

А.Я.Григоренко, С.А.Панкратьев, С.Н.Яремченко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В УТОЧНЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: sp4soft@gmail.com*

Abstract. A numerical-analytical approach to solving the problems on the stress-strain state of quadrangular plates of complex shape is proposed. The main system of equations is written in the new orthogonal coordinates basing on changes that take into account the plate geometry. Using the spline-collocations, the obtained two-dimensional boundary problem for the system of partial differential equations is reduced to the one-dimensional one that is solved by the stable numerical method of discrete orthogonalization. A comparison is carried out between the results in hand and the results of analysis of the stress-strain state of plates in the form of trapezium and parallelogram reported by another approaches. The suggested approach permits also to analyze the deflections of quadrangular plates of complex shape made of anisotropic materials.

Key words: stress-strain state; plates of different shapes; coordinate transformation; spline collocation method; discrete orthogonalization method.

Введение.

Рассматривая пластины в качестве конструктивных элементов, трудно переоценить их значение в современном машиностроении, приборостроении, строительстве. Кажущаяся простота анализа их прочностных свойств перестает быть таковой в свете все более широкого применения композитных материалов, а многообразие используемых форм делает набор задач по их исследованию чрезвычайно широким.

Вопросы разработки методов и подходов для практического анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин различной формы начали активно рассматриваться еще в прошлом столетии. В результате решений многих задач для определенных условий закрепления, приложения нагрузки и таких относительно простых геометрий, как круг или квадрат, получены аналитические решения, в том числе в виде разложений в ряды [1 – 3]. Для других случаев были предложены соответствующие численные методы, учитывающие наличие симметрии либо позволяющие свести сложную область к более простой за счет параметризации [6, 10]. Некоторые вопросы применения преобразования координат для статического анализа пластин сложной формы также рассмотрены в [7 – 9].

Схемы анализа на основе конечных элементов получили свою коммерческую реализацию в многочисленных специализированных программных пакетах. Они дают относительно простой инструмент для численного анализа реальных объектов сложной формы, но требовательны к вычислительным ресурсам, одновременно оставляя многие вопросы адекватности моделей и выбора их параметров открытыми.

В данной работе предложен подход, позволяющий расширить применимость методов дискретной ортогонализации [4] и сплайн-коллокации для анализа НДС четырехугольных пластин сложной формы. Задачи рассмотрены на основе уточненной теории с использованием гипотезы прямой линии.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Рассмотрим задачу о НДС прямоугольной пластины ($0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$) толщиной h . Уравнения равновесия в рамках уточненной теории пластин имеют вид [2]:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + q = 0; \quad M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0; \quad M_{2,2} + M_{12,1} - Q_2 = 0,$$

где Q_1, Q_2 – усилия среза; M_1, M_2, M_{12} – моменты изгиба и кручения; q – поверхностная нагрузка.

Для моментов и сдвигающих усилий справедливы соотношения упругости. В случае ортотропной пластины, оси ортотропии которой совпадают с координатными осями, эти соотношения представим в виде

$$M_1 = D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2; \quad M_2 = D_{22}\kappa_2 + D_{12}\kappa_1; \\ M_{12} = 2D_{66}\kappa_{12}; \quad Q_1 = K_1\gamma_1; \quad Q_2 = K_2\gamma_2.$$

Здесь $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ – деформации изгиба и кручения срединной поверхности, которые с помощью соотношений

$$\kappa_1 = \psi_{1,1}; \quad \kappa_2 = \psi_{2,2}; \quad 2\kappa_{12} = \psi_{1,2} + \psi_{2,1}; \\ \gamma_1 = \psi_1 - \theta_1; \quad \gamma_2 = \psi_2 - \theta_2; \quad -\theta_1 = w_{,1}; \quad -\theta_2 = w_{,2}$$

можно выразить через углы поворота элемента поверхности ψ_1, ψ_2 , углы поворота нормали без учета сдвига θ_1, θ_2 и γ_1, γ_2 – углы поворота нормали, обусловленные сдвигом. Коэффициенты жесткости K_i, D_{ij} определяются из соотношений

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_{12} = \nu_2 D_{11}; \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \\ D_{66} = \frac{G_{12} h^3}{12}; \quad K_1 = \frac{5}{6} h G_{13}; \quad K_2 = \frac{5}{6} h G_{23},$$

где E_i, G_{ij}, ν_i – модули упругости, сдвига и коэффициенты Пуассона, соответственно.

