

Н. В. Никитина

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ОРБИТ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТРЕХМЕРНЫХ СИСТЕМ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail:center@inmech.kiev.ua*

Abstract. An analysis of the field of system in variations and its effect on the stability loss of an orbit are proposed.

Key words: nonlinear system, bifurcation, periodic orbit, strange attractor.

Введение.

Дан сравнительный анализ трехмерных динамических систем, которым свойственны аттракторы. Существование регулярных аттракторов можно установить с помощью обобщенных динамических принципов симметрии. Вопросы, связанные с существованием аттракторов, рассмотрены во многих работах [2 – 8, 10, 12 и др.]. Для трехмерных регулярных аттракторов это может быть кривая, которая обладает какой-либо симметрией. В этом случае привлекается обобщение известного для двумерных систем принципа симметрии для трехмерных систем [3, 9]. Трехмерные системы в силу гомоклинических траекторий образуют странные (хаотические) траектории. Хаотические траектории теряют устойчивость орбиты. Анализ механизмов потери устойчивости орбиты является целью настоящей работы.

1. Принцип симметрии.

Принципы симметрии (кососимметрии) для двумерных систем [3, 9] могут быть применены для анализа бифуркаций и установления замыкания траекторий в трехмерных системах. Критерии устойчивости орбиты (замыкания) в двумерных системах изложены в монографии [9]. Запишем двумерную систему в следующем виде:

$$dx_1 / dt = F_1(x), \quad dx_2 / dt = F_2(x), \quad (1)$$

где $x_1, x_2 \in R$ и $F_1 \in C(R^2, R)$, $F_2 \in C(R^2, R)$, и $F_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$).

Приведем геометрический принцип симметрии, с помощью которого можно установить условия замыкания фазовой траектории.

В системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_1(x)$ относительно x_1 и нечетности функции $F_2(x)$ относительно x_1 , т. е.

$$F_1(-x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2); \quad F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2). \quad (2)$$

Это утверждение основано на том, что на плоскости Ox_1x_2 ось Ox_2 является осью симметрии и произвольная интегральная кривая слева от оси x_2 является зеркальным отображением кривой справа.

На основе принципа симметрии можно заключить, что *в системе (1) существует замкнутая траектория, если выполняются условия четности функции $F_2(x)$ относительно x_2 и нечетности $F_1(x)$ относительно x_2 , т.е.*

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(x_1, x_2); F_2(x_1, -x_2) = F_2(x_1, x_2). \quad (3)$$

Здесь (согласно (3)) ось Ox_1 является осью симметрии.

Принцип кососимметрии для нелинейных систем с неустойчивым фокусом в нуле был применен в работе [3]. В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции правой части системы (1) связаны следующими условиями:

$$F_1(x_1, -x_2) = -F_1(-x_1, x_2); F_2(x_1, -x_2) = -F_2(-x_1, x_2). \quad (4)$$

Кососимметрия связана с двумя осями координат, т.е., если ось Ox_1 является осью кососимметрии, то ось Ox_2 также является осью кососимметрии.

В нелинейной системе (1) существует замкнутая траектория, если функции правой части системы (1) связаны следующими условиями:

$$F_1(-x_1, x_2) = -F_1(x_1, -x_2); F_2(-x_1, x_2) = -F_2(x_1, -x_2). \quad (5)$$

Принцип кососимметрии применим для нелинейной двумерной системы. Например, для осциллятора Ван дер Поля: $F_1 = x_2, F_2 = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2$.

Рассмотрим построение критерия симметрии траектории в трехмерных системах. Введем следующие предположения.

Предположение 1. Трехмерную нелинейную систему

$$dx/dt = f_x(x, y); dy/dt = f_y(x, y, z); dz/dt = f_z(y) \quad (6)$$

можно представить в виде трех двумерных подсистем

$$\begin{aligned} dx/dt &= f_1(x, y); dy/dt = f_2(x, y); \\ dx/dt &= f_3(x); dz/dt = 0; \\ dy/dt &= f_5(y, z); dz/dt = f_6(y). \end{aligned} \quad (7)$$

Предположение 2. Особая точка трехмерной системы (6) $O(0,0,0)$ – седлофокус.

Принцип симметрии 1.

Пусть справедливы предположения 1, 2. Если на каждой двумерной координатной плоскости систем (7) правые части удовлетворяют условиям (4) (либо (5)), и на каждой плоскости имеют место устойчивые особые точки, то траектория замыкается и образует кососимметрию на координатных плоскостях.

Представление системы (6) в виде (7) позволяет разделить трехмерную систему на три двумерных и предложить исследование каждой на предмет замыкания на двумерной координатной плоскости в силу кососимметрии.

Пример 1. Динамика цепи Чуа исследована во многих работах [3, 4]. Рассмотрим систему трёх дифференциальных нелинейных безразмерных уравнений Чуа

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \frac{dy}{dt} = x - y + z; \frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (8)$$

Представим систему (8) в виде (7):

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3 + y); \frac{dy}{dt} = x - y; \quad (9)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(ax - bx^3); \frac{dz}{dt} = 0; \quad (10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y + z; \frac{dz}{dt} = -\beta y. \quad (11)$$

В системе (9) три особые точки: $O_1(0,0)$, $E(\sqrt{(a+1)/b}, \sqrt{(a+1)/b})$, $F(-\sqrt{(a+1)/b}, -\sqrt{(a+1)/b})$. Характеристические показатели (ХП) особой точки O_1 вычисляются согласно следующему выражению:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 + \alpha a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 + \alpha a}{2}\right)^2 + \alpha(a+1)}.$$

ХП точек E, F имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{(-1 - 2a\alpha - 3\alpha)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{(-1 - 2a\alpha - 3\alpha)}{2}\right)^2 - 2\alpha(a+1)}.$$

Введем следующие значения параметров: $(a, b, \alpha, \beta) = (1/6, 1/6, 6, 7)$. Особые точки E, F – устойчивые фокусы; точка O_1 – седло.

