

Б. П. Маслов

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА
ПУАССОНА ДЛЯ ВЯЗКОПРУГИХ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины,
ул. Нестерова, 3, Киев, 03057, Украина; maslov@inmech.kiev.ua*

Abstract. With using the Laplace – Carson transform and numerical inversion of obtained solutions into the original area, a dependence is established between heredity kernels giving the scalar properties of isotropic linear-viscoelastic materials under the complex stress state. The hereditary creep kernel characterizing the time behavior of viscoelastic Poisson's ratio is identified. The problems of analysis of the shear creep deformations and the transverse creep under axial loading are experimentally approved with allowance on with time-dependent Poisson's ratio.

Key words: linear viscoelasticity, Laplace-Carson transform, isotropic materials, complex stress state, fractional viscoelastic kernel, axial creep kernel, shear relaxation kernel, Poisson's ratio, experimental approval.

Введение.

В наследственной теории вязкоупругости механические свойства среды задаются упругими постоянными, ядрами ползучести и ядрами релаксации [1, 2, 6, 7, 13]. Задача идентификации ядер ползучести и релаксации, установление связи между ядрами и определения параметров ядер составляет одну из основных задач теории вязкоупругости [8, 9]. При одноосном напряженном состоянии ядра наследственности и параметры ядер определяются непосредственно по результатам аппроксимации данных прямых измерений деформаций или напряжений в процессе ползучести или релаксации функциями, задающими ядра. Детальный анализ методов выбора структуры ядер и методов определения параметров ядер линейно вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии представлен в [2]. Задача идентификации ядер наследственности при сложном напряженном состоянии является более сложной и сводится к установлению зависимости между ядрами наследственности при сложном и одноосном напряженном состояниях. Одноосное напряженное состояние реализуется непосредственно в эксперименте и рассматривается как базовое. В работе [8] для изотропных линейно-вязкоупругих материалов установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести, а также ядрами продольной и поперечной ползучести, построенными по результатам испытаний на одноосное растяжение. В работе [9] установлена зависимость между ядрами сдвиговой и объемной ползучести при сложном напряженном состоянии и ядрами продольной и сдвиговой ползучести при одноосном растяжении и чистом кручении.

При расчете распределения напряжений и деформаций в трехмерных задачах при сложном нагружении в линейной вязкоупругости имеет большое значение коэффициент Пуассона ν [5, 7, 10, 11]. В частности, трехмерные поля напряжений, вызванных концентраторами типа неоднородностей, трещин, существенным образом зависят от коэффициента Пуассона [11]. Поскольку в вязкоупругих материалах коэффициент Пуассона зависит от времени, то локальные характеристики напряженного состояния также могут изменяться со временем. Так, в механике материалов большое практичес-

кое значение имеет коэффициент концентрации напряжений: отношение максимального напряжения на границе неоднородности к напряжению в удаленном поле. В трехмерной теории упругости выражение для коэффициента концентрации напряжений в большинстве расчетных случаев содержит коэффициент Пуассона ν . Имеет смысл поэтому рассмотреть эффект релаксации коэффициента Пуассона в материалах с вязкоупругим последствием. Обычно предполагают [5, 7], что для асимптотически короткого времени материал ведет себя упруго, причем $\nu = 0,25$. А для асимптотически большого времени коэффициент Пуассона увеличивается до $\nu = 0,5$. Коэффициент концентрации напряжений при этом изменяется, возрастая на величину до 20%. Кроме того, в полимерных материалах изменение поперечной деформации и коэффициента Пуассона может сопровождаться также релаксацией величины сдвигового модуля на несколько порядков [10].

В случае изотропных материалов представляет практический интерес процедура определения характеристик объемной ползучести с учетом зависимости от времени коэффициента Пуассона. Ядра объемной ползучести, как подтверждают работы [7, 9, 13], являются трудно измеряемыми величинами, поэтому существует необходимость разработки методики определения реологических характеристик объемной ползучести по результатам базовых испытаний. При вязкоупругом поведении материала будем рассматривать коэффициент Пуассона как отношение зависящих от времени поперечной $\varepsilon_{22}(t)$ и продольной $\varepsilon_{11}(t)$ деформаций при осевом нагружении образца $\sigma_{11} = \text{const}$ [5, 7, 10]. Исходя из этого определения, установим зависимость между ядрами наследственности, задающими скалярные свойства изотропных линейно-вязкоупругих материалов в определяющем уравнении, и ядром операторного коэффициента Пуассона.

§1. Постановка задачи.

Рассмотрим ползучесть и релаксацию напряжений изотропных однородных линейно вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. В контексте инфинитезимальной теории вязкоупругости определяющее соотношение между деформациями и напряжениями предполагаем линейным [7, 8, 9, 13]. Используем гипотезу о том, что мгновенное значение тензора деформаций зависит от всей истории изменения компонент тензора напряжений. Таким образом, предполагая, что история напряжений является непрерывной, определяющие уравнения можно записать в форме интегральной свертки Стилтеса [6, 7, 13]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \sigma_{kl}(t-t_1) dJ_{ijkl}(t_1). \quad (1.1)$$

Здесь функции ползучести $J_{ijkl}(t)$ образуют тензор четвертого ранга такой, что $J_{ijkl}(t) = 0$ при $-\infty < t < 0$, и каждый элемент имеет ограниченную вариацию в любом замкнутом подинтервале из области $-\infty < t < \infty$. Таким образом, определяющее соотношение (1.1) инвариантно по отношению к переносу во времени.

