

А. М. Багно

**ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА ВОЛН ЛЭМБА В СИСТЕМЕ  
«УПРУГИЙ СЛОЙ – ПОЛУПРОСТРАНСТВО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ»**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,  
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e – mail: alexbag2016@gmail.com*

**Abstract.** A problem on propagation of normal waves in an elastic layer interacting with a half-space of an ideal compressible fluid is stated and solved. This study is carried out on the basis of three-dimensional linear equations of the classical theory of elasticity for a solid and the three-dimensional linearized Euler equations for the ideal compressible fluid. The dispersion curves are constructed for the quasi-Lamb modes in the wide frequency range. An effect of ideal compressible fluid and the elastic layer thickness on the dispersion properties of phase velocities of the quasi-Lamb modes in a hydroelastic waveguides is analyzed. The localization properties of the mentioned modes in hydroelastic waveguides are studied. The numerical results are presented in the form of plots and analyzed.

**Key words:** dispersion of normal waves, elastic layer, half-space of ideal compressible fluid, quasi-Lamb modes localization.

**Введение.**

Проблема описания полного спектра распространяющихся нормальных волн Лэмба в упруго-жидкостных волноводах, анализа их дисперсионных характеристик, а также поведения их как в длинноволновом, так и в коротковолновом диапазонах частотного спектра относится к классическим задачам механики [1, 3 – 8, 11 – 13, 20]. Закономерности распространения этих волн широко используются в сейсмологии, сейсморазведке, гидроакустике, а также при разработке ультразвуковых неразрушающих методов выявления дефектов и определения напряжений в материалах и элементах конструкций [7, 8, 14, 15, 18, 19, 21 – 28]. Значительное практическое использование акустических волн ставит задачу изучения дисперсионных свойств квазилэмбовских мод в гидроупругом волноводе, состоящем из упругого слоя и жидкого полупространства, в широком диапазоне частот, охватывающем как длинноволновую, так и коротковолновую части спектра для толщин упругого слоя, соизмеримых с длиной волны.

В данной работе для анализа дисперсионных характеристик квазилэмбовских мод в системе, состоящей из упругого слоя и жидкого полупространства, в широком интервале частот используются трехмерные линеаризованные уравнения Эйлера для жидкости и линейные уравнения классической теории упругости для твердого тела. При этом предполагается, что жидкость находится в состоянии покоя. В качестве подхода выбраны постановки задач и метод, основанные на применении представлений общих решений уравнений движения идеальной сжимаемой жидкости и упругого тела, полученные в работах [3 – 9, 16, 17].

**§1. Постановка задачи. Основные уравнения.**

Рассмотрим задачу о распространении нормальных волн Лэмба в гидроупругой системе, состоящей из полупространства идеальной сжимаемой жидкости и упругого слоя. Воспользуемся подходом и постановками задач аэрогидроупругости, предложенными в работах [3 – 9, 16, 17]. Решение получим с привлечением трехмерных ли-

нейных уравнений классической теории упругости для твердого тела и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости, находящейся в состоянии покоя. В рамках принятых моделей основные соотношения для системы «изотропное упругое тело – идеальная сжимаемая жидкость» являются такими [3 – 9, 16, 17]:

1) упругое тело –

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0; \quad \sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad z_k \in V_1;$$

2) идеальная сжимаемая жидкость –

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0, \quad z_k \in V_2; \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2;$$

$$a_0 = \text{const}, \quad z_k \in V_2; \quad P_{ij} = -\delta_{ij} p.$$

При этом специфику взаимодействия упругих и жидких сред отражают динамические  $\sigma_{ij} = P_{ij}$  ( $z_k \in S$ ) и кинематические  $(\partial \mathbf{u})/(\partial t) = \mathbf{v}$  ( $z_k \in S$ ) граничные условия, задаваемые на поверхности контакта твердых тел и жидкости  $S$ .

Здесь введены следующие обозначения:  $u_i$  – компоненты вектора перемещений твердого тела  $\mathbf{u}$ ;  $\rho$  – плотность материала упругого слоя;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ляме материала твердого тела;  $v_i$  – составляющие вектора возмущений скорости жидкости  $\mathbf{v}$ ;  $\rho^*$  и  $p$  – возмущения плотности и давления в жидкости;  $\rho_0$  и  $a_0$  – плотность и скорость звука в жидкости в состоянии покоя;  $P_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$  – составляющие напряжений, соответственно, в жидкости и упругом теле;  $V_1$  и  $V_2$  – объемы, занимаемые, соответственно, упругим телом и жидкостью;  $S$  – поверхность контакта упругой и жидкой сред.

Далее предположим, что изотропный упругий слой занимает объем  $(-\infty < z_1 < \infty, -h \leq z_2 \leq 0, -\infty < z_3 < \infty)$  и контактирует с полупространством идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей объем  $(-\infty < z_1 < \infty, 0 \leq z_2 < \infty, -\infty < z_3 < \infty)$ . Примем, что внешние силы, действующие на указанные среды, распределены равномерно вдоль оси  $oz_3$ . В этом случае во всех плоскостях, параллельных плоскости  $oz_1z_2$ , явления будут происходить тождественным образом. Поэтому задача будет плоской и можно ограничиться изучением процесса распространения волн в плоскости  $oz_1z_2$ .