Система (9) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)). В системе (10) Особая точка $O_2(0,0)$ имеет ХП $\lambda_1 = \alpha a$, $\lambda_2 = 0$. Особые точки G, H ($x = \pm\sqrt{a/b}, z = 0$) имеют ХП $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$. Система (10) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)). Система (11) является линейным диссипативным осциллятором $\ddot{z} + \dot{z} + \beta z = 0$. Круговая траектория системы (11) стремится к нулю, имея тенденцию к кососимметрии. Особая точка $O_3(0,0)$ системы (11) – устойчивый фокус. Тогда на каждой двумерной плоскости системы (8) имеем устойчивые особые точки и выполнение условия (4), либо (5). Система (8) имеет замкнутую траекторию с кососимметрией на каждой координатной плоскости.

На рис. 1 а – в приведены кососимметричные координатные портреты системы (8) (значения параметров $(a, b, \alpha, \beta) = (1/6; 1/6; 6; 4; 9)$). Приведем принцип симметрии для трехмерной системы, в которой на двух координатных плоскостях траектория симметрична, на третьей – кососимметрична.

Предположение 3. Особая точка трехмерной системы $O(0,0,0)$ – седлоузел.

Принцип симметрии 2.

Пусть справедливо предположение 3. Принцип симметрии можно сформулировать так: если на двух координатных плоскостях системы вида (6)

$$dx/dt = f_x(x, y); \quad dy/dt = f_y(x, y, z);$$

$$dz/dt = f_z(x, y, z),$$

правые части удовлетворяют условиям вида (2), на третьей плоскости правые части удовлетворяют условиям (4) (либо (5)) и на двух первых координатной плоскости имеют место устойчивые особые точки, то траектория может иметь кососимметрию и симметрию на соответствующих координатных плоскостях.

Пример 2. Рассмотрим систему Лоренца.

$$\frac{dx}{dt} = s(-x + y); \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz; \quad \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \quad (12)$$

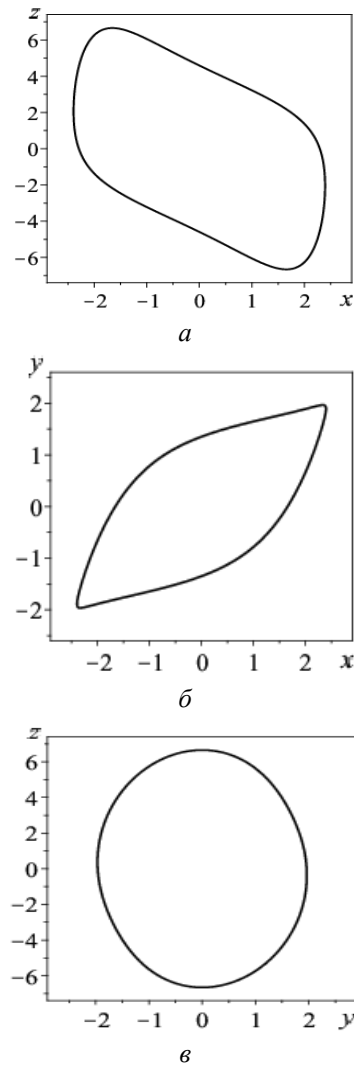


Рис. 1

Представим систему (12) в виде трех двумерных уравнений (к виду (7) система (12) не приводима)

$$\frac{dx}{dt} = s(-x + y); \quad \frac{dy}{dt} = rx - y; \quad (13)$$

$$\frac{dx}{dt} = -sx; \quad \frac{dz}{dt} = -bz; \quad (14)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y; \quad \frac{dz}{dt} = -bz. \quad (15)$$

Система (13) удовлетворяет условиям (4) (либо (5)). Обозначим правые части в системе (14): $F_x = -sx$, $F_z = -bz$. В системе (14) выполняются условия четности функции F_x относительно z и нечетности функции F_z относительно z , т. е. $F_x(x, -z) = F_x(x, z)$; $F_z(y, -z) = -F_z(x, z)$. В системе (14) ось Oz на плоскости Oxz является осью симметрии (см. (2)).

Обозначим правые части в системе (15): $F_y = -y$, $F_z = -bz$. В системе (15) выполняются условия четности функции F_y z и нечетности функции F_z относительно z , т. е.

$$F_y(y, -z) = F_y(y, z); \quad F_z(y, -z) = -F_z(y, z).$$

В системе (15) ось Oz на плоскости Oyz является осью симметрии (см. (2)). На плоскостях xz , yz имеют место устойчивые особые точки (согласно систем (14) – (15)). В системе (13) выполняются условия (4) (либо (5)). В системах (14), (15) выполняются условия вида (2) и в этих системах ось Oz является осью симметрии. Траектория системы (12) может не замыкаться при одних значениях параметров и замыкаться при других значениях. Особая точка в нуле системы (13) – седло. Здесь параметр r имеет большую величину. Известно, что при $r \gg 1$ траектория описывает петли и они образуют замкнутую кривую.

