В.Г.Карнаухов [1], В.И.Козлов [1], Т.В.Карнаухова [2]

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИССИПАТИВНЫЙ РАЗОГРЕВ ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИН С АКТУАТОРАМИ ПРИ УЧЕТЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

[1] *Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,*
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mali: karn@inmech.kiev.ua.
[2] *Национальный технический университет «КПИ»,*
пр. Победы, 37, 03056, Киев, Украина; e-mail: karn@inmech.kiev.ua.

Absrtact. A model of the forced resonant vibrations and vibro-heating of the viscoelastic plates with actuators is presented with taking into account the geometrical nonlinearity and transverse shear strains. By the Bubnov-Galerkin method, an approximate analytical solution of formulated problem is obtained for the hinged rectangular plate. An effect of these factors on effectiveness of active damping of vibrations by piezoactuators is analyzed.

Key words: resonant vibrations, geometrical nonlinearity, transverse shear strains, piezoactuators, active damping.

Введение.

Тонкие пластины из композитных материалов на полимерной основе широко используются в различных областях современной техники. Одним из основных и наиболее распространенных режимов работы таких элементов являются вынужденные гармонические колебания, в частности, резонансные [2, 4, 18 – 20]. Все материалы при колебаниях в той или иной степени обладают гистерезисными потерями, в результате чего механическая или электромеханическая энергия превращается в тепловую. Гистерезисные потери существенно увеличиваются в вязкоупругих материалах. Этот эффект широко используется при разработке пассивных методов демпфирования вынужденных резонансных колебаний тонкостенных элементов с целью уменьшения их динамической напряженности, когда в структуру элемента с малым гистерезисом включаются компоненты с высокими гистерезисными потерями, приводящими к существенному уменьшению амплитуды колебаний конструкции. Исследованию пассивного демпфирования колебаний посвящена обширная литература в виде энциклопедий, монографий и статей [6, 7, 9, 11, 16, 17]. Однако повышение гистерезисных потерь может сопровождаться существенным повышением температуры, которую в дальнейшем будем называть температурой диссипативного разогрева (ТДР). ТДР может влиять на все стороны механического и теплового состояния конструкции: на распределение напряжений и деформаций в деформируемом теле, на динамические характеристики резонансных колебаний (амплитудно-, температурно-частотные характеристики, на частотную зависимость коэффициента демпфирования), на динамическую и статическую устойчивость тонкостенных элементов, на их механическое и тепловое разрушение, на ползучесть [1, 3 – 5, 14]. Кроме того, каждый материал имеет определенную температуру, так называемую температуру деградации, при которой существенно ухудшаются механические или электромеханические свойства. Как правило, точке деградации отвечает переход материала из одного фазового состояния в другое. Для пассивного материала точкой деградации является, например, температура плавления, а для пьезоэлектрического материала – точка Кюри, при достижении которой теряется пьезоэффект. При этом имеет место специфический тип теплового разрушения, когда элемент конструкции не разделяется на части, но перестает выполнять свое функциональное назначение. Поэтому ТДР необходимо обязательно учитывать при исследовании вынужденных колебаний элементов конструкций из неупругих материалов, поскольку неучет этого явления может привести к недостоверным результатам. Несмотря на этот очевидный факт, подавляющее большинство работ по вынужденным резонансным колебаниям неупругих тонкостенных элементов выполнено без такого учета.

В последние годы для демпфирования колебаний тонкостенных элементов начали эффективно применять активные методы, базирующиеся на включении пьезоактивных компонент в структуру пассивного тонкостенного элемента из металлического, полимерного или композитного материала. В большинстве случаев в качестве активных элементов выступают пьезоэлектрические компоненты. Обзор зарубежных работ по активному управлению стационарными и нестационарными колебаниями элементов конструкций представлен в [11 – 13, 15, 27 – 29]. Одним из основных методов активного демпфирования является метод, основанный на использовании пьезоактуаторов, к которым подводится разность потенциалов, компенсирующая действие механической нагрузки, в результате чего амплитуда колебаний существенно уменьшается. Основной задачей при этом является расчет указанной разности потенциалов с учетом размеров актуатора, его размещение и др. Особенно заметное влияние на эффективность работы актуаторов оказывает температура, в том числе и упомянутая выше ТДР. При достижении температурой виброразогрева точки Кюри пьезоматериала актуатор перестает выполнять свое функциональное назначение из-за потери активным материалом пьезоэффекта [3 – 5, 14, 21 – 25]. Для анизотропных материалов и при высоких амплитудах гармонического нагружения возникает необходимость учитывать деформации сдвига и геометрическую нелинейность.