## §2. Методика решения.

Воспользуемся представлениями общих решений, полученными в работах [3 – 9, 16, 17]. Для плоского случая, который рассматривается далее, общие решения будут такими:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t},$$

где введенные функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  удовлетворяют уравнениям:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Данная задача характеризуется следующими динамическими –

$$\sigma_{12} \Big|_{z_2=0} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=0} = P_{22} \Big|_{z_2=0}; \quad \sigma_{12} \Big|_{z_2=-h} = 0; \quad \sigma_{22} \Big|_{z_2=-h} = 0 \quad (2.1)$$

и кинематическим –

$$v_2 \Big|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z_2=0} \quad (2.2)$$

граничными условиями.

Далее параметры, характеризующие процесс распространения волн, определяем в классе бегущих волн и выбираем в виде:  $\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)]$  ( $j = 1, 2$ ), где  $k$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $i^2 = -1$ .

Заметим, что выбранный в работе класс гармонических волн, являясь наиболее простым и удобным в теоретических исследованиях, не ограничивает общность полученных результатов, поскольку линейная волна произвольной формы, как известно, может быть представлена набором гармонических составляющих. Далее решаем две задачи Штурма – Лиувилля на собственные значения для уравнений движения жидкости и упругого тела, а также определяем соответствующие собственные функции. После подстановки решений в граничные условия (2.1) – (2.2) получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения и приравнивая определитель системы к нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\det \| e_{lm}(c, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \omega h/c_s) \| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \quad (2.3)$$

где  $c$  – фазовая скорость нормальных квазилэмбовских волн;  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu/\rho$ ) – скорость волны сдвига в упругом теле;  $\mu$  – модуль сдвига материала упругого слоя;  $h$  – толщина упругого слоя.

Как известно, в неограниченном сжимаемом упругом теле существуют продольная и сдвиговая волны. В идеальной сжимаемой жидкой среде распространяется продольная волна. Именно эти волны, взаимодействуя между собой на свободных граничных поверхностях, а также на поверхности контакта сред, порождают сложное волновое поле в рассматриваемой гидроупругой системе.

Заметим, что особенность распространения возмущений в гидроупругом волноводе указанной структуры обусловлена наличием в упругом слое и жидкости граничных поверхностей. Это значительно усложняет картину волнового поля в нем. Причиной этого является то, что в формировании поля в гидроупругой системе существенную роль играют не только наличие жидкости, а также взаимодействие волн с поверхностью упругого тела, контактирующего с жидкой средой, но и наличие свободных поверхностей и их взаимовлияние. Взаимодействие продольных и сдвиговых волн на граничных поверхностях приводит к возникновению в гидроупругом волноводе довольно сложного спектра мод.

Отметим, что полученное дисперсионное уравнение (2.3) является наиболее общим и из него можно получить соотношения для ряда частных случаев. В частности, если  $a_0$  устремить к бесконечности, то (2.3) переходит в уравнение для определения параметров мод в случае взаимодействия с идеальной несжимаемой жидкостью. При  $\rho_0 = 0$  из равенства (2.3) получим уравнение для определения скоростей волн Лэмба [1, 3, 4, 6 – 8, 10, 13, 20]. Если дополнительно устремить  $h$  к бесконечности, то получим соотношение для определения скоростей поверхностных волн Рэлея [1, 3, 4, 6 – 8, 13, 20]. При  $\rho_0 \neq 0$  и  $h \rightarrow \infty$  равенство переходит в уравнение Стоунли – Шольте [1, 3 – 5, 13, 20].

### §3. Числовые результаты и их анализ.

В дальнейшем дисперсионное уравнение (2.3) решаем численно. При этом расчеты проводим для трех гидроупругих систем. Первая состоит из эластичной резины и воды. Ее механические параметры выбираем следующими: упругий слой –  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,

$\lambda = 6 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,2 \cdot 10^6$  Па; полупространство жидкости –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 46,153442$ . Этот гидроупругий волновод характеризуется тем, что материал упругого слоя (резина) является податливым и мягким. *Вторая* состоит из органического стекла и воды. Она характеризуется следующими параметрами: упругий слой –  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 3,96 \cdot 10^9$  Па,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; жидкость –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,152595$ . У этого волновода материал упругого слоя (оргстекло) является жестким. *Третья* представляет собой волновод из стали и воды. При этом параметры выбраны такими: упругий слой –  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 9,26 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 7,75 \cdot 10^{10}$  Па; жидкость –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с,  $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 0,463021$ . Этот волновод отличается тем, что материал упругого слоя (сталь) относится к разряду более жестких.

Результаты вычислений представлены на рис. 1 – 12.

На рис. 1 – 4 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из резины (податливый материал) и воды.

