

А. Я. Григоренко¹, И. А. Лоза²

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛОМ СЛОИСТОМ ЦИЛИНДРЕ
ПРИ МЕХАНИЧЕСКОМ СПОСОБЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ**

¹*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru.*

²*Национальный транспортный университет,
ул. Омеляновича-Павленко, 1, 01010, Киев, Украина; e-mail: dukeigor@mail.ru.*

Abstract. A solution of the problem on propagation of axisymmetric electroelastic waves in the hollow layered cylinder with metallic and piezoceramic layers polarized in the radial direction is given. The cylinder lateral surfaces are free of electrodes. The external surface is free of mechanical loads, whereas the harmonically variable pressure is applied to the internal surface. To solve this problem, the numerical-analytical method is used. First the components of the mechanical stresses tensor, the vectors of mechanical displacements and electric induction as well as the electrostatic potential are represented in the form of running waves. Then the initial problem of electroelasticity is reduced to the inhomogeneous boundary problem for ordinary differential equations that is solved by the stable method of discrete orthogonalization. The results of kinematic analysis are shown for the layered cylinder with metallic layers and layers from piezoceramics PZT4. The numerical results are analyzed.

Key words: kinematic analysis of electroelastic waves, layered hollow cylinders, discrete orthogonalisation.

Введение.

Исследованию задач о распространении упругих волн в круговых цилиндрах посвящено значительное количество работ. Содержание проведенных исследований достаточно полно отражено в обзорах [11, 12 и др.] и монографиях [1, 2 и др.]. Связанные поля значительно усложняют проведение исследований [3, 4, 6, 7 и др.]. Так, для пьезокерамического цилиндра (только в случае осевой поляризации пьезокерамики для продольных осесимметричных волн и в случае окружной поляризации для крутильных волн) возможно представление решения через специальные функции. Учет неоднородности материала цилиндра еще более усложняет задачу, в то время как в большинстве устройств используются именно неоднородные пьезоэлектрические материалы (биморфы). Наличие поверхности раздела двух сред приводит к необходимости удовлетворять условиям сопряжения разрешающих функций на границе раздела сред. Результаты исследований по этой проблематике представлены в работах [5, 8 – 10, 13 и др.].

В данной работе рассмотрена осесимметричная задача о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с пьезокерамическими и металлическими слоями.

Для решения задачи о распространении вынужденных акустоэлектрических волн в слоистом полом цилиндре с металлическими и пьезокерамическими слоями пред-

ложен эффективный численно-аналитический подход. На его основе проведен кинематический анализ распространяющихся вдоль оси цилиндра акустоэлектрических волн. Исследовано также влияние фактора неоднородности на кинематические характеристики распространяющихся волн.

1. Постановка задачи. Основные уравнения для полых цилиндров.

Осесимметричные продольные уравнения движения i -го слоя в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид [8]:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^i - \sigma_{\theta\theta}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial z} = \rho^i \frac{\partial^2 u_r^i}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^i}{\partial z} = \rho^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Уравнения электростатики для i -го слоя:

$$\frac{\partial D_r^i}{\partial r} + \frac{D_r^i}{r} + \frac{\partial D_z^i}{\partial z} = 0; \quad E_r^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial r}; \quad E_z^i = -\frac{\partial \phi^i}{\partial z}. \quad (2)$$

Геометрические соотношения для i -го слоя:

$$\varepsilon_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta}^i = \frac{u_r^i}{r}; \quad \varepsilon_{zz}^i = \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r} \right). \quad (3)$$

В (1) – (3) приняты обозначения: σ_{ij}^i – компоненты тензора напряжений; ρ^i – плотность материала; ω – круговая частота; u_i^i – компоненты вектора перемещений; D_i^i – компоненты вектора электрической индукции; E_i^i – компоненты вектора напряженности электрического поля; ϕ^i – электростатический потенциал; ε_{ij}^i – компоненты тензора деформаций.

