

А. А. Туник¹, О. И. Надсадная²

**О СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЁТОМ МАЛОГО
БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА**

¹ *Национальный Авиационный Университет,
пр. Комарова 1, Киев, 03058, Украина; aatunik@nau.edu.ua*

² *ГП «Антонов», ул. Туполева, 1, Киев, 03062, Украина; nadsadna@ukr.net*

Abstract. A problem on the program adaptation of regulator for the system of flight control (FCS) of small unmanned airborne vehicle (UAV) is considered. The linearized models of the flight dynamics depend mainly on the UAV true air speed, which in turn is obligatory measured by onboard air data system. This enables to use these models for the gain scheduling of the flight control system within the full range of altitudes and velocities defined by the flight envelope. Taking in account that the FCS for UAV must be as simple as possible, the gain scheduled static output feedback (SOF) is used as the FCS. The SOF parameters for each sub-range of the true air speed are determined by Linear Matrix Inequalities approach in the case of discrete systems for synthesis of suboptimal robust H_∞ -controller. The use of simple Lagrange interpolation between true air speed sub-ranges provides the continuous gain scheduling. An efficiency of proposed approach is demonstrated on an example of the heading-hold system of the real UAV.

Key words: flight control, static output feedback, gain scheduling, H_∞ -control.

Введение.

Широкий рабочий диапазон применения малых беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) как в гражданской, так и в военной сфере приводит к значительным изменениям параметров модели динамики БПЛА при выполнении полётного задания во всём диапазоне высот и скоростей. Данное обстоятельство зачастую делает невозможным решение задачи управления полётом на основе одних только методов теории робастного управления [12]. В этом случае применяются методы адаптивного управления с замкнутым контуром адаптации [12], что приводит к значительному усложнению законов управления автопилота. С другой стороны, простой метод прямой программной адаптации параметров регулятора (gain scheduling) в зависимости от изменения параметров математической модели объекта при наличии информации о параметрическом возмущении был известен довольно давно (см. [21 – 23], где имеются более ранние ссылки). Применение этого метода было ограничено необходимостью синтезировать значительное количество законов управления для достаточно узких диапазонов изменения параметрического возмущения [23]. Однако, с появлением методов робастного управления возникла возможность обеспечить робастную устойчивость и качество для значительно более широких диапазонов изменения параметрического возмущения, что позволило существенно уменьшить количество законов управления и упростить структуру системы. В такой системе отсутствует сложный и медленно действующий замкнутый контур адаптации, а параметры регулятора изменяются мгновенно при изменении параметрического возмущения.

Так как на вычислители систем управления малыми БПЛА накладывается ряд ограничений по цене, мощности, размеру и весу, то структура регулятора должна быть

достаточно простой и легкой для реализации. Для этого удобно использовать статическую обратную связь по выходу [16, 25], основанную на γ -оптимальном подходе, где γ означает коэффициент подавления возмущения (L_2 -gain [5, 10]), синтезированную методом линейных матричных неравенств (ЛМН) [5, 7, 8, 10]. В большинстве случаев применения ЛМН для синтеза закона управления автопилота рассматриваются непрерывные модели [10]. Поскольку в настоящее время применяются только цифровые автопилоты, то в настоящей работе синтез системы управления полётом выполнен в дискретном времени. Эффективность данного подхода проиллюстрирована на примере моделирования полёта БПЛА типа Aerosonde в режиме стабилизации на линии заданного пути. Математическая модель Aerosonde поддерживается пакетом Aerosim Matlab® [26] и является «эталонной» (benchmark) моделью при исследованиях динамики полёта БПЛА.

§1. Постановка задачи. Основные уравнения.

Пусть динамика объекта определяется в непрерывном времени в пространстве системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = A(\bar{q})X(t) + B(\bar{q})U(t) + B_w(\bar{q})W(t); \\ Y(t) = CX(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

в которых элементы матриц $A(\bar{q}) \in R^{n \times n}$, $B(\bar{q}) \in R^{n \times m}$, $B_w(\bar{q}) \in R^{n \times q}$ зависят от скоростного напора (СН) $\bar{q} = (\rho V_i^2)/2$, где ρ – плотность воздуха на высоте полёта; V_i – истинная воздушная скорость (ИВС) [6, 19]. Этот параметр определяет параметрическое возмущение, т.к. он однозначно зависит от высотно-скоростного режима полёта и изменяется в пределах высот и скоростей, допустимых для данного типа БПЛА. Отметим также, что в общем случае плотность воздуха ρ зависит от высоты полёта; однако, в пределах высот полётов малых БПЛА этот параметр можно принять постоянным [6]. Заметим также, что даже определение высоты полёта малых БПЛА выполняется в предположении постоянства ρ [6], а погрешностью от непостоянства ρ , пренебрегают не только при измерении, но и при дальнейшем комплексировании измерений в навигационной системе [15]. Поэтому все элементы матриц в уравнении (1.1) можно принять как функции только ИВС V_i , а малые отклонения плотности воздуха ρ от его значения над уровнем моря можно рассматривать как один из источников неопределённости модели БПЛА. ИВС измеряется системой воздушных сигналов любого летального аппарата, поэтому её учёт в системе управления полётом не требует дополнительного оборудования. Заметим также, что высота и скорость полёта относятся к длиннопериодическим переменным [6, 11], поэтому изменения элементов матриц $A(V_i)$, $B(V_i)$ в (1.1) происходят достаточно медленно. Кроме того, следует отметить, что не все переменные пространства состояний могут быть измерены, поэтому матрица наблюдения C принадлежит множеству $C \in R^{l \times n}$, $l < n$, при этом C имеет полный строчный ранг. Используя стандартный переход к дискретному времени и принимая во внимание гипотезу постоянства ρ , получим соответствующую систему уравнений:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d(V_i)Y(k) + B_d(V_i)U(k) + B_d^w(V_i)W(k); \\ Y(k) = C \cdot X(k). \end{cases} \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) $X \in R^{n \times 1}$, $U \in R^{m \times 1}$, $W \in R^{q \times 1}$, и $Y(k) \in R^{p \times 1}$ – векторы состояния, управления, внешнего возмущения (турбулентный ветер) и выхода, соответственно, $A_d \in R^{n \times n}$, $B_d \in R^{n \times m}$, $B_d^w \in R^{n \times q}$, $C \in R^{l \times n}$ – матрицы динамики объекта.

