6)$$

где приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= k^2 \left( b_0 + k b_1 + k^2 b_2 + k^3 b_3 + k^4 b_4 + k^5 b_5 \right); \\ U_j^{(1)} &= k^{-1} \left( b_{10}^{(j)} + k b_{11}^{(j)} + k^2 b_{12}^{(j)} + k^3 b_{13}^{(j)} + k^4 b_{14}^{(j)} \right); \\ U_j^{(2)} &= - \left( b_{20}^{(j)} + k b_{21}^{(j)} + k^2 b_{22}^{(j)} + k^3 b_{23}^{(j)} \right); \quad U_j = k^2 \left( b_{30}^{(j)} + k b_{31}^{(j)} + k^2 b_{32}^{(j)} \right); \quad j=1, 2; \\ b_0 &= a_{33}^{(1)} \left( a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} \right); \quad b_1 = a_{33}^{(1)} \left( a_{11}^{(2)} a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(1)} \right) + \\ &+ a_{23} \left( a_{31} a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(1)} a_{32}^{(1)} \right); \quad b_2 = a_{33}^{(1)} \left( a_{22}^{(2)} a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(3)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(1)} \right) + \\ &+ a_{23} \left( a_{31} a_{12}^{(2)} - a_{11}^{(1)} a_{32}^{(2)} - a_{11}^{(2)} a_{32}^{(1)} \right) + a_{33}^{(2)} \left( a_{11}^{(1)} a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{13} \left( a_{21}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{31} a_{22}^{(1)} \right); \\ b_3 &= a_{33}^{(2)} \left( a_{11}^{(2)} a_{22}^{(1)} + a_{22}^{(2)} a_{11}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{13} \left( a_{21}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{31} a_{22}^{(2)} \right) + \\ &+ a_{23} \left( a_{31} a_{12}^{(3)} - a_{11}^{(2)} a_{32}^{(2)} \right) + a_{33}^{(1)} \left( a_{22}^{(3)} a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(2)} \right); \quad b_5 = a_{33}^{(2)} \left( a_{22}^{(3)} a_{11}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(2)} \right); \\ b_4 &= a_{33}^{(2)} \left( a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} + a_{11}^{(1)} a_{22}^{(3)} - a_{12}^{(2)} a_{21}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{21}^{(1)} \right) + a_{13} \left( a_{21}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)} a_{31} \right); \\ b_{10}^{(1)} &= a_{22}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(1)} = a_{22}^{(2)} a_{33}^{(1)} - a_{23} a_{32}^{(1)}; \quad b_{12}^{(1)} = a_{22}^{(3)} a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)} a_{22}^{(1)} - a_{23} a_{32}^{(2)}; \quad b_{13}^{(1)} = a_{33}^{(3)} a_{22}^{(2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{14}^{(1)} &= a_{33}^{(2)} a_{22}^{(3)}; \quad b_{10}^{(2)} = a_{12}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{11}^{(2)} = a_{12}^{(2)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{12}^{(2)} = a_{12}^{(3)} a_{33}^{(1)} + a_{33}^{(2)} a_{12}^{(1)} - a_{13} a_{32}^{(1)}; \\
b_{13}^{(2)} &= a_{33}^{(2)} a_{12}^{(2)} - a_{13} a_{32}^{(2)}; \quad b_{14}^{(2)} = a_{33}^{(2)} a_{12}^{(3)}; \quad b_{20}^{(1)} = a_{21}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(1)} = a_{21}^{(2)} a_{33}^{(1)} - a_{23} a_{31}; \quad b_{22}^{(1)} = a_{21}^{(1)} a_{33}^{(2)}; \\
b_{23}^{(1)} &= a_{21}^{(2)} a_{33}^{(2)}; \quad b_{20}^{(2)} = a_{11}^{(1)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{21}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{33}^{(1)}; \quad b_{22}^{(2)} = a_{11}^{(1)} a_{33}^{(2)} - a_{13} a_{31}; \quad b_{23}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{33}^{(2)}; \\
b_{30}^{(1)} &= a_{21}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(1)} a_{31}; \quad b_{31}^{(1)} = a_{21}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{21}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{22}^{(2)} a_{31}; \quad b_{32}^{(1)} = a_{21}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(3)} a_{31}; \\
b_{30}^{(2)} &= a_{11}^{(1)} a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} a_{31}; \quad b_{31}^{(2)} = a_{11}^{(1)} a_{32}^{(2)} + a_{11}^{(2)} a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(2)} a_{31}; \quad b_{32}^{(2)} = a_{11}^{(2)} a_{32}^{(2)} - a_{12}^{(3)} a_{31}.
\end{aligned}$$