Физические соотношения для i -го пьезокерамического слоя, поляризованного в радиальном направлении, представим в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= c_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{13}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{13}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{33}^i E_r^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{11}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{12}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \\ \sigma_{zz}^i &= c_{13}^i \varepsilon_{rr}^i + c_{12}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + c_{11}^i \varepsilon_{zz}^i - e_{31}^i E_r^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2c_{55}^i \varepsilon_{rz}^i - e_{51}^i E_z^i; \\ D_r^i &= e_{33}^i \varepsilon_{rr}^i + e_{31}^i \varepsilon_{\theta\theta}^i + e_{31}^i \varepsilon_{zz}^i + \varepsilon_{33}^i E_r^i; \quad D_z^i = 2e_{51}^i \varepsilon_{rz}^i + \varepsilon_{33}^i E_z^i, \end{aligned} \quad (4)$$

где c_{ij}^i – компоненты тензора модулей упругости; e_{ij}^i – компоненты тензора пьезомодулей; ε_{ij}^i – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала.

Физические соотношения для i -го металлического слоя принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \\ \sigma_{zz}^i &= \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{rr}^i + \frac{\nu^i E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{\theta\theta}^i + \frac{(1-\nu^i)E^i}{(1+\nu^i)(1-2\nu^i)} \varepsilon_{zz}^i; \quad \sigma_{rz}^i = 2 \frac{E^i}{2(1+\nu^i)} \varepsilon_{rz}^i, \end{aligned} \quad (5)$$

где ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга (в дальнейшем индекс i будем опускать).

На боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаем следующие граничные условия:

$$\text{поверхности неэлектродированы: } D_r|_{r=R_0 \pm h} = 0;$$

$$\text{внешняя поверхность цилиндра свободна от внешних усилий: } \sigma_{rr}|_{r=R_0+h} = \sigma_{rz}|_{r=R_0+h} = 0;$$

$$\text{к внутренней поверхности приложено гармонически изменяющееся давление: } \sigma_{rr}|_{r=R_0-h} = P e^{i(kz-ot)}; \quad \sigma_{rz}|_{r=R_0-h} = 0.$$

Выше приняты такие обозначения: R_0 – радиус серединной поверхности цилиндра; h – половина толщины цилиндра.

Разрешающий вектор в форме смешанного типа имеет такой вид:

$$\mathbf{R} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \varphi, u_r, u_z, D_r\}^T \quad (6)$$

Решив систему (1) – (4) относительно основного вектора \mathbf{R} , после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\Delta_2}{\Delta} - 1 \right) \sigma_{rr} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_3}{r^2 \Delta} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_r - \frac{\Delta_4}{r \Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\Delta_1}{r \Delta} D_r; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} - \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\Delta_5}{r \Delta} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(\frac{\Delta_6}{\Delta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u_z - \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial D_r}{\partial z}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} + \frac{\Delta_1}{r \Delta} u_r + \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\Delta} D_r; \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\varepsilon_{33}}{\Delta} \sigma_{rr} - \frac{\Delta_2}{r \Delta} u_r - \frac{\Delta_2}{\Delta} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\Delta} D_r; \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \frac{1}{c_{55}} \sigma_{rz} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{51}}{r c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial D_r}{\partial r} = -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\Delta_7}{c_{55}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} D_r, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены обозначения:

$$\Delta = c_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2; \quad \Delta_1 = c_{33} e_{13} - c_{13} e_{33}; \quad \Delta_2 = c_{13} \varepsilon_{33} + e_{13} e_{33};$$

$$\Delta_3 = (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{11}) \Delta;$$

$$\Delta_4 = (c_{13} - c_{33}) \Delta_2 + (e_{33} - e_{13}) \Delta_1 + (c_{13} - c_{12}) \Delta;$$

$$\Delta_5 = c_{12} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; \quad \Delta_6 = c_{11} \Delta + e_{13} \Delta_1 - c_{13} \Delta_2; \quad \Delta_7 = c_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2.$$

2. Методика решения краевых осесимметричных задач.

Решение задачи ищем в виде волн бегущих в осевом направлении:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, t) &= \lambda \sigma_{rr}(r) e^{i(kz-ot)}; \quad \sigma_{rz}(r, z, t) = i \lambda \sigma_{rz}(r) e^{i(kz-ot)}; \\ \varphi(r, z, t) &= h \sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}} \varphi(r) e^{i(kz-ot)}; \quad u_r(r, z, t) = h u_r(r) e^{i(kz-ot)}; \\ u_z(r, z, t) &= h u_z(r) e^{i(kz-ot)}; \quad D_r(r, z, t) = \sqrt{\varepsilon_0 \lambda} D_r(r) e^{i(kz-ot)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя представление (8), исходную двумерную задачу теории электроупругости в частных производных (7) можно свести к краевой задаче в обыкновенных дифференциальных уравнениях [8].