Полагая $\sigma_{ij} = 0$ для $t < 0$ и предполагая, что $J_{ijkl}(t)$ и ее первая производная непрерывны на интервале $0 \leq t < \infty$, (1.1) можно записать в форме

$$\varepsilon_{ij}(t) = J_{ijkl}(0)\sigma_{kl}(t) + \int_0^t \sigma_{kl}(t-t_1) \frac{dJ_{ijkl}(t_1)}{dt_1} dt_1. \quad (1.2)$$

В работах [1, 8] принята другая форма соотношений, полученная из (1.2) заменой переменной $u = t - t_1$ и интегрированием по частям [6]

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-u) \frac{d\sigma_{kl}(u)}{du} du. \quad (1.3)$$

Соотношение между деформациями и напряжениями (1.3) является одной из форм общих вязкоупругих определяющих законов. Функции интегрирования $J_{ijkl}(t)$

определяют вязкоупругие свойства материала. Мгновенные деформации определяются мгновенными значениями и историей изменения напряжений. Методики определения функций ползучести для изотропных тел изложены в [8, 9].

Если ввести девиаторные компоненты деформаций e_{ij} и напряжений s_{ij} , то (1.3) можно свести к виду [8]

$$e_{ij}(t) = \int_0^t J_1(t-t_1) \frac{ds_{kl}(t_1)}{dt_1} dt_1 \quad (1.4)$$

и

$$e_m(t) = \int_0^t J_2(t-t_1) \frac{ds_m(t_1)}{dt_1} dt_1, \quad (1.5)$$

где

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - e_m \delta_{ij}; \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - s_m \delta_{ij}; \quad e_m = \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}; \quad s_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk}. \quad (1.6)$$

Подобным же образом получаем интегральную форму изотропных соотношений релаксации [9, 13]

$$s_{ij}(t) = \int_0^t E_1(t-t_1) \frac{de_{kl}(t_1)}{dt_1} dt_1; \quad (1.7)$$

$$s_m(t) = \int_0^t E_2(t-t_1) \frac{de_m(t_1)}{dt_1} dt_1, \quad (1.8)$$

где $E_1(t)$ и $E_2(t)$ – две независимые изотропные функции релаксации. При этом $J_1(t)$ и $E_1(t)$ – функции ползучести и релаксации, соответствующие состояниям сдвига. Функции $J_2(t)$, $E_2(t)$ описывают состояния объемного расширения.

Соотношения (1.4) и (1.5) зависят от (1.7) и (1.8), соответственно. Покажем это, используя преобразование Лапласа – Карсона [6, 7]. Пусть $f(t)$ – некоторая непрерывная функция на интервале $0 \leq t < \infty$, и пусть при $t \rightarrow \infty$ она ведет себя как экспонента. Тогда преобразование Лапласа – Карсона (LC) функции $f(t)$ определяется следующим образом [2]:

$$LC\{f(t)\} = \hat{f}(z) = z \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt. \quad (1.9)$$

Применив LC преобразование к соотношениям (1.4), (1.5), (1.7) и (1.8), получим равенства:

$$\hat{e}_{ij}(z) = \hat{J}_1(z) \hat{s}_{ij}(z); \quad \hat{e}_m(z) = \hat{J}_2(z) \hat{s}_m(z); \quad (1.10)$$

$$\hat{s}_{ij}(z) = \hat{E}_1(z) \hat{e}_{ij}(z); \quad \hat{s}_m(z) = \hat{E}_2(z) \hat{e}_m(z). \quad (1.11)$$

Из (1.10), (1.11), в частности, следует

$$\hat{E}_\alpha(z) = (\hat{J}_\alpha)^{-1}; \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.12)$$

Изотропные функции ползучести и релаксации при простом сдвиге и объемном расширении принимаем в виде [9]

$$\begin{aligned} G(t) &= E_1(t)/2; \quad B(t) = E_2(t)/3; \\ G^{-1}(t) &= J_1(t)/2; \quad B^{-1}(t) = J_2(t)/3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Функции релаксации, соответствующие другим однородным напряженным состояниям, можно также определить через $E_1(t)$ и $E_2(t)$. Сравнение LC преобразования изотропных вязкоупругих соотношений между напряжениями и деформациями изо-

тропной теории показывает, что функции релаксации, отвечающие другим напряженным состояниям, определяются с помощью соотношений теории упругости путем замены упругих модулей LC преобразованием соответствующих функций релаксации теории вязкоупругости [7, 13]. Так, например, из соотношений изотропной теории упругости следует, что в области изображений функция релаксации $\hat{E}(z)$, характеризующая состояние одноосного растяжения, определяется через преобразованные функции $\hat{G}(z)$, $\hat{B}(z)$ как

$$\hat{E}(z) = \frac{3\hat{E}_1(z)\hat{E}_2(z)}{\hat{E}_1(z) + 2\hat{E}_2(z)} = \frac{9\hat{G}(z)\hat{B}(z)}{\hat{G}(z) + 3\hat{B}(z)}. \quad (1.14)$$