Применим преобразование Фурье к формулам (1.6) и (1.10):

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{jm}^F &= \left( -k^2 \alpha_{jm}^{(12-\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(22-\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \frac{d \chi^{(2-\delta_{jm})F}}{dy_2} + ik \left( -k^2 \alpha_{jm}^{(11+\delta_{jm})} + \alpha_{jm}^{(21+\delta_{jm})} \frac{d^2}{dy_2^2} \right) \chi^{(1+\delta_{jm})F} \\
&\quad (j, m = 1, 2); \\
M^F &= \frac{4 ik G_1 h^3}{3 (1 - \nu_1)} \varphi^F.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

С учетом (2.3), (2.4) и (2.6) выражения (2.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{mj}^F &= (-i)^{\delta_{mj}} k^2 \Delta^{-1}(k) (\delta_1 P_1^F \Gamma_{mj}^{(1)} + i P_2^F \Gamma_{mj}^{(2)}); \quad m, j = 1, 2; \\
M^F &= k \Delta^{-1}(k) (i \delta_1 P_1^F \Gamma_\varphi^{(1)} - P_2^F \Gamma_\varphi^{(2)}),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}
\Gamma_{mm}^{(j)} &= k \left( \gamma_1 \gamma_{mm}^{(11)} + \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_{mm}^{(21)} \right) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} - \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[ 2\gamma_2 (\gamma_2 \alpha_{mm}^{(21)} + \alpha_{mm}^{(22)}) - \gamma_{mm}^{(12)} \right] - \right. \\
&\quad \left. - k \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) (\gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} + \gamma_{mm}^{(22)}) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_2 \gamma_{mm}^{(12)} \right\} \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\
\Gamma_{mn}^{(j)} &= k \left( \gamma_{mn}^{(11)} - \delta_{\eta_1 \eta_2} \gamma_1 \gamma_{mn}^{(21)} \right) U_j^{(1)} e^{k\gamma_1(y_2+h)} + \left\{ \delta_{\eta_1 \eta_2} \left[ 2\gamma_2 (\gamma_2 \alpha_{mn}^{(22)} - \alpha_{21}^{(21)}) - \gamma_{mn}^{(22)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + k \left[ \delta_{\eta_1 \eta_2} (y_2 + h) (\gamma_{mn}^{(12)} - \gamma_2 \gamma_{mn}^{(22)}) + (1 - \delta_{\eta_1 \eta_2}) \gamma_{mn}^{(12)} \right] \right\} U_j^{(2)} e^{k\gamma_2(y_2+h)}; \\
\Gamma_\varphi^{(j)} &= \frac{4 G_1 h^3 U_j}{3 (1 - \nu_1)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении двухслойного упругого полупространства с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье имеет вид (2.8). Для того, чтобы перейти в формулах (2.8) к оригиналам следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

### §3. Числовые результаты и их анализ.

Из полученных результатов следует, что вычисление интегралов обращения существенно зависит от скорости движения нагрузки. В зависимости от скорости  $\nu$  знаменатель  $\Delta(k)$  в интегралах обращения может иметь действительные положительные корни. Если ни один корень не лежит на действительной оси, то интегралы обращения не имеют особенностей и их можно вычислить непосредственно. При наличии неравных действительных положительных корней знаменателя  $\Delta(k)$  интегралы вдоль контура интегрирования от  $-\infty + i\gamma$  до  $+\infty + i\gamma$  можно заменить суммой главного зна-

чения интеграла и суммой всех вычетов, умноженной на  $(-i\pi)$ . В случае существования двойного положительного корня интегралы обращения не существуют даже в смысле Коши, т.е. появляется резонанс. Скорость движения нагрузки, соответствующая этому случаю, называется критической.