С учетом приведенных соотношений упругости и выражений для деформаций через углы ψ_1, ψ_2 и прогиб пластины w исходные уравнения равновесия принимают вид

$$K_1 \psi_{1,1} + K_1 w_{,11} + K_2 \psi_{2,2} + K_2 w_{,22} = -q; \\ D_{11} \psi_{1,11} + D_{12} \psi_{2,12} + D_{66} \psi_{1,22} + D_{66} \psi_{2,12} - K_1 \psi_1 - K_1 w_{,1} = 0; \quad (1.1) \\ D_{22} \psi_{2,22} + D_{12} \psi_{1,12} + D_{66} \psi_{2,11} + D_{66} \psi_{1,12} - K_2 \psi_2 - K_2 w_{,2} = 0.$$

Граничные условия на сторонах $x_1 = \text{const}$ при жестком закреплении краев имеют такой вид: $w = 0$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, а при шарнирном – $w = 0$, $\psi_{1,1} = 0$, $\psi_2 = 0$; для сторон $x_2 = \text{const}$ записываются аналогично.

В сочетании с теми или иными граничными условиями на краях $x_i = \text{const}$ разрешающая система уравнений (1.1) относительно прогиба w и углов ψ_1, ψ_2 образует двумерную краевую задачу в уточненной постановке.

§2. Основные положения подхода.

Рассмотрим область в пространстве координат x_1, x_2 , ограниченную сторонами выпуклого четырехугольника, и зададимся целью перевести ее в нормированную область $[0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$ в новой системе координат ξ_1, ξ_2 (рис. 1). Данный переход возможен при использовании замены переменных в виде

$$\bar{x} = T \cdot \bar{\varepsilon}, \quad (2.1)$$

где вектор \bar{x} имеет компоненты $\{x_1, x_2\}$, вектор $\bar{\varepsilon}$ – компоненты $\{1, \xi_1, \xi_2, \xi_1 \xi_2\}$, а компоненты t_{ij} матрицы перехода T определяются геометрией четырехугольной пластины. В общем случае для четырехугольника с вершинами в точках $(x_{11}, x_{21}), (x_{12}, x_{22}), (x_{13}, x_{23}), (x_{14}, x_{24})$ компоненты матрицы T будут равны:

$$\begin{aligned} t_{11} &= x_{12}; & t_{12} &= x_{13} - x_{12}; & t_{13} &= x_{11} - x_{12}; & t_{14} &= x_{14} - x_{13} + x_{12} - x_{11}; \\ t_{21} &= x_{22}; & t_{22} &= x_{23} - x_{22}; & t_{23} &= x_{21} - x_{22}; & t_{24} &= x_{24} - x_{23} + x_{22} - x_{21}. \end{aligned}$$

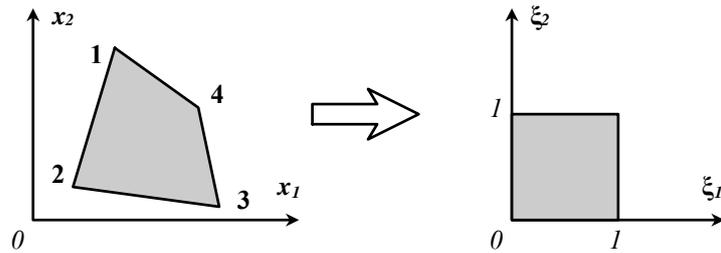


Рис. 1

Запишем разрешающую систему уравнений (1.1) в новых координатах, используя преобразование (2.1), содержащее информацию о геометрии четырехугольника. Для этого введем вектор \bar{f} с 18 компонентами $\{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{1,2}\}$ и соответствующую матрицу коэффициентов S размером 3×18 . Уравнения (1.1) примут вид

