

А.А.Каминский, М.Ф.Селиванов

## О МОДЕЛИРОВАНИИ ДОКРИТИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** An algorithm is built for studying the subcritical growth of crack in the viscoelastic body under small sizes of adhesion zone. This algorithm is illustrated by numerical solutions of several problems. The concentrated and acting along the normals to the crack forces are introduced into statement of these problems. These forces be a cause of change the speed of crack propagation as well as the crack faces contact. If the latter is the case, an essential effect of contact area presence on kinetic curves is established. It is established also an effect of a shift of the line of application of compression forces relative to the central normal to the crack on the kinetic curves.

**Key-words:** cohesive zone model, viscoelastic solid, slow crack growth, thin structure concept.

### Введение.

Развитие трещин в материалах с наследственными свойствами часто происходит путем медленного докритического роста. В случае, когда зона ослабленных связей (зона предразрушения) у фронта движущейся трещины не выходит из области  $K$ -доминирования, в основу теории длительного распространения трещины [1] можно принять концепцию тонкой структуры, которая использует коэффициент интенсивности напряжений для определения раскрытия и длины зоны предразрушения.

Большинство задач о длительном распространении трещины в материале с изменяющимися со временем механическими свойствами решены для внешних нагрузок, приложенных на достаточном удалении от трещины. Учет силовых факторов, влияющих на напряженное состояние вблизи трещины, является достаточно сложной задачей при использовании теории комплексных потенциалов для решения задач плоской теории упругости. Однако, чтобы проследить некоторые эффекты, которые вызваны наличием силовых факторов в окрестности трещины, можно использовать решения для сосредоточенных сил [3].

Для иллюстрации влияния силовых факторов в окрестности трещины ниже рассмотрена классическая задача механики разрушения для прямолинейной трещины нормального отрыва. Отметим, что основные концепции моделирования распространения трещин в вязкоупругих материалах приведены в [4, 5]. В данной работе используем модель длительного разрушения [4], полагая, что параметры трещиностойкости не зависят от времени при докритическом распространении трещины.

Объектом исследования является медленное распространение сквозной трещины нормального отрыва в бесконечной пластине, материал которой обладает наследственными свойствами. Исследуем квазистатическое устойчивое распространение трещины, имеющейся в теле до момента приложения нагрузки. Рост трещины вдоль плоскости ее расположения происходит в изотермических условиях при постоянном докритическом уровне внешнего нагружения вследствие ползучести материала пластины.

В основу исследований длительного роста трещины положим модель трещины с зоной сцепления. В момент  $t = 0$  приложения нагрузки трещина находится в докри-

тическом состоянии – раскрытие в вершине не превышает граничного уровня:  $\Delta[t=0, \lambda(0)] < \Delta_{\max}$  ( $\lambda(t)$  – полудлина трещины). Вследствие ползучести раскрытие  $\Delta[t, \lambda(t)]$  со временем достигает предельно возможного значения  $\Delta_{\max}$ , завершая инкубационный период и инициируя начало роста трещины.

Нормальное раскрытие трещины в линейно-вязкоупругом теле определим в виде интеграла Больцмана – Вольтерра [1]

$$\Delta(t, x) = \int_{-\infty}^t l(t-\tau) \frac{\partial \tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]}{\partial \tau} d\tau, \quad (1)$$

где величины  $\Delta(t, x)$  и  $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$  имеют размерность длины, функция ползучести  $l(\mathcal{G})$  – безразмерная. Величина  $\tilde{\Delta}(x, \lambda)$  является значением упругого раскрытия в точке на продолжении трещины  $x$  для трещины полудлины  $\lambda$ ; тильда над  $\Delta$  указывает, что эта величина не является интегральной характеристикой, в выражении для нее содержатся только мгновенные упругие постоянные.

