Л. П. Х о р о ш у н

ДВУХКОНТИНУУМНАЯ МЕХАНИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ КАК ОСНОВА ТЕОРИИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВА И ЭЛЕКТРОСТРИКЦИИ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина: e-mail: stochac@inmech.kiev.ua

Abstract. A new principle is expounded for constructing the theory of coupled dynamical processes of electroelasticity of dielectrics that have the properties of piezoeffect and electrostriction. This theory is based on the purely mechanical view on the two-continuum description of deformation of dielectrics. The dielectrics are thought as a mixture of positive and negative charges which are linked in pairs into the neutral molecules or elementary cells. At that, the condition of existence of the elastic potential and linear - quadratic dependence of partial stresses on the difference of displacements of charges is accepted. Starting with the definition of polarization vector of elementary macrovolume and generated by its electric field, the equations of two-continuum mechanics are transformed into the coupled dynamic equations for the microdisplacements of neutral molecules and electric-field strength that describe the piezoelectric and electrostriction effects. The Maxwell's equations follow from these equations as a particular case.

Key words: dielectrics, two-continuum mechanics, piezoelectrics, electrostriction, polarization vector, Maxwell's equations.

Введение.

В современной механике весьма актуальными являются исследования статических и динамических задач магнитоупругости [15, 18] и электроупругости [1, 2, 7, 9 – 12, 16, 19 – 21], связанных с пьезоэлектрическим эффектом, который проявляется в виде прямой и обратной линейных связей между деформациями и напряженностью электрического поля. Пьезоэлектрический эффект наблюдается в твердых диэлектриках, кристаллическая решетка которых не имеет центра симметрии. Наряду с этим в твердых, жидких и газообразных диэлектриках наблюдается эффект электрострикции [17], связанный с квадратичной зависимостью деформаций от напряженности электрического поля независимо от структуры и симметрии вещества. В этом случае обратный электромеханический эффект отсутствует, т.е. однородная деформация не приводит к поляризации и возникновению электрического поля в отличие от пьезоэлектриков. В осциллирующем электрическом поле механические колебания, вызванные электрострикцией, происходят с частотой, вдвое большей, чем частота поля. Эффект электрострикции так же, как и пьезоэффект, используется в различных электромеханических преобразователях на макро- и микроуровнях.

Основу существующей теории электроупругости [1, 2] составляют уравнения статики или динамики упругого тела, уравнения электростатики (акустическое приближение), а также уравнения состояния, связывающие тензор напряжений и вектор электрической индукции с тензором деформаций и вектором напряженности электрического поля. Уравнения состояния строятся из условия существования внутренней энергии, являющейся функцией деформаций и электрической индукции. При этом пьезоэффект описывается квадратичной зависимостью внутренней энергии от соответствующих параметров, а электрострикция – кубической зависимостью, обеспечивающей линейную зависимость напряжений от деформаций и квадратичную зависимость от напряженности электрического поля.

Основным недостатком акустического приближения является неучет динамики электромагнитного поля, что не позволяет описать связанные акустические и электромагнитные колебания. Кроме того, область применимости акустического приближения ограничена диапазоном частот, в котором диэлектрическая проницаемость остается постоянной. Для устранения этих недостатков требуется разработка новых принципов построения теории связанных динамических процессов электроупругости. Такой принцип, основанный на чисто механическом двухконтинуумном описании поведения диэлектриков, как смеси положительных и отрицательных зарядов, изложен в работе [13], на основе чего построены связанные динамические уравнения электроупругости пьезоэлектриков и, в частности, уравнения электродинамики, более общие, чем уравнения Максвелла [8, 14]. В данной работе эта теория обобщается на случай нелинейной электроупругости, связанной с эффектом электрострикции.

§1. Нелинейные уравнения двухконтинуумной механики диэлектриков.