При одномерном растяжении вдоль оси x_1 в условиях ползучести ($\sigma_{11} = \sigma^0 = \text{const}$) вязкоупругий коэффициент Пуассона $\nu^c(t)$ определим как принятое со знаком минус отношение зависящей от времени поперечной деформации $\varepsilon_{22}(t)$ к продольной $\varepsilon_{11}(t)$. В экспериментах на релаксацию напряжений осевая деформация является постоянной: $\varepsilon_{11} = \varepsilon^0 = \text{const}$. При этом LC преобразование для коэффициента Пуассона, выраженное через преобразования $\hat{G}(z)$ и $\hat{B}(z)$, дается формулой

$$\nu^c(z) = \frac{\hat{E}_2(z) - \hat{E}_1(z)}{\hat{E}_1(z) + 2\hat{E}_2(z)} = \frac{3\hat{B}(z) - 2\hat{G}(z)}{2[\hat{G}(z) + 3\hat{B}(z)]}, \quad (1.15)$$

которая следует из подобного же соотношения теории упругости. Аналогичная процедура обращения применяется и к преобразованиям функций ползучести.

Далее предполагаем существование LC преобразования для всех переменных, зависящих от времени. Тогда решение задачи вязкоупругости получаем непосредственно из задачи теории упругости путем замены упругих модулей G, B , соответственно, на $\hat{G}(z), \hat{B}(z)$. Окончательное решение получаем путем обращения преобразованного решения в область переменной времени t . В общем случае из решений задачи упругости можно получить LC преобразования решений задач вязкоупругости, заменив модуль упругости и упругий коэффициент Пуассона преобразованиями функции релаксации и вязкоупругого коэффициента Пуассона. Такая связь решения задачи вязкоупругости с решением соответствующей задачи упругости существует по принципу соответствия или упруго-вязкоупругой аналогии. При этом существенным является методика задания механических свойств в виде, допускающем процесс обращения аналитически или численно [2].

§2. Идентификация реологических параметров коэффициента Пуассона в линейной теории вязкоупругости.

В случае бесконечно малых деформаций изотропных тел упругий коэффициент Пуассона ν определяется как отношение деформации поперечного сжатия $-\varepsilon_{22}$ к продольному удлинению ε_{11} при опыте на одноосное нагружение вдоль оси x_1 . Таким образом, имеем

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}(0)}{\varepsilon_{11}(0)}. \quad (2.1)$$

Если обобщить это определение на вязкоупругие материалы, то следует учесть зависимость (2.1) от времени t . При этом возможны различные интерпретации этой функции при разных условиях эксперимента, принятой модели вязкоупругого деформирования и пр.

Рассмотрим, прежде всего, один из представленных в [8, 9] базовых экспериментов, которые используются при идентификации параметров ядер вязкоупругости, а именно, ползучесть при одноосном нагружении. Тогда, обозначив вязкоупругий коэффициент Пуассона при ползучести $\nu^c(t)$, можно записать

$$\nu^c(t) = -\frac{\varepsilon_{22}(\sigma_{11}, t)}{\varepsilon_{11}(\sigma_{11}, t)}, \quad (2.2)$$

где $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$ в соответствии с (1.3) представляют собой зависящие от времени продольную и поперечную деформации ползучести; $\sigma_{11} = \sigma_{11}(0)$ – постоянная осевая нагрузка.

В условиях эксперимента на релаксацию из (1.3) для коэффициента Пуассона $\nu^r(t)$ будем иметь формулу

$$\nu^r(t) = -\frac{\varepsilon_{22}(\varepsilon_{11}, t)}{\varepsilon^0}, \quad (2.3)$$

поскольку при релаксации $\varepsilon_{11} = \varepsilon^0$ является константой. В случае комбинированного нагружения [9] эти соотношения усложняются, поскольку разные истории нагружения приводят к разным зависимостям рассматриваемых функций от времени.

Вязкоупругие коэффициенты Пуассона в форме (2.2) и (2.3), очевидно, не равны между собой. Поэтому представляет интерес оценить насколько велика разница между ними в рамках предложенной ранее модели с ядрами типа Работнова. Количественный прогноз величины изменения коэффициента Пуассона во времени имеет, в ряде случаев, большое значение. Например, в [4] отмечается важность этого параметра при оценке долговечности фундаментов промышленных объектов. Это обусловлено необходимостью не допустить растягивающих напряжений, которые могут со временем возникнуть вследствие изменения коэффициента Пуассона в условиях двумерного напряженного состояния фундамента.

Тензор деформации в изотропной модели вязкоупругого тела разложим на девиаторную и объемную составляющие [9]. Тогда определяющие соотношения запишем в форме, предложенной Кристенсенем

$$e_{ij}(t) = (J_1 * ds_{ij})(t); \quad e_m(t) = (J_2 * ds_m)(t), \quad (2.4)$$

где символом $*$ обозначена операция интегральной свертки Стилтгеса

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^t f(t-t_1)g(t_1)dt_1; \quad (2.5)$$

дифференциал $df(t)$ вычислен через производную по времени $df(t) = \frac{df(t)}{dt} dt$.