При этом предполагается, что пара $(A_d(V_i), B_d(V_i))$ стабилизируема, а пара $(A_d(V_i), C)$ – детектируема во всём диапазоне изменения V_i . Введём квадратичный показатель качества управления:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k). \quad (1.3)$$

Определим вектор желаемых выходных переменных $Z(k)$ [1, 10] и дополним систему уравнений (1.2) соответствующим образом:

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d(V_i)Y(k) + B_d(V_i)U(k) + B_d^w(V_i)W(k); \\ Z(k) = C_z X(k) + D_z U(k); \\ Y(k) = C \cdot X(k), \end{cases} \quad (1.4)$$

где матрицы $C_z \in R^{n \times n}$, $D_z \in R^{n \times m}$ определяются в соответствии с (1.3) и [1, 2, 10] так:

$$C_z = \sqrt{Q}; \quad D_z = [0_{(n-m) \times m}, \sqrt{R}]^T. \quad (1.5)$$

Определим также коэффициент подавления возмущений (L_2 -gain) [1, 5, 7, 10, 18] и ограничим его сверху величиной $\gamma < 1$:

$$\frac{\|Z(k)\|_2}{\|W(k)\|_2} = \frac{\|C_z X(k) + D_z U(k)\|_2}{\|W(k)\|_2} \leq \gamma, \quad (1.6)$$

где $\|\cdot\|_2$ означает H_2 -норму. Как известно [8, 10, 13], выполнение условия (1.6) гарантирует робастное H_∞ – управление, которое иногда называют γ – оптимальным [1, 2].

Пусть статическая обратная связь по выходу определяется вектором $L(V_i)$. Тогда закон управления автопилота имеет такой вид:

$$U(k) = -L(V_i)Y(k). \quad (1.7)$$

Задача заключается в синтезе закона управления (1.7) таким образом, чтобы на всём диапазоне изменения параметра V_i обеспечить выполнение неравенства (1.6).

§2. Синтез дискретной статической обратной связи по выходу.

Рассмотрим вначале синтез дискретной статической обратной связи по выходу при неполном измерении компонент вектора состояния системы и при фиксированном значении параметра V_i методом линейных матричных неравенств (ЛМН) [1, 2, 5, 7, 9, 10, 16, 18]. Для этого удобно воспользоваться результатами, изложенными в [5]. Поскольку величина V_i фиксирована, то в уравнениях (1.2), (1.4), (1.7), этот параметр опускается. Вначале заметим, что если матрица C имеет полный строчный ранг, то существует матрица T , такая что $CT^{-1} = [I_p \ 0_{p \times (n-p)}]$ [5]. В случае моделей ЛА принято полагать матрицу C , состоящей из нулей и единиц [19]. В этом случае, расположив уравнения переменных состояния (1.1), (1.2) в таком порядке, когда вначале следуют измеряемые переменные, а затем – неизмеряемые, можно представить матрицу C в таком виде:

$$C = [I_p \ 0_{p \times (n-p)}], \quad (2.1)$$

где I_p и $0_{p \times (n-p)}$ – единичная и нулевая матрицы соответствующих размеров. При этом матрица T преобразования к виду (2.1) оказывается единичной, что позволяет

избежать приведения переменных состояния в (1.1), (1.2) к новому базису, используемого в [5], и тем самым упростить дальнейшие выкладки.

Как известно, замкнутая система (1.2), (1.7) устойчива, если матрица замкнутой системы: $A_{cl} = A_d + B_d LC$ гурвицева. С другой стороны, в соответствии с теоремой Ляпунова замкнутая система сохраняет устойчивость, если существует положительно определенная симметричная матрица P такая, что $A_{cl} P A_{cl}^T - P < 0$. В соответствии с [5] матрица

P может быть представлена в виде $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$ при $P_{11} > 0$ и $P_{22} - P_{12} P_{11}^{-1} P_{12} > 0$. Введем замену

$$P_1 = P_{11}; \quad N = P_{11}^{-1} P_{12}; \quad P_2 = P_{22} - P_{12}^T P_{11}^{-1} P_{12} \quad (2.2)$$

и представим P следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_1 N \\ N^T P_1 & P_2 + N^T P_1 N \end{bmatrix} = T_N P_{dg} T_N^T \quad (2.3)$$

$$\left(P_{dg} = \text{diag}(P_1, P_2); \quad T_N = \begin{bmatrix} I & 0 \\ N^T & I \end{bmatrix} \right). \quad (2.4)$$

При этом T_N в (2.3), (2.4) – несингулярная матрица.