При помощи концепции тонкой структуры [3] раскрытие в зоне сцепления можно приближенно представить в форме

$$\tilde{\Delta}(x, \lambda) = \frac{L\sigma}{\pi} 2l_{\text{coh}} F\left(\frac{x-\lambda}{l_{\text{coh}}}\right); \quad F(s) = \sqrt{1-s} + \frac{s}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-s}}{1+\sqrt{1-s}},$$

$L = 4/E$  ( $E$  – модуль упругости); длина сцепления определяется коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  и прочностью сцепления  $\sigma$ :

$$l_{\text{coh}}(\lambda) = \frac{\pi K_I^2(\lambda)}{8 \sigma^2}.$$

### 1. Медленный рост трещины.

Соотношение для вязкоупругого раскрытия получим при помощи решения соответствующей задачи теории упругости путем применения принципа упруго-вязкоупругой аналогии [6].

Пусть момент приложения нагрузки соответствует  $t = 0$ . Заменяя в (1) функцию  $\tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]$  на  $H(\tau)\tilde{\Delta}[x, \lambda(\tau)]$  ( $H$  – функция Хевисайда), запишем выражение для раскрытия в зоне сцепления для точки  $x$  в момент времени  $t$

$$\Delta(t, x) = l(t)\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] + \int_0^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}[x, \lambda(\tau)]d\tau. \quad (2)$$

Учитывая то, что во время инкубационного периода, который длится до момента времени  $t = t_0$ , полудлина трещины  $\lambda$  не изменяется и  $\tilde{\Delta}[x, \lambda(0)] = \tilde{\Delta}[x, \lambda(t_0)]$ , а выражение для раскрытия (2) в вершине трещины можно записать в следующем виде:

$$\Delta[t, \lambda(t)] = l(t)\tilde{\Delta}[\lambda(t), \lambda(t_0)] + \int_{t_0}^t l(t-\tau)\tilde{\Delta}'_{\tau}[\lambda(t), \lambda(\tau)]d\tau. \quad (3)$$

Определим величину  $\lambda$  в моменты времени  $t_k = k \cdot \Delta t$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Обозначая  $\lambda_k = \lambda(t_k)$  и приравнявая выражение для раскрытия (3) критическому значению, запишем уравнение для определения  $\lambda_k$ :

$$l(t_k)D_0 + \sum_{i=1}^k \Lambda_i (D_i - D_{i-1}) = \Delta_{\max} \left[ \Lambda_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} l(t_k - \tau) d\tau; D_i = \tilde{\Delta}(\lambda_k, \lambda_i) \right]. \quad (4)$$



Коэффициент интенсивности напряжений для этой задачи имеет вид

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi\lambda} - \frac{P}{\sqrt{\pi\lambda}} \sum_{m=1}^M \left[ -\operatorname{Im} \left\{ \frac{z_m + \lambda}{X_m} \right\} + \frac{2\lambda y_0}{\varkappa + 1} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{(\lambda - z_m) X_m} \right\} \right], \quad X_m = \sqrt{z_m^2 - \lambda^2}, \quad (6)$$

$z_m = x_m + iy_0$  – положение точек приложения сосредоточенных сил. В случае плоско-напряженного состояния  $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Параметр материала  $\varkappa$  примем независимым от времени при исследовании распространения трещины.

На рис. 3 приведены кинетические кривые (а) и соответствующие относительные длины сцепления (б), полученные при  $\sigma_\infty = 11$  МПа. Последняя точка  $(t, \lambda)$  каждой кривой соответствует критическому размеру трещины, после соответствующего момента времени инициируется динамическое развитие. В рассматриваемом примере сосредоточенные силы замедляют распространение трещины, которая подходит к линии действия стягивающих берега трещины сил. Таким образом, трещина может продолжать медленный рост на протяжении достаточно большого промежутка времени, достигая размера, в разы превосходящего начальный.