Используя общие трехмерные определяющие уравнения линейной теории вязкоупругости, для случая базового эксперимента на ползучесть получаем

$$\nu^c(t) = \frac{[J_1(t) - J_2(t)]\sigma_{11}}{2[J_1(t) + J_2(t)]\sigma_{11}}. \quad (2.6)$$

Сравнивая это выражение с формулой, определяющей коэффициент Пуассона при релаксации

$$\hat{\nu}^r(z) = \frac{3\hat{B}(z) - 2\hat{G}(z)}{2(3\hat{B}(z) + \hat{G}(z))} = \frac{\hat{E}(z)}{2\hat{G}(z)} - 1, \quad (2.7)$$

находим, что поперечная деформация может быть выражена при помощи интегральной свертки [13]

$$\hat{\varepsilon}_{22}(z) = -\hat{\nu}^r(z)\hat{\varepsilon}_{11}(z); \quad \varepsilon_{22}(t) = -(\nu^r * d\varepsilon_{11})(t). \quad (2.8)$$

Учитывая (2.6), (2.8), и комбинируя их, получаем операторное соотношение между двумя коэффициентами Пуассона в вязкоупругой области

$$\nu^c(t) = \frac{(\nu^r * dJ_{11})(t)}{J_{11}(t)} = (\nu^r * dg_{11})(t) / g_{11}(t). \quad (2.9)$$

Здесь $J_{11}(t)$ – функция ползучести, определяемая из базового эксперимента, причем

$$J_{11}(t) = \frac{1}{E} g_{11}(t) = \frac{1}{3} [2J_1(t) + J_2(t)], \quad (2.10)$$

$g_{11}(t) = \varepsilon_{11}(t) / \varepsilon_{11}(0) = EJ_{11}(t)$ – приведенная, безразмерная функция осевой ползучести. В случае мгновенно упругого деформирования из (2.10) получаем известное соотношение [7]

$$J_{11}(0) = \frac{1}{E} = \frac{1}{9B} + \frac{1}{3G}. \quad (2.11)$$

Для материалов, деформируемых в условиях ползучести, можно указать область напряжений, в пределах которой величина деформации ползучести пропорциональна приложенному напряжению, т.е. область линейной ползучести. Для исследованных ранее полимеров [2, 8] и горных пород [4] граница линейной области соответствует высоким напряжениям, сравнимым по величине с пределом прочности. Поэтому значительный практический интерес представляет описание кривых ползучести на первом участке линейного деформирования.

Одной из функций, монотонно убывающих с ростом аргумента и имеющей слабую особенность при $t = 0$, является экспоненциальная функция дробного порядка Работнова [2, 13]. Эта функция успешно применяется в качестве ядра линейного (1.1) интегрального уравнения, хорошо описывает в рамках линейной теории ползучести поведение полимеров [7] и горных пород. В настоящее время имеется хорошо разработанный математический аппарат [1, 7, 13] решения краевых задач теории линейной наследственности, использующий эти ядра в качестве исходных.

Определяющие уравнения ползучести, задающие зависимость между компонентами тензора деформаций ε_{ij} , тензора напряжений σ_{ij} и временем t , запишем в виде [7, 8]

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \frac{1}{2G} g_1(t); \quad g_1(t) = 1 + (\xi / \beta)_1 (1 - f(m_1, \beta_1, t)); \\ J_2(t) &= \frac{1}{3B} g_2(t); \quad g_2(t) = 1 + \xi_2 / \beta_2 (1 - f(m_2, \beta_2, t)), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $f(m, \beta, t)$ – функция Миттаг – Леффлера

$$f(m, \beta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta t^m)^n}{\Gamma(1 + mn)} \quad (m = 1 + \alpha); \quad (2.13)$$

G – модуль сдвига; B – модуль объемного расширения; $\xi, \alpha, \beta, \gamma$ – реологические параметры.

В линейной теории вязкоупругости практически важной задачей является идентификация ядер ползучести $K(\alpha, \beta, t)$ и релаксации $R(\alpha, \gamma, t)$, при этом

$$K(\alpha, \beta, t) = -\frac{1}{\beta} \frac{d}{dt} f(m, \beta, t). \quad (2.14)$$

Если использовать (2.13), (2.14), то получим выражения для ядер

$$K(\alpha, \beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\beta t^m)^n}{\Gamma[m(n+1)]}, \quad m = 1 + \alpha. \quad (2.15)$$

$$R(\alpha, \gamma, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\gamma t^m)^n}{\Gamma[m(n+1)]}, \quad m = 1 + \alpha, \quad \gamma = \xi + \beta. \quad (2.16)$$

Запишем эти соотношения в области переменных LC преобразования:

$$\begin{aligned}
LC\{K(\alpha, \beta, t)\} &= \hat{K}(\alpha, \beta, z) = z(z^m + \beta)^{-1}; \quad m = 1 + \alpha; \\
LC\{R(\alpha, \gamma, t)\} &= \hat{R}(m, \gamma, z) = z(z^m + \gamma)^{-1}; \quad \gamma = \xi + \beta; \\
LC\{f(m, \beta, t)\} &= \hat{f}(m, \beta, z) = z^m(z^m + \beta)^{-1}. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Между ядрами ползучести и релаксации в (2.15) и (2.16) существует интегральная связь [7, 13]

$$R(t) - K(t) = \xi \int_0^t K(t-t_1)R(t_1)dt_1 = \xi K(t) * R(t), \quad (2.18)$$

которая позволяет определить значения параметров одного ядра по значениям параметров другого [8, 9].