Алгоритм синтеза основан на двух теоремах, доказанных в [5].

Теорема 1 [5]. Система (1.2), (1.7) стабилизируема с помощью статической обратной связи по выходу тогда и только тогда, если существуют матрицы $P_1 = P_1^T \in R^{p \times p}$, $P_2 = P_2^T \in R^{(n-p) \times (n-p)}$, $G \in R^{n \times p}$, $N \in R^{p \times (n-p)}$ такие, что выполняется неравенство

$$\begin{bmatrix} P_{dg} & (T_N^{-1} A_d T_N) P_{dg} + (T_N^{-1} B_d) G C \\ P_{dg}^T (T_N^{-1} A_d T_N)^T + C^T G^T (T_N^{-1} B_d)^T & P_{dg} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.5)$$

где P_{dg} и T_N определяются по формулам (2.3), (2.4), а неравенство (2.5) удовлетворяется для регулятора вида $L = G P_1^{-1}$, где матрица P_1 определяется выражением (2.2).

Эта теорема позволяет определить стабилизирующий регулятор для системы (1.2) и является первым этапом синтеза дискретной обратной связи по выходу. Для того, чтобы определить γ -оптимальный регулятор в смысле (1.6) для системы (1.4), необходимо воспользоваться второй теоремой.

Теорема 2 [5]. Замкнутая система (1.4), (1.7) стабилизируема с помощью статической обратной связи по выходу и её H_∞ -норма меньше заданного уровня γ тогда, когда существуют симметричная матрица $P \in R^{n \times n}$ и скаляр $\sigma \in R$ такие, что выполняются неравенства:

$$\begin{bmatrix} -P + \sigma B_d B_d^T & A_d P & \sigma B_d D_z^T & B_d^w \\ P A_d^T & -P & P C_z^T & 0_{n \times q} \\ \sigma D_z B_d^T & C_z P & -\gamma I + \sigma D_z D_z^T & 0_{n \times q} \\ (B_d^w)^T & 0_{q \times n} & 0_{q \times n} & -\gamma I_q \end{bmatrix} < 0; \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} -P & 0_{n \times n} & B_d^w \\ 0_{n \times n} & -\gamma I_n & 0_{n \times q} \\ (B_d^w)^T & 0_{q \times n} & -\gamma I_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_d \\ C_z \\ 0_{q \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{p \times p} & 0_{p \times (n-p)} \\ 0_{(n-p) \times p} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_d \\ C_z \\ 0_{q \times n} \end{bmatrix}^T < 0. \quad (2.7)$$

Приведенная процедура синтеза регулятора легко программируется и удобна с точки зрения её многократного применения для линеаризованных моделей объекта, соответствующих характерным узловым значениям V_i в пределах его допустимого диапазона. Синтез параметров регулятора для каждого узлового значения V_i состоит из следующих этапов:

1) весь диапазон допустимых значений V_i для данного типа БПЛА разбивается на ряд поддиапазонов, внутри которых производится линеаризация математической модели БПЛА;

2) для полученного семейства линеаризованных моделей синтезируется семейство локальных регуляторов:

2.1) задаются скаляры $\sigma > 0$, $\gamma > 0$, фигурирующие в неравенствах (2.6), (2.7) и весовые матрицы Q, R в показателе качества (1.3);

2.2) определяются решения ЛМН (2.6, 2.7) относительно P ;

2.3) матрица P представляется в виде (2.4);

2.3) определяются решения неравенства (2.5) относительно G ;

2.4) вычисляется матрица параметров регулятора: $L = GP_1^{-1}$;

3) после выполнения этапов (2.1) – (2.4) для каждого поддиапазона V_i определяется механизм программной адаптации регулятора (ПАР).

§3. Программная адаптация регулятора.

Известны два способа реализации механизма ПАР: переключение от одного синтезированного закона управления к другому при изменении внешних условий (в данном случае скорости полета) [18] и линейная интерполяция коэффициентов регулятора как функций параметрического возмущения [22]. При этом в обоих случаях для упрощения структуры ПАР стремятся уменьшить количество табличных регуляторов (в первом случае) и количество узлов интерполяции (во втором). Применение переключения регуляторов связано с требованием плавной передачи управления от одного регулятора к другому (bumpless transfer [11]), что значительно усложняет систему. В этом плане метод интерполяции оказывается предпочтительнее. Для минимизации количества узлов интерполяции предлагается использовать методы теории чувствительности [4]. Поскольку выходные переменные замкнутой системы обладают различной чувствительностью к изменениям параметров регулятора, то при интерполяции функциональной зависимости конкретного коэффициента регулятора от ИВС можно уменьшить число узлов интерполяции, если норма соответствующей функции чувствительности будет невелика. Устойчивость по Ляпунову систем с программно-адаптированным регулятором в широком диапазоне изменения параметрического возмущения рассмотрена подробно в [7]. Соответствующие результаты для случая самолётов рассмотрены в [14].