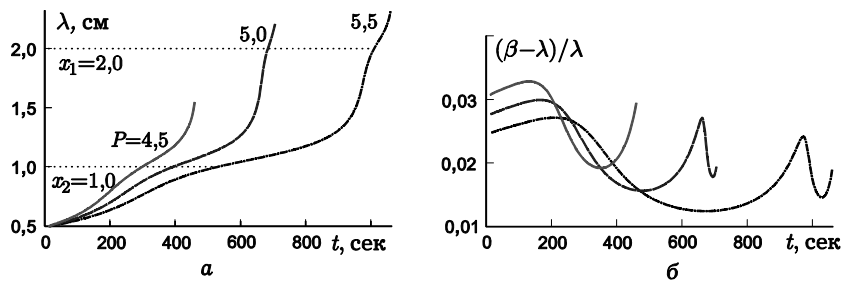


Рис. 3

Рассмотрим пример, соответствующий схеме нагружения рис. 4. Коэффициент интенсивности напряжений (КИН) для этой задачи нетрудно получить при помощи (6), полагая  $\sigma_\infty = 0$  и заменяя знак при втором слагаемом на плюс.

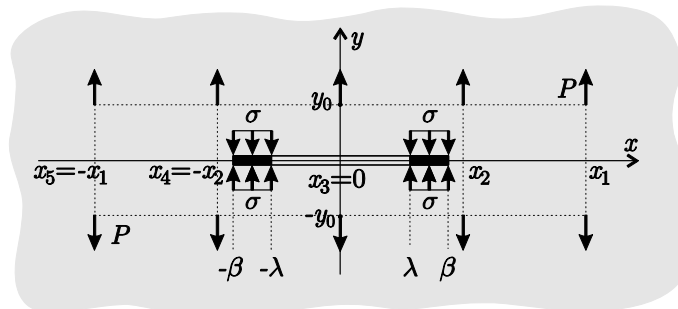


Рис. 4

Кинетические кривые (рис. 3, а) и соответствующая относительная длина сцепления (б) приведены на рис. 5. При приближении вершины трещины к линии действия растягивающей берега трещины сил скорость распространения увеличивается.

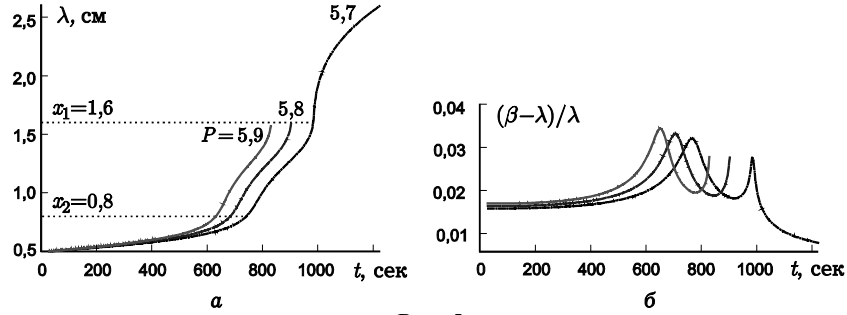


Рис. 5

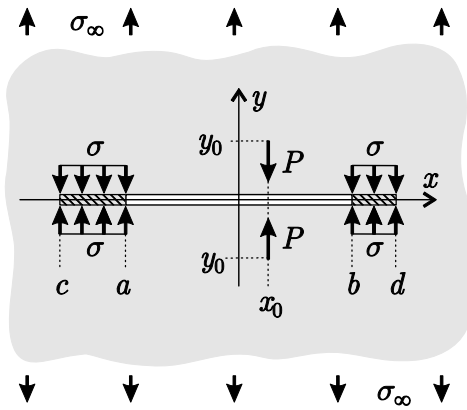


Рис. 6

Решения, представленные на рис. 3 и 5, получены при  $E = 10^4$  МПа,  $E_\infty = E / 40$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\beta = 0,01$  сек (реологические параметры),  $\sigma = 35$  МПа,  $\Delta_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-3}$  см (параметры трещиностойкости),  $\Delta t = 4$  сек (параметр дискретизации), значения силовых и геометрических параметров приведены на рисунках.