В данной работе представлена математическая постановка задачи о вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругих пластин с актуаторами при учете геометрической нелинейности и деформаций поперечного сдвига. Методом Бубнова – Галеркина получено приближенное аналитическое решение для шарнирно опертой прямоугольной пластины. Определена диссипативная функция. Получено аналитическое решение уравнения энергии. Дан анализ влияния геометрической нелинейности, деформаций сдвига и ТДР на эффективность работы актуаторов.

§1. Определяющие уравнения для вязкоупругих пьезопластин при учете деформаций сдвига.

Рассмотрим трехслойную пластину, составленную из среднего пассивного (без пьезоэффекта) ортотропного вязкоупругого слоя толщиной h_0 и двух внешних слоев толщиной h_1 из трансверсально-изотропных вязкоупругих пьезоэлектрических слоев с поляризацией в направлении толщины пластины. Все свойства пьезослоев одинаковы, кроме того, что они имеют противоположную поляризацию. Пластина нагружена равномерным поверхностным гармоническим давлением с частотой, близкой к резонансной частоте пластины. Использована декартова система координат (x, y, z), при этом ось Oz направлена по толщине пластины. В качестве базисной выбираем срединную плоскость внутреннего слоя пластины. Для моделирования электромеханических колебаний пластины принимаем следующие гипотезы: 1) нормальная составляющая тензора напряжений $\sigma_{zz} = 0$; 2) нормальная составляющая вектора индукции D_z значительно больше тангенциальных составляющих, так что $D_z \neq 0$; $D_x = 0$; $D_y = 0$; 3) все составляющие вектора напряженности электрического поля не равны нулю: $E_x \neq 0,\ E_y \neq 0,\ E_z \neq 0.$ При учете этих гипотез трехмерные определяющие уравнения электровязкоупругости упрощаются и принимают вид:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) - \gamma_{11}E_3;\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - \gamma_{11}E_3;$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy};\ \ \sigma_{xz} = E_{44}\varepsilon_{xz};\ \sigma_{yz} = E_{44}\varepsilon_{yz};\ \ D_z = \gamma_{33}E_z + \gamma_{11}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \tag{1.1}$$

$$\begin{pmatrix} \nu = -S_{12}/S_{11};\ E = 1/S_{11};\ E_{44} = 1/\tilde{S}_{44};\ \tilde{S}_{44} = S_{44} - d_{15}^2/e_{11}; \\ \gamma_{11} = \dfrac{Ed_{31}}{1-\nu};\ \gamma_{33} = e_{33}\left(1-k_p^2\right);\quad k_p^2 = \dfrac{2d_{31}^2}{S_{11}^E e_{33}\left(1-\nu\right)} \end{pmatrix}; \tag{1.2}$$

S_{ij}, d_{ij}, e_{ij} – податливости, пьезомодули, диэлектрическая проницаемость материала пьезоэлектрического слоя [2, 4, 27 – 29].

Для пассивных упругих материалов упрощенные определяющие уравнения при использовании гипотез С.П.Тимошенко приведены, например, в [26]. Из них с использованием принципа соответствия [10] получим определяющие уравнения для вязкоупругих материалов.

Для уточненной модели С.П. Тимошенко компоненты вектора перемещений аппроксимируются линейным законом:

$$w = w(s,\theta), u(s,\theta,z) = u_0(s,\theta) + z\varphi_x(s,\theta),\ v = v_0(s,\theta) + z\varphi_y(s,\theta)\,. \tag{1.3}$$

Величины φ_x, φ_y характеризуют независимый поворот нормали к пластине. Выражения для деформаций пластин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ через $u_0, v_0, \varphi_x, \varphi_y, w$ представлены, например, в [26] и с удержанием только квадратов углов поворота имеют вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2;\ \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x;\ \ \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y;\ \kappa_1 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x};\ \kappa_2 = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y};\ \kappa_{12} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}.$$