$$S \cdot \bar{f} = \bar{q}, \quad (2.2)$$

где $\bar{q} = \{-q, 0, 0\}$, а для ненулевых компонентов матрицы S имеем такие равенства:

$$\begin{aligned} s_{12} &= K_1; & s_{19} &= K_2; & s_{1,16} &= K_1; & s_{1,17} &= K_2; \\ s_{21} &= -K_1; & s_{24} &= D_{11}; & s_{25} &= D_{66}; & s_{2,12} &= D_{12} + D_{66}; & s_{2,14} &= -K_1; \\ s_{36} &= D_{12} + D_{66}; & s_{37} &= -K_2; & s_{3,10} &= D_{66}; & s_{3,11} &= D_{22}; & s_{3,15} &= -K_2. \end{aligned}$$

Для определения элементов матрицы \tilde{S} , аналогичной S и представляющей коэффициенты уравнений (1.1) в новой системе координат, необходимо получить выражения для всех компонентов вектора \bar{f} с учетом преобразования (2.1). Вывод соотношений для частных производных приведем на примере функции прогиба $w(x_1, x_2)$.

Первые производные можно получить из системы уравнений, составленной на основе известных выражений для частной производной сложной функции (здесь и далее производные по ξ_i обозначены индексами после точки с запятой):

$$w_{;1} = w_{,1}x_{1,1} + w_{,2}x_{2,1}; \quad w_{;2} = w_{,1}x_{1,2} + w_{,2}x_{2,2}.$$

Ее решением будут выражения

$$w_{;1} = Aw_{;1} + Bw_{;2}; \quad w_{;2} = Cw_{;1} + Dw_{;2}, \quad (2.3)$$

где для A, B, C, D (выражения относительно ξ_1, ξ_2) имеем формулы:

$$\begin{aligned} A &= x_{2,2}/(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}); & B &= -x_{2,1}/(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}); \\ C &= -x_{1,2}/(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}); & D &= x_{1,1}/(x_{1,1}x_{2,2} - x_{1,2}x_{2,1}) \end{aligned}$$

или в явном виде –

$$\begin{aligned} A &= (t_{24}\xi_1 + t_{23})/\chi; & B &= -(t_{24}\xi_2 + t_{22})/\chi; \\ C &= -(t_{14}\xi_1 + t_{13})/\chi; & D &= (t_{14}\xi_2 + t_{12})/\chi \end{aligned} \quad (2.4)$$

с обозначением $\chi = (t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})\xi_1 + (t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})\xi_2 + (t_{12}t_{23} - t_{22}t_{13})$.

Имея выражения для первых производных (2.3), можно получить и вторые частные производные, заменяя в правой части (2.3) функцию w на $w_{,1}$ либо $w_{,2}$:

$$\begin{aligned} w_{,11} &= (AA_{,1} + BA_{,2})w_{,1} + (AB_{,1} + BB_{,2})w_{,2} + A^2w_{,11} + B^2w_{,22} + 2ABw_{,12}; \\ w_{,22} &= (CC_{,1} + DC_{,2})w_{,1} + (CD_{,1} + DD_{,2})w_{,2} + C^2w_{,11} + D^2w_{,22} + 2CDw_{,12}; \\ w_{,12} &= (AC_{,1} + BC_{,2})w_{,1} + (AD_{,1} + BD_{,2})w_{,2} + ACw_{,11} + BDw_{,22} + (AD + BC)w_{,12}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассмотрим вектор \bar{m} с компонентами $\{w_{,1}, w_{,2}, w_{,11}, w_{,22}, w_{,12}\}$, которые являются производными функции $w(x_1, x_2)$ в исходной системе координат, соответствующий ему вектор \bar{m}^* с компонентами $\{w_{,1}, w_{,2}, w_{,11}, w_{,22}, w_{,12}\}$ в новых координатах и матрицу перехода L , для которых справедливо соотношение

$$\bar{m} = L \cdot \bar{m}^*. \quad (2.6)$$

Получая из (2.3) и (2.5) соотношения между компонентами \bar{m} и \bar{m}^* , записываем ненулевые элементы матрицы перехода L :