Рассмотрим аналогичную приведенным выше задачу для случая возможного контакта берегов трещины (рис. 6). Если в решении задачи о перемещении берегов трещины на участке, не содержащем концы, получено отрицательное раскрытие, то необходимо ввести контактные напряжения и определить их из условия неотрицательности раскрытия.

Зададим распределение контактных напряжений кусочно-линейной функцией

$$\sigma(x) = \frac{(b_k - x)\sigma_{k-1} + (x - b_{k-1})\sigma_k}{\Delta b_k}, \quad x \in (b_{k-1}, b_k),$$

$b_k = a + k \cdot \Delta b$ ,  $\Delta b = 2l / n$ ,  $l = (b - a) / 2$  – полудлина трещины.

Представим раскрытие трещины в форме

$$\frac{\pi}{L} \Delta(x) = \hat{\Delta}(x) - \begin{cases} 0, & \min_{x \in (a,b)} \hat{\Delta}(x) \geq 0; \\ \sum_{k=0}^n \sigma_k A_k(x), & \min_{x \in (a,b)} \hat{\Delta}(x) < 0, \end{cases} \quad (7)$$

где первое слагаемое соответствует раскрытию без введения контактных напряжений:

$$\hat{\Delta}(x) = \pi \sigma_\infty \hat{X}(x) + P \left[ -C_x(z_0, x) + \frac{2y_0(X_x(x-x_0) + X_y y_0) \hat{X}(x)}{(z+1)[(x-x_0)^2 + y_0^2](X_x^2 + X_y^2)} \right]; \quad (8)$$

$$X(z_0) = X_x + iX_y; \quad X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)};$$

$$\hat{X}(z) = \sqrt{(z-a)(b-z)}; \quad C(z, \zeta) = \ln \frac{\check{X}(z) - \check{X}(\zeta)}{\check{X}(z) + \check{X}(\zeta)}; \quad \check{X}(z) = \sqrt{\frac{z-a}{b-z}};$$

$$A_k(x) = J_{kx}(x) - \sum_{s=0}^2 (\Delta b)^{1-k} N_{sk} F_s(x); \quad J_{kx}(x) = \operatorname{Re}\{J_k^+(x)\};$$

$$J_0(z) = T_1'(z); \quad J_k(z) = T_{k+1}'(z) - T_k'(z); \quad J_n(z) = -T_n'(z);$$

$$T_k'(z) = [T_k(z) - T_{k-1}(z)] / \Delta b; \quad C_k(z) = C(z, b_k);$$

$$T_k(z) = \frac{1}{2} \left\{ (z - b_k)^2 C_k(z) + \hat{X}(b_k) [\hat{X}(z) + b_k I(z)] \right\}; \quad I(z) = 2 \operatorname{arctg} \tilde{X}(z);$$

$$F_s(x) = F_s^+(x); \quad F_0(z) = -I(z); \quad F_1(z) = \hat{X}(z); \quad F_2(z) = \frac{1}{2} [I^2 I(z) - z \hat{X}(z)];$$

$$N_{00} = \Delta S_1; \quad N_{0k} = \Delta S_{k+1} - \Delta S_k; \quad N_{0n} = -\Delta S_n;$$

$$N_{10} = \Delta R_1 - I_0; \quad N_{1k} = \Delta R_{k+1} - \Delta R_k; \quad N_{1n} = -\Delta R_n + I_n;$$

$$N_{20} = \Delta I_1; \quad N_{2k} = \Delta I_{k+1} - \Delta I_k; \quad N_{2n} = -\Delta I_n;$$

$$\tilde{X}_k = \sqrt{k / (n - k)}; \quad \hat{X}_k = \tilde{X}_k (n - k);$$

$$S_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2}{4} I_k - \left( k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k \right]; \quad R_k = \hat{X}_k + \left( k - \frac{n}{2} \right) I_k; \quad I_k = 2 \tilde{X}_k.$$