Идентификация ядер ползучести и ядер релаксации в (2.15) осуществлена [2, 8] на основе двух групп базовых экспериментов на ползучесть при постоянных напряжениях. Первая группа базовых экспериментов включает испытания сплошных цилиндрических образцов на ползучесть при одноосном растяжении с замером продольных и поперечных деформаций. Одномерные зависимости между напряжениями, деформациями и временем, задаются в этом случае уравнениями

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{E} g_{11}(t) * d\sigma_{11}(t); \quad \varepsilon_{22}(t) = -\frac{\nu}{E} g_{21}(t) * d\sigma_{11}(t), \quad (2.19)$$

которые при $\sigma_{11} = \sigma^0 = const$ сводятся к уравнениям

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{\sigma^0}{E} \left(1 + \xi_{11} \int_0^t K_{11}(t_1) dt_1 \right) = \frac{1}{E} g_{11}(t) \sigma^0; \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{22}(t) = -\frac{\nu \sigma^0}{E} \left(1 + \xi_{21} \int_0^t K_{21}(t_1) dt_1 \right) = -\frac{\nu}{E} g_{21}(t) \sigma^0. \quad (2.21)$$

Здесь $\varepsilon_{11}(t)$ и $\varepsilon_{22}(t)$ – продольная и поперечная деформации, включающие упругую деформацию и деформацию ползучести; $K_{11}(t)$ и $K_{21}(t)$ – ядра продольной и поперечной ползучести; $g_{11}(t)$ и $g_{12}(t)$ – приведенные функции ползучести; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; ξ_{11} и ξ_{21} – реологические параметры.

Для коэффициента поперечной деформации в области преобразованных переменных получаем

$$\hat{\varepsilon}_{22}(z) = -\frac{1}{2} [1 - \hat{J}_b(z) \hat{E}(z)] \hat{\varepsilon}_{11}(z), \quad (2.22)$$

которое после перехода в область оригиналов запишем в виде

$$\varepsilon_{22}(t) = -\frac{1}{2} \left(\varepsilon_{11}(t) - \frac{1}{3B} \int_0^t E(t-t_1) \frac{d\varepsilon_{11}(t_1)}{dt_1} dt_1 \right); \quad (2.23)$$

т.е. при постоянной объемной деформации с учетом (2.22) коэффициент Пуассона выражается формулой

$$\nu^r(t) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3B} E(t) \right]. \quad (2.24)$$

Если в теле реализуется процесс ползучести, то исходя из условия

$$\hat{\varepsilon}_{22}(z) = -\frac{1}{2} \left[\hat{\varepsilon}_{11}(z) - \frac{1}{3B} \hat{E}(z) \hat{J}_{11}(z) \sigma^0 \right], \quad (2.25)$$

получим

$$v^c(t) = -\frac{\varepsilon_{22}(t)}{\varepsilon_{11}(t)} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3B} \frac{1}{J_{11}(t)} \right]. \quad (2.26)$$

Это выражение можно записать как функцию от ранее определенного коэффициента Пуассона при релаксации

$$v^c(t) = v^r(t) + \frac{1}{3B} E(t) \left[1 - \frac{1}{E(t)J_{11}(t)} \right]. \quad (2.27)$$

Вторая группа базовых экспериментов, рассмотренных в [8], включает испытания сплошных цилиндрических образцов на ползучесть при одноосном растяжении с замером продольных деформаций, а также испытания тонкостенных трубчатых образцов на ползучесть при чистом кручении с замером угловых деформаций. В одномерных моделях ползучести используют соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{1}{E} \left(\sigma_{11}(t) + \xi_{11} \int_0^t K_{11}(t-t_1) \sigma_{11}(t_1) dt_1 \right); \\ \varepsilon_{23}(t) &= \frac{1}{2G} \left(\sigma_{23}(t) + \xi_{23} \int_0^t K_{23}(t-t_1) \sigma_{23}(t_1) dt_1 \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

которые при $\sigma_{11} = \sigma^0 = \text{const}$ и $\sigma_{23} = \tau^0 = \text{const}$ сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) &= \frac{\sigma^0}{E} \left(1 + \xi_{11} \int_0^t K_{11}(t_1) dt_1 \right) = \frac{1}{E} g_{11}(t) \sigma^0; \\ \varepsilon_{23}(t) &= \frac{\tau^0}{2G} \left(1 + \xi_{23} \int_0^t K_{23}(t_1) dt_1 \right) = \frac{1}{2G} g_{23}(t) \tau^0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Здесь τ^0 – касательное напряжение кручения; $2\varepsilon_{23}(t)$ – угловая деформация, включающая упругую деформацию и деформацию ползучести; $K_{23}(t)$ – ядро сдвиговой ползучести; $g_{23}(t)$ – приведенная функция сдвиговой ползучести; G – модуль сдвига; ξ_{23} – реологический параметр. Остальные обозначения совпадают с принятыми в (2.19) – (2.21).