$$\begin{aligned} l_{11} &= A; & l_{12} &= B; & l_{21} &= C; & l_{22} &= D; \\ l_{31} &= AA_{,1} + BA_{,2}; & l_{32} &= AB_{,1} + BB_{,2}; & l_{33} &= A^2; & l_{34} &= B^2; & l_{35} &= 2AB; \\ l_{41} &= CC_{,1} + DC_{,2}; & l_{42} &= CD_{,1} + DD_{,2}; & l_{43} &= C^2; & l_{44} &= D^2; & l_{45} &= 2CD; \\ l_{51} &= AC_{,1} + BC_{,2}; & l_{52} &= AD_{,1} + BD_{,2}; & l_{53} &= AC; & l_{54} &= BD; & l_{55} &= AD + BC. \end{aligned}$$

Выражения для A, B, C, D приведены в (2.4), а их производные $A_{,1}, A_{,2}, \dots, D_{,2}$ имеют такой вид:

$$\begin{aligned} A_{,1} &= (t_{24}\chi - (t_{24}\xi_1 + t_{23})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14}))/\chi^2; & A_{,2} &= -(t_{24}\xi_1 + t_{23})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})/\chi^2; \\ B_{,1} &= (t_{24}\xi_2 + t_{22})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})/\chi^2; & B_{,2} &= -(t_{24}\chi - (t_{24}\xi_2 + t_{22})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13}))/\chi^2; \\ C_{,1} &= -(t_{14}\chi - (t_{14}\xi_1 + t_{13})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14}))/\chi^2; & C_{,2} &= (t_{14}\xi_1 + t_{13})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13})/\chi^2; \\ D_{,1} &= -(t_{14}\xi_2 + t_{12})(t_{12}t_{24} - t_{22}t_{14})/\chi^2; & D_{,2} &= (t_{14}\chi - (t_{14}\xi_2 + t_{12})(t_{14}t_{23} - t_{24}t_{13}))/\chi^2. \end{aligned}$$

По аналогии с вектором \bar{f} для исходной системы координат введем вектор \bar{f}^* с 18 компонентами $\{\psi_1, \psi_{1,1}, \psi_{1,2}, \psi_{1,11}, \psi_{1,22}, \psi_{1,12}, \psi_2, \dots, w_{,12}\}$ и матрицу перехода P такую, что

$$P \cdot \bar{f}^* = \bar{f}. \quad (2.7)$$

В состав компонентов векторов \bar{f} и \bar{f}^* входят производные трех функций, для каждой из которых применимо соотношение (2.6). Введем обозначения: O – нулевая матрица размером 5×5 ; o_c – нулевой вектор-столбец из пяти компонентов; o_r – нулевая вектор-строка из пяти компонентов. Тогда матрица P будет иметь вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & o_r & 0 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & L & o_c & O & o_c & O \\ 0 & o_r & 1 & o_r & 0 & o_r \\ o_c & O & o_c & L & o_c & O \\ 0 & o_r & 0 & o_r & 1 & o_r \\ o_c & O & o_c & O & o_c & L \end{pmatrix}$$