Согласно Принципа симметрии 2 траектория имеет определенную симметрию на координатных плоскостях. Введем малые отклонения δx , δy , δz в системы (12) от частных решений \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} и составим уравнения в вариациях

$$\delta \dot{x} = -s\delta x + s\delta y; \quad \delta \dot{y} = (r - \bar{z})\delta x - \delta y - \bar{x}\delta z; \quad \delta \dot{z} = -b\delta z + \bar{y}\delta x + \bar{x}\delta y.$$

Система (12) имеет такие особые точки:

$$O(0, 0, 0); \quad A(\sqrt{b(r-1)}; \sqrt{b(r-1)}; r-1); \quad B(-\sqrt{b(r-1)}; -\sqrt{b(r-1)}; r-1).$$

Из характеристического уравнения системы в вариациях

$$\lambda^3 + \lambda^2(b + s + 1) + \lambda(s(1 - r + \bar{z}) + b(s + 1) + \bar{x}^2) + s(b(1 - r + \bar{z}) + \bar{x}(\bar{x} + \bar{y})) = 0$$

можно определить характеристические показатели точек в поле трехмерного пространства системы (12). В точке O уравнение примет вид

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + \lambda(1 + s) + s(1 - r)) = 0,$$

из которого определим

$$\lambda_{1,2} = -(s + 1)/2 \pm \sqrt{((s + 1)/2)^2 + s(r - 1)}; \quad \lambda_3 = -b.$$

В системы (13) – (15) не включены слагаемые xz , xy , которые влияют на качество особой точки трехмерной системы и на образование петель. Поэтому в формулировке Принципа симметрии 2 предполагается поиск значений параметров.

Заметим, что система Лоренца имеет несколько аттракторов. При значениях $(b, r, s) = (8/3; 154, 5; 10)$ в системе (12) на плоскости xu образуется *кососимметричная седлофокусная петля*. На рис. 2, а, б, в приведены портреты на координатных плоскостях системы (12). Применяя уравнение в вариациях и численное решение сис-

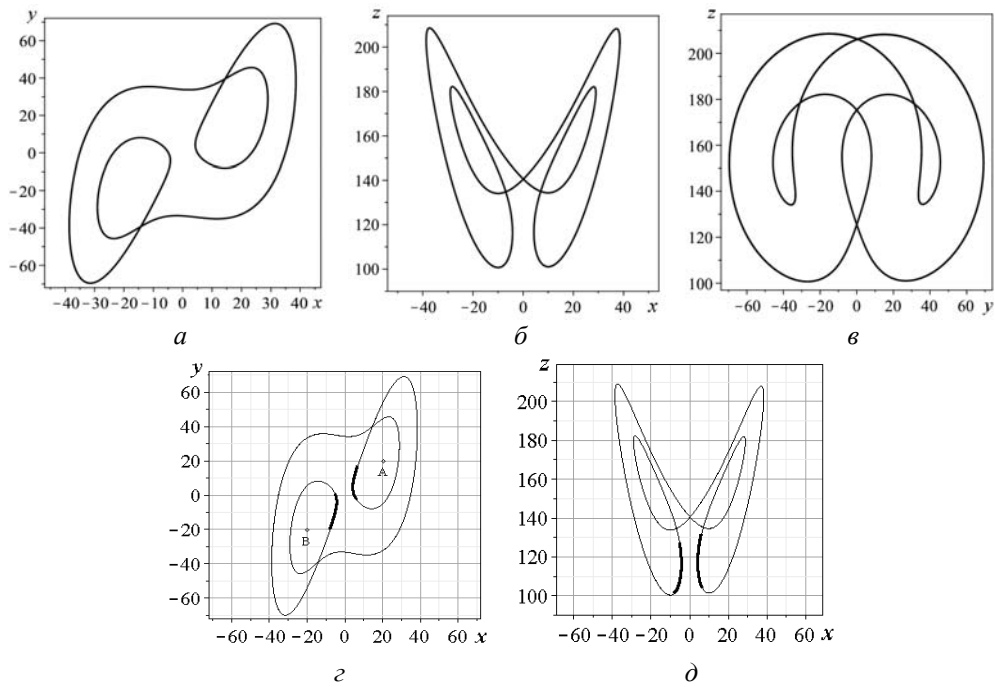


Рис. 2

темы (12), устанавливаем седлоузловой характер точек в окрестности нуля (согласно теореме Гробмана – Хартмана). На рис. 2, г, д они обозначены жирными линиями. Остальные точки траектории имеют седлофокусный характер.

Принцип симметрии 1 построен на основе главного физического аргумента доказательства: если трехмерная траектория имеет замыкание на каждой координатной плоскости в силу определенной симметрии, то она замыкается в трехмерном пространстве.

2. Теоремы о существовании аттракторов.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, p); \quad x(t) \in R^3; \quad p \in R^m, \quad (16)$$

где $F(x, p)$ – гладкая функция; R^m – пространство параметров. Введем малые отклонения δx_i ($i = 1, 2, 3$) в окрестности частных решений $\bar{x}_i(t)$ уравнений (16) $\delta x_i = x_i(t) - \bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$). Примем δx_i в качестве новых координат. Для линейной системы, $d\delta x/dt = A(\bar{x})\delta x$, $\delta x \in R^3$, где $A(\bar{x}) = \partial F / \partial x|_{x=\bar{x}}$, соответствующей системе (16), которая называется *системой уравнений в вариациях* [11], составим характеристическое уравнение $f(\lambda, \bar{x}) = 0$ матрицы $A(\bar{x})$. С помощью характеристического уравнения системы в вариациях можно определить ХП любой точки трехмерного пространства системы (16), включая особые точки.