Рассмотрим элементарный макрообъем диэлектрика, представляющего собой совокупность взаимодействующих нейтральных молекул или элементарных ячеек [6], каждая из которых состоит из двух связанных частей – носителей положительного и отрицательного зарядов или просто зарядов. В начальном состоянии плотности носителей положительных n_{10} и отрицательных n_{20} зарядов совпадают и равны числу N молекул или элементарных ячеек в единице макрообъема, т.е. $n_{10} = n_{20} = N$. Текущие значения плотностей носителей зарядов n_1, n_2 удовлетворяют уравнениям баланса

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \left(n_1 \dot{u}_i^1\right)_{,i} = 0; \quad \frac{\partial n_2}{\partial t} + \left(n_2 \dot{u}_i^2\right)_{,i} = 0\,, \tag{1.1}$$

где $\dot{u}_i^1, \dot{u}_i^2$ – векторы скоростей, соответственно, положительных и отрицательных зарядов, относящихся к элементарному макрообъему; точка сверху обозначает субстанциональную производную по времени

$$\dot{u}_i^1 \equiv \frac{d_1 u_i^1}{dt} = \frac{\partial u_i^1}{\partial t} + u_{i,n}^1 \dot{u}_n^1; \quad \dot{u}_i^2 \equiv \frac{d_2 u_i^2}{dt} = \frac{\partial u_i^2}{\partial t} + u_{i,n}^2 \dot{u}_n^2\,. \tag{1.2}$$

Умножая уравнения (1.1), соответственно, на массы положительного и отрицательного зарядов m_1, m_2, получим уравнения сохранения массы

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \left(\rho_1 \dot{u}_i^1\right)_{,i} = 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \left(\rho_2 \dot{u}_i^2\right)_{,i} = 0\,, \tag{1.3}$$

где $\rho_1 = n_1 m_1$, $\rho_2 = n_2 m_2$ – плотности массы, соответственно, положительных и отрицательных зарядов.

По аналогии с теорией механических смесей [6] введем парциальные напряжения $\sigma_{ij}^1, \sigma_{ij}^2$ как составляющие равнодействующей сил, действующих соответственно на положительные и отрицательные заряды площадки диэлектрика, отнесенные к размеру площадки. Тогда уравнения сохранения импульса положительных и отрицательных зарядов, отнесенные к элементарному макрообъему диэлектрика, можно представить в виде

$$\rho_1 \ddot{u}_i^1 = \sigma_{ij,j}^1 + R_i + F_i^1; \quad \rho_2 \ddot{u}_i^2 = \sigma_{ij,j}^2 - R_i + F_i^2\,, \tag{1.4}$$

где R_i – результирующая сила взаимодействия между положительными и отрицательными зарядами, отнесенная к элементарному макрообъему; F_i^1, F_i^2 – внешние объемные силы, действующие на соответствующие заряды; $\ddot{u}_i^1, \ddot{u}_i^2$ – субстациональные производные по времени от скоростей

$$\ddot{u}_i^1 \equiv \frac{d_1\dot{u}_i^1}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i^1}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^1\dot{u}_n^1;\ \ddot{u}_i^2 \equiv \frac{d_2\dot{u}_i^2}{dt} = \frac{\partial \dot{u}_i^2}{\partial t} + \dot{u}_{i,n}^2\dot{u}_n^2. \qquad (1.5)$$

Балансовые уравнения (1.3), (1.4) необходимо дополнить уравнениями состояния, связывающими динамические и кинематические параметры. Принимаем диэлектрик идеально упругим. По аналогии с классической теорией упругости [3] умножим уравнения (1.4), соответственно, на $\dot{u}_i^1$, $\dot{u}_i^2$, сложим их и проведем интегрирование по некоторой области V диэлектрика, ограниченной поверхностью S. В результате после некоторых преобразований приходим к закону сохранения энергии

$$\int_V \left(\dot{T} + \dot{U}\right) dV = \int_V \left(F_i^1\dot{u}_i^1 + F_i^2\dot{u}_i^2\right) dV + \int_S \left(\sigma_{ij}^1 n_j \dot{u}_i^1 + \sigma_{ij}^2 n_j \dot{u}_i^2\right) dS, \qquad (1.6)$$

где n_j – направляющие косинусы нормали к поверхности S, а кинетическая энергия T и скорость приращения внутренней энергии $\dot{U}$ определяются формулами

$$T = \frac{1}{2}\left(\rho_1\dot{u}_i^1\dot{u}_i^1 + \rho_2\dot{u}_i^2\dot{u}_i^2\right);\ \dot{U} = \sigma_{ij}^1\dot{\varepsilon}_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2\dot{\varepsilon}_{ij}^2 - R_i\left(\dot{u}_i^1 - \dot{u}_i^2\right);$$
$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}^k + u_{j,i}^k\right)\ \ (k = 1,2). \qquad (1.7)$$