Подставляя эти выражения в (1.1), после интегрирования по толщине получим определяющие уравнения для усилий и моментов в пьезослоях с учетом деформаций сдвига:

$$N_{xx}^{(n)} = \frac{2Eh_1}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + \frac{2E^2 d_{31}^2 h_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);$$

$$N_{yy}^{(n)} = \frac{2Eh_1}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{2E^2 d_{31}^2 h_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2);\ \ N_{xy}^{(n)} = \frac{Eh_1}{(1+\nu)}\varepsilon_{12};$$

$$M_{xx}^{(n)} = \frac{2Em_1}{1-\nu^2}(\kappa_1 + \nu\kappa_2) - \frac{2E^2 d_{31}^2 m_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\kappa_1 + \kappa_2) - M_0;\quad m_1 = \frac{1}{2}h_0^2 h_1 + h_0 h_1^2 + \frac{1}{3}h_1^3; \tag{1.4}$$

$$M_{yy}^{(n)} = \frac{2Em_1}{1-\nu^2}(\nu\kappa_1 + \kappa_2) - \frac{2E^2 d_{31}^2 m_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}(\kappa_1 + \kappa_2) - M_0;\ M_{xy}^{(n)} = \frac{Em_1}{2(1+\nu)}\kappa_{12};\ M_0 = m_0 V_0;$$

$$Q_x^{(n)} = 2E_{44}h_1\varepsilon_{13};\ Q_y^{(n)} = 2E_{44}h_1\varepsilon_{23};\ E_{44} = 1/(S_{44} - d_{15}^2/\tilde{\varepsilon}_{33}^T);\ m_0 = \frac{E}{1+\nu}\left|d_{31}\right|(h_0 + h_1).$$

Здесь $V_0/2$ – разность потенциалов, подведенная к нанесенным на поверхности пассивного слоя активным слоям.

Для пассивного слоя определяющие уравнения получаем аналогично. Для упругого ортотропного материала они приведены, например, в [26]. Из них путем использования принципа соответствия [10] получим определяющие уравнения для пассивного вязкоупругого слоя:

$$N_{xx} = \tilde{A}_{11} * \varepsilon_{xx} + \tilde{A}_{12} * \varepsilon_{yy}, ...;\ M_{xx} = \tilde{D}_{11} * \kappa_{xx} + \tilde{D}_{12} * \kappa_{yy}, ...;$$
$$Q_x = K_s\tilde{A}_{55} * \varepsilon_{xz};\ Q_y = K_s\tilde{A}_{44} * \varepsilon_{yz}. \tag{1.5}$$

Здесь звездочка ($*$) означает оператор Вольтера [10] в дальнейшем ее будем опускать.

Величины $\tilde{A}_{ij}, \tilde{D}_{ij}$ для упругого пассивного ортотропного материала приведены в [26] и имеют вид:

$$\tilde{A}_{11} = \frac{E_1h_0}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\quad \tilde{A}_{22} = \frac{E_2h_0}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\quad \tilde{A}_{12} = \frac{\nu_{12}E_2h_0}{1-\nu_{12}\nu_{21}};\quad \tilde{A}_{66} = G_{12}h_0;$$

$$\tilde{A}_{55} = G_{13}h_0;\quad \tilde{A}_{44} = G_{23}h_0;\quad \tilde{B}_{13} = G_{13}h_0;\quad \tilde{B}_{23} = G_{23}h_0;$$

$$\tilde{D}_{11} = \frac{E_1h_0^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};\quad \tilde{D}_{22} = \frac{E_2h_0^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};\quad \tilde{D}_{12} = \frac{\nu_{12}E_2h_0^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})};\quad \tilde{D}_{66} = \frac{G_{12}h_0^3}{12}.$$

Если принимать активный материал упругим, m_0 является константой. Определяющие уравнения для слоистой пластины получим путем суммирования жесткостных характеристик активных и пассивного слоев. При этом после введения поправочного коэффициента K_s они имеют вид:

$$N_{xx} = A_{11}\varepsilon_{xx} + A_{12}\varepsilon_{yy}, ...;\ M_{xx} = D_{11}\kappa_{xx} + D_{12}\kappa_{yy} - M_0, ...;$$
$$Q_x = K_sA_{55}\varepsilon_{xz};\ Q_x = K_sA_{44}\varepsilon_{yz}, \tag{1.6}$$

где, например, жесткостные характеристики A_{11}, D_{11} определяются формулами:

$$A_{11} = \tilde{A}_{11} + \frac{2Eh_1}{1-\nu^2} + \frac{2E^2d_{31}^2h_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}, ...;\ D_{11} = \tilde{D}_{11} + \frac{2Em_1}{1-\nu^2} - \frac{2E^2d_{31}^2m_1}{(1-\nu)^2\tilde{\varepsilon}_{33}}, ... \tag{1.7}$$

Остальные формулы для жесткостных характеристик получаем из (1.4), (1.5) путем сложения выражений при соответствующих компонентах деформаций пластины.