На рис. 1 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  ( $\bar{h} = \omega h/c_s$ ). На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

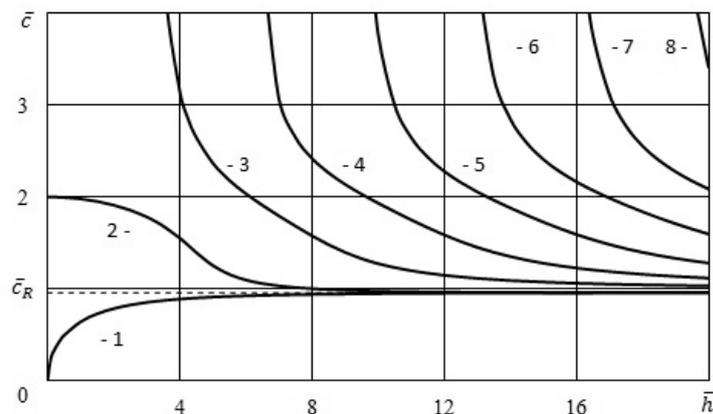


Рис. 1

Из графиков, представленных на рис. 1, следует, что для чисто упругого волновода скорости первой (нулевой антисимметричной) и второй (нулевой симметричной) мод Лэмба, распространяющихся вдоль нижней и верхней свободных поверхностей слоя, с ростом толщины упругого слоя (частоты)  $h$  стремятся к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$ . При этом первая мода стремится к скорости поверхностной волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$ ) снизу, а скорость второй моды – соответственно, к  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9553303$ ) сверху.

Графики на рис. 2 иллюстрируют влияние жидкости на волновые характеристики гидроупругой системы. На нем изображены дисперсионные кривые, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя  $\bar{h}$ . Для наглядности на этом рисунке штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

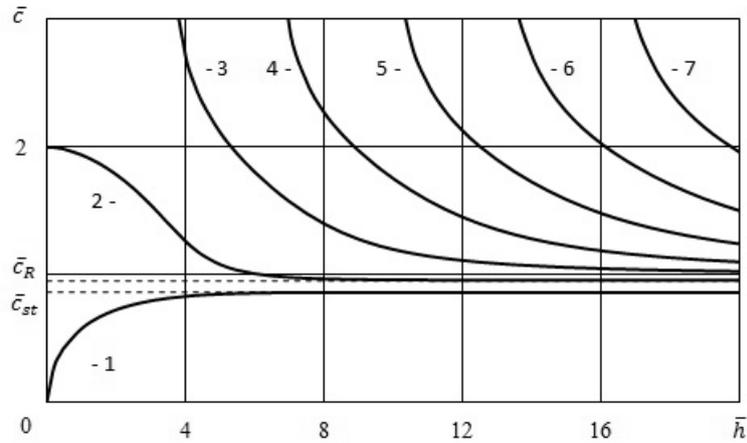


Рис. 2

В гидроупругом волноводе (рис. 2) при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$ ) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) сверху. Моды более высокого порядка как в гидроупругой системе, так и в чисто упругом слое, распространяются в упругом слое в его толще [1] с фазовыми скоростями, стремящимися с увеличением толщины к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

На рис. 3, 4 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 3) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 4) смещений (скоростей  $\partial u_i/\partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной моды 1 (рис. 2). Графики, представленные на рис. 3, 4, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из резины ( $-10 \leq z_2 \leq 0$ ) и полупространства воды ( $0 \leq z_2 \leq 10$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно:  $\bar{c} = 0,859255$ .