Предположение 4. Система (16) имеет три особые точки: седлофокус с седловой величиной $O(0,0,0)$; $\sigma_O = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 \geq 0$; $\lambda_3 > 0$; седлофокусные $A(\sqrt{a/b}, 0, -\sqrt{a/b})$, $B(-\sqrt{a/b}, 0, \sqrt{a/b})$; $\sigma_{A,B} = 2\text{Re}\lambda_{1,2} + \lambda_3 < 0$; $\text{Re}\lambda_{1,2} > 0$; $\lambda_3 < 0$ (здесь a, b – положительные параметры). Система (16) имеет управляющие параметры (α, β) , которыми можно регулировать топологическую характеристику особых точек.

Предположение 5. Трехмерную систему (16) можно представить в виде (7) и для этой системы имеет место замыкание траектории согласно Принципу симметрии 1.

Теорема 1. Пусть для дифференциальной системы (16) справедливы Предположения 4, 5. Тогда в окрестности особых трёх точек O, A, B существует замкнутая интегральная кривая, которая имеет кососимметричные проекции на трех координатных плоскостях.

Доказательство. Для возникновения предельного цикла круговая траектория должна уйти из нуля. Это происходит при наличии седлофокусных особых точек (Предположение 4). Согласно Предположения 5 траектория трехмерной системы замыкается. Попадание траектории (решения) на аттрактор происходит при определенных начальных условиях, которые исключают замыкание траектории относительно точки A либо B . Теорема 1 доказана.

Предположение 6. Пусть система (16) на координатных плоскостях системы координат в точках A, B порождает следующие системы двумерных уравнений. На первой плоскости система двух нелинейных уравнений образует (согласно системе в вариациях) комплексно-сопряженные корни, действительная часть которых зависит от одной переменной двумерной плоскости и имеет вид $Re\lambda_{1,2} \leq 0$; на второй плоскости имеет место линейный диссипативный осциллятор. Корни системы в вариациях также имеют отрицательный знак действительной части. Третья плоскость не содержит связанных между собой дифференциальных уравнений.

Предположение 7. Пусть характеристическое уравнение $f(\lambda, \bar{x}) = 0$ системы в вариациях $d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$ зависит лишь от одной переменной. Если выполняются условие

$$f(\lambda, \bar{x}_1) = f(\lambda, -\bar{x}_1), \quad (17)$$

то поле системы $d\delta x / dt = A(\bar{x})\delta x$ обладает симметрией.

Особые точки A и B могут порождать два регулярных аттрактора, два хаотичных аттрактора относительно точек A и B . В системе (16) имеют место хаотические траектории с переходом из области, связанной с одной особой точкой (A), в область, связанную с другой особой точкой (B).

Теорема 2. Пусть для дифференциальной системы (16) справедливы Предположения 4, 6, 7. Тогда в окрестности каждой из двух особых точек A, B существует интегральная кривая, которая образует регулярный либо хаотический аттрактор (в зависимости от значений параметров). Существуют значения параметров, которые позволяют траектории бесконечно переходить относительно одной особой точки (A) ко второй особой точки (B), сохраняя гладкость решения при переходе и хаотическое вращение относительно особых точек.

Доказательство. Образование аттракторов в окрестности точек A, B связано с начальными условиями, которые исключают замыкание траектории относительно трех особых точек OAB . Предположение 6 гарантирует возникновение аттракторов. В окрестности точки O седлофокусные точки на траектории относительно точек A, B замедляют движение траектории (см. Предположение 4). Здесь период колебаний выступает в качестве элемента самоорганизации колебательного процесса. Происходит кратное увеличение периода. Появление хаоса через кратное увеличение периода указывает на один из механизмов возникновения хаотических колебаний. Этот механизм обусловлен нерегулярностью бифуркаций на круговой траектории. Если параметры системы вызывают переход из области одной особой точки в область другой точки, то этот переход гладкий в силу равенства (17). Появление хаоса связано вначале с переходом к хаотическим колебаниям относительно одной особой точки. В дальнейшем хаос сохраняется, но изображающая точка гладко переходит из области в область. Теорема доказана.

Перерождение регулярных аттракторов в хаотические происходит при попадании траектории в область седлофокусных точек с сильным замедлением движения изображающей точки. Неравномерность вызывает саморегулирование движения в виде увеличения периода, которое порождает хаос. Таким образом, имеет место три случая движений.

1. Регулярные колебания относительно точек A, B (включая кратное увеличение периода).

2. Хаотические колебания относительно точек A, B . Эти колебания могут быть причислены к колебаниям с неустойчивой орбитой.

3. Хаотические движения с переходом из области, связанной с одной особой точкой (A) в область, связанную с другой особой точкой (B). Здесь явно прослеживается потеря устойчивости орбиты.

3. Аттракторы генератора Чуа.

Динамика цепи Чуа нашла отображение во многих работах [1, 4, 11, 12]. Рассмотрим систему трёх дифференциальных нелинейных безразмерных уравнений Чуа (8). Параметры α, β – положительные управляющие параметры; a, b принимают такие значения: $a = 1/6, b = 1/6$. Система (8) имеет три положения равновесия. Особые точки $O(0,0,0)$, $A(x_A = \sqrt{a/b}, y_A = 0, z_A = -\sqrt{a/b})$, $B(x_B = -\sqrt{a/b}, y_B = 0, z_B = \sqrt{a/b})$. Система в вариациях и характеристическое уравнение системы в вариациях имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= \alpha(a\delta x - 3b\bar{x}^2\delta x + \delta y); & \frac{d\delta y}{dt} &= \delta x - \delta y + \delta z; & \frac{d\delta z}{dt} &= -\beta\delta y; \\ \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(-a + 3b\bar{x}^2)) + \lambda(\beta - \alpha(1 + a - 3b\bar{x}^2)) + \alpha\beta(-a + 3b\bar{x}^2) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Характеристическое уравнение (18) удовлетворяет условию (17). Знак при x не влияет на корни характеристического уравнения (18). Траектория замыкается в силу Теоремы 1, если исключено влияние особых точек A, B в системе (8).