§2. Постановка задачи о вынужденных колебаниях вязкоупругих пластин с актуаторами при учете деформаций сдвига и геометрической нелинейности.

Универсальные уравнения уточненной теории пластин (уравнения движения в усилиях и моментах, кинематические соотношения, граничные и начальные условия) имеют такой же вид, как и в чисто механической теории пластин [25]. Специфические особенности поведения материала описываются представленными выше определяющими уравнениями. Определяющие уравнения (1.6) для пластин формально совпадают с определяющими уравнениями термоупругости с заменой соответствующих температурных членов на величину M_0, зависящую от разности потенциалов, подводимой к электродам. Поэтому многие результаты, полученные в области термоупругости, можно перенести на электроупругость. Правда, физическая суть этих задач принципиально различна. Например, практически невозможно реализовать высокочастотное температурное воздействие на пластину. В то же время это легко сделать, подводя гармоническую разность потенциалов к нанесенным на поверхности пластины электродам.

Используя универсальные уравнения электроупругости и указанные выше определяющие уравнения, можно получить уравнения через перемещения и углы поворота. Учитывая указанную выше аналогию, эти уравнения легко получить из представленных в монографиях по термоупругости тонкостенных элементов. Сохраняя силы инерции лишь в направлении нормали, можно показать, что уравнения относительно перемещений и углов поворота совпадают с уравнениями [(10.1.31) – (10. 1. 35), [26]], в которых необходимо лишь модифицировать жесткостные характеристики и дать другую интерпретацию температурным членам. Представим эти уравнения в таком виде:

$$L_1(u,v,w)=0; \quad L_2(u,v,w)=0; \quad L_3(u,v,w,u_1,v_1)+q_0=I_0\ddot{w};$$
$$L_4(u_1,v_1,w)-\frac{\partial M_0}{\partial x}=0; \quad L_5(u_1,v_1,w)-\frac{\partial M_0}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

где выражения для $L_i(i=1-5)$ приведены в [26]. В них следует все упругие характеристики согласно принципу соответствия заменить на интегральные операторы Вольтера с использованием алгебры операторов [10]. Например, оператор L_1 совпадает с оператором (10.1.31), в котором упругие константы необходимо заменить на операторы Вольтера, так что

$$L_1(u,v,w)=A_{11}*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+A_{12}*\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)+$$
$$+A_{66}*\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{2.2}$$

Оператор $L_2(u,v,w)$ получаем из (2.2) следующими заменами: $u\to v, v\to u$, $x\to y$, $y\to x$, $A_{11}\to A_{22}$. Оператор L_4 является линейным и имеет вид:

$$L_4=D_{11}\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x\partial y}+D_{66}\left(\frac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_y}{\partial x\partial y}\right)-K_S A_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi\right)_x. \tag{2.3}$$

Оператор L_5 получаем из (2.3) путем замен: $\varphi_x\to\varphi_y, \varphi_y\to\varphi_x, x\to y, y\to x$, $D_{11}\to D_{12}$, $A_{55}\to A_{44}$. Оператор L_3 имеет вид:

$$L_3=K_S A_{55}*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right)+K_S A_{44}*\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)+N(u,v,w)+q(x,y,t)-I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{2.4}$$

Здесь при учете сил инерции только в поперечном направлении имеем

$$N=N_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+N_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{2.5}$$

§3. Аналитическое решение задачи электровязкоупругости для пластины с шарнирным опиранием торцов.

Как указано выше, операторы L_4, L_5 являются линейными относительно φ_x,φ_y,w. Рассмотрим резонансные колебания пластины в окрестности некоторой (например, первой) резонансной частоты колебаний прямоугольной пластины с размерами $0\le x\le a;\ 0\le y\le b$. Представим решение задачи в виде:

$$w=W_{mn}\sin(k_m x)\sin(p_n y); \quad \varphi_x=U_{mn}\cos(k_m x)\sin(p_n y);$$
$$\varphi_y=V_{mn}\sin(k_m x)\cos(p_n y) \quad (k_m=m\pi/a; p_n=n\pi/b), \tag{3.1}$$