Дальнейшее рассмотрение процедуры синтеза ПАР методом линейных матричных неравенств целесообразно проводить на примере задачи стабилизации курса малого БПЛА типа Aerosonde [26], математические модели которого могут быть определены в пакете MATLAB. В этом случае вектор состояния X математической модели (1.1) имеет вид $X = [\beta, p, r, \varphi, \psi]^T$, где β – угол скольжения; p – угловая скорость крена; r – угловая скорость рыскания; φ – угол крена; ψ – угол рыскания. Управление осуществляется отклонением элеронов δ_a и руля направления δ_r : $u = [\delta_a, \delta_r]^T$. Поскольку в малых БПЛА угол скольжения β в большинстве случаев не измеряется [6], то вектор наблюдения имеет вид $y = [p, r, \varphi, \psi]^T$. Как известно [19, 24], матрицы $A(V_i)$ и $B(V_i)$ в уравнениях (1.1), (1.2) линеаризованной модели БПЛА зависят от ИВС V_i следующим образом: элементы матрицы $A(V_i)$ являются частными производ-

ными боковой силы \bar{Y} по переменным состояниям $\beta, p, r, \varphi, \psi$, т.е. $\bar{Y}_\beta, \bar{Y}_p, \bar{Y} \dots$ и т.д., а также частными производными моментов относительно продольной l и вертикальной N осей по тем же переменным, т.е. $\bar{L}_\beta, \bar{L}_p, \bar{L}_r \dots$ и $\bar{N}_\beta, \bar{N}_p, \bar{N}_r \dots$. Элементы матрицы $B(V_i)$ также являются частными производными по переменным управления δ_a, δ_r как боковой силы \bar{Y} , так и моментов относительно продольной \bar{L} и вертикальной \bar{N} осей, т.е. $\bar{Y}_{\delta_a}, \bar{Y}_{\delta_r}, \bar{L}_{\delta_a}, \bar{L}_{\delta_r}$ и $\bar{N}_{\delta_a}, \bar{N}_{\delta_r}$.

Представим выражения для некоторых из этих частных производных [19, 24]:

$$\bar{Y}_p = \frac{\bar{q}Sb}{2mV_t} C_{Y_p}; \quad \bar{Y}_{\delta_a} = \frac{\bar{q}S}{m} C_{Y_{\delta_a}}; \quad \bar{L}_p = \frac{\bar{q}Sb}{J_X 2V_t} C_{L_p}; \quad \bar{L}_{\delta_a} = \frac{\bar{q}Sb}{J_X} C_{L_{\delta_a}};$$

$$\bar{N}_p = \frac{\bar{q}Sb}{J_Z 2V_t} C_{N_p}; \quad \bar{N}_{\delta_r} = \frac{\bar{q}Sb}{J_Z} C_{N_{\delta_r}},$$

где J_X, J_Z – соответствующие моменты инерции БПЛА; m – масса; S, b – площадь и размах крыльев, соответственно; $C_{Y_p}, C_{Y_{\delta_a}}, C_{L_p}, C_{L_{\delta_a}}, C_{N_p}, C_{N_{\delta_r}}$ – частные производные коэффициентов подъёмной силы, моментов крена и рысканья по соответствующим переменным состояниям и управления. Все остальные частные производные (элементы матриц $A(V_i)$ и $B(V_i)$) имеют аналогичный вид [19, 24], поэтому приводить все выражения для них не целесообразно.

Учитывая возможности измерительной системы БПЛА, отражаемой вектором наблюдения $y = [p, r, \varphi, \psi]^T$, вектор параметров регулятора имеет вид

$$L(V_t) = [L_p(V_t) \quad L_r(V_t) \quad L_\varphi(V_t) \quad L_\psi(V_t)], \quad (3.1)$$

где $L_p, L_r, L_\varphi, L_\psi$ – коэффициенты усиления по соответствующим выходным переменным объекта. Заметим также, что в объект управления необходимо включить исполнительные приводы руля направления и элеронов с передаточными функциями

$$W_{инт}(p) = \frac{1}{0,25p + 1}, \quad (3.2)$$

а также местную обратную связь по угловой скорости рысканья, которая подключается на вход исполнительного привода руля направления и используется и как демпфер рысканья, и для частичной компенсации угла скольжения при выполнении координированного разворота [19]. Эта обратная связь представляет собой реальный дифференциатор (wash-out filter [19]) передаточная функция которого в дискретном виде имеет вид

$$W_{рд}(z) = L_{рд} \frac{z-1}{z-d}, \quad (3.3)$$

где $L_{рд}$ – коэффициент усиления; $d = \exp\left(-\frac{T_s}{\tau}\right)$ (T_s – интервал дискретности (сек);

τ – постоянная времени реального дифференциатора (сек)). Исходя из условий координированного разворота [17], величина $L_{рд}$ была выбрана равной $L_{рд} = 7$. Выбор интервала дискретности 0,02 сек обусловлен частотой выдачи сигналов навигационной системы (50 Гц). С учётом передаточных функций (3.2) и (3.3) вектор состояния расширенного объекта будет иметь вид: $X = [\beta, p, r, \varphi, \psi, \partial r, \partial a, x_w]^T$, где x_w – переменная состояния реального дифференциатора (3.3). Структурная схема системы

стабилизации курса с учётом вышеприведенных замечаний представлена на рис. 3.1, где ИП – исполнительные приводы руля направления и элеронов, СВС – система воздушных сигналов.