Исходя из (1.7), приходим к заключению, что внутренняя энергия U является функцией кинематических параметров ε_{ij}^1, ε_{ij}^2, $u_i^1 - u_i^2$, а динамические параметры σ_{ij}^1, σ_{ij}^2, R_i определяются производными

$$\sigma_{ij}^1 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^1};\ \sigma_{ij}^2 = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}^2};\ R_i = -\frac{\partial U}{\partial\left(u_i^1 - u_i^2\right)}. \qquad (1.8)$$

Если принять зависимость внутренней энергии от кинематических параметров в виде

$$U = \frac{1}{2}\lambda_{ijmn}^{11}\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{mn}^1 + \lambda_{ijmn}^{12}\varepsilon_{ij}^1\varepsilon_{mn}^2 + \frac{1}{2}\lambda_{ijmn}^{22}\varepsilon_{ij}^2\varepsilon_{mn}^2 + h_{mij}^1\varepsilon_{ij}^1\left(u_m^1 - u_m^2\right) +$$
$$+h_{mij}^2\varepsilon_{ij}^2\left(u_m^1 - u_m^2\right) + \frac{1}{2}\kappa_{ij}\left(u_i^1 - u_i^2\right)\left(u_j^1 - u_j^2\right) - \frac{1}{2}h_{mnij}^1\varepsilon_{ij}^1\left(u_m^1 - u_m^2\right)\left(u_n^1 - u_n^2\right) - \qquad (1.9)$$
$$-\frac{1}{2}h_{mnij}^2\varepsilon_{ij}^2\left(u_m^1 - u_m^2\right)\left(u_n^1 - u_n^2\right),$$

то на основе (1.8) приходим к следующим нелинейным уравнениям состояния:

$$\sigma_{ij}^1 = \lambda_{ijmn}^{11}\varepsilon_{mn}^1 + \lambda_{ijmn}^{12}\varepsilon_{mn}^2 + h_{mij}^1\left(u_m^1 - u_m^2\right) - \frac{1}{2}h_{mnij}^1\left(u_m^1 - u_m^2\right)\left(u_n^1 - u_n^2\right);$$
$$\sigma_{ij}^2 = \lambda_{ijmn}^{21}\varepsilon_{mn}^1 + \lambda_{ijmn}^{22}\varepsilon_{mn}^2 + h_{mij}^2\left(u_m^1 - u_m^2\right) - \frac{1}{2}h_{mnij}^2\left(u_m^1 - u_m^2\right)\left(u_n^1 - u_n^2\right); \qquad (1.10)$$
$$R_i = -\kappa_{ij}\left(u_j^1 - u_j^2\right) - h_{imn}^1\varepsilon_{mn}^1 - h_{imn}^2\varepsilon_{mn}^2 + h_{ijmn}^1\left(u_j^1 - u_j^2\right)\varepsilon_{mn}^1 + h_{ijmn}^2\left(u_j^1 - u_j^2\right)\varepsilon_{mn}^2$$
$$\left(\lambda_{ijmn}^{\nu k} = \lambda_{mnij}^{k\nu} = \lambda_{jimn}^{\nu k} = \lambda_{ijnm}^{\nu k};\ h_{ijmn}^k = h_{jimn}^k = h_{ijnm}^k;\ h_{imn}^k = h_{inm}^k;\ \kappa_{ij} = \kappa_{ji}\right).$$

Введем замену:

$$u_i^1 = u_i + u_i';\ u_i^2 = u_i - u_i';\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2;\ \sigma_{ij}' = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2. \qquad (1.11)$$