Так как при постановке задачи предполагалось, что возмущения, вызванные движущейся нагрузкой, очень малы, то резонансная область была исключена из рассмотрения.

Результаты исследований функции  $\Delta(k)$  для сжимаемого и несжимаемого полупространства, различных случаев сопряжения пластины и полупространства и скоростей движения нагрузки приведены в работах [4, 8, 9].

В качестве примера исследован изгибающий момент в пластине, лежащей на полупространстве из сжимаемого материала с упругим потенциалом гармонического типа и полупространстве из несжимаемого материала – упругий потенциал Бартенева – Хазановича.

Предполагалось, что начальное деформированное состояние является плоским  $\lambda_3 = 1$ , а поверхностная нагрузка отсутствует  $S_0^{22} = 0$  и на свободную поверхность пластины действует линейная нагрузка, составляющие которой определяются по формулам

$$P_1 = P\delta(y_1)\cos\alpha; P_2 = P\delta(y_1)\sin\alpha; P = G_1,$$

где  $\alpha$  – угол наклона нагрузки к оси  $Oy_1$ .

**Сжимаемый материал.** Упругий потенциал гармонического типа имеет вид [3]

$$\Phi = 0,5\lambda s_1^2 + \mu s_2,$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме. Величины  $s_1$  и  $s_2$  представляют собой первый и второй инварианты тензора деформаций линейной теории упругости, отнесенные к главным осям.

Выражения для вычисления составляющих тензора  $\tilde{\omega}$  для теории конечных (больших) начальных деформаций и первого варианта теории малых начальных деформаций имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{1111} &= \frac{2\mu\lambda_1(1-\nu)^2}{(1-2\nu)(1-\nu\lambda_1)}; \tilde{\omega}_{2222} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{\lambda_1(1-2\nu)}; \tilde{\omega}_{2112} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{1+\lambda_1(1-2\nu)}; \\ \tilde{\omega}_{1221} &= \frac{2\mu\lambda_1^2(1-\nu)^2}{(1-\nu\lambda_1)[1+\lambda_1(1-2\nu)]}; \tilde{\omega}_{2211} = \tilde{\omega}_{1122} = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu}; \tilde{\omega}_{1212} = \tilde{\omega}_{2121} = \frac{2\mu(1-\nu\lambda_1)}{1+\lambda_1(1-2\nu)}. \end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала полупространства.

Основные параметры имели значения:

$$\rho/\rho_1 = 0,5; \mu/G_1 = 0,5; \kappa = 0,845; \nu = 0,3; \nu_1 = 0,25; \alpha = \pi/2. \quad (3.1)$$

Для полупространства из сжимаемого материала с потенциалом гармонического типа вычисления проведены при дозвуковых (и докритических)  $\nu < \nu^* < c_{12}$ , трансзвуковых  $c_{12} < \nu < c_{11}$  и сверхзвуковых  $\nu > c_{11}$  скоростях движения нагрузки ( $c_{11}$  и  $c_{12}$  – скорости распространения в направлении оси  $Oy_1$ , соответственно, продольных и поперечных поляризованных волн в неограниченном теле с начальными напряжениями;  $\nu^*$  – критическая скорость движения нагрузки).

Значения критических скоростей  $\nu^*$  для различных  $\lambda_1$  и условий контакта при данных значениях основных параметров приведены в [8, 9].