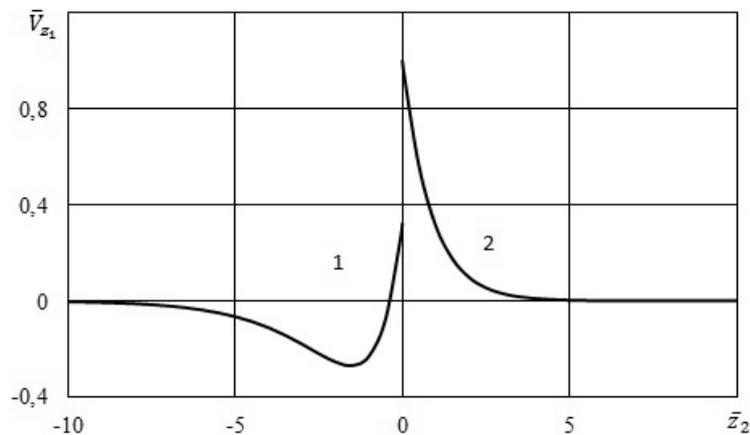


Рис. 3

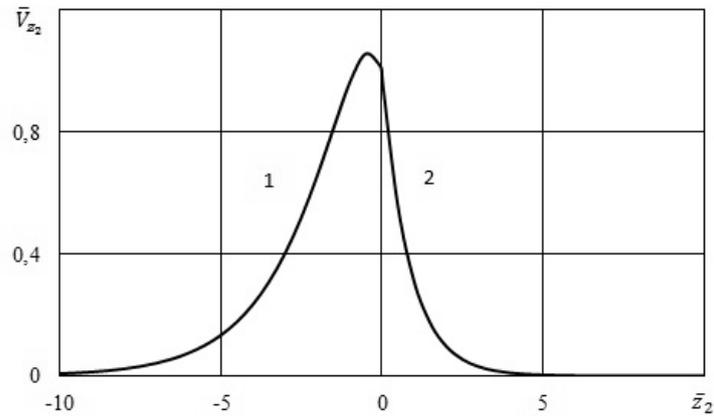


Рис. 4

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 3, 4, следует, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  происходят как в упругом теле, так и в жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость. Заметим, что разрыв продольных смещений в упругом теле (кривая 1) и в жидкости (кривая 2) на границе контакта сред ( $\bar{z}_2 = 0$ ) (рис. 3) обусловлен невязкостью (идеальностью) жидкости.

На рис. 5 – 8 приведены результаты численных расчетов для упруго-жидкостной системы, состоящей из органического стекла (жесткий материал) и воды.

На рис. 5 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  [3, 4, 6 – 8, 10]. На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины (частоты).

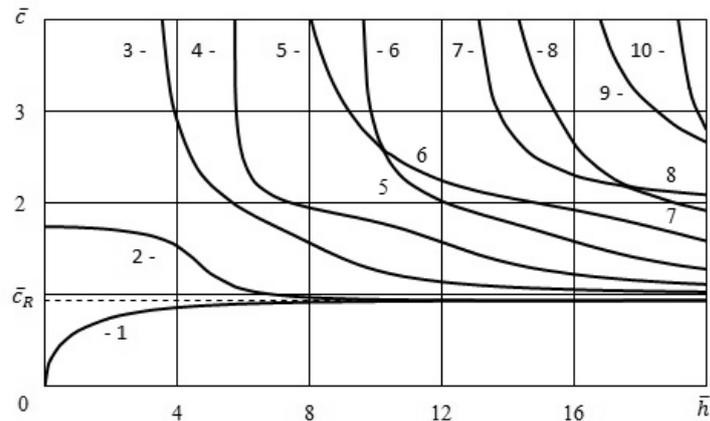


Рис. 5

Из графиков, представленных на рис. 5 [3, 4, 6 – 8, 10], следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,9335596$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении толщины упругого слоя или частоты стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [3, 4, 6 – 8, 10].

На рис. 6 показаны дисперсионные кривые для гидроупругого волновода, отражающие зависимости безразмерных величин фазовых скоростей квазилэмбовских мод  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховыми линиями отмечены асимптотики, к которым стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

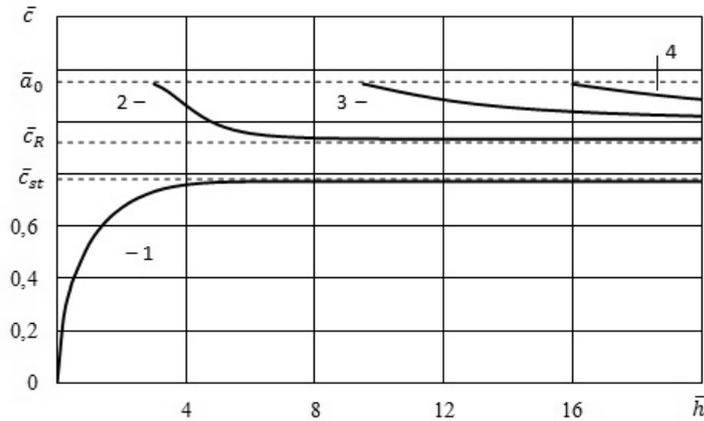


Рис. 6

Графики для гидроупругой системы, приведенные на рис. 6, показывают, что при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,7717101$ ) снизу, а скорость второй моды – к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ) сверху. Скорости мод высокого порядка при частотах зарождения равны скорости волны звука в жидкости. Моды высокого порядка распространяются в упругом слое в его толще с фазовыми скоростями, стремящимися с ростом частоты (толщины упругого слоя)  $\bar{h}$  к скорости волны сдвига в материале упругого тела  $\bar{c}_s$ .

На рис. 7, 8 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{v}_{z_1}$  (рис. 7) и поперечных  $\bar{v}_{z_2}$  (рис. 8) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной волны 1 (рис. 6). Графики, представленные на рис. 7, 8, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из органического стекла ( $-10 \leq z_2 \leq 0$ ) и полупространства воды ( $0 \leq z_2 \leq 10$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно:  $\bar{c} = 0,7717101$ .