С учетом (2.7) уравнения (2.2) запишем в новой системе координат как

$$S \cdot (P \cdot \bar{f}^*) = \bar{q}^*$$

или

$$\tilde{S} \cdot \bar{f}^* = \bar{q}^*, \quad (2.8)$$

где \bar{f}^* и \bar{q}^* — аналоги векторов \bar{f} и \bar{q} в новой системе координат, а ненулевые компоненты матрицы $\tilde{S} = S \cdot P$ равны:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{12} &= s_{12}l_{11}; & \tilde{s}_{13} &= s_{12}l_{12}; & \tilde{s}_{18} &= s_{19}l_{21}; & \tilde{s}_{19} &= s_{19}l_{22}; & \tilde{s}_{1,14} &= s_{1,16}l_{31} + s_{1,17}l_{41}; \\ \tilde{s}_{1,15} &= s_{1,16}l_{32} + s_{1,17}l_{42}; & \tilde{s}_{1,16} &= s_{1,16}l_{33} + s_{1,17}l_{43}; & \tilde{s}_{1,17} &= s_{1,16}l_{34} + s_{1,17}l_{44}; \\ \tilde{s}_{1,18} &= s_{1,16}l_{35} + s_{1,17}l_{45}; & \tilde{s}_{21} &= s_{21}; & \tilde{s}_{22} &= s_{24}l_{31} + s_{25}l_{41}; & \tilde{s}_{23} &= s_{24}l_{32} + s_{25}l_{42}; \\ \tilde{s}_{24} &= s_{24}l_{33} + s_{25}l_{43}; & \tilde{s}_{25} &= s_{24}l_{34} + s_{25}l_{44}; & \tilde{s}_{26} &= s_{24}l_{35} + s_{25}l_{45}; & \tilde{s}_{28} &= s_{2,12}l_{51}; \\ \tilde{s}_{29} &= s_{2,12}l_{52}; & \tilde{s}_{2,10} &= s_{2,12}l_{53}; & \tilde{s}_{2,11} &= s_{2,12}l_{54}; & \tilde{s}_{2,12} &= s_{2,12}l_{55}; & \tilde{s}_{2,14} &= s_{2,14}l_{11}; \\ \tilde{s}_{2,15} &= s_{2,14}l_{12}; & \tilde{s}_{32} &= s_{36}l_{51}; & \tilde{s}_{33} &= s_{36}l_{52}; & \tilde{s}_{34} &= s_{36}l_{53}; & \tilde{s}_{35} &= s_{36}l_{54}; & \tilde{s}_{36} &= s_{36}l_{55}; \\ \tilde{s}_{37} &= s_{37}; & \tilde{s}_{38} &= s_{3,10}l_{31} + s_{3,11}l_{41}; & \tilde{s}_{39} &= s_{3,10}l_{32} + s_{3,11}l_{42}; & \tilde{s}_{3,10} &= s_{3,10}l_{33} + s_{3,11}l_{43}; \\ \tilde{s}_{3,11} &= s_{3,10}l_{34} + s_{3,11}l_{44}; & \tilde{s}_{3,12} &= s_{3,10}l_{35} + s_{3,11}l_{45}; & \tilde{s}_{3,14} &= s_{3,15}l_{21}; & \tilde{s}_{3,15} &= s_{3,15}l_{22}. \end{aligned}$$

Уравнения (2.8) представляют собой разрешающую систему уравнений (1.1) в системе координат $\xi_1 \xi_2$ и содержат информацию о геометрии исследуемой четырехугольной пластины. Поскольку исходная область в виде произвольного четырехугольника в новых координатах имеет вид квадрата, для решения краевой задачи становится возможным использование метода дискретной ортогонализации в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Отметим, что в случае использования граничных условий, содержащих производные функции прогиба w и углов ψ_1, ψ_2 (шарнирное закрепление, свободный край), для решения задачи потребуется учесть изменения, обусловленные переходом к новой системе координат согласно (2.6). В частности, рассмотренные в §1 граничные условия при шарнирном закреплении на сторонах $\xi_1 = \text{const}$ принимают вид $w = 0$; $A\psi_{1,1} + B\psi_{1,2} = 0$; $\psi_2 = 0$ с аналогичными поправками для ψ_2 на сторонах $\xi_2 = \text{const}$.

Выражения A и B подразумеваются в значении, приведенном в (2.4).

§3. Примененные методы.

Проверка предложенного подхода выполнена с использованием многократно описанного в научной литературе и публикациях [1, 2, 4] метода дискретной ортогонализации (дискретной прогонки) в сочетании с методом сплайн-коллокации.

Поскольку разрешающая система уравнений получена на базе уточненной теории пластин и, соответственно, в уравнениях присутствуют частные производные искомым функций до второго порядка включительно, для сплайн-аппроксимации использованы В-сплайны третьей степени. Решение задачи, например, для функции прогиба $w(x_1, x_2)$, определяем в виде

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^N w_i(x_1) \varphi_i(x_2), \quad (3.1)$$