Тогда уравнения (1.3), (1.4) и выражения (1.7), (1.9), (1.10) преобразуются, соответственно, к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\rho\dot u_i+\rho'\dot u_i'\right)_{,i}=0;\quad \frac{\partial\rho'}{\partial t}+\left(\rho'\dot u_i+\rho\dot u_i'\right)_{,i}=0\,, \tag{1.12}$$

$$\rho\ddot u_i+\rho'\ddot u_i'=\sigma_{ij,j}+F_i;\ \ \rho'\ddot u_i+\rho\ddot u_i'=\sigma_{ij,j}'+2R_i+F_i'\,; \tag{1.13}$$

$$T=\frac{1}{2}\rho\left(\dot u_i\dot u_i+\dot u_i'\dot u_i'\right)+\rho'\dot u_i\dot u_i';\ U=\frac{1}{2}\lambda^*_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}+\bar\lambda_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon'_{mn}+\frac{1}{2}\lambda_{ijmn}\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{mn}+$$

$$+h^*_{mij}\varepsilon_{ij}u'_m+h'_{mij}\varepsilon'_{ij}u'_m+2\kappa_{ij}u'_iu'_j-h^*_{mnij}\varepsilon_{ij}u'_mu'_n-h'_{mnij}\varepsilon'_{ij}u'_mu'_n\,; \tag{1.14}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon_{ij}}=\lambda^*_{ijmn}\varepsilon_{mn}+\bar\lambda_{ijmn}\varepsilon'_{mn}+h^*_{mij}u'_m-h^*_{mnij}u'_mu'_n\,;$$

$$\sigma'_{ij}=\frac{\partial U}{\partial\varepsilon'_{ij}}=\bar\lambda_{mnij}\varepsilon_{mn}+\lambda_{ijmn}\varepsilon'_{mn}+h'_{mij}u'_m-h'_{mnij}u'_mu'_n\,; \tag{1.15}$$

$$2R_i=-\frac{\partial U}{\partial u'_i}=-4\kappa_{ij}u'_j-h^*_{imn}\varepsilon_{mn}-h'_{imn}\varepsilon'_{mn}+2h^*_{ijmn}u'_j\varepsilon_{mn}+2h'_{ijmn}u'_j\varepsilon'_{mn}\,,$$

где введены обозначения:

$$\ddot u_i=\frac{\partial\dot u_i}{\partial t}+\dot u_{i,n}\dot u_n+\dot u'_{i,n}\dot u'_n\,;\quad \ddot u'_i=\frac{\partial\dot u'_i}{\partial t}+\dot u_{i,n}\dot u'_n+\dot u'_{i,n}\dot u_n\,;$$

$$\dot u_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_{i,n}\dot u_n+u'_{i,n}\dot u'_n\,;\quad \dot u'_i=\frac{\partial u'_i}{\partial t}+u_{i,n}\dot u'_n+u'_{i,n}\dot u_n\,;$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+u_{j,i}\right);\quad \varepsilon'_{ij}=\frac{1}{2}\left(u'_{i,j}+u'_{j,i}\right);\ \ F_i=F_i^1+F_i^2;\ F_i'=F_i^1-F_i^2\,;$$

$$\lambda^*_{ijmn}=\lambda^{11}_{ijmn}+\lambda^{21}_{ijmn}+\lambda^{12}_{ijmn}+\lambda^{22}_{ijmn};\ \bar\lambda_{ijmn}=\lambda^{11}_{ijmn}+\lambda^{21}_{ijmn}-\lambda^{12}_{ijmn}-\lambda^{22}_{ijmn}\,; \tag{1.16}$$

$$\lambda_{ijmn}=\lambda^{11}_{ijmn}+\lambda^{22}_{ijmn}-\lambda^{12}_{ijmn}-\lambda^{21}_{ijmn};\ h^*_{imn}=2\left(h^1_{imn}+h^2_{imn}\right);$$

$$h'_{imn}=2\left(h^1_{imn}-h^2_{imn}\right);\ h^*_{ijmn}=2\left(h^1_{ijmn}+h^2_{ijmn}\right);\ h'_{ijmn}=2\left(h^1_{ijmn}-h^2_{ijmn}\right);$$

$$\rho=\rho_1+\rho_2\,,\quad \rho'=\rho_1-\rho_2\,.$$

Подставляя (1.15) в (1.13), приходим к системе связанных динамических уравнений относительно перемещений нейтральных молекул $u_i=\left(u_i^1+u_i^2\right)/2$ и половины взаимных смещений $u_i'=\left(u_i^1-u_i^2\right)/2$ положительных и отрицательных зарядов