удовлетворяющем граничным условиям шарнирного опирания. В аналогичном виде представим механическую и электрическую нагрузку: $M_0 = M_{mn}\sin(k_m x)\sin(p_m y)$, $q_0 = q_{mn}\sin(k_m x)\sin(p_n y)$. В дальнейшем индексы m, n опускаем. Подставляя эти выражения в операторы L_4, L_5, получаем

$$U = x_{11}M + w_1 W;\ V = y_{11}M + w_2 W. \tag{3.2}$$

Здесь коэффициенты при M и W являются операторами типа Вольтера, которые выражаются через электромеханические свойства материалов пластины и имеют вид:

$$x_{11} = \frac{p\Delta_{12} - k\Delta_{22}}{\Delta};\ w_1 = \frac{K_S pA_{44}\Delta_{12} - K_S kA_{55}\Delta_{22}}{\Delta};$$

$$y_{11} = \frac{k\Delta_{21} - p\Delta_{11}}{\Delta};\ w_2 = \frac{K_S kA_{55}\Delta_{21} - K_S pA_{44}\Delta_{11}}{\Delta}$$

$$(\Delta_{11} = k^2 D_{11} + p^2 D_{66} + K_S A_{55};\ \Delta_{22} = p^2 D_{22} + k^2 D_{66} + K_S A_{44};$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = kp\,(D_{12} + D_{66});\ \Delta = \Delta_{11}\Delta_{122} - \Delta_{12}^2).$$

Подставляя выражения (3.2) в операторы вида L_1, L_2, приходим к линейной системе интегро-дифференциальных уравнений относительно u и v:

$$\begin{aligned} &A_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = [C\sin(2kx)\cos(2py) + C_1\sin(kx)]W^2; \\ &A_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = [D\cos(2kx)\sin(2py) + D_1\sin(py)]W^2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где звездочки опущены, а для C, C_1, D и D_1 имеем формулы:

$$\begin{aligned} &C = -\frac{1}{4}A_{11}k^3 - \frac{1}{4}A_{12}kp^2 - \frac{1}{2}A_{66}kp^2;\ C_1 = \frac{1}{4}A_{11}k^3 - \frac{1}{4}A_{12}kp^2; \\ &D = -\frac{1}{4}A_{22}p^3 - \frac{1}{4}A_{12}k^2 p - \frac{1}{2}A_{66}k^2 p;\ D_1 = \frac{1}{4}A_{22}p^3 - \frac{1}{4}A_{12}k^2 p. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Граничные условия для u и v принимаем в таком виде:

$$u = 0,\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0\ \ (x = 0;\ a);\ \ v = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0\ \ (y = 0;\ b). \tag{3.5}$$

При таких граничных условиях решение системы (3.3) имеет вид:

$$u = W^2[A\cos(2py) + A_1]\sin(2kx);\ v = W^2[B\cos(2kx) + B_1]\sin 2py. \tag{3.6}$$

Операторные выражения для A, A_1, B, B_1 определяются выражениями:

$$A_1 = -C_1/(4A_{11}k^2);\ B_1 = -D_1/(4A_{22}p^2);\ A = \frac{a_{12}D - a_{22}C}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2};\ B = \frac{a_{12}C - a_{11}D}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2};$$

$$a_{11} = 4(k^2 A_{11} + A_{66}p^2);\ a_{22} = 4(p^2 A_{22} + A_{66}k^2);\ a_{12} = 4kp\,(A_{12} + A_{66}).$$

Подставим выражения (3.1), (3.2), (3.6) в операторное уравнение (2.4). Применяя к полученному уравнению метод Бубнова – Галеркина, после очень громоздких вычислений приходим к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению относительно функции времени $W(t)$:

$$I_0\ddot{W} + L^{(1)} * W + L^{(2)} * W^3 = q - Q * M. \quad (3.7)$$

Здесь $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, Q – операторные выражения Вольтера

$$L^{(1)} = k_S k^2 A_{55} + k_S k A_{55} w_1 + k_S p^2 A_{44} + k_S p A_{44} w_2 + A_{11}\left(\frac{1}{2}k^3 A - k^3 A_1\right) + A_{22}\left(\frac{1}{2}p^3 B - k^3 B\right)_1 +$$

$$+\frac{1}{2}A_{12}[k^2 p(B-2B_1) + kp^2(A-2A_1)];\ L^{(2)} = \frac{1}{32}k^4 A_{11} + \frac{1}{32}p^4 A_{22} + \frac{3}{16}k^2 p^2 A_{12} - \frac{1}{8}k^2 p^2 A_{66};$$