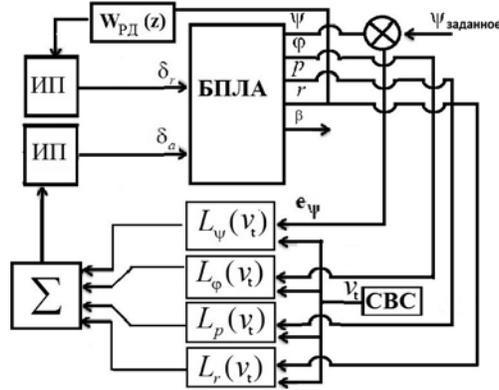


Рис. 3.1

Нелинейные модели Aerosonde были линеаризованы с помощью процедур, поддерживаемых пакетом MATLAB и представленных в [26]. Допустимый диапазон изменения ИВС 21 – 32 м/сек был разбит на 9 поддиапазонов, внутри которых модель (1.1) можно рассматривать как систему с постоянными параметрами. Заметим, что программа определения линеаризованных моделей, представленная в [26], учитывает изменение плотности воздуха ρ при изменении высоты, что соответствует реальным условиям полёта. После стандартной процедуры дискретизации непрерывных моделей получены 9 дискретных моделей (1.2). Матрицы A_d , B_d этих моделей для минимальной ($V_i = 21$ м/с, высота 400 м) и максимальной ($V_i = 32$ м/с, высота 1000 м) ИВС имеют такой вид:

$$A_d^{\min} = \begin{bmatrix} 2,44 & 0,45 & -2,63 & 1,63 & 0 & -2,33 & -0,66 & 3,67 \\ 1,56 & -0,07 & 0,72 & -0,21 & 0 & -2,08 & -1,68 & -1,02 \\ -0,23 & -0,06 & 0,49 & 0,13 & 0 & 0,44 & 0,14 & -1,46 \\ 0,34 & 0,04 & 0,12 & 0,98 & 0 & -0,45 & -0,15 & -0,1 \\ 0,01 & -0,01 & 0,15 & 0,01 & 1 & 0,03 & 0,01 & -0,19 \\ -0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_d^{\min} = \begin{bmatrix} -1,87 & 2,94 \\ -1,67 & -0,82 \\ 0,36 & -1,17 \\ -0,36 & -0,08 \\ 0,03 & -0,15 \\ 0,36 & 0 \\ 0 & 0,36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_d^{\max} = \begin{bmatrix} 4,67 & 0,46 & -3,22 & 1,37 & 0 & -5,56 & 12,77 & -4,45 \\ 2,04 & -0,1 & 0,74 & -0,18 & 0 & -2,58 & -3,21 & -2,06 \\ -0,75 & -0,02 & 0,04 & 0,19 & 0 & 1,14 & -2,55 & 0,91 \\ 0,6 & 0,02 & 0,12 & 0,98 & 0 & -0,77 & -0,29 & -0,62 \\ -0,07 & -0,014 & 0,12 & 0,01 & 1 & 0,12 & -0,41 & 0,1 \\ -0,36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0 & 0,36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_d^{\max} = \begin{bmatrix} -4,47 & 10,21 \\ -2,06 & -2,57 \\ 0,91 & -2,04 \\ -0,62 & -0,23 \\ 0,09 & -0,33 \\ 0,36 & 0 \\ 0 & 0,36 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сравнение элементов этих матриц свидетельствует о существенном изменении их численных значений при изменении ИВС. Заметим также, что СН для этих высотно-скоростных параметров также меняется в значительных пределах: 250 – 650 кг·м/с². Для обеспечения плавной стабилизации курса при изменении ИВС целесообразно применить интерполяцию значений коэффициентов обратной связи как функций ИВС с помощью полиномов Лагранжа [3]. В связи с этим для каждого из поддиапазонов проведен расчет коэффициентов обратной связи по методике, изложенной в §2, в результате чего получено семейство из 9 регуляторов. При решении линейных матричных неравенств (2.6), (2.7) приняты следующие значения: для скаляров $\gamma = 0,85$, $\sigma = 1$; для весовых матриц: $R = [0,1]$, $Q^{\min} = 10^{-3} \text{diag}([99 \ 9,5 \ 3,5 \ 10 \ 1 \ 1 \ 10 \ 1])$, $Q^{\max} = 10^{-3} \text{diag}([99 \ 1,5 \ 20 \ 10 \ 1 \ 1 \ 10 \ 0,1])$ (для сокращения изложения приведены значения при минимальной и максимальной допустимой ИВС).