$$\rho\ddot u_i+\rho'\ddot u_i'=\lambda^*_{ijmn}u_{m,nj}+\bar\lambda_{ijmn}u'_{m,nj}+h^*_{mnij}u'_{m,j}-h^*_{mnij}\left(u'_mu'_n\right)_{,j}+F_i\,;$$

$$\rho'\ddot u_i+\rho\ddot u_i'=\bar\lambda_{mnij}u_{m,nj}+\lambda_{ijmn}u'_{m,nj}-h^*_{imn}u_{m,n}+h_{mij}u'_{m,j}-4\kappa_{ij}u'_j+2h^*_{ijmn}u'_ju_{m,n}+2h_{ijmn}u'_ju'_{m,n}+F_i'$$

$$\left(h_{mij}=h'_{mij}-h'_{imj};\ h_{ijmn}=h'_{ijmn}-h'_{jmin}\right). \tag{1.17}$$

Для изотропных диэлектриков материальные тензоры, входящие в (1.17), представляются формулами

$$\lambda^*_{ijmn} = \lambda^*\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu^* I_{ijmn};\ \bar{\lambda}_{ijmn} = \bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\bar{\mu} I_{ijmn};\ \lambda_{ijmn} = \lambda\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu I_{ijmn};$$
$$h^*_{ijmn} = h^*\delta_{ij}\delta_{mn} + 2l^* I_{ijmn};\quad h'_{ijmn} = h'\delta_{ij}\delta_{mn} + 2l' I_{ijmn};\ \kappa_{ij} = \kappa\delta_{ij};\ h^*_{imn} = h_{imn} = 0\,, \tag{1.18}$$

где $\lambda^*, \mu^*, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \ \lambda, \mu, h^*, l^*, h, l, \kappa$ – постоянные материала; δ_{ij}, I_{ijmn} – единичные тензоры. Тогда уравнения (1.17) принимают вид

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \mu^* u_{i,rr} + \left(\lambda^* + \mu^*\right)u_{r,ri} + \bar{\mu}u'_{i,rr} + \left(\bar{\lambda} + \bar{\mu}\right)u'_{r,ri} - h^*\left(u'_n u'_n\right)_{,i} - 2l^*\left(u'_i u'_n\right)_{,n} + F_i;$$

$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \bar{\mu}u_{i,rr} + \left(\bar{\lambda} + \bar{\mu}\right)u_{r,ri} + \mu u'_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right)u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} + 2l^* u'_n\left(u_{i,n} + u_{n,i}\right) +$$
$$+2\left(h' - l'\right)\left(u'_i u'_{n,n} - u'_n u'_{n,i}\right) + F'_i\,. \tag{1.19}$$

Полученные уравнения можно упростить, если не детализировать структуру атома, молекулы или элементарной ячейки, а принять, что заряды симметричны, т.е. материальные тензоры не зависят от перестановки зарядов местами. В этом случае следует положить $\lambda^{11}_{ijmn} = \lambda^{22}_{ijmn}$, $\lambda^{12}_{ijmn} = \lambda^{21}_{ijmn}$, $h^1_{ijmn} = h^2_{ijmn}$, $h^1_{imn} = h^2_{imn}$, что приводит к равенствам $\bar{\lambda}_{ijmn} = 0$, $h'_{ijmn} = 0$, $h'_{imn} = 0$. В результате определяющие уравнения (1.15), а также динамические уравнения в перемещениях (1.17), (1.19), соответственно, упрощаются

$$\sigma_{ij} = \lambda^*_{ijmn}\varepsilon_{mn} + h^*_{mij}u'_m - h^*_{mnij}u'_m u'_n;\ \ \sigma'_{ij} = \lambda_{ijmn}\varepsilon'_{mn};$$
$$2R_i = -4\kappa_{ij}u'_j - h^*_{imn}\varepsilon_{mn} + 2h^*_{ijmn}u'_j\varepsilon_{mn}; \tag{1.20}$$

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \lambda^*_{ijmn}u_{m,nj} + h^*_{mij}u'_{m,j} - h^*_{mnij}\left(u'_m u'_n\right)_{,j} + F_i;$$
$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \lambda_{ijmn}u'_{m,nj} - h^*_{imn}u_{m,n} - 4\kappa_{ij}u'_j + 2h^*_{ijmn}u'_j u_{m,n} + F'_i; \tag{1.21}$$