$$Q = K_S k A_{55} x_{11} + K_S p A_{44} y_{11}.$$

Принимаем, что вязкоупругие свойства пассивного материала описываются одним и тем же ядром, так что, например, $\tilde{A}_{ij} * W = A_{ij}[W - \int\limits_{-\infty}^{t} K(t-\tau)W(\tau)d\tau],\ldots$. Тогда в операторе $L^{(1)}$ величины w_1, w_2, A, A_1, B, B_1 следует принимать не операторами, а константами, так что операторами Вольтера остаются только A_{ij}. Аналогично, оператор Q также следует принять константой. Если это предположение не принимать, следует воспользоваться алгеброй операторов Вольтера. Так, например, при использовании для описания вязкоупругих свойств материала ядер Ю.Н.Работнова произведение, частное, сумма и разность этих ядер приводят снова к таким же операторам с модифицированными параметрами. Поэтому оператор $L^{(1)}$ можно представить в виде некоторого оператора с ядром, зависящим от всех параметров, входящих в выражение $L^{(1)}$. В результате получим $L^{(1)} * W \ = L_0[W - \int\limits_{-\infty}^{t} L_1(t-\tau)W(\tau)d\tau]$, где константа L_0 и ядро L_1 зависят от всех констант и параметров ядер, входящих в $L^{(1)}$.

Если принять, что влияние геометрической нелинейности и вязкости имеет один порядок малости, то оператор $L^{(2)}$ можно принять не оператором, а константой. Для решения интегро-дифференциального уравнения можно использовать методы нелинейной механики [8], а также метод Бубнова – Галеркина. При использовании асимптотических методов [8] любой оператор вида $L^{(1)} * w$ заменяется выражением $Lw + \mu\dot{w}$. При этом интегро-дифференциальное уравнение (3.7) представляется в форме

$$\ddot{W} + 2\tilde{\mu}_1\dot{W} + \omega_0^2 W + K_1 W^3 = q_1, \quad (3.8)$$

где

$$q_1 = (q - QM)/I_0. \quad (3.9)$$

Если пьезослои упругие, то Q является константой, пропорциональной подводимой к актуатору разности потенциалов $Q = \bar{Q}V_0$.

Детальное обсуждение решения уравнения (3.8) представлено в монографии [1]. При гармоническом нагружении оно имеет вид $W = W'\cos\omega t - W''\sin\omega t.$

В [1] получено алгебраическое кубическое уравнение для квадрата амплитуды колебаний $X = |W|^2 = (W')^2 + (W'')^2$:

$$b_3 X^3 + b_2 X^2 + b_1 X - b_0 = 0\ . \quad (3.10)$$

Коэффициенты $b_i (i = 0, 1, 2, 3)$ приведены в [1]. Там же представлен и график для АЧХ, который имеет стандартный для жесткой системы вид. Приведено также выражение для максимальной амплитуды колебаний $|W|_{\max}$.

После определения W из (3.10) находятся u_1 и u_2. Затем из (3.6) определяются u и v. Зная w, u_1, v_1, u, v, определим деформации, а из определяющих уравнений – усилия и моменты.

§4. Определение температуры диссипативного разогрева.

Температуру диссипативного разогрева, предполагая ее постоянной по толщине пластины, находим из решения стационарного уравнения энергии

$$\bar{\lambda}(\theta_{xx}+\theta_{yy})-(2\delta/h)\theta+D/h=0 \tag{4.1}$$

при соответствующих граничных и начальных условиях для температуры.

Диссипативная функция D определяется формулой

$$\begin{gathered} D=\frac{\omega}{2}\Big[A_{11}''\left|\varepsilon_{xx}\right|^2+2A_{12}''\left|\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\right|^2+A_{22}''\left|\varepsilon_{yy}\right|^2+2A_{66}''\left|\varepsilon_{xy}\right|^2+ \\ +D_{11}''\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right|^2+2D_{12}''\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right|^2+D_{22}''\left|\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right|^2+2D_{66}''\left|\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right|^2+ \\ +K_sA_{44}''\left|\frac{\partial w}{\partial y}+\varphi_y\right|^2+K_sA_{55}''\left|\frac{\partial w}{\partial x}+\varphi_x\right|^2\Big] \end{gathered} \tag{4.2}$$

(здесь введено обозначение $|ab|^2=a'b'+a''b''$).

Принимая геометрическую нелинейность и вязкость величинами одного порядка, при расчете диссипативной функции можно не учитывать нелинейные члены в кинематических соотношениях для $\left|\varepsilon_{xx}\right|^2$, $\left|\varepsilon_{yy}\right|^2$, $\left|\varepsilon_{xy}\right|^2$, $\left|\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\right|^2$.