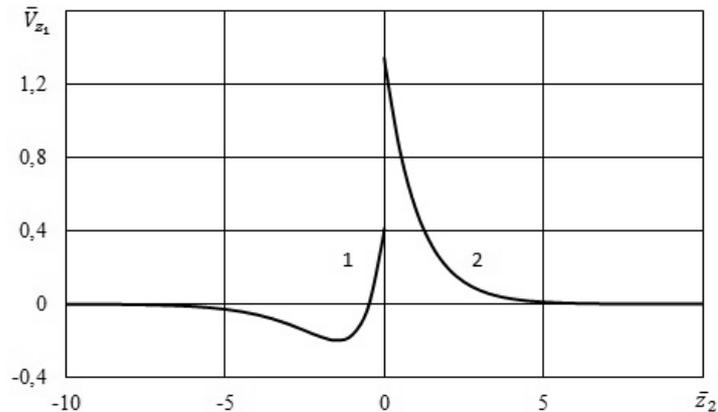


Рис. 7

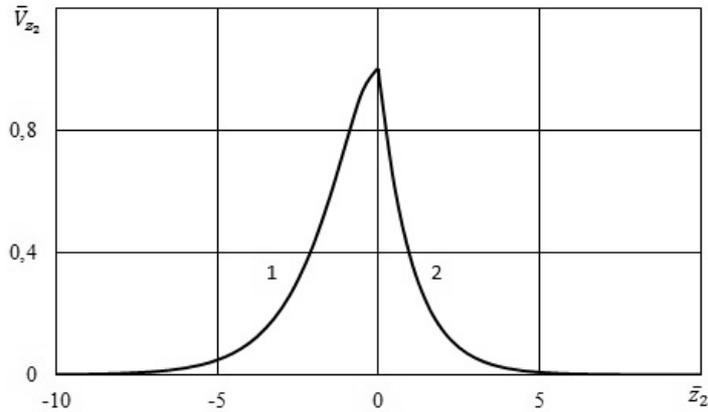


Рис. 8

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 7, 8, следует, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае упругого слоя из оргстекла также происходят как в упругом теле, так и жидкости. При этом глубина проникновения ее в упругий слой превышает глубину проникновения в жидкость.

Графический материал, полученный в результате численных вычислений для системы, состоящей из стали (более жесткий материал) и воды, представлен на рис. 9 – 12.

На рис. 9 для упругого слоя, невзаимодействующего с жидкостью, приведены зависимости безразмерных величин фазовых скоростей нормальных волн Лэмба  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  [1, 3, 4, 6 – 8, 10]. На рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремятся фазовые скорости первой и второй мод при возрастании толщины.

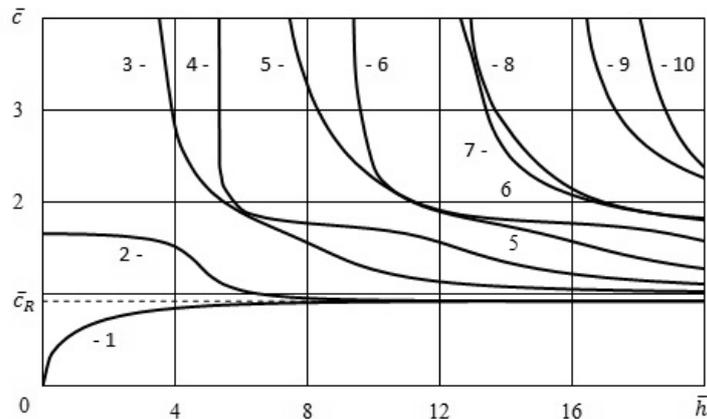


Рис. 9

Из графиков, представленных на рис. 9, следует, что скорость первой (нулевой антисимметричной) моды Лэмба при росте частоты или толщины упругого слоя  $\bar{h}$  стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) снизу, а скорость второй (нулевой симметричной) моды стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ) сверху. Скорости всех мод Лэмба высокого порядка при увеличении частоты или толщины упругого слоя стремятся к скорости волны сдвига в материале упругого тела [1, 3, 4, 6 – 8, 10].

На рис. 10 приведена дисперсионная кривая для гидроупругого волновода, отражающая зависимость безразмерной величины фазовой скорости первой моды  $\bar{c}$  от безразмерной величины толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$ . На этом рисунке для наглядности штриховой линией отмечена асимптотика, к которой стремится фазовая скорость первой моды при возрастании толщины.

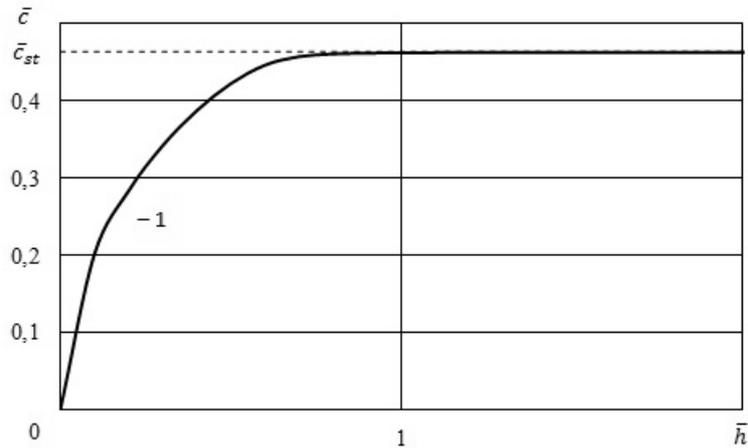


Рис. 10

Графический материал для гидроупругой системы, приведенный на рис. 10, показывает, что при росте толщины упругого слоя (частоты)  $\bar{h}$  скорость первой моды стремится к скорости волны Стоунли  $\bar{c}_{st}$  ( $\bar{c}_{st} = 0,462886$ ), которая несколько меньше скорости волны звука в жидкой среде  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ).