Ядра ползучести $K(\alpha, \beta, t)$ и релаксации $R(\alpha, \gamma, t)$ в (1.1), (1.2), (1.7) – (1.10) аппроксимируются дробно-экспоненциальными функциями [2, 8]

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta, t) &= t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]}; \\ R(\alpha, \gamma, t) &= t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n (t)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha)]} \quad (\gamma = \xi + \beta), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где α , β и γ – параметры ядер ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$, $\gamma > 0$), ξ – реологический параметр, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Установленная здесь зависимость между ядрами ползучести в (1.1) или ядрами релаксации в (1.2), задающими скалярные свойства линейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии, дает возможность провести анализ изменения коэффициента Пуассона с учетом объемного деформирования.

§3. Метод определения параметров дробно-экспоненциальных ядер с использованием преобразования Лапласа – Карсона (LC).

Метод предложен и подробно описан в [9], основан на обработке численно преобразованных экспериментальных кривых ползучести преобразованным уравнением ползучести с дробно-экспоненциальным ядром в пространстве изображений.

3.1. Исходные соотношения. Для определения параметров дробно-экспоненциальных ядер применяется LC преобразование. Параметры ядер определяются непосредственно по изображению без перехода к оригиналу. Задача сводится к преобразованию исходного уравнения ползучести, численному преобразованию экспериментальной кривой ползучести и аппроксимации экспериментальных данных в пространстве изображений.

Исходная информация задается в виде совокупности значений времени t и соответствующих им значений приведенных функций ползучести $g(t)$. Т.е. задача состоит в том, чтобы по имеющейся совокупности точек (t_i, g_i) определить параметры α, β, ξ аппроксимирующей кривой $g(t)$, построенной по формулам (2.17). Изображение уравнения сдвиговой ползучести (2.29) в пространстве LC преобразования записывается в виде [2]

$$\hat{\varepsilon}_{23}(z) = z \int_0^{\infty} \varepsilon_{23}(t) e^{-zt} dt = \frac{\tau^0 1}{2G} \left[1 + \frac{\xi_{23}}{\beta_{23} + z^{1+\alpha_{23}}} \right] = \frac{\tau^0}{2G} \hat{g}_{11}(z), \quad (3.1)$$

где z – переменная преобразования. Искомые реологические параметры α_{23}, β_{23} и ξ_{23} входят в выражение (3.1) в явном виде.

Исходная экспериментальная кривая функции ползучести $g_{23}(t)$ задается таблично в виде совокупности значений (t_i, g_{23}^i) , $i = \overline{0, N}$. В результате численного преобразования исходной экспериментальной кривой (t_i, g_{23}^i) получаем изображение приведенной функции ползучести $\hat{g}(z)$ в виде совокупности точек в осях $z, \hat{g}(z)$. Далее задачу идентификации параметров формулируем для изображений. Определяем далее параметры кривой, которые обеспечивают минимальное отклонение этой кривой от полученной совокупности точек (z_j, \hat{g}_{23}^j) . Для этого требуется вычислить интегралы вида

$$\hat{g}(z_j) = z_j \int_0^{\infty} g_{\text{exp}}(t) e^{-z_j t} dt = z_j \int_0^T g_{\text{exp}}(t) e^{-z_j t} dt + z_j \int_T^{\infty} g_{\text{exp}}(t) e^{-z_j t} dt, \quad (3.2)$$

где T – длительность базовых испытаний на ползучесть, соответствующая абсциссе последней точки таблицы исходных экспериментальных данных; z_j – параметр LC преобразования [2, 7].

При достаточно больших значениях T и соответствующем выборе величин z_j второй интеграл в (3.2) становится пренебрежимо малым и не зависит от изменения функции $g_{\text{exp}}(t)$ при $t > T$. В этом случае (3.2) преобразуется к интегралу

$$g(t_j) = z_j \int_0^{\infty} g_{\text{exp}}(t) e^{-z_j t} dt = z_j \int_0^T g(t_i) e^{-z_j t} dt; \quad i = \overline{0, N}, \quad (3.3)$$

вычисление которого позволяет построить изображение $\hat{g}(z_j)$ исходной экспериментальной кривой $g(t_i)$ в виде таблицы значений (z_j, \hat{g}_j) .

3.2. Численная реализация метода. Задача определения параметров дробно-экспоненциальных ядер (2.30) сводится к определению таких значений α, β и ξ , которые в пространстве изображений обеспечивают минимальное отклонение кривой, задаваемой уравнением (3.2) от полученной на основе (3.3) совокупности значений (z_j, \hat{g}_j) .

Для численного преобразования экспериментальной кривой безразмерной ползучести $g(t_i)$ разобьем интервал интегрирования в (3.3) на N частей. В этом случае интеграл (3.3) представим в виде [2]

$$\hat{g}(z_j) = z_j \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t_i) e^{-z_j t} dt; \quad j = \overline{1, s}, \quad (3.4)$$

где значения функции $g(t_i)$ известны только на концах промежутков интегрирования $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. Для вычисления интегралов, входящих в (3.4), на каждом интервале $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ функция $g_{\text{exp}}(t) = g_i(t)$ в (3.3) аппроксимируется полиномом n -й степени

$$g_i(t) = \sum_{m=0}^n A_{mi} t^m; \quad i = \overline{0, N}, \quad (3.5)$$

где i – число участков разбиения экспериментальной кривой функции ползучести $g(t)$; A_{mi} – коэффициенты полинома, определяемые из условия прохождения функции $g_i(t)$ через n последовательно заданных экспериментальных точек ($n < N - 1$) с координатами (t_i, g_i) .