Для определения контактных напряжений  $\sigma_k$  воспользуемся итеративной процедурой:

1) приравняем раскрытие (7) в точках  $x = b_k$  к нулю:

$$\sum_{k \in M} a_{mk} \sigma_k = \delta_m, \quad m \in M; \quad (9)$$

$$a_{mk} = j_{mk} + I_m N_{0k} - \hat{X}_m N_{1k} - S_m N_{2k}; \quad j_{mk} = J_{kx}(b_m); \quad \delta_m = \hat{\Delta}(b_m);$$

$$j_{m0} = \Delta t_{m1}; \quad j_{mk} = \Delta t_{m(k+1)} - \Delta t_{mk}; \quad j_{mn} = -\Delta t_{mn}; \quad \Delta t_{mk} = t_{m(k-1)} - t_{mk};$$

$$t_{mk} = \frac{1}{2} \left[ (m - k)^2 c_{mk} + \hat{X}_m \hat{X}_k + \left( k - \frac{n}{2} \right) \hat{X}_k I_m \right]; \quad c_{mk} = \ln \left| \frac{\tilde{X}_m - \tilde{X}_k}{\tilde{X}_m + \tilde{X}_k} \right|.$$

На первой итерации положим  $M = 1, \dots, n - 1$ .

2) исключим из системы (9) уравнения и переменные с номерами, соответствующими отрицательным  $\sigma_k$  полученного на предыдущем шаге решения:  $M = \{k : \sigma_k \geq 0\}$ .

Заканчиваем процедуру, когда все  $\sigma_k$  будут неотрицательными.

Рассмотрим результаты определения раскрытия трещины при помощи приведенной процедуры. Раскрытия на рис. 7 соответствуют нескольким значениям интенсивности сил, стягивающих берега трещины. Решения получены при  $\sigma = 35$  МПа,  $\sigma_\infty = \sigma / 2,5$ ,  $x_0 = -0,1$  см,  $y_0 = 0,3$  см.

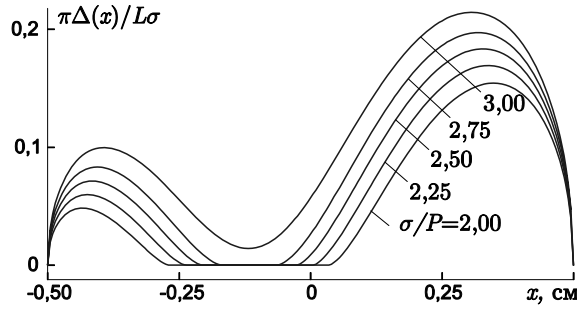


Рис. 7

Определив контактные напряжения, представим выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в левой и правой вершинах трещины в виде

$$K_I \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 K_I^{(k)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad K_I^{(1)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{P}{\sqrt{\pi l}} \operatorname{Im} \frac{\left\{ \begin{matrix} b - z_0 \\ z_0 - a \end{matrix} \right\}}{X_0} + \frac{2y_0 l}{\chi + 1} \operatorname{Re} \frac{1}{\left\{ \begin{matrix} z_0 - a \\ z_0 - b \end{matrix} \right\} X_0};$$

$$K_I^{(2)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{l}{\pi}} \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left( N_{1k} \pm \left[ \frac{n}{2} N_{2k} - \frac{2}{n} N_{0k} \right] \right); \quad K_I^{(3)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l},$$

где  $X_0 = X(z_0)$ , коэффициенты  $N$  определены.

Далее исследуем докритическое развитие трещины. Если раскрытие не симметрично относительно середины трещины, в уравнения (2) и (3) под величиной  $\lambda(t)$  будем понимать не полудлину трещины, а совокупность координат вершин трещины:  $\lambda = (a, b)$ . Таким образом, уравнение (4), при помощи которого последовательно определяются положения вершин трещины в точках временной сетки, становится уравнением двух переменных.