Таким образом, получено 9 узлов интерполяции для каждого из коэффициентов обратной связи. Однако применение полиномов 9-го порядка для аппроксимации зависимости этих коэффициентов от ИВС нецелесообразно в виду их чрезмерной сложности. Для уменьшения порядка интерполирующих полиномов был проведен анализ чувствительности замкнутой системы к вариациям коэффициентов регулятора. В соответствии с [4], эта чувствительность может быть оценена с помощью передаточной функции чувствительности замкнутой системы к вариации соответствующего параметра L_i :

$$W_i(z) = \frac{\partial T(z)}{\partial L_i}, \quad (3.4)$$

где $T(z) = \frac{W_{PC}(z)}{1 + W_{PC}(z)}$ – передаточная функция замкнутой системы – комплементарная функция чувствительности [13]; $W_{PC}(z)$ – передаточная функция разомкнутой системы последовательного соединения объекта и регулятора.

Определив H_∞ -норму функции чувствительности $W_i(z)$ к параметру L_i (3.4), можно численно оценить влияние вариации этого параметра L_i на изменение выходной координаты системы ψ . Для системы, представленной на рис. 3.1, H_∞ – норма функции чувствительности замкнутой системы к вариации i -го параметра регулятора L_i в соответствии с (3.4) имеет вид

$$\left\| \frac{\partial T_\psi(z)}{\partial L_i} \right\|_\infty = \left\| \frac{W_{\delta i}(z)}{\left(1 + \sum_{p \in i} L_p W_{\delta p}(z)\right)^2} \right\|_\infty, \quad (3.5)$$

где $W_{\delta i}(z)$ – передаточная функция от отклонения элеронов к соответствующей выходной переменной объекта.

Условия полета	$\left\ \frac{\partial T_\psi}{\partial L_p} \right\ _\infty$	$\left\ \frac{\partial T_\psi}{\partial L_q} \right\ _\infty$	$\left\ \frac{\partial T_\psi}{\partial L_r} \right\ _\infty$	$\left\ \frac{\partial T_\psi}{\partial L_s} \right\ _\infty$
1	0,7393	0,6432	0,1052	0,0513
2	0,3597	0,3876	0,0552	0,0293
3	0,11	0,3312	0,0196	0,0067

В таблице представлены численные значения H_∞ -норм функций чувствительности к соответствующим вариациям параметров регулятора, рассчитанные по формуле (3.5) для трёх различных условий полёта, а именно: 1 – соответствует высоте полета

400 м, скорости 21 м/с и скоростному напору $259 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$; 2 – высоте 900 м, скорости 26 м/с, скоростному напору $379 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$; 3 – высоте 1000 м, скорости 32 м/с и скоростному напору $569 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.

Как следует из таблицы, вариации коэффициентов усиления по угловой скорости курса γ и по углу курса ψ оказывают существенно меньшее влияние на выходную координату системы ψ , чем вариации коэффициентов усиления по угловой скорости крена p и по углу крена φ . Поэтому для аппроксимации коэффициентов усиления регулятора, связанных с вращением по курсу ψ , целесообразно ограничиться меньшими степенями полиномов Лагранжа, чем для аппроксимации коэффициентов усиления, связанных с вращением по крену φ .

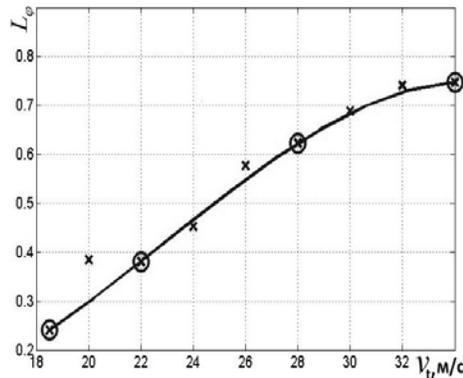


Рис. 3.2

На рис. 3.2 крестиками представлены значения коэффициента $L_\varphi(V_i)$, синтезированные для 9 различных значений скоростей V_i , а сплошной линией – аппроксимация $L_\varphi(V_i)$ полиномом Лагранжа 3-го порядка. Как видно из рис. 3.2 максимальное отклонение синтезированного значения $L_\varphi(V_i)$ от аппроксимации полиномом Лагранжа 3-го порядка составляет $\approx 0,09$, откуда следует, что максимальное значение отклонения выходной координаты не будет превышать: $\|\partial T_\psi / \partial L_\varphi\|_\infty \cdot 0,09 \approx 0,058 \text{ рад}$.

Руководствуясь этими соображениями, достаточно аппроксимировать коэффициенты

$L_\psi(V_i)$, $L_r(V_i)$ полиномами Лагранжа 2-го порядка. Окончательно формулы Лагранжа для семейства коэффициентов регулятора принимают такой вид:

$$L_p(V_i) = -1,358 \cdot 10^{-3} V_i^3 + 0,01025 V_i^2 - 0,253 V_i + 2,152;$$

$$L_r(V_i) = 1,018 \cdot 10^{-3} V_i^2 - 0,05332 V_i + 1,015; \quad (3.6)$$

$$L_\varphi(V_i) = -1,071 \cdot 10^{-4} V_i^3 + 17,372 \cdot 10^{-4} V_i^2 - 0,1265 V_i + 0,7358;$$

$$L_\psi(V_i) = 6,445 \cdot 10^{-3} V_i^2 - 0,0418 V_i + 0,5325.$$

§4. Моделирование системы стабилизации курса с применением ПАР.