Выбирая для аппроксимации экспериментальной зависимости полином второй степени ($n = 2$) и подставляя (3.5) в (3.4), интеграл конкретизируется

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t_i) e^{-z_j t} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{0,i} e^{-z_j t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{1,i} e^{-z_j t} dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} A_{2,i} e^{-z_j t} dt. \quad (3.6)$$

Интегрируя далее (3.6) по частям и используя рекуррентное соотношение

$$\int t^m e^{at} dt = \frac{1}{a} t^m e^{at} - \frac{m}{a} \int t^{m-1} e^{at} dt,$$

для задания численных значений функции $\hat{g}(z_j)$ получаем рекуррентную формулу, которая позволяет вычислять интегралы Лапласа – Карсона (3.4) при надлежащем выборе чисел z_j .

Значения параметров α , β и ξ дробно-экспоненциального ядра наследственности (2.17) определяются из условия минимума функционала

$$F(\alpha, \beta, \xi) = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s \left[\hat{g}_k(z_j) - \left(1 + \frac{\xi}{\beta + z_j^{1+\alpha}} \right) \right]^2, \quad (3.7)$$

где функция $\hat{g}_k(z_i)$ задает изображение совокупности экспериментальных точек в плоскости « $\hat{g} - z$ ».

Задача определения коэффициентов полинома в (3.5) и параметров ядра в (3.7) решается далее с использованием методики, изложенной в [2]. Принимаем, что при $t > T$ величина функции $g(T)$, накопленная к моменту времени T , остается постоянной, из (3.2) для z_1 получаем соотношение

$$z_1 \geq \frac{1}{T} \ln \left[1 + \frac{g(T)}{\delta} \right], \quad (3.8)$$

откуда, полагая $\delta = 0,63 \cdot 10^{-4}$, следует [2]

$$z_1 = \frac{10}{T} \quad \text{при} \quad z_j = z_{j-1} + \frac{z_s - z_1}{s - 1}. \quad (3.9)$$

Здесь величина T соответствует фактической длительности испытаний на ползучесть; $g(0)=1$ – начальное значение функции; $g(T)$ – значение функции в момент времени T , а δ задает погрешность оценки функции $\hat{g}(z_j)$ по формуле (3.7), в которой не учитывается второе слагаемое при вычислении интегралов (3.3). Значения параметра z_j вычислены согласно (3.9) для полиэтилена высокой плотности, исходные данные приведены в [8].

§4. Прогнозирование функций ползучести и коэффициента Пуассона.

Результаты численной аппроксимации преобразованных экспериментальных данных уравнением (3.2) с полученными значениями параметров α , β и ξ показаны на рис. 1. Сплошная кривая соответствует функции ползучести $\hat{g}_{23}(z)$, штриховая линия – функции $\hat{g}_{11}(z)$, а штрих-пунктирная – $\hat{g}_B(z)$. На рис. 2 приведены кривые изменения этих же функций после численного обращения в область $g(t)$ оригиналов. Стиль кривых принят аналогичным рис. 1.

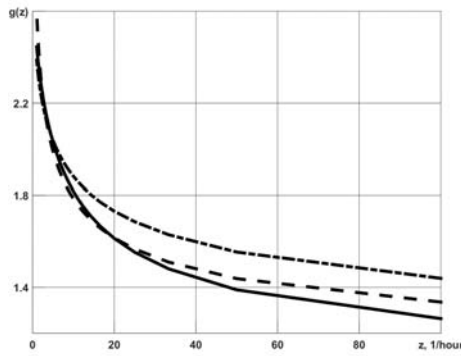


Рис. 1

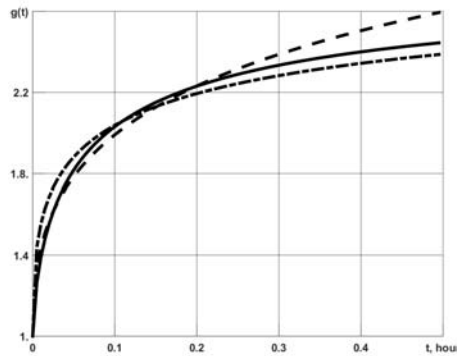


Рис. 2

На рис. 3 результаты прогноза функции $g_{23}(t)$ (сплошная линия), выполненного по уравнению (1.7) с использованием найденных значений параметров α , β и ξ , сопоставлены с первичными экспериментальными данными (точки) [9]. На рис. 4 приведена прогнозная кривая изменения коэффициента Пуассона от времени. Точками представлены экспериментальные данные, полученные в результате обработки базового эксперимента на одноосную ползучесть с замером величины поперечной деформации [8]. Операции численного интегрирования и обращения функций $\hat{g}(z)$, $\hat{\nu}(z)$ выполнены с использованием стандартных алгоритмов и программ в системе Fortran 90 [12].