Рассмотрим случай, когда  $\nu < \nu^* < c_{12}$ . На рис. 1 ( $a$  – жесткий контакт,  $b$  – нежесткий контакт) приведены эпюры для изгибающего момента в пластине на глубине

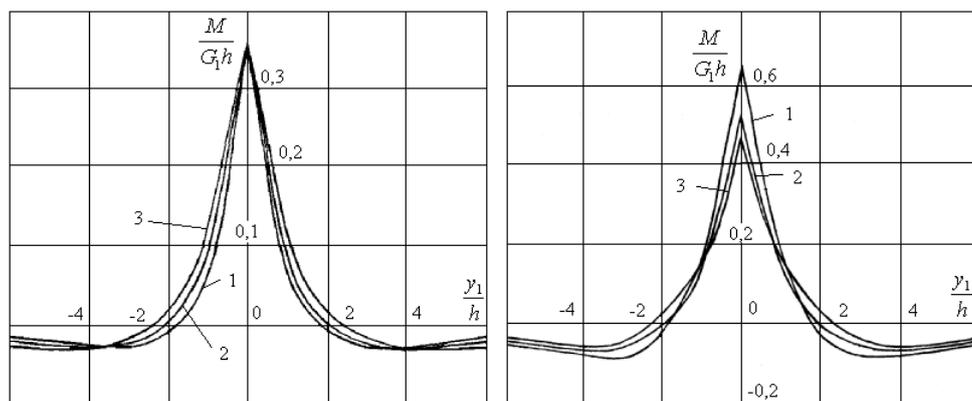
$y_2 = -h/2$  для  $v^2 = 0,1c_s^2$ . Кривые 1 – 3 на рис. 1 соответствуют таким значениям  $\lambda_1$ : 0,8; 1,0; 1,2.

Значения критических скоростей для различных  $\lambda_1$  и условий контакта при данных значениях основных параметров (3.1) приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\lambda_1$		0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$c_{12}$		0,737	0,866	1,000	1,138	1,279
$v_1^*$	$a$	–	0,773	0,839	0,889	0,926
	$b$	0,539	0,638	0,719	0,786	0,840
$v_2^*$	$a$	–	0,786	–	–	–
	$b$	–	–	–	–	–

Как видно из рис. 1, для докритических скоростей движения нагрузки наблюдается полная симметрия для эпюры изгибающего момента в пластине относительно точки приложения нагрузки.



а

б

Рис. 1

На рис. 2 (а – жесткий контакт, б – нежесткий контакт) построены зависимости величины изгибающего момента в пластине от начальных напряжений при различных докритических скоростях движения нагрузки в точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ,  $y_2 = -2h/\lambda_2$ . Кривые 1 – 4 на рис. 2 соответствуют таким скоростям движения нагрузки  $v^2$ :  $0,1c_s^2$ ;  $0,2c_s^2$ ;  $0,3c_s^2$ ;  $0,4c_s^2$ .

Полученные числовые результаты для докритических скоростей движения поверхностной нагрузки позволяют сформулировать следующие выводы: при жестком контакте изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком; значение изгибающего момента в конкретной точке пластины тела зависит как от начальных напряжений в подстилающем полупространстве, так и от ее координат; при этом в исследуемом диапазоне значений  $\lambda_1$  темп роста амплитуды изгибающего момента при сжатии больше, чем при растяжении; затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении.

Влияние начальных напряжений значительно увеличивается с ростом скорости движения нагрузки. Особенно это проявляется при предварительном сжатии. При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте.