Для оценки эффективности ПАР проведено моделирование рассматриваемой системы для 3-х вышеописанных условий полёта в пакете SIMULINK при задающем сигнале по курсу $\psi_{зад} = 60$ град. Результаты этого моделирования представлены на рис. 4.1 – 4.4, где для рис. 4.1 – 4.3 сплошными линиями представлены кривые переходных процессов, соответствующих условиям полёта 1, штриховыми линиями – для условий полета 2, штрих-пунктирными линиями – для условий полета 3. Рис. 4.1 представляет переходные процессы по углу курса; рис. 4.2 – по углу крена, рис. 4.3 – по отклонениям элеронов. На рис. 4.4 представлены результаты сравнения переходных процессов по углу курса для условий полета 3 при наличии ПАР (сплошная линия) и при отсутствии ПАР (пунктирная линия). При этом значения коэффициентов усиления во втором случае (без ПАР) рассчитывались по вышеприведенной методике для условий полёта 1, как наиболее типичных для БПЛА.

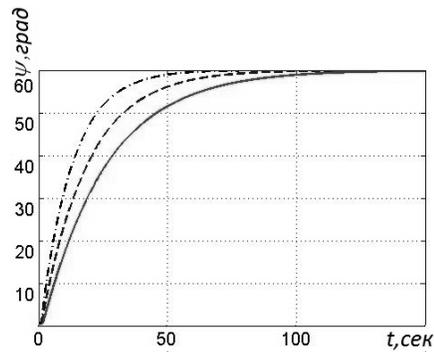


Рис. 4.1

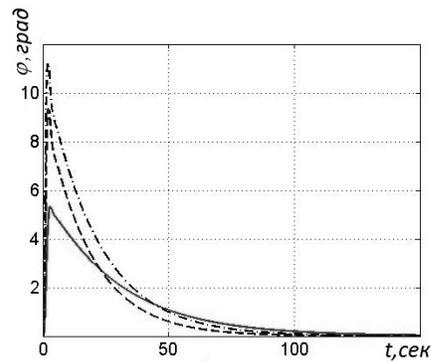


Рис. 4.2

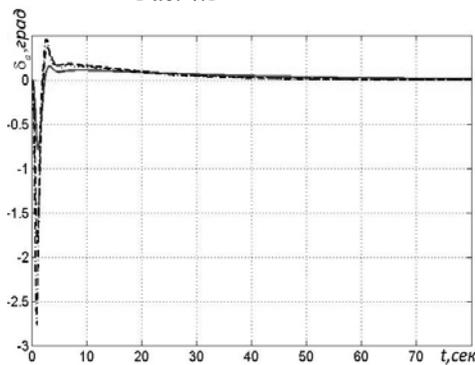


Рис. 4.3

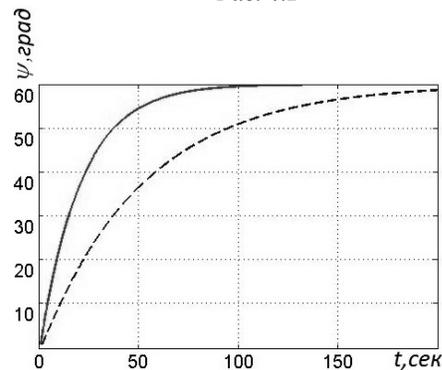


Рис. 4.4

Как видно из рис. 4.1, при использовании ПАР переходные процессы незначительно отличаются друг от друга при значительных изменениях условий полёта, что достигается значительными изменениями как управляющего входа (отклонения элеронов – рис. 4.3), так и угла крена – рис. 4.2. Отсутствие ПАР как минимум в два раза увеличивает время переходного процесса по курсу, что отрицательно влияет на маневренность БПЛА на больших высотах (см. рис. 4.4).

Заключение.

1. Применение ПАР позволяет поддерживать лётно-технические характеристики БПЛА на высоком уровне при значительных изменениях условий полёта. При этом в случае использования в регуляторе статической обратной связи по выходу, осуществление ПАР достигается при минимальном усложнении алгоритмов автопилота.

2. Синтез статической обратной связи по выходу для цифрового автопилота целесообразно осуществлять с помощью метода линейных матричных неравенств для семейства регуляторов, обеспечивающих γ -оптимальное управление в конкретных условиях полёта, характеризующихся значением истинной воздушной скорости БПЛА.

3. С целью упрощения программного обеспечения цифрового автопилота удобно использовать интерполяционные полиномы Лагранжа для аппроксимации зависимостей конкретных коэффициентов статической обратной связи по выходу от значений ИВС. Для минимизации порядка этих полиномов целесообразно провести анализ чувствительности выходной координаты системы к вариациям коэффициентов статической обратной связи по выходу.

4. Проведенное моделирование системы стабилизации курса конкретного БПЛА с использованием ПАР подтвердило эффективность подхода, изложенного в данной статье.

Аналогичные результаты были также получены и для случая управления высотой полёта в непрерывном случае [20]. Кроме этого, учитывая простоту программной реализации ПАР, её целесообразно применять и для управления другими типами малых БПЛА, например, квадрокоптерами [17].