Векторное поле на плоскости xz имеет ось симметрии, которая проходит по оси Oz . Так как x входит в характеристическое уравнение в виде квадратного слагаемого, ось Oz – лишь геометрическая граница областей влияния особых точек A, B . При переходе через ось Oz траектория не претерпевает разрыва. Появление хаотического колебательного движения (при определенных значениях параметров) относительно точек A, B связано с изменением скорости перемещения изображающей точки в окрестности нуля и несимметричными замкнутыми кривыми относительно точек A, B .

Введем в точке A систему координат $Auvw$ и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(-2av - bv^2(3\sqrt{a/b} + v) + y); \quad \frac{dy}{dt} = v - y + w; \quad \frac{dw}{dt} = -\beta y, \quad (19)$$

где $v = x - \sqrt{a/b}, w = z + \sqrt{a/b}$.

Введем в точке B систему координат $Bsui$ и составим уравнения движения в новых координатах

$$\frac{ds}{dt} = \alpha(-2as - bs^2(-3\sqrt{a/b} + s) + y); \quad \frac{dy}{dt} = s - y + u; \quad \frac{du}{dt} = -\beta y, \quad (20)$$

где $s = x + \sqrt{a/b}, u = z - \sqrt{a/b}$.

Точки A, B могут организовать замкнутые кривые, исключая точку O . Введем малые отклонения $\delta v, \delta y, \delta w$ от частных решений $\bar{v}, \bar{y}, \bar{w}$, системы (19) и запишем уравнения, в вариациях

$$\frac{d\delta v}{dt} = \alpha(-2a\delta v - 6b\sqrt{a/b}\bar{v}\delta v - 3b\bar{v}^2\delta v + \delta y); \quad \frac{d\delta y}{dt} = \delta v - \delta y + \delta w; \quad \frac{d\delta w}{dt} = -\beta\delta y.$$

Аналогично запишем уравнения в вариациях системы (20) и характеристические уравнения систем в вариациях

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2)) + \lambda(\alpha(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2 - 1) + \beta) + \\
& \quad + \alpha\beta(2a + 6b\sqrt{a/b\bar{v}} + 3b\bar{v}^2) = 0; \\
& \lambda^3 + \lambda^2(1 + \alpha(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2)) + \lambda(\alpha(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2 - 1) + \beta) + \\
& \quad + \alpha\beta(2a - 6b\sqrt{a/b\bar{s}} + 3b\bar{s}^2) = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Особые точки A, B имеют ХП, определяемые характеристическим уравнением (на основе уравнений (21))

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + 2a\alpha) + \lambda(\alpha(2a - 1) + \beta) + 2a\alpha\beta = 0.$$

Отметим, что уравнениям (19), (20) на одной плоскости (плоскость uw в системе (19), плоскость ui в системе (20)) соответствует круговая траектория уравнения $\ddot{y} + \dot{y} + \beta y = 0$. При начальных условиях

$$\begin{aligned}
|v(0)| < \sqrt{a/b}; |y(0)| \geq 0; |w_o(0)| < \sqrt{a/b}; \\
s(0) < \sqrt{a/b}; |y(0)| \geq 0; |u_o(0)| < \sqrt{a/b}
\end{aligned} \tag{22}$$

в системе доминирует движение под влиянием особой точки A либо B (рис. 3, а, б, в). Введем начальные возмущения

$$|x(0)| > |x_A|; |y(0)| \geq 0; |z(0)| > |z_A|, \tag{23}$$

при которых образуется замкнутая траектория относительно трех точек O, A, B . Рассмотрим кривую, которая замыкается относительно точек O, A, B (согласно Принципа симметрии 1 (рис. 3, а) при начальных условиях (23)) $((\alpha, \beta) = (6, 2; 8, 8))$. Теорема 1 устанавливает существование устойчивого периодического процесса.

Введем начальные возмущения вида (22), которые включают влияние особых точек A, B (значения управляющих параметров: $(\alpha = 6; \alpha = 6, 1; \beta = 9)$). Траектория замыкается относительно точек A либо B (рис. 3, а, б). Кратное увеличение периода и хаос (рис. 3, б, в) обусловлены попаданием траектории в окрестность точки O . Период колебаний выступает как элемент самоорганизации процесса. При попадании траектории предельного цикла в малую окрестность особой точки O появляются седлофокусные точки, в которых $Re\lambda_{1,2}^o < 0; \lambda_3^o > 0; \sigma \geq 0$. Изображающая точка замедляет скорость движения и делает кратное количество оборотов, которые перерастают в хаос. Витки траектории при хаосе не повторяются. Переход из окрестности области $A(B)$ в окрестность области $B(A)$ происходит гладко в силу условия (17). Поле, порожденное системой в вариациях, не имеет разрыва на плоскостях xz, vw . Тогда переход траектории из области в область (особых точек A, B) происходит гладко. Причиной появления хаотичных траекторий без перехода из области в область относительно двух особых точек является *нерегулярность бифуркаций*. Вначале хаос образуется без перехода из области в область (рис. 3, в $(\alpha, \beta) = (6, 25; 9)$). Дальнейшее изменение параметров приводит к гладкому переходу из области в область, сохраняя при этом нерегулярность бифуркаций при периодическом движении. На рис. 3, г, д $(\alpha, \beta) = (6, 4; 9)$ приведен хаос с переходом из области в область.