На рис. 11, 12 приведены зависимости безразмерных величин продольных  $\bar{V}_{z_1}$  (рис. 11) и поперечных  $\bar{V}_{z_2}$  (рис. 12) смещений (скоростей  $\partial u_i / \partial t$  и  $v_i$ ) от безразмерной поперечной координаты  $\bar{z}_2$  для поверхностной волны 1 (рис. 10). Графики, представленные на рис. 11, 12, отражают распределение смещений (скоростей) по толщине в приконтактных областях слоя из стали ( $-10 \leq z_2 \leq 0$ ) и полупространства воды ( $0 \leq z_2 \leq 10$ ). Они получены при частоте (толщине) упругого слоя  $\bar{h} = 20$ . При этом значение фазовой скорости моды 1 равно:  $\bar{c} = 0,462886$ .

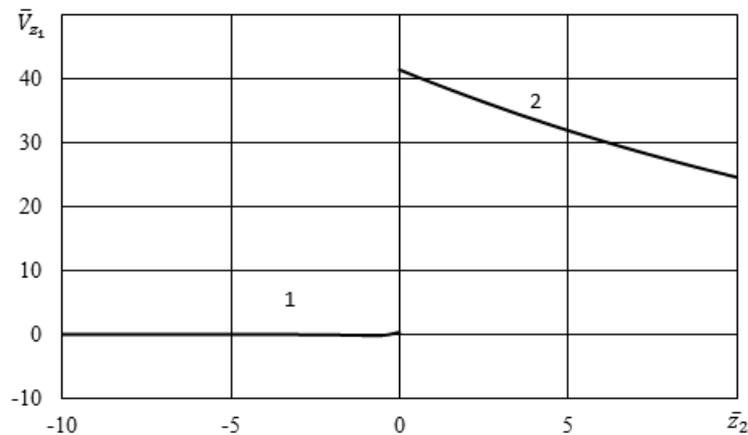


Рис. 11

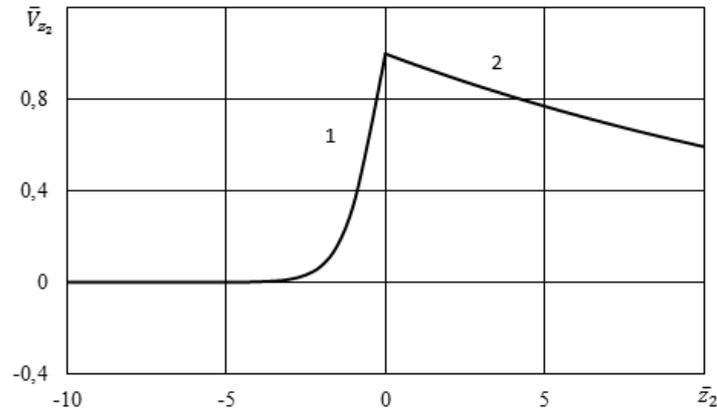


Рис. 12

Из графиков распределения амплитуд смещений (скоростей), представленных на рис. 11, 12, видно, что продольные смещения  $\bar{V}_{z_1}$  в упругом теле ( $-10 \leq \bar{z}_2 \leq 0$ ) незначительные, а поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  быстро убывают с глубиной. Для жидкости ( $0 \leq \bar{z}_2 \leq 10$ ), наоборот, характерна концентрация волновых движений. При этом продольные  $\bar{V}_{z_1}$  и поперечные  $\bar{V}_{z_2}$  смещения медленно убывают с глубиной. Это свидетельствует о том, что движения моды 1 при  $\bar{h} = 20$  в случае более жесткого материала (сталь) происходят в отличие от податливого и менее жесткого упругого слоя, преимущественно, в жидкости.