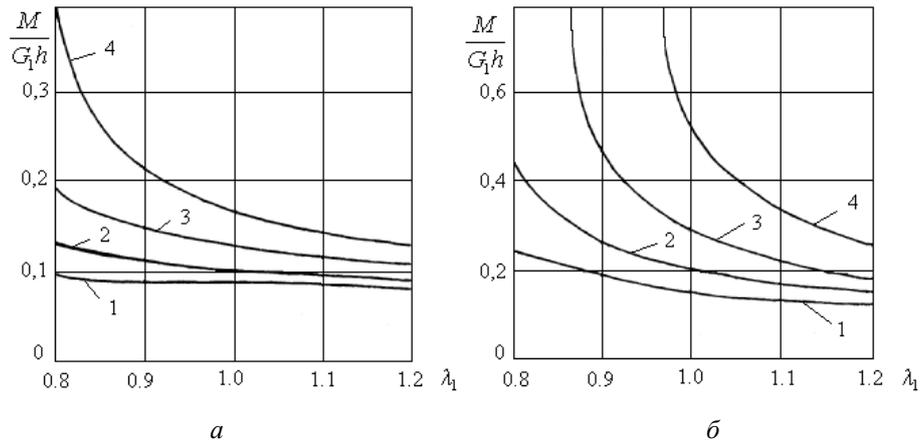


Рис. 2

Рассмотрен случай, когда  $c_{12} < v < c_{11}$ . Уравнение  $\Delta(k) = 0$  представляет собой алгебраическое уравнение третьего или четвертого порядка (в зависимости от условий контакта) с комплексными коэффициентами. Следовательно, интегралы обращения не будут иметь особенностей. Изменение изгибающего момента на глубине  $y_2 = -h/2$  в пластине в зависимости от расстояния до точки приложения нагрузки показано на рис. 3 (*a* – жесткий контакт, *б* – нежесткий контакт) для скорости  $v^2 = 2c_s^2$ . На рис. 3 применены те же обозначения, что и на рис. 1.

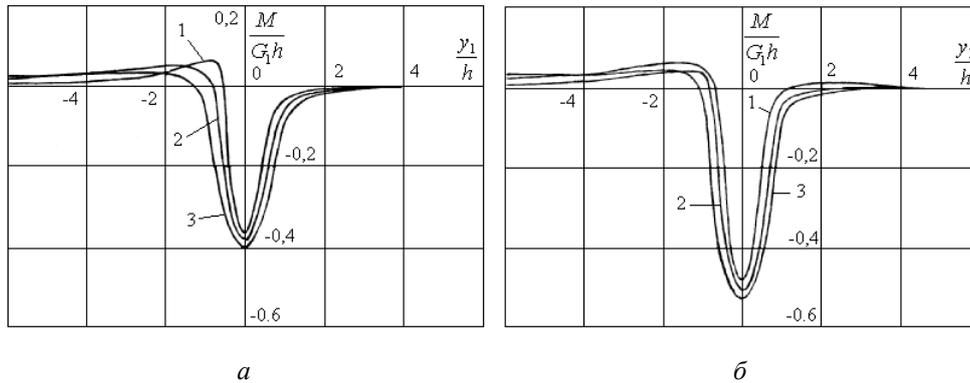


Рис. 3

Если условно назвать напряжения до и после нагрузки прямой и обратными волнами, то из рис. 3 видно, что при данной скорости движения нагрузки симметрия относительно начала координат нарушается и прямая волна затухает быстрее обратной. Анализ графиков на рис. 3 показывает, что наличие начальных напряжений оказывает существенное влияние на изгибающий момент в пластине. Это влияние различно в зависимости от положения рассматриваемой точки слоистого тела относительно точки приложения нагрузки.

Для скоростей  $v < c_{11}$  интегралы обращения, как и в предыдущем случае, не имеют особенностей. На рис. 4 (*a* – жесткий контакт, *б* – нежесткий контакт) приведены результаты для скорости  $v^2 = 6c_s^2$ . Видно, что с ростом скорости симметрия все больше нарушается, причем прямая волна затухает намного быстрее и для сверхзвукового случая практически отсутствует. Однако она полностью не исчезает. Это объясняется, по-видимому, слоистостью среды.