где w_i – неизвестные функции; φ_i – линейные комбинации В-сплайнов третьей степени. Расчет аппроксимирующих функций φ_i с учетом условий закрепления на краях производится по схеме, приведенной в [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_2) &= \alpha_{11} B_3^{-1} + \alpha_{12} B_3^0; & \varphi_1(x_2) &= B_3^{-1} + \alpha_{21} B_3^0 + \alpha_{22} B_3^1; \\ \varphi_i(x_2) &= B_3^i; & i &= 2, \dots, N-2; & \varphi_{N-1}(x_2) &= B_3^{N+1} + \beta_{21} B_3^N + \beta_{22} B_3^{N-1}; \\ \varphi_N(x_2) &= \beta_{11} B_3^{N+1} + \beta_{12} B_3^N. \end{aligned}$$

Сплайн-функции B_3^i строим на равномерной сетке узлов Δ с шагом $x_2^{i+1} - x_2^i$; коэффициенты α_{ij}, β_{ij} – с учетом обозначений

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}; \quad A_\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix};$$

для жесткого закрепления на краях $x_2 = \text{const}$ имеем

$$A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{а для шарнирного} - A_\alpha = A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

С целью повышения точности аппроксимации точки коллокации выбираем внутри интервалов между узлами сетки x_2^{2i}, x_2^{2i+1} по схеме: $\varepsilon_{2i} = x_2^{2i} + t_1(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, $\varepsilon_{2i+1} = x_2^{2i} + t_2(x_2^{2i+1} - x_2^{2i})$, где t_1, t_2 – корни полинома Лежандра второго порядка на отрезке $[0, 1]$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Используя представление искомых функций в форме (3.1), из исходной двумерной краевой задачи получаем одномерную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка.

§4. Результаты расчетов.

Тестирование предложенного подхода произведено на задаче о НДС прямоугольной пластины с использованием численного метода дискретной ортогонализации при 500 точках интегрирования. Понижение размерности исходной двумерной краевой задачи выполнено с помощью метода сплайн-аппроксимации с использованием 20 пар точек коллокации.

Рассмотрена прямоугольная изотропная пластина (рис. 2) размером $a = 2, b = 3, h = 0,1$ с двумя вариантами краевых условий: жесткое и шарнирное закрепление. Поверхностная нагрузка $q = q_0$ была принята постоянной и равномерно распределенной. Это позволило сравнить решения краевой задачи для системы (2.2) по традиционной схеме в координатах x_1, x_2 и для системы (2.8) – в координатах ξ_1, ξ_2 . В последнем случае задача решена с использованием предложенного преобразования к нормированной области $[0 \leq \xi_1 \leq 1], [0 \leq \xi_2 \leq 1]$, а геометрия пластины (рис. 2) показана в коэффициентах разрешающей системы уравнений.

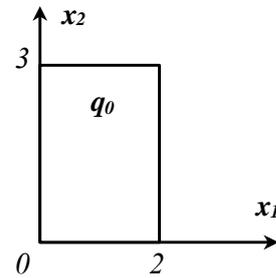


Рис. 2

Физические параметры пластины, размеры сеток для сплайнов и количество точек интегрирования выбраны одинаковыми для обоих вариантов расчета, что дает основания ожидать таких же результатов решения задачи. Сами значения этих параметров в данном случае имеют второстепенный характер, поскольку целью сравнения является проверка идентичности численного решения.

По результатам расчета прогиба w в виде величины $\hat{w} = wE/q_0$ в центре пластины для схемы с непосредственным описанием исследуемой области $[0 \leq x_1 \leq 2]$, $[0 \leq x_2 \leq 3]$ и предложенной в данной работе схемы с преобразованием к $[0 \leq \xi_1 \leq 1]$, $[0 \leq \xi_2 \leq 1]$ получены значения, совпадающие до 11 знака. Расхождения в последних разрядах вполне могут быть отнесены к ошибке суммирования из-за конечной точности представления вещественных чисел в памяти компьютера.