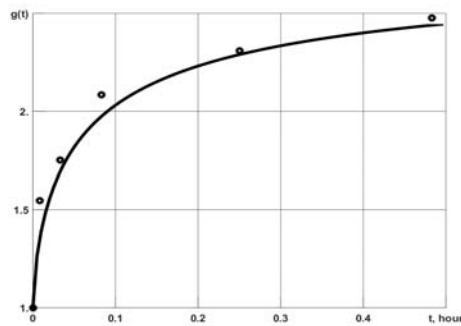


Рис. 3

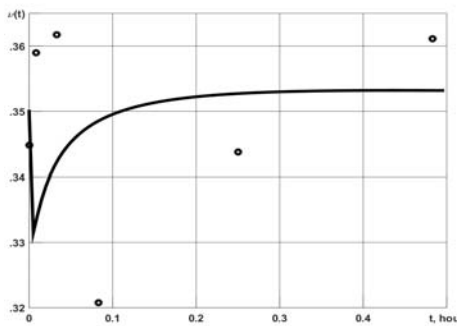


Рис. 4

Как следует из приведенных рисунков, метод интегрального преобразования Лапласа – Карсона с использованием численного интегрирования позволяет с достаточной точностью анализировать задачи идентификации параметров вязкоупругих тел в трехмерной постановке. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что такой подход применим к исследованию достаточно сложных эффектов временной зависимости деформаций ползучести в различных направлениях. В частности, взаимозависимости продольной и поперечной деформаций, выраженной через вязкоупругий коэффициент Пуассона.

Заключение.

Коэффициент Пуассона в случае вязкоупругого деформирования материала является исключительно информационным параметром. Его экспериментальное определение связано со значительными трудностями. В настоящей работе предложен метод прогнозирования реологических параметров, необходимых для решения трехмерных задач деформации изотропного вязкоупругого континуума. Использован аппарат численного преобразования Лапласа, достоверность результатов подтверждена сравнением с ранее полученными решениями и известными экспериментальными данными. Метод расширяет возможности процедуры идентификации функций наследственного последствия, задающими вязкоупругие свойства при сложном и одномерном напряженных состояниях. Для прогноза изменения во времени коэффициента Пуассона использованы ядра продольной и сдвиговой ползучести в области переменных преобразования Лапласа – Карсона.

РЕЗЮМЕ. З використанням методу інтегрального перетворення Лапласа – Карсона і чисельного обернення отриманих розв'язків в область оригіналів встановлено залежність між ядрами спадковості, які задають скалярні властивості ізотропних лінійно-в'язкопружних матеріалів при складному напруженому стані. Ідентифіковано ядро спадкової повзучості, що характеризує поведінку в часі в'язкопружного коефіцієнта Пуассона. Експериментально апробовано задачі розрахунку деформацій зсувної повзучості, а також поперечної повзучості при одноосному навантаженні з врахуванням залежного від часу коефіцієнта Пуассона.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. Прикладная механика упругонаследственных сред Том 3. Термомеханическая теория вязкоупругих тел. – К: Наук. думка, 2013. – 427 с.
2. Голуб В.П., Фернати П.В., Ляшенко Я.Г. К задаче определения параметров дробно-экспоненциальных ядер наследственности линейных вязкоупругих материалов // Прикл. механика. – 2008. – 44, № 9. – С. 12 – 25.
3. Карнаухов В.Г., Козлов В.И., Завгородний А.В., Умрыхин И.Н. Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев тел вращения из вязкоупругого пьезоэлектрического материала // Прикл. механика. – 2015. – 51, № 6. – С. 12 – 22.
4. Маслов Б., Ляшенко Я., Максименко О. Прогнозування довготривалої міцності гірського масиву у геологічних середовищах складної структури // Вісник Київського університету. Геологія, 2009. – № 3. – С. 57 – 60.
5. Aili A., Vandamme M., Torrenti J., Masson B. Theoretical and practical differences between creep and relaxation Poisson's ratios in linear viscoelasticity // Mechanics of Time-Dependent Materials, 2015. – 19, N 4. – P. 537 – 555.
6. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. – New York: John Wiley and Sons, 2008. – 516 p.
7. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An Introduction. – New-York: Academic Press Inc., 2nd ed., 1982. – 370 p.
8. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 1. Superposition of Shear and Bulk Creep // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 2. – P. 165 – 174.
9. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. 2. Proportional Deviators // Int. Appl. Mech. – 2016. – 52, N 6. – P. 648 – 660.
10. Lakes R.S., Wineman A. On Poisson's Ratio in Linearly Viscoelastic Solids // J. Elasticity, 2006. – 85. – P. 45 – 63.
11. Maslov B.P. Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // J. Engineering Mathematics, 2008. – N 61. – P. 339 – 355.
12. Press W.H. et al. Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of Parallel Scientific Computing, Volume 2 of Fortran Numerical Recipes, Second Edition. – 2nd ed. – Press Syndicate of the University of Cambridge, 2002. – 572 p.
13. Rabotnov Y.N. Creep problems in structural members. – Amsterdam: North-Holland Publishing Comp., 1969. – 822 p.

Поступила 30.08.2016

Утверждена в печать 30.01.2018