#### §4. Свойства локализации низших мод в гидроупругих волноводах.

Как показано в работе [2], фазовая скорость и структура волны Стоунли при взаимодействии твердого и жидкого полупространств зависят от механических параметров гидроупругой системы и определяются соотношением между скоростью волны звука в жидкости и скоростью волны Рэлея в твердом полупространстве. В рассматриваемом случае механические параметры гидроупругой системы «резина (податливый материал) – вода» таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 46,153442$ ) больше скорости квазиэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ). Согласно анализу кинематических характеристик поверхностной волны, представленных на рис. 3 и 4, следует, что в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1, являющейся волной типа Стоунли, в упругое тело больше глубины проникновения в жидкость. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, проникает в твердое тело и локализуется в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Мода 2 распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Скорость ее стремится к скорости волны Рэлея  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,955318$ ) сверху. Скорости всех мод высокого порядка стремятся к скорости волны сдвига в материале твердого тела  $\bar{c}_s$ . При этом с ростом частоты (толщины) в них преобладают поперечные смещения, амплитуда которых на поверхностях слоя стремится к нулю по сравнению с их амплитудами в толще слоя, т. е. движения в модах высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

В случае гидроупругой системы «оргстекло (жесткий материал) – вода» (рис. 7, 8) механические параметры ее компонентов таковы, что скорость распространения звуковой волны в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 1,152595$ ) немного больше скорости квазиэлеевской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,933558$ ). Анализ кинематических характеристик поверхностной волны (см. рис. 7, 8), показывает, что при таком соотношении механических па-

раметров мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностных областях как жидкости, так и упругого слоя. Вторая мода распространяется в упругом слое вдоль его свободной поверхности. Моды высокого порядка смещаются от поверхности внутрь слоя и локализуются в его толще [1].

Таким образом, анализ показывает, что в данных упруго-жидкостных системах низшие моды проникают в твердое тело и так же, как и моды более высокого порядка, распространяются в упругом слое. При этом упругий слой является определяющим в формировании волнового поля и основным волноводом, по которому распространяются волновые возмущения и осуществляется перенос большей части энергии волн.

В случае гидроупругой системы «сталь (более жесткий материал) – вода» (рис. 11, 12) механические параметры таковы, что скорость распространения волны звука в жидкости  $\bar{a}_0$  ( $\bar{a}_0 = 0,463021$ ) меньше скорости квазиРэлееской волны  $\bar{c}_R$  ( $\bar{c}_R = 0,923008$ ). В связи с этим, как следует из графиков (см. рис. 11, 12), в высокочастотной части спектра глубина проникновения квазиповерхностной моды 1 в жидкость значительно больше глубины проникновения в упругое тело. Поэтому мода 1, распространяясь вдоль границы контакта сред, локализуется, преимущественно, в приповерхностной области жидкого полупространства.

Таким образом, анализ показывает, что в данной упруго-жидкостной системе первая мода не проникает в твердое тело и распространяется вдоль границы контакта сред, преимущественно, в приповерхностной области жидкости. В этом случае волноводом для распространения квазиповерхностной волны (волна типа Стоунли) и переноса волновой энергии служит приповерхностная область жидкого полупространства.

#### **§5. Критерий существования квазилэмбовских мод в гидроупругих волноводах.**

Проведенные отдельно расчеты, а также анализ полученных результатов показали, что соотношение между скоростями волны звука в жидкости и волны Рэлея в твердом теле может служить критерием, позволяющим устанавливать возможность существования нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка в упругом слое, взаимодействующем с полупространством идеальной сжимаемой жидкости.

Как отмечено ранее, графики, приведенные на рис. 2, получены для гидроупругой композиции, состоящей из жидкости и упругого слоя из податливого материала. В этом случае механические параметры составляющих системы таковы, что скорость волны звука в жидкости значительно больше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое. Как видно из графиков рис. 2, при таком соотношении идеальная сжимаемая жидкость не препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя и взаимодействию продольной и сдвиговой волн на них. Вследствие этого в упругом слое возникает полный набор незатухающих нормальных квазилэмбовских волн высокого порядка, дисперсионная картина и частотный спектр которых, несмотря на ряд различий, подобен волновому процессу в упругом слое, не взаимодействующем с жидкостью.

В гидроупругой системе с упругим слоем из оргстекла (жесткий материал) (рис. 6) скорость волны звука в жидкости лишь немного превышает скорость волны Рэлея. В этом случае, как видно из графиков рис. 6, в упругом слое возникают квазилэмбовские моды высокого порядка, величина фазовой скорости которых также меньше величины скорости звуковой волны в жидкости. Количество этих мод, распространяющихся без радиационного демпфирования, значительно меньше числа мод Лэмба в чисто упругом слое.

При взаимодействии упругого слоя из более жесткого материала с жидким полупространством скорость волны звука в жидкости меньше скорости квазиповерхностной волны Рэлея в твердом слое. При таком соотношении между механическими параметрами компонентов системы жидкость препятствует обмену энергией между поверхностями упругого слоя и взаимодействию продольной и сдвиговой волн на них. В этом случае, как видно из графика рис. 10, в упругом слое не формируются незатухающие квазилэмбовские нормальные волны высокого порядка. В гидроупругом волноводе возникает лишь одна низшая первая мода, которая, распространяясь без демпфирования вдоль границы контакта сред, локализуется в приповерхностной области жидкости.

### Заклучение.

В рамках линейных уравнений классической теории упругости для упругого слоя и линеаризованных уравнений Эйлера для жидкости даны постановка и решение задачи о распространении нормальных квазилэмбовских волн в системе «полупространство идеальной сжимаемой жидкости – упругий слой». С использованием представлений общих решений получено характеристическое уравнение и построены дисперсионные кривые для мод в широком диапазоне частот.