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R}, \quad (9)$$

а граничные условия представим в виде

$$\mathbf{B}_1\mathbf{R}(-1) = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{B}_2\mathbf{R}(1) = \mathbf{C}_2, \quad (10)$$

где вектор $\mathbf{C}_1^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}$, вектор $\mathbf{C}_2^T = \{P, 0, 0, 0, 0, 0\}$.

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_0}{\lambda}}; \quad \tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\lambda}; \quad \tilde{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0 \lambda}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}; \quad x = \frac{r - R_0}{h};$$

ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума; $\lambda = 10^{10} \text{ Н / м}^2$; $\rho_0 = 1 \text{ кг / м}^3$.

Решение задачи (9), (10) было проведено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

3. Числовые результаты и их анализ.

Ниже приведены результаты численного анализа задачи (9), (10). Рассмотрен трехслойный цилиндр, два внешних слоя которого являются пьезокерамическими (из пьезокерамики PZT), а средний слой – стальной ($\nu = 0,28$, $E = 21$); параметр кривизны принят $\varepsilon = 0,25$. Толщина внешних слоев – h , толщина среднего слоя – $2h$.

На рис. 1 представлены фазовые скорости для первых пяти волн для случая однородного цилиндра из пьезокерамики PZT 4 с неэлектродрированными боковыми поверхностями.

На рисунках использованы обозначения для волн, принятые в работе [6]. Маркировка $SW(0)$ означает, что волны представляются ($k = 0$) как симметричные продольные колебания (колебания волны расширения-сжатия), а $AU(0)$ – антисимметричные (изгибные) радиальные колебания. Как следует из рис. 1, первые две ветки $SW(0)$ и $AU(0)$ в коротковолновом диапазоне выходят на одну скорость и распространяются практически без дисперсии. Дальнейший кинематический анализ этих ветвей показывает, что это – волны рэлеевского типа. Последующие ветви также выходят на волны, распространяющиеся без дисперсии, названные нами волнами Похгамера – Кри по аналогии с волнами Лэмба для пластин.

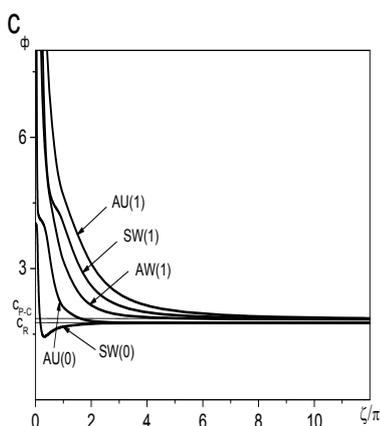


Рис. 1

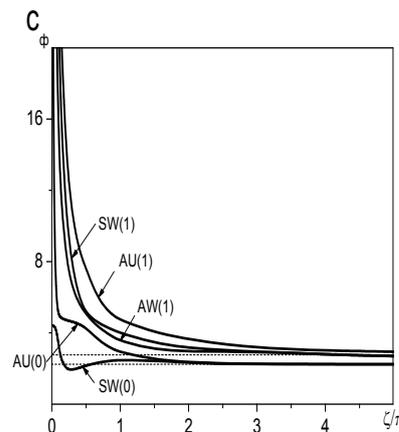


Рис. 2

На рис. 2 представлены фазовые скорости для первых пяти волн для случая слоистого цилиндра. Как видно из приведенного рисунка, первые две волны выходят на волну рэлеевского типа. Более высокие ветви в коротковолновой области попарно сближаются. На рисунке это можно наблюдать для ветвей $AW(1)$ и $SW(1)$.