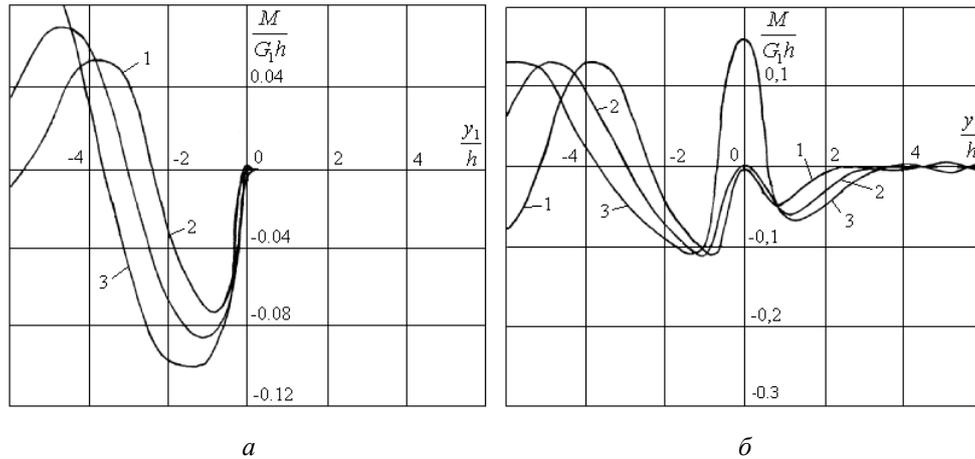


Рис. 4

В случае жесткого контакта прямая волна затухает намного быстрее, чем при нежестком контакте. Как и при трансзвуковом случае движения нагрузки изгибающий момент в пластине зависит от начальных напряжений и удаления от точки приложения нагрузки.

**Несжимаемый материал.** Изучим влияние начальных напряжений, механических характеристик пластины и полупространства, условий их сопряжения на значение изгибающего момента в пластине в случае несжимаемого полупространства с упругим потенциалом типа Бартенева – Хазановича [3]  $\Phi = 2\mu S_1$ .

Для составляющих тензора  $\tilde{\alpha}$  получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1111} = \tilde{\alpha}_{2222} &= 2\mu\lambda_1^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{2112} = 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{1221} = 2\mu\lambda_1^3(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \\ \tilde{\alpha}_{1212} = \tilde{\alpha}_{2121} &= 2\mu\lambda_1^{-1}(\lambda_1^2 + 1)^{-1}; \quad \tilde{\alpha}_{1122} = \tilde{\alpha}_{2211} = 0. \end{aligned}$$

Основные параметры соответствуют значениям (3.1). При указанных значениях основных параметров  $\mu/G_1$  и  $\lambda_1$  критические скорости принимает значения, приведенные в таблице 2.

Для полупространства из несжимаемого материала с потенциалом типа Бартенева – Хазановича исследованы скорости движения нагрузки в диапазонах  $v < v^* < c_1$  и  $v > c_1$  (здесь через  $c_1$  обозначена скорость распространения поперечных волн в направлении оси  $Oy_1$  в неограниченном несжимаемом теле с начальными напряжениями). Отметим, что при данных значениях основных параметров при  $\lambda_1 = 1$  для несжимаемого полупространства  $c_1 = c_s$ , где  $c_s$  – скорость сдвиговых волн в пластине.

Рассмотрим случай, когда  $v < v^* < c_1$ . На рис. 5 (а – жесткий контакт, б – нежесткий контакт) показан изгибающий момент в пластине при  $y_2 = -h/2$  для  $v^2 = 0,1c_s^2$ . Кривые 1, 2 и 3 на рис. 5 соответствуют значениям  $\lambda_1 = 0,8; 1,0; 1,2$ . Для таких скоростей движения нагрузки эпюры величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, симметричны относительно точки приложения нагрузки.

Таблица 2

$\lambda_1$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2
$c_1$	0,790	0,898	1,000	1,098	1,190
$v_1^*$	а	-	0,822	0,844	0,878
	б	0,597	0,694	0,723	0,823
$v_2^*$	а	-	-	-	-
	б	-	-	-	-