Для случая теплоизолированных торцов пластины стационарное решение уравнения энергии с учетом решения задачи электромеханики определим в виде:

$$\theta=\theta_0+\theta_1\cos(2kx)+\theta_2\cos(2py)+\theta_3\cos(2kx)\cos(2py). \tag{4.3}$$

Константы $\theta_i (i=0-3)$ легко определим путем подстановки (4.3) в уравнение (4.1) и приравнивания коэффициентов при $1, \cos(2kx), \cos(2py), \cos(2kx)\cos(2py)$. Из-за их громоздкости выражения для θ_i опустим.

§5. Анализ полученного решения.

При использовании актуаторов для активного демпфирования колебаний пластин основная задача заключается в определении той разности потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки. Как видно из (3.8) – (3.9), на подводимую к актуатору разность потенциалов, определяемую из соотношения $M=q/Q$, нагрузка на пластину исчезает и амплитуда вынужденных поперечных колебаний становится равной нулю. При этом геометрическая нелинейность не влияет на разность потенциалов, которую необходимо подвести к электродам для компенсации механической нагрузки. Поэтому для расчета указанной разности потенциалов можно использовать более простую линейную теорию, детально изложенную, например, в [2, 3]. Для трансверсально-изотропного активного материала эта разность потенциалов определяется по формуле:

$$V_a^{yt}=V_a^{kl}\left\{1+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[m^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2n^2\right]\right\}. \tag{5.1}$$

Для основной моды $m=n=1$ из формулы (5.1) следует

$$V_a^{yt} = V_a^{kl}\left\{1+\frac{2}{1-\nu}\left(\frac{G}{G'}\right)\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\right\}. \qquad (5.2)$$

При этом поправка к классическому результату, полученному на основе гипотез Кирхгофа – Лява, зависит от отношения модулей сдвигов (G/G') и отношения толщины пластины к размеру a. В зависимости от их значений величина поправки может быть достаточно большой.

Из выражения (5.2) и из физических соображений следует, что при колебаниях по первой моде максимальная температура имеет место в центре пластины, когда $x = a/2$, $y = b/2$, и равна

$$\theta_{\max} = |\theta_0| + |\theta_1| + |\theta_2| + |\theta_3|. \qquad (5.3)$$

Приравнивая максимальную температуру точке деградации материала θ_k, получим критическую механическую или электрическую нагрузку, при превышении которой пластина перестает выполнять свое функциональное назначение. Например, если в качестве точки деградации выбирается точка Кюри пьезоматериала, при подводе к электродам гармонической разности потенциалов колебания пластины не будут возбуждаться из-за деполяризации материала.

При электрической нагрузке, превышающей критическую, возникает задача о расчете критического времени, при котором максимальная температура достигает точки Кюри. Для этого необходимо решать нестационарную задачу для уравнения теплопроводности при нагрузке, превышающей критическую. Решая эту задачу для разных амплитуд электрического нагружения, получим кривую типа Веллера, которая асимптотически сверху приближается к критической нагрузке [5, 21, 23].

Заключение.

В данной статье на основе уточненных гипотез С.П.Тимошенко, дополненных адекватными им гипотезами относительно распределения электрических полевых величин, разработана модель вынужденных резонансных колебаний гибких вязкоупругих прямоугольных пластин с пьезоэлектрическими актуаторами. Для учета геометрической нелинейности в кинематических соотношениях учитываются квадраты углов поворота. Методом Бубнова – Галеркина задача сведена к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению с кубической нелинейностью относительно поперечного прогиба. Для его решения применены методы нелинейной механики. Получено кубическое алгебраическое уравнение относительно квадрата амплитуды поперечных колебаний. Определена разность потенциалов, которую необходимо подвести к актуатору для компенсации механической нагрузки, в результате чего амплитуда вынужденных резонансных колебаний равна нулю. С использованием полученного решения задачи электромеханики определена диссипативная функция и представлено приближенное аналитическое решение уравнения теплопроводности с известным источником тепла. Обсуждены вопросы о тепловом разрушении пластины в результате достижения температурой точки Кюри и деполяризации активного материала.

Р Е З Ю М Е . Представлено модель вимушених резонансних коливань і вібророзігріву в'язкопружних пластин з п'єзоактуаторами з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. Методом Бубнова – Гальоркіна отримано наближений аналітичний розв'язок сформульованої задачі для прямокутної шарнірно опертої пластини. Проаналізовано вплив геометричної нелінійності та зсувних деформацій на ефективність активного демпфування коливань за допомогою п'єзоактуаторів.

1. *Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Звягильский Е.Л., Кобец А.С.* Вынужденные колебания и диссипативный разогрев неупругих тел. – К.: Наук. думка, 2014. – 520 с. – (Прикладная механика упруго-наследственных сред: в 3-х томах. Т.4.).