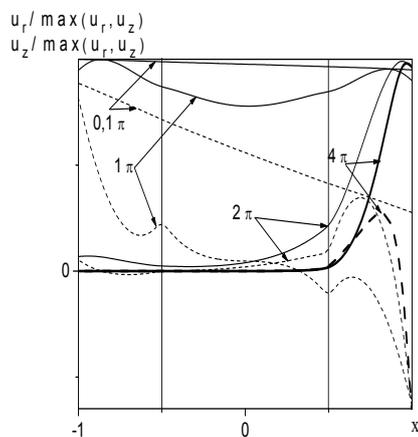


Рис. 3

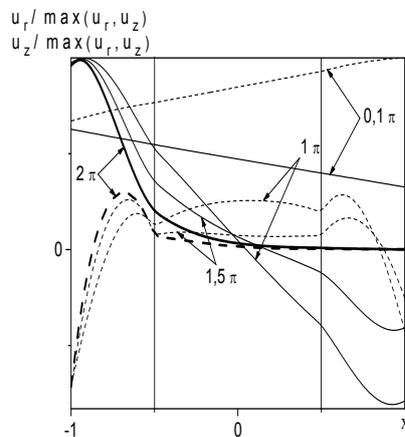


Рис. 4

Проанализируем, как изменяется распределение перемещений по толщине в зависимости от длины волны для случая слоистого цилиндра. На рис. 3 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине $-1,0 \leq h \leq 1,0$ в первой волне $SW(0)$ для различных значений длин волн. Сплошной линией обозначены амплитуды радиальных перемещений u_r , штриховой — продольных u_z . Жирными линиями выделено распределение амплитуд перемещений в коротковолновой области. В случае длинных волн распределение амплитуд перемещений происходит практически по линейному закону. С уменьшением длины, волны перемещения сосредоточены возле внешней боковой поверхности. Распределение перемещений в этом случае происходит по типу волн Рэлея.

На рис. 4 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине во второй волне $AU(0)$. Отметим, что для случая длинных волн распределение амплитуд перемещений по толщине имеет линейный характер. С уменьшением длины волны перемещения также сосредотачиваются на боковой поверхности цилиндра, но уже на внутренней поверхности. Распределение перемещений в этом случае также происходит по типу волн Рэлея.

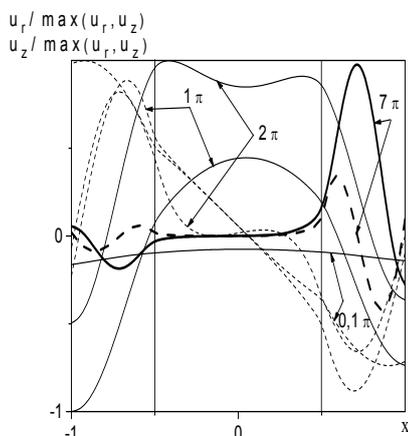


Рис. 5

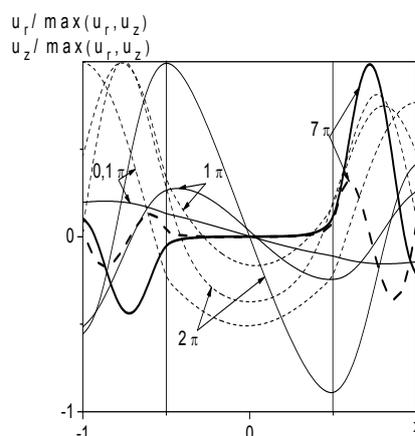


Рис. 6

На рис. 5 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в третьей волне $AW(1)$. В этом случае, даже для случая длинных волн, распределение амплитуд перемещений по толщине не имеет линейного характера. С уменьшением длины волны, перемещения сосредотачиваются в более мягких пьезокерамических слоях, в то время как стальной слой является практически не деформированным. Наибольшие перемещения наблюдаются во внешнем пьезокерамическом слое. На рис. 6 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в четвертой волне $SW(1)$. Как видно из приведенных рисунков, с уменьшением длины волны в обеих ветвях становятся близкими не только скорости распространения волн, но и характер распределения перемещений в них становится подобным.

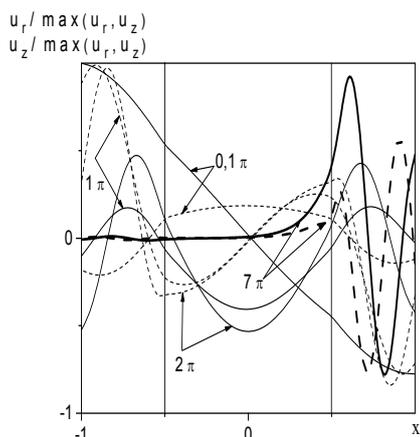


Рис. 7

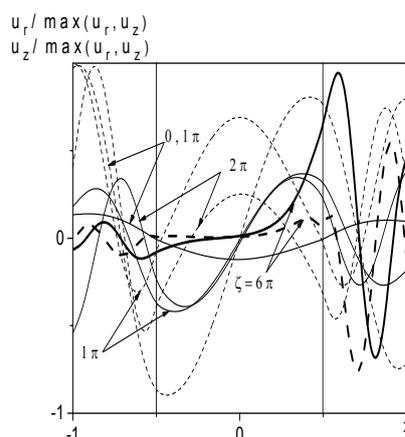


Рис. 8

Аналогичная картина наблюдается и для двух последующих ветвей. В коротковолновой области ветви сближаются, а характер распределения перемещений по толщине становится подобным. На рис. 7 представлено распределение амплитуд перемещений по толщине в пятой волне $AU(1)$, а на рис. 8 в шестой волне $AW(2)$. Перемещения концентрируются в более мягком слое, в то время как стальной слой остается практически недеформированным. Причем, несмотря на симметричность конструкции относительно срединной поверхности, перемещения концентрируются в слое с меньшей кривизной.