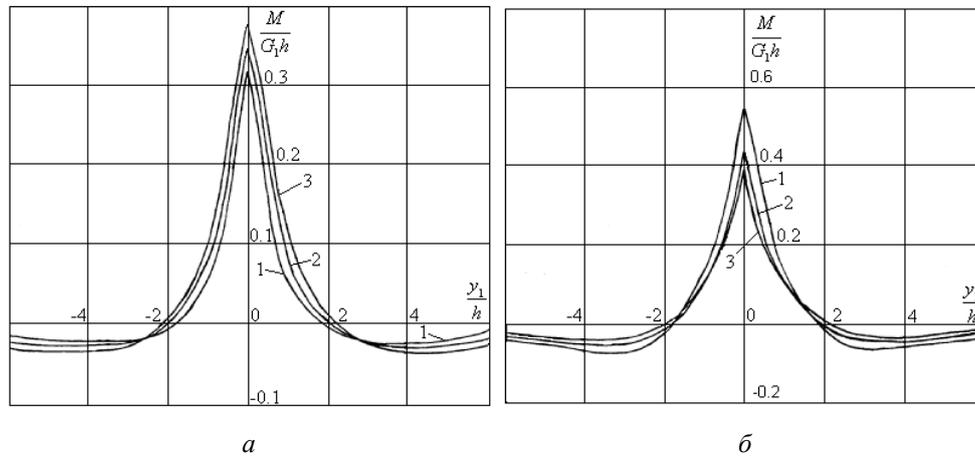


Рис. 5

В точке  $y_1 = -\lambda_1 h$ ,  $y_2 = -h/2$  исследовалась зависимость изгибающего момента от начальных напряжений в полупространстве и скорости движения поверхностной нагрузки. Рис. 6, а соответствует жесткому контакту, а рис. 6, б – нежесткому контакту между пластиной и полупространством. Кривые 1, 2, 3 и 4 на рис. 6 соответствуют значениям скорости  $v^2 : 0, 1c_s^2; 0, 2c_s^2; 0, 3c_s^2; 0, 4c_s^2$ .

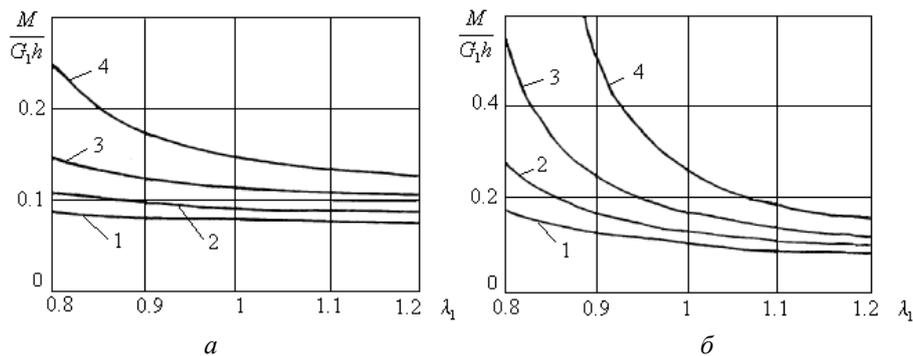


Рис. 6

Анализ полученных численных результатов для докритической скорости движения нагрузки позволяет сделать следующие выводы. Так же, как и в случае сжимаемого подстилающего полупространства, при жестком контакте изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком. При заданных  $\lambda_1$  темп роста значений изгибающего момента при сжатии больше, чем при растяжении. Затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении. Значения изгибающего момента и его зависимость от начальных напряжений, определяются координатами рассматриваемой точки.

С ростом скорости движения нагрузки влияние начальных напряжений значительно увеличивается. Особенно увеличиваются определяемые параметры при росте скорости для сжатого материала. При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте.

Рассмотрим случай, когда  $v < c_1$ . Изменение изгибающего момента в пластине в зависимости от расстояния до точки приложения нагрузки показано на рис. 7 (а – жесткий контакт, б – нежесткий контакт). Вычисления в данном случае проводились при  $y_2 = -h/2$ . Скорость движения нагрузки равнялась  $v^2 = 2c_s^2$ . Обозначения на рис. 7