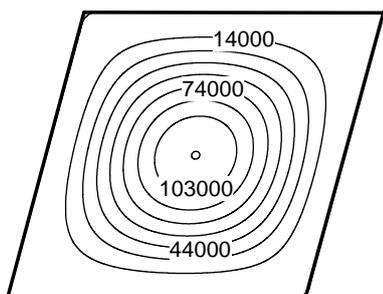


Рис. 3

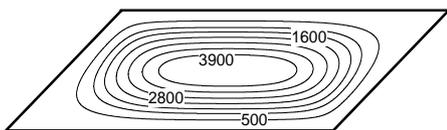


Рис. 4

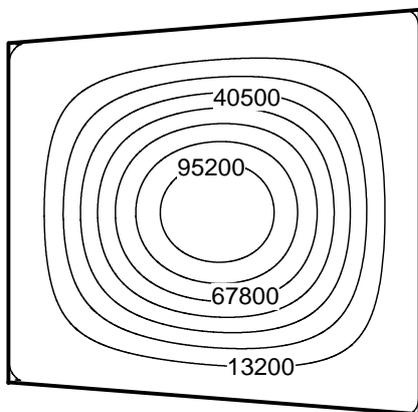


Рис. 5

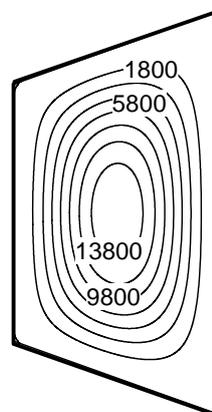


Рис. 6

Для оценки качества описания объектов более сложной геометрии, выполнено численное решение задач для ряда пластин в форме параллелограмма и трапеции с жестким закреплением краев в условиях равномерно распределенной нагрузки $q = q_0$. Форма некоторых из них и вид рассчитанной поверхности функции прогиба \hat{w} показаны на рис. 3 – 6 (толщина пластин $-h = 0,1$; коэффициент Пуассона принят равным 0,3). Используемые для задания геометрии пластин координаты вершин образующих четырехугольников поданы в табл. 1. В расчете использовано 30 пар точек коллокации для сплайнов и 1500 точек интегрирования – для метода дискретной ортогонализации.

Сравнение результатов расчета проведено с данными работы [6], где пластины указанной формы рассмотрены в рамках классической теории Кирхгофа – Лява, а задача решена с помощью метода дискретной ортогонализации при отличных от настоящей работы параметрах расчета (количество точек коллокации для сплайнов, количество точек интегрирования). Для описания сложной формы авторами были применены различные преобразования: переход к треугольной или косоугольной системе координат, в зависимости от формы пластин. Там же приведены результаты расчетов по методу конечных элементов (FEM).

Таблица 1

объект	x_{11}	x_{21}	x_{12}	x_{22}	x_{13}	x_{23}	x_{14}	x_{24} x_{24}
1	2,59	9,66	0	0	10,00	0	12,59	9,66
2	7,07	7,07	0	0	10,00	0	17,07	7,07
3	1,29	4,83	0	0	10,00	0	11,29	4,83
4	3,54	3,54	0	0	10,00	0	13,54	3,54
5	47,15	4,13	47,15	-4,13	57,15	-5,00	57,15	5,00
6	8,66	2,32	8,66	-2,32	18,66	-5,00	18,66	5,00
7	52,15	4,56	52,15	-4,56	57,15	-5,00	57,15	5,00
8	8,74	3,18	8,74	-3,18	13,74	-5,00	13,74	5,00

В табл. 2 представлены числовые значения максимального прогиба \hat{w} , полученные по предложенной в данной работе схеме с использованием преобразования (преобр. 1×1), данные из работы [6] для методов дискретной ортогонализации (д. орт.) и конечных элементов (FEM), а также соответствующие величины относительного отличия, т.е. расхождения в результатах. Данные расчетов хорошо согласуются между собой: для большинства исследованных объектов относительное отличие δ в значениях прогиба \hat{w} имеет место в пределах нескольких процентов.

Из рис. 3 – 6 также следует, что поверхности функции прогиба $w(x_1, x_2)$ имеют подобную форму, которая изменяется, соответственно, геометрическим параметрам пластин. Значения максимального прогиба (табл. 2) уменьшаются с уменьшением площади объекта, воспринимающей нагрузку q .