2. *Гринченко В. Т., Улитко А.Ф.,Шульга Н.А.* Электроупругость. – К.: Наук. думка, 1989. – 290 с.– (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т.5).

3. *Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф.* Электротермовязкоупругость. – К.: Наук. думка, 1988. – 328 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти томах. Т. 4).
4. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: ЖГТУ, 2005. – 428 с.
5. *Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т.В.* Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях // Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Механіка». – 2011. – **2**. – Вип.15, № 5. – С. 68 –75.
6. *Матвеев В.В*. Демпфирование колебаний деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1985. – 264 с.
7. *Механика композитов*: в 12-ти томах.Т.1 – 12 / Под общей редакцией А.Н.Гузя. – К.: «А.С.К.», 1992. – 2005 с.
8. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Одночастотные колебания. – К.: Институт математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
9. *Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж.* Демпфирование колебаний.– М: Мир, 1988. – 448 с.
10. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
11. *Agnes G.S.* Development of a Modal Model for Simultaneous Active and Passive Piezoelectric Vibration Suppression // J. of Intelligent Material Systems and Structurals. – 1995. – **6**, N 4. – P. 482 – 487.
12. *Bae G.S., Kwak M.K., Inman D.J.* Vibration Suppression of a Cantilever Beam Using Eddy Current of Damper // J.S.V. – 2005. – **284**, N 3 – 5. – P. 805 – 814.
13. *Gabbert U., Tzou H.S.* Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht: Kluver Academic Pub., 2001. – 384 p.
14. *Guz I.A., Zhuk Y.A., Kashtalyan M.* Dissipative Heating and Thermal Fatigue Life Prediction for Structures Containing Piezoactive Layers // Technische Mechanik. – 2012. – **32**, 2 – 5. – P. 238 – 250.
15. *Encyclopedia* of Smart Materials, 1–2 (ed. Schwartz, Mal). – New York: Wiley & Sons, 2002. – 1176 p.
16. *Jones D.I.* Handbook of Viscoelastic Vibration Damping. – New York: Wiley&Sons, 2001. – 412 p.
17. *He J.F., Ma D.-A.* Analysis of flexural vibration of viscoellastically damped sandswich plates // J. of Sound and Vibration. – 1988. – **126**, N 1. – P. 37 – 47.
18. *Karlash V.L.* Influence of Electric Loadding Conditions on the Vibrations of Piezoceramic Resonators // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 220 – 227.
19. *Karlash V.L.* Phase – Frequency Characteristics of the Longitudinal and Transverse Vibrations of Planar Piezoceramic Transformers // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N3. – P.349 – 355.
20. Karlash V.L. Effect of Split or Partial Electrodes on the Forced Vibrations of Bear – Type Piezoceramic TransducersInt // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 535 – 546.
21. *Karnaukhova T. V.* Thermal Depolarization of a Piezoelectric Layer under Harmonic Quasistatic Electric Loading // Int. App. Mech. – 1998. – **34**, N. 4. – P. 373 – 376.
22. *Karnaukhov V.G.* Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations (Review) // J. of Thermal Stresses. – 2005. – **28,** N 6 – 7. – P. 783 – 815.
23. *Karnaukhov V.G., Karnaukhova T.V., McGillicaddy O.* Thermal failure of flexible rectangular viscoelastic plates with distributed sensors and actuators // J. of Engineering Mathematics. – 2013. – **78**, N 1. – P. 199 – 212.
24. *Karnaukhov V.G., Kirichok I.F, Kozlov V.I.* Thermomechanics of Inelastic Thin – Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators under Harmonic Loading (Review) // Int. App. Mech. – 2017. – **53**, N 1. – P. 6 – 59.
25. *Kirichok I.F.* Damping the Radial Vibrations and Self – Heating of Viscoelastic Shell Elements with Piezoelectric Sensor and Actuator // Int. App. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 354 – 358.
26. *Reddy J.N.* Theory and analysis of Elastic Plates and Shells. – Boca Raton: CRC, 2007. – 547 p.
27. *Tani J., Takagi T., Qui J.* Intelligent material systems: Application of functional materials // Appl. Mech. Rev. – 1998. – **51**, N 8. – P. 505 – 521.
28. *Tzou H.S.* Piezoelectric shells (Distributed sensing and control of continua). – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 382 p.
29. *Tzou H.S., Bergman L.A.* Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 374 p.

Поступила 30.03.2017 Утверждена в печать 10.10.2017