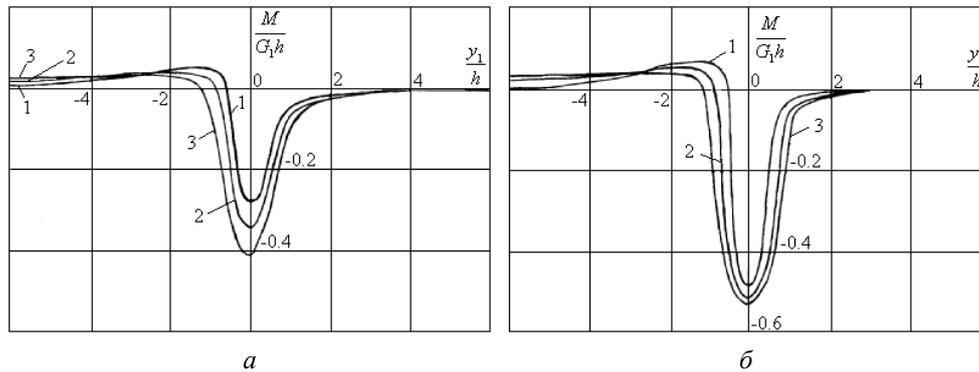


Рис. 7

те же, что и на рис. 5. Для сверхзвуковой скорости движения нагрузки так же, как и в случае сжимаемого полупространства, эпюры определяемых величин несимметричны относительно точки приложения нагрузки. При этом прямая волна затухает намного быстрее, чем обратная, но не исчезает совсем вследствие наличия пластины. Из данных рис. 7 следует, что значение изгибающего момента в пластине при  $v > c_1$  существенно зависит от начальных напряжений в полупространстве. Конкретный вид таких зависимостей определяется положением точки пластины относительно точки приложения нагрузки.

#### Заключение.

В рамках линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями дана постановка и получено решение плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойного предварительно напряженного основания, состоящего из пластины и подстилающего ее полупространства. Уравнения движения пластины учитывают сдвиг и инерцию вращения. Приведены формулы для трансформант характеристик напряженно-деформированного состояния элементов двухслойной среды.

Выполнено исследование зависимостей изгибающего момента в пластине от начальных напряжений, скорости движения нагрузки и условий контакта элементов двухслойной среды. Начальные (остаточные) напряжения оказывают существенное влияние на значение изгибающего момента в пластине. Это влияние зависит от скорости движения поверхностной нагрузки, механических параметров элементов слоистой среды и условий их сопряжения.

Численные результаты приведены в виде графиков, таблиц и дан их анализ.

РЕЗЮМЕ. Представлено результати дослідження впливу початкового напруження на момент згину в пластині, що лежить на поперечно-напруженому напівпросторі, при дії рухомого навантаження. Рівняння руху пластины записано з врахуванням зсуву та інерції обертання. В просторі зображень отримано розв'язок в загальному випадку для стисливого і нестисливого напівпросторів, різних умов контакту та швидкостей руху навантаження. Числовий аналіз дослідження проведено для стисливого матеріалу з гармонійним потенціалом та для нестисливого матеріалу з потенціалом Бартенєва – Хазановича. Дано аналіз числових результатів (графіки, таблиці).

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1967. – 268 с.
2. Григолюк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Серия: Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: «А.С.К», 2004. – 672 с.
4. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Саарбрюккен (Германия): LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.

5. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
6. Маневич А.И., Колаковский З. К теории поперечных колебаний пластин с учетом сдвиговых деформаций // Прикл. механика. – 2014. – **50**, № 2. – С. 104 – 114.
7. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // Прикл. математика и механика. – 1948. – **12**, № 3. – С. 287– 300.
8. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Guz A.N. Dynamics of a Prestressed Incompressible Layered Half-Space under Moving Load // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 3. – P. 268 – 285.
9. Babich S.Yu., Glukhov Yu.P., Guz A.N. Dynamic Problem for a Prestressed Compressible Layered Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 4. – P. 388 – 405.
10. Kim S.-E., Thai H.-T., Lee J. A two variable refined plate theory for laminated composite plates // Composite Structures – 2009. – **89**, N 2. – P. 197 – 205.
11. Manevich A. , Kolakowski Z. Free and forced oscillations of Timoshenko beam made of viscoelastic material // J. Theor. and Appl. Mech. (Warsaw). – 2011. – **49**, N 1. – P. 3 – 16.
12. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1951. – **18**, N1 – P. 31 – 38.
13. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – **20**. – P. 881 – 896.
14. Reddy J. N., Phan N. D. Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory // J. Sound and Vibr. – 1985. – **98**. – P. 157 – 170.
15. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. – 1944. – **23**, N 4. – P. 184–191.
16. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1945. – **67**. – P. A69 – A77.
17. Vasiliev V. V. Modern Conceptions of Plate Theory // Composite Struct. – 2000. – **48**, N1. – 3. – P. 39 – 48.

Поступила 10.08.2016

Утверждена в печать 14.03.2017