Таблица 2

№ объекта	\hat{w} , преобр. 1×1	\hat{w} , д. орт.	\hat{w} , FEM	δ , д. орт.	δ , FEM
1	118160	122400	123100	3,46 %	4,01 %
2	40205	41060	41460	2,08 %	3,03 %
3	15077	15150	15180	0,48 %	0,68 %
4	4483	4510	4505	0,60 %	0,49 %
5	108889	112400	113000	3,12 %	3,64 %
6	59309	60960	60760	2,71 %	2,39 %
7	17128	17030	17120	0,58 %	0,05 %
8	15628	15630	15650	0,01 %	0,14 %

Принимая во внимание близкие значения полученных результатов, можно констатировать о применимости предложенного подхода для единообразного описания геометрии четырехугольных пластин сложной формы при решении задач статического анализа методами дискретной ортогонализации и сплайн-коллокации. Несмотря на отличия в примененной теории, методах и параметрах расчета, использование описанной схемы позволяет получить результаты, соответствующие данным других авторов [6].

К достоинствам предложенного подхода можно отнести более широкий круг потенциально решаемых задач, включая варианты геометрии пластин ранее не рассматриваемых в силу сложности описания исследуемой области. Использование в качестве основы методов дискретной ортогонализации и сплайн-коллокации позволяет решать задачи, в том числе в условиях ортотропии, переменной толщины пластин и для различных вариантов распределения действующих нагрузок.

Заключение.

В данной работе предложен подход, который расширяет возможности решения задач об НДС четырехугольных пластин сложной формы на основе применения метода сплайн-коллокации и дискретной ортогонализации. Схема расчета с преобразованием координат проверена путем сравнения результатов вычислений с данными, полученными при непосредственном решении задачи для прямоугольной области. Для пластин в форме параллелограмма и трапеции результаты численного анализа на основе разработанного подхода хорошо согласуются с данными, известными в литературе.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано чисельно-аналітичний підхід для розв'язування задач про напружено-деформований стан чотирикутних пластин складної форми. Розв'язуюча система рівнянь записана в нових ортогональних координатах на основі перетворень, які враховують геометрію пластини. Отримана двовимірна крайова задача для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних за допомогою сплайн-колокації зведена до одновимірної, яка розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Проведено порівняння числових даних з результатами розрахунків напружено-деформованого стану пластин у формі трапеції та паралелограма, виконаних на основі інших методів. Запропонований підхід також дозволяє проводити розрахунки прогинів чотирикутних пластин складної форми, виготовлених із анізотропних матеріалів.

1. Григоренко Я.М., Мольченко Л.В. Основи теорії пластин та оболонок: Навч. посібник / – К.: Либідь, 1993. – 232 с.
2. Григоренко Я.М., Будаєв В.Д., Григоренко О.Я. Розв'язання задач теорії оболонок на основі дискретно-континуальних методів / навчальний посібник. – Миколаїв: Іліон, 2010. – 294 с.
3. Birman V. Plate Structures. – New York: Springer. – 2011.
4. Godunov S.K. Numerical solution of boundary-value problems for systems of linear ordinary differential equations // Usp. Mat. Nauk – 1961. – **16**, N 3. – P. 171 – 174.
5. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using Spline-Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 4. – P. 413 – 420.
6. Kryukov N.N. Design of oblique and trapezoidal plates using spline functions // Int. Appl. Mech. – 1997. – **33**, N 5. – P. 114 – 117.
7. Li W.Y., Cheung Y.K., Asce F., Tham L.G. Spline Finite Strip Analysis of General Plates // J. Eng. Mech. – **112**. – P. 43 – 54.
8. Shahidi A.R., Mahzoon M., Saadatpour M.M., Azhari M. Nonlinear static analysis of arbitrary quadrilateral plates in very large deflections // Communications in Nonlin. Science and Numer. Simulation. – 2007. – **12**. – P. 832 – 848.
9. Sheikh A.H., Mukhopadhyay M. Geometric nonlinear analysis of stiffened plates by the spline finite strip method // Computers and Structures. – 2000. – **76**. – P. 765 – 785.
10. Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M. A semi-analytical approach for the geometrically nonlinear analysis of trapezoidal plates // Int. J. of Mech. Sci. – 2010. – **52**. – P. 1588 – 1596.

Поступила 28.07.2016

Утверждена в печать 14.03.2017