Приведенный выше анализ перерождения регулярных аттракторов в хаотические показывает, что причина нерегулярности бифуркаций на круговой кривой состоит во влиянии седловых решений, которые вызывают замедление движения изображающей точки в окрестности точки O .

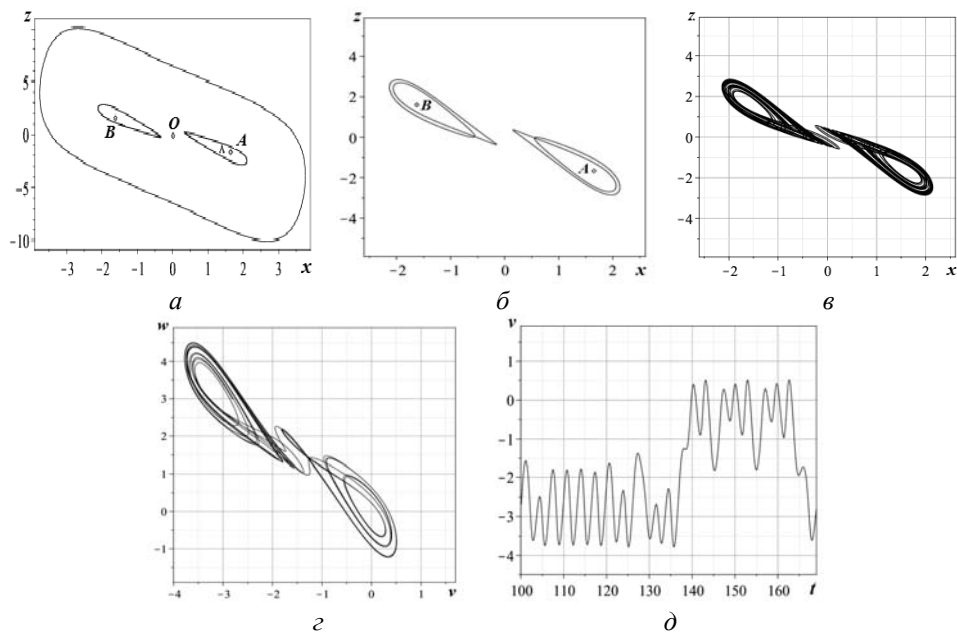


Рис. 3

В работе [2] рассмотрен хаотический аттрактор Лоренца. В точке перехода из окрестности особой точки A в окрестность точки B выявлен разрыв решения. Топология пространства, порожденного системой в вариациях Лоренца, сильно отличается от одномерного пространства системы в вариациях генератора Чуа. Уравнения в вариациях в системе Лоренца зависят от трех частных решений.

4. Об аттракторах системы Лоренца.

Рассмотрим систему (12). Составим систему уравнений в вариациях. С помощью анализа характеристического уравнения матрицы $A(\bar{x})$ можно изучить механизм образования сложных периодических движений и потерю устойчивости орбиты. Запишем матрицу $A(\bar{x})$ системы уравнений в вариациях в виде суммы двух матриц

$$A(\bar{x}) = L + M(\bar{x}), \quad (24)$$

где матрица L представляет спектр линейной системы, который не содержит частных решений. Матрица $M(\bar{x})$ соответствует той части спектра уравнений в вариациях, которая содержит решения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$.

Для системы (16) приведем такие предположения.

Предположение 8. Система (16) имеет три особые точки. Особая точка $O(0, 0, 0)$ – седлоузел с отрицательной седлоузловой величиной.

Для матрицы $M(\bar{x})$, которая входит в матрицу $A(\bar{x})$, сделаем такое предположение.

Предположение 9. Характеристическое уравнение матрицы $M(\bar{x})$ имеет собственные значения: одно нулевое и два мнимых. Сумма собственных значений равна нулю: $\bar{\lambda}_1(\bar{x}) + \bar{\lambda}_2(\bar{x}) + \bar{\lambda}_3(\bar{x}) = 0$.

Теорема 3. Пусть для дифференциальной системы (16) выполняются условия Предположений 8, 9. Тогда в окрестности особой точки $O(0, 0, 0)$ существует поле седлоузловых точек, которые переходят в седлофокусные. Седловая величина будет одинаковой для всех точек трехмерного пространства, включая все особые точки.

Доказательство. Матрица $A(\bar{x})$ при выполнении Предположения 9 имеет собственные значения согласно формулы $|A(\bar{x}) - \lambda E| = |L - \lambda E|$, где E – единичная матрица. Бифуркационный процесс в поле трехмерной системы (16) происходит в соот-

ветствии с теоремой Гробмана – Хартмана (рис. 2, з, д). Окрестность, заполненная седлоузловыми точками, переходит в седлофокусный континуум. Седлофокусная полупетля имеет седловую величину $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ во всех точках траектории. Эта величина определяется корнями линейной системы, тогда $\sigma = \sigma_O = \sigma_A = \sigma_B$, где σ_A, σ_B – седловые величины точек A, B . Теорема доказана.

Приложение к теореме 3. Рассмотрим систему Лоренца (12)

$$dx/dt = s(-x + y); \quad dy/dt = rx - y - xz; \quad dz/dt = -bz + xy,$$

где b, r, s – положительные значения параметров ($r > 1$).