РЕЗЮМЕ. Досліджено задачу програмної адаптації регулятора для системи управління польотом (СУП) малого безпілотного літального апарата (БПЛА). Лінеаризовані моделі динаміки залежать головним чином від істинної повітряної швидкості БПЛА, яка у свою чергу обов'язково вимірюється системою повітряних сигналів. Це дає змогу використовувати її для програмної адаптації СУП в повному діапазоні висот і швидкостей, які визначають робочий діапазон об'єкта. Було обрано СУП з програмною адаптацією на базі статичного зворотного зв'язку (СЗЗ). Параметри СЗЗ для кожного піддіапазону істинної повітряної швидкості визначено за допомогою лінійно-матричних нерівностей у випадку дискретних систем для синтезу субоптимального робастного H_∞ -регулятора. Використання інтерполяції Лагранжа між піддіапазонами забезпечує неперервну адаптацію. Ефективність такого підходу показано на прикладі системи стабілізації курсу.

1. Баландин Д. В., Коган М. М. Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_{∞} -управления по выходу // Докл. РАН. – 2004. – **396**, № 6. – С. 759 – 761.
2. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
3. Бронштейн Н.И., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1964. – 608 с.
4. Юсупов П.М. Справочник по теории автоматического управления. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
5. Bara G.I., Boutayeb M. Static output feedback stabilization with H_{∞} -Performance for Linear Discrete-Time systems // IEEE Transaction on Automatic Control. – 2005. – **50**, N 2. – P. 250 – 255.
6. Beard R. W., Randal T. W. Small Unmanned Aircraft : Theory and Practice. – Princeton: Princeton University Press, 2012. – 317 p.
7. Blanchini F., Casagrande D., Miani S., Viaro U. Stable LPV realization of parametric transfer functions and its application to gain-scheduling control design // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2010. – **55**, N 10. – P. 2271 – 2281.
8. Boyd S., Ghaoui L. El., Feron E., Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. – Philadelphia: PA SIAM, 1994. – 205 p.
9. Chen X., Song J., Cai G.K. Robust gain-scheduled autopilot design with LPV reference model for portable missile // Proc. of IEEE Aerospace Conference – Montana, 2012. – P. 461 – 467.
10. Gadewadikar J., Lewis F., Abu-Khalaf M. Necessary and sufficient conditions for H-infinity static output feedback control // J. of Guidance, Control and Dynamics. – 2006. – **29**. – P. 915 – 921.
11. Graebe S.F., Allen A.L.B. Dynamic transfer among alternative controllers and its relation to antiwindup controller design // IEEE Transaction on Control Systems Technology. 1996. – **4**, N 1. – P. 92 – 99.
12. Holtsov A.S., Farhadi R.M., Kortunov V.I., Mohammadi A. Comparison of the UAV adaptive control with the robust control based on mu-synthesis // Proc. the 4th Int. Conf. on Methods and Systems of Navigation and Motion Control (MSNMC) – Kyiv: NAU, 2016. – P.18 – 21.
13. Kwakernaak H. Robust Control and H_{∞} -Optimization // Automatica. – 1993. – **29**, N 2. – P. 255 – 273.
14. Khoroshun A.S. Stability of the Horizontal Flight of an Aircraft // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 1. – P. 96 – 103.
15. Larin V. B. On Navigation Sensor Error Correction // Int. Appl. Mech.. – 2016. – **52**, N 1 – P. 90 – 95.
16. Larin V.B., Al-Lawama A., Tunik A.A. Exogenous disturbance compensation with static output feedback // Appl. and Comput. Math. – 2004. – **3**, N 2. – P. 75 – 83.
17. Larin V.B., Tunik A.A. On the Problem of the Quadrotor Control System Synthesis // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 2. – P. 185 – 194.
18. Masubuchi I., Ishii S., Ohta Y., Saeki M. Gain-scheduled control via switching of LTI controllers and state reset // Asian J. of Control. – 2016. – **18**, N 5. – P. 1619 – 1629.
19. McLean D. Automatic flight control systems. – NY: Prentice Hall, 1990. – 593 p.
20. Naadsadna O.I. Static output feedback design of robust gain scheduled control system // Electronics and Control Systems. – 2016. – **1**. – P. 43 – 49.
21. Ravanbod L., Noll D. Gain-scheduled two-loop autopilot for an aircraft // J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2014. – **136**, N 4.
22. Rugh J. W., Shamma S. J. Research on gain scheduling // Automatica. – 2000. – **36**. – P. 1401 – 1425.
23. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control. Stability, Convergence, and robustness. – Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1989. – 377 p.
24. Stevens B.L., Lewis F.L. Aircraft control and simulation. – NY: John Wiley & Sons, Inc., 1992. – 617 p.
25. Syrmos V. L., Abdallah C., Dorato P. Static output feedback: a survey // Proc. of 33rd IEEE Conference on Decision and Control. – Florida: Orlando, 1997. – P. 837 – 842.
26. Unmanned Dynamics LLC, AEROSIM BLOCKSET Version 1.2 User's Guide, 2003.

Поступила 11.05.2017

Утверждена в печать 10.10.2017