4. Заключение.

Так же, как и в случае однородного материала цилиндра, первая ветвь в коротковолновом диапазоне выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внешней поверхности цилиндра. Вторая ветвь выходит на поверхностную волну рэлеевского типа, распространяющуюся вдоль внутренней поверхности цилиндра. Для последующих же более высоких ветвей наблюдаются существенные отличия в характере распределения амплитуд перемещений. В случае однородного материала, с уменьшением длины волны, амплитуды перемещений распределяются либо симметрично, либо антисимметрично относительно срединной поверхности цилиндра. В случае же неоднородного материала, с уменьшением длины волны, наблюдается попарное сближение ветвей дисперсионного соотношения, а также попарное подобие в характере распределения перемещения по толщине. Перемещения сосредотачиваются в более мягком пьезокерамическом слое с меньшей кривизной, в то время как более жесткий стальной слой остается практически не деформированным.

РЕЗЮМЕ. Дано розв'язок задачі про поширення осесиметричних електропружних хвиль в порожнистому шаруватому циліндрі з металічних та п'єзокерамічних шарів, поляризованих у радіальному напрямі. Бічні поверхні циліндра вільні від електродів. Зовнішня поверхня вільна від механічних навантажень, а до внутрішньої – прикладено гармонічно змінний тиск $P e^{i(kz - \omega t)}$. Для розв'язання задачі запропоновано чисельно-аналітичний метод. Після представлення компонент тензора механічних напружень, векторів механічних переміщень, електричної індукції та електростатичного потенціалу у вигляді біжучих хвиль вихідну задачу електропружності у частинних похідних зведено до неоднорідної крайової задачі у звичайних диференціальних рівняннях. Отриману задачу розв'язано стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації. Представлено результати кінематичного аналізу шаруватого циліндру як з металевими, так і з шарами з п'єзокераміки PZT 4. Виконано аналіз числових результатів.

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
2. Кольский Г. Волны напряжений в твердых телах. – М.: ИЛ, 1955. – 192 с.
3. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга / Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
4. Физическая акустика. Том 1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А / Под редакцией У. Мэзона. Р. Терстона. – М.: Мир, 1966. – 592 с.
5. Шульга Н.А. Распространение гармонических волн в анизотропных пьезоэлектрических цилиндрах, волноводы с усложненными свойствами / В кн.: Успехи механики: В 6-ти томах. Т. 3. – К.: «АСК», 2007. – С. 651 – 680.
6. Шульга Н.А., Григоренко А.Я., Лоза И.А. Осесимметричные электроупругие волны в полом пьезокерамическом цилиндре // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 1. – С. 79 – 86.
7. Dökmeci M.C. A Dynamic Analysis of Piezoelectric Strained Elements. – New York: Research Development and Standardization Group. – 1992. – 283 p.
8. Grigorenko A. Ya., Loza I. A. Axisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 6, P. 707–713.
9. Grigorenko A. Ya., Loza I. A. Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Radially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 6, P. 641–640.
10. Grigorenko A. Ya., Loza I. A. Nonaxisymmetric Waves in Layered Hollow Cylinders with Axially Polarized Piezoceramic Layers // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, N 2, P. 150–158.
11. Guz A. N. Makhort F. G. The Physical Fundamentals of the Ultrasonic Nondestructive Stress Analysis of Solids // Int. Appl. Mech. – 2000. – 36, N 9. – P. 1119–1149.
12. Thurston R.N. Elastic waves in rods and clad rods // J. Acoust. Soc. Am. – 1978. – 64, N 1. – P. 1 – 37.
13. Wang J., Shi Z. Models for designing radially polarized multilayer piezoelectric/elastic composite cylindrical transducers // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 2016. – 27, N 4. – P. 500 – 511.

Поступила 04.07.2016.

Утверждена в печать 30.05.2017.