Особая точка O – седлоузел с седловой величиной $\sigma = -(s+1)/2 - b$. Запишем матричное равенство (12)

$$\begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r - \bar{z} & -1 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\bar{z} & 0 & -\bar{x} \\ \bar{y} & \bar{x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

В равенстве (25) первая справа – матрица линейной системы. Вторая матрица в правой части равенства (25) – $M(\bar{x})$. Эта матрица соответствует той части уравнений (12), которая содержит частные решения $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ и соответствует корням характеристической матрицы:

$$\bar{\lambda}_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}^2}; \quad \bar{\lambda}_3 = 0.$$

Альтернатива регулярного аттрактора есть странный аттрактор, который возникает при орбитальной потере устойчивости. Рассмотрим систему (12) при следующих значениях параметров: $(b, r, s) = (8/3; 28; 10)$. Особая точка O – седлоузел. Известно, что приведенные значения параметров порождают хаотическую траекторию [8].

Свяжем с особыми точками A, B системы координат и запишем уравнения (12) в новых координатах $Au_1u_2u_3, Bv_1v_2v_3$, где

$$u_1 = x - \sqrt{b(r-1)}; \quad u_2 = y - u_2 - \sqrt{b(r-1)}; \quad u_3 = z - r + 1;$$

$$v_1 = x + \sqrt{b(r-1)}; \quad v_2 = y + u_2 - \sqrt{b(r-1)}; \quad v_3 = z - r + 1;$$

$$du_1/dt = -su_1 + su_2; \quad du_2/dt = u_1 - u_2 - \sqrt{b(r-1)}u_3 - u_1u_3;$$

$$du_3/dt = \sqrt{b(r-1)}u_1 + \sqrt{b(r-1)}u_2 - bu_3 + u_1u_2;$$

$$dv_1/dt = -sv_1 + sv_2; \quad dv_2/dt = v_1 - v_2 + \sqrt{b(r-1)}v_3 - v_1v_3;$$

$$dv_3/dt = -\sqrt{b(r-1)}v_1 - \sqrt{b(r-1)}v_2 - bv_3 + v_1v_2.$$

Составим системы в вариациях:

$$\delta \dot{u}_1 = -s\delta u_1 + s\delta u_2; \quad \delta \dot{u}_2 = (1 - \bar{u}_3)\delta u_1 - \delta u_2 - (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_1)\delta u_3;$$

$$\delta \dot{u}_3 = (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_2)\delta u_1 + (\sqrt{b(r-1)} + \bar{u}_1)\delta u_2 - b\delta u_3;$$

$$\delta \dot{v}_1 = -s\delta v_1 + s\delta v_2; \quad \delta \dot{v}_2 = (1 - \bar{v}_3)\delta v_1 - \delta v_2 - (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_1)\delta v_3;$$

$$\delta \dot{v}_3 = (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_2)\delta v_1 + (-\sqrt{b(r-1)} + \bar{v}_1)\delta v_2 - b\delta v_3$$

и запишем соответствующие характеристические уравнения системы в вариациях

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2(b+s+1) + \lambda((\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})^2 + s + b(s+1) + s(\bar{u}_3 - 1)) + \\ & + sb + s(\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})^2 + bs(\bar{u}_3 - 1) - s(\bar{u}_1 + \sqrt{b(r-1)})(-\bar{u}_2 - \sqrt{b(r-1)}) = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + \lambda^2(b+s+1) + \lambda((\bar{v}_1 - \sqrt{b(r-1)})^2 + s + b(s+1) + s(\bar{v}_3 - 1)) + \\ & + sb + s(\bar{v}_1 - \sqrt{b(r-1)})^2 + bs(\bar{v}_3 - 1) - s(\bar{v}_1 + \sqrt{b(r-1)})(-\bar{v}_2 - \sqrt{b(r-1)}) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Граница, разделяющая плоскость xu на области влияния особых точек A, B , проходит по линии, которая перпендикулярна линии AB (штриховая линия, рис. 4). Рассмотрим фрагмент вращения траектории относительно особой точки A и переход через границу в область вращения относительно особой точки B . Если точка C принадлежит вращению относительно особой точки A , то характеристические показатели определяются из характеристического уравнения (26) (точка C седлоузловая $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$). Если точка C принадлежит вращению относительно особой точки B , то характеристические показатели определяются из характеристического уравнения (27) (точка C седлофокусная $\text{Re} \lambda_{1,2} > 0, \lambda_3 < 0$). Седловая величина имеет одинаковую величину и знак.

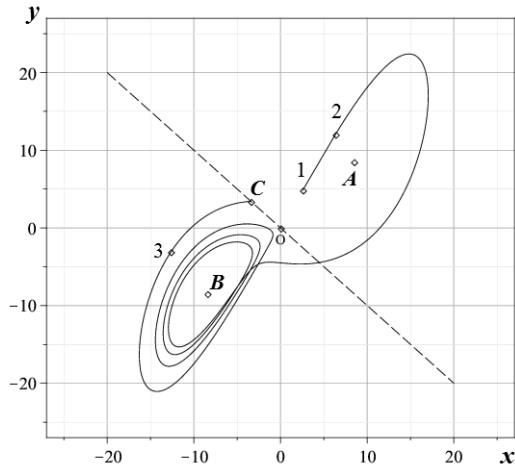


Рис. 4

Например, характер точек 1–2 – седлоузловый, точек 3– C – седлофокусный. Во всех случаях имеет место седловая величина $\sigma_j = -13,6667$. При переходе из области вращения относительно точки B в область вращения относительно точки A нарушается гладкость функции в точке C и возникает неустойчивость орбиты.