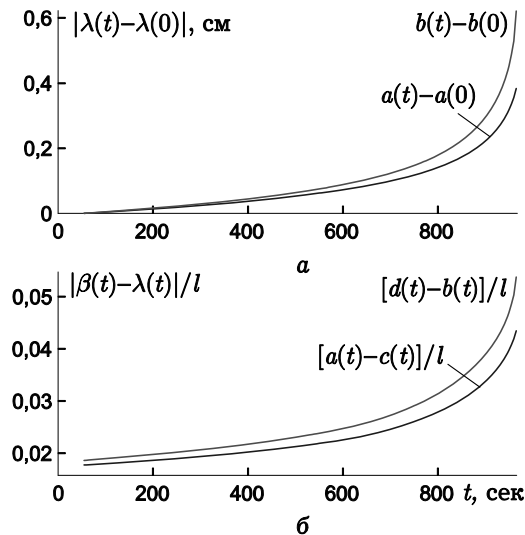


Рис. 8

На рис. 8 приведены кинетические кривые (а) и соответствующие длины сцепления (б). Решения получены при  $E = 10^4$  МПа,  $E_\infty = E/20$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\chi = 0,01$  сек,  $\sigma = 35$  МПа,  $\Delta_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-3}$  см (параметры трещиностойкости),  $\sigma_\infty = \sigma/2,5$ ,

$P = \sigma \cdot \frac{1}{2,7}$  см,  $-a_0 = b_0 = 0,5$  см,  $x_0 = -0,005$  см,  $y_0 = 0,3$  см (силовые и геометрические параметры),  $n = 200$ ,  $\Delta t = 5$  сек (параметры дискретизации).

#### **Заклучение.**

В работе предложен алгоритм исследования распространения трещины в вязкоупругом теле. Использованием в схеме нагружения вместе с равномерно распределенными напряжениями на бесконечности сосредоточенных сил вводится неоднородность поля напряжений на линии расположения трещины. Сосредоточенные силы могут замедлять или ускорять распространение трещины, приводит к немонотонности длины зоны предразрушения со временем, а также обуславливать контакт берегов трещины. Численные решения дают возможность сделать вывод о существенном влиянии смещения линии приложения сил относительно середины трещины на кинетические кривые. Незначительное смещение этой линии на 1% полудлины трещины привело к значительной разнице между скоростями двух вершин. Увеличение скорости распространения трещины в полученных числовых решениях обусловлено исчезновением зоны контакта при распространении. Результаты работы можно обобщить на случай ортотропного материала [2].

**РЕЗЮМЕ.** Побудовано алгоритм для дослідження докритичного зростання тріщини у в'язкопружному тілі при незначних розмірах зони зчеплення. Алгоритм проілюстровано числовими розв'язками декількох задач. У постановку цих задач введено зосереджені сили, що діють вздовж нормалей до тріщини. Ці сили можуть змінювати швидкість поширення тріщини, а також обумовлювати контакт її берегів. В останньому випадку встановлено значний вплив наявності області контакту на кінетичні криві. Також досліджено вплив зміщення лінії прикладання стискаючих сил відносно центральної нормалі до тріщини на кінетичні криві.

1. Каминский А.А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 310 с.
2. Селиванов М.Ф., Черноиван Ю.А. Определение перемещений контактирующих берегов трещин в ортотропной пластине // Прикл. механика. – 2017. – 53, № 4. – С. 63 – 75.
3. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
4. Kaminsky A.A. Mechanics of the delayed fracture of viscoelastic bodies with cracks: theory and experiment (review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 5. – P. 485 – 548.
5. Knauss W.G. A review of fracture in viscoelastic materials // Int. J. Fract. – 2015. – 196. – P. 99 – 146.
6. Sleyan L.I. Models and Phenomena in Fracture Mechanics. – Heidelberg: Springer, 2002. – 587 p.

Поступила 08.09.2016

Утверждена в печать 30.05.2017