Анализ полученных результатов показал, что воздействие жидкости проявляется в изменении критических частот и конфигурации дисперсионных кривых, а также в смещении их в длинноволновую часть спектра. Локализация низших мод в системе «жидкое полупространство – упругий слой» зависит от механических параметров гидроупругой системы. Рассмотрение трех упруго-жидкостных волноводов позволило проанализировать влияние жесткостных свойств упругого материала на локализацию низших квазилэмбовских мод в окрестности контакта упругого слоя и жидкого полупространства. Основным критерием существования незатухающих нормальных волн и распределения низших мод в средах является соотношение между величинами скоростей волны звука в жидкости и квазиэрлеевской волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности упругого слоя.

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та розв'язок задачі про поширення нормальних хвиль у пружному шарі, який взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини. Дослідження проведено на основі тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та линеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Дисперсійні криві побудовано для квазілэмбовських мод у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив ідеальної стисливої рідини та товщини пружного шару на дисперсію фазових швидкостей квазілэмбовських мод у гідропружних хвилеводах. Досліджено локалізаційні властивості нижчих квазілэмбовських мод у гідропружних хвилеводах. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

1. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. *Волькенштейн М.М., Левин В.М.* Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела // Акуст. журнал. – 1988. – 34, № 4. – С. 608 – 615.
3. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.1. Общие вопросы – К.: Наук. думка, 1986. – 374 с.
4. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в двух томах. Т.2. Закономерности распространения. – К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
5. *Гузь А.Н.* Динамика сжимаемой вязкой жидкости. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
6. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
7. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
8. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в двух частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
9. *Гузь А.Н.* Ведение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
10. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
11. *Bagno A.M.* The Dispersion Spectrum of a Wave Process in a System Consisting of an Ideal Fluid Layer and a Compressible Elastic Layer // Int. Appl. Mech. – 2015. – 51, N 6. – P. 648 – 654.
12. *Bagno A.M.* Wave Propagation in an Elastic Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 133 – 139.
13. *Bagno A.M., Guz A.N.* Elastic Waves in Pre-stressed Bodies Interacting with a Fluid (survey) // Int. Appl. Mech. – 1997. – 33, N 6. – P. 435 – 463.
14. *Drinkwater B.W., Wilcox P.D.* Ultrasonic arrays for non-destructive evaluation: A review // NDT & E International. – 2006. – 39, N 7. – P. 525 – 541.

15. *Gibson A., Popovics J.* Lamb wave basis for impact-echo method analysis // *J. of Engineering Mechanics*. – 2005. – **131**, N 4. – P. 438 – 443.
16. *Guz A. N.* Aerohydroelasticity Problems for Bodies with Initial Stresses // *Int. Appl. Mech.* – 1980. – **16**, N 3. – P. 175 – 190.
17. *Guz A.N.* Dynamics of compressible viscous fluid. – Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2009. – 428 p.
18. *Guz A.N.* On the foundations of the ultrasonic non-destructive determination of stresses in near-the-surface layers of materials. Review // *J. Phys. Science and Application*. – 2011. – **1**, N 1, June. – P. 1 – 15.
19. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
20. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.
21. *Jhang K.Y.* Nonlinear ultrasonic techniques for nondestructive assessment of micro damage in material: a review // *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing*. – 2009. – **10**, N 1. – P. 123 – 135.
22. *Kessler S.S., Spearing S.M., Soutis C.* Damage detection in composite materials using Lamb wave methods // *Smart Materials and Structures*. – 2002. – **11**, N 2. – P. 269 – 279.
23. *Kobayashi M., Tang S., Miura S., Iwabuchi K., Oomori S., Fujiki H.* Ultrasonic nondestructive material evaluation method and study on texture and cross slip effects under simple and pure shear states // *Int. J. of Plasticity*. – 2003. – **19**, N 6. – P. 771 – 804.
24. *Leonard K.R., Malyarenko E.V., Hinders M.K.* Ultrasonic Lamb wave tomography // *Inverse Problems*. – 2002. – **18**, N 6. – P. 1795 – 1808.
25. *Liu L., Ju Y.* A high-efficiency nondestructive method for remote detection and quantitative evaluation of pipe wall thinning using microwaves // *NDT & E International*. – 2011. – **44**, N 1. – P. 106 – 110.
26. *Ramadas C., Balasubramaniam K., Joshi M., Krishnamurthy C. V.* Interaction of the primary anti-symmetric Lamb mode (Ao) with symmetric delaminations: numerical and experimental studies // *Smart Materials and Structures*. – 2009. – **18**, N 8. – P. 1 – 7.
27. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design*. – 2012. – **35**, March. – P. 572 – 588.
28. *Spies M.* Analytical methods for modeling of ultrasonic nondestructive testing of anisotropic media // *Ultrasonics*. – 2004. – **42**, N 1 – 9. – P. 213 – 219.

Поступила 25.04.2016

Утверждена в печать 30.05.2017