Образование хаотических траекторий при переходе из области в область связано с нарушением гладкости в точке перехода (система Лоренца). Области связаны между собой таким образом, что траектория не образует петлю относительно особой точки. Переход траектории из области в область нарушает гладкость кривой. Процесс более динамичный, нет промежуточного процесса так, как в системе Чуа. При некоторых значениях параметров образуются петли относительно трех точек системы Лоренца (наличие петель обсуждалось в [11]). К ним можно применить Принцип симметрии 2 при доказательстве существования регулярного аттрактора (рис. 2, a, b, v, z, d). Петли на рис. 2, a – кососимметричны. Эта особенность (кососимметрия) при других значениях параметров не позволяет образовывать петли.

Заключение.

Поле генератора Чуа, которое порождено системой в вариациях, зависит от одной переменной. Переход траектории с одной области в другую является гладким. Поле системы Лоренца (согласно системы в вариациях) зависит от трех переменных. В этом случае нарушается гладкость траектории при переходе из области в область. Генератор Чуа имеет регулярный аттрактор согласно Теореме 1. Указывается на кососимметричный характер проекций. Хаотизация периодической орбиты аттрактора Чуа возникает вследствие неповторяемых бифуркаций в точках круговой траектории. Здесь *нерегулярность бифуркаций* устанавливается при замедлении движения траектории в определенной области координатного пространства. Замедление вызвано избытком седлового решения. Пример такой потери устойчивости орбиты – задача Чуа (рис. 3, v, z, d).

Работа в целом посвящена классификации физических объектов, которые порождают аттракторы [2, 6, 7, 10]. Приведено обобщение принципов симметрии для трехмерных систем. Доказаны три теоремы, связанные с существованием предельных циклов в трехмерных системах. Перерождение регулярных аттракторов в хаотические происходит в двух случаях по различному сценарию. Это различие объясняется с помощью рассмотрения элементов топологии.

Рассмотрены *два случая* потери устойчивости орбиты. В *первом случае* система уравнений в вариациях образует поле, которое зависит от одного частного решения системы уравнений (динамической системы). В этом случае хаотический переход вращений относительно двух особых точек происходит без разрыва траекторий. Хаос перехода проявляется через кратное увеличение периода в виде хаотического вращения относительно каждой особой точки. Во *втором случае* поле системы уравнений в вариациях зависит от трех частных решений системы уравнений. Заметим, что различные варианты потери устойчивости орбиты связаны с определенными значениями параметров. Рассмотрены две модели хаоса, которые включают, соответственно, определенный механизм неустойчивости орбиты.

Одна модель хаоса (пример – система Чуа) состоит в следующем: седлофокусные точки на траектории могут изменять величину периода колебаний за счет уменьшения фокусной и увеличения седловой частей в ХП точек траектории, вызывая замедление движения в определенной области координатного пространства. Период колебательного процесса выступает в качестве *элемента самоорганизации* и вызывает в трехмерной системе удвоение (кратное увеличение периода). Это явление может быть признаком появления хаоса. Аттракторы в системе Чуа, которые идентифицируются согласно принципа симметрии 1, остаются регулярными при изменении параметров. Хаос возникает в окрестности особых точек, которые находятся внутри регулярного аттрактора.

Трехмерные системы могут иметь несколько особых точек и несимметричные аттракторы (замкнутые несимметричные траектории), которые превращаются в странные аттракторы. Изменение параметров, вызывая замедление движения изображающей точки, может запустить механизм возникновения хаоса через кратное увеличение периода.

В системе Лоренца существуют параметры, которые выделяют одну замкнутую кососимметричную траекторию (рис. 2, *a, б, в*), и параметры, при которых нет образования петель и переход из области в область происходит с нарушением гладкости кривой на границе.

РЕЗЮМЕ. Наведено аналіз поля системи в варіаціях і його вплив на втрату стійкості орбіти.

1. Мартынюк А.А., Никитина Н.В. О периодическом движении и бифуркациях в трехмерных нелинейных системах // Нелінійні коливання – 2014. – 17, № 2 – С. 268 – 280.
2. Никитина Н.В. О характеристических показателях Ляпунова // Доповіді НАН України. – 2015. – № 8. – С. 64 – 71.
3. Никитина Н.В. Нелинейные системы со сложным и хаотическим поведением траекторий. – К.: Феникс, 2012. – 235 с.
4. Anishechenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L. Dynamics of two coupled Chua's circuits // Int. J. of Bifurcation and Chaos. – 1995, 5, N 6. – P. 1677 – 1699.
5. Leonov G.A. Strange Attractors and Classical Stability Theory. – St. Petersburg: St. Petersburg University Press., 2008. – 160 p.
6. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Bifurcations and Multi-Stability of Vibrations of Three-Dimensional System // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 2. – P. 540 – 541.
7. Martynuk A.A., Nikitina N.V. Of Periodical Motions in Three-Dimensional Systems // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 4. – P. 369 – 379.
8. Neimark Yu.I., Landa P.S. Stochastic and Chaotic Oscillations. – Dordrecht: Kluwer, 1992. – 424 p.
9. Nemytskii V.V., Stepanov V.V. Qualitative Theory of Differential Equation. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1960. – 550 p.
10. Nikitina N.V., Sidorets V.N. Bifurcation Processes in a Physical Model // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 3. – P. 326 – 332.
11. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I. – Singapore: World Scientific, 1998. – 416 c.
12. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V., Chua L.O. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II. – Singapore: World Scientific, 2001. – 592 c.

Поступила 07.07.2016

Утверждена в печать 30.05.2017