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = \mu^* u_{i,rr} + \left(\lambda^* + \mu^*\right)u_{r,ri} - h^*\left(u'_n u'_n\right)_{,i} - 2l^*\left(u'_i u'_n\right)_{,n} + F_i;$$
$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \mu u'_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right)u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} + 2l^* u'_n\left(u_{i,n} + u_{n,i}\right) + F'_i\,. \tag{1.22}$$

Из уравнений (1.22) для изотропного упругого диэлектрика следует, как предельный случай, уравнения для идеально жидкого или газообразного диэлектрика. Для этого необходимо положить $\mu^* = 0,\ \ l^* = 0$, в результате чего будем иметь

$$\rho\ddot{u}_i + \rho'\ddot{u}'_i = -p_{,i} + F_i\ \ \left(p = p_0 - \lambda^* u_{r,r} + h^* u'_n u'_n\right);$$
$$\rho'\ddot{u}_i + \rho\ddot{u}'_i = \mu u'_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right)u'_{r,ri} - 4\kappa u'_i + 2h^* u'_i u_{n,n} + F'_i\,, \tag{1.23}$$

где $p,\ p_0$ – давление, соответственно, в возмущенном и покоящемся жидком диэлектрике.

Уравнения (1.17), (1.19), (1.21) – (1.23) инвариантны относительно преобразований Галилея. Если же пренебречь нелинейными инерционными слагаемыми, т.е. в (1.16) принять $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$, $\ddot{u}'_i = \partial^2 u'_i / \partial t^2$ в левых частях уравнений (1.17), (1.19), (1.21) – (1.23), то они теряют инвариантность относительно преобразований Галилея.

§2. Переход к связанным уравнениям механики и электричества.

Построенные выше связанные уравнения нелинейной двухконтинуумной механики диэлектриков оперируют чисто механическими параметрами σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, ρ и σ'_{ij}, ε'_{ij}, u'_i, ρ', R_i, описывающими напряженно-деформированное состояние диэлектрика, соответственно, как системы нейтральных молекул или ячеек и разностей параметров, относящихся к носителям разноименных связанных зарядов, которые описывают поляризацию диэлектрика. В частности, вектор разности перемещений u'_i, умноженный на плотность электрического заряда диэлектрика, представляет собой вектор поляризации. Поэтому дальнейшая задача состоит в преобразовании их к форме связанных уравнений механики нейтральных молекул или ячеек и электричества связанных зарядов. С этой целью умножим уравнения баланса плотностей носителей зарядов (1.1) соответственно на заряды $q, -q$ и сложим. В результате с учетом (1.11) получим закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + I_{i,i} = 0, \tag{2.1}$$

где обозначено

$$\rho_e = (n_1 - n_2)q;\ I_i = I_i^{\text{кон}} + I_i^{\text{пол}};\ I_i^{\text{кон}} = \rho_e \dot{u}_i;\ I_i^{\text{пол}} = (n_1 + n_2) q \dot{u}'_i. \tag{2.2}$$

Здесь ρ_e – плотность поляризационных или связанных зарядов, являющаяся полной плотностью ввиду отсутствия свободных зарядов; $I_i^{\text{кон}}$ – конвекционный ток, обусловленный перемещением поляризационных зарядов; $I_i^{\text{пол}}$ – ток поляризации или скорость поляризации.

Если принять, что в начальный момент времени плотности носителей связанных зарядов совпадают $(n_{10} = n_{20} = N)$, то, интегрируя уравнение (2.1) по времени, в линейном приближении получим известное уравнение

$$\rho_e + P_{i,i} = 0, \tag{2.3}$$

где вектор поляризации P_i определяется формулой

$$P_i = 2Nqu'_i. \tag{2.4}$$

Плотность поляризационных электрических зарядов ρ_e порождает электрическое поле E_i, которое согласно теореме Гаусса [4, 5] определяется в вакууме формулой

$$E_{i,i} = 4\pi k \rho_e, \tag{2.5}$$

где $k = 1$ и $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, соответственно, в системах СГС и СИ. Подставляя (2.3) в (2.5), приходим к уравнению

$$(E_i + 4\pi k P_i)_{,i} = 0, \tag{2.6}$$

решение которого, в общем случае, имеет вид

$$E_i = -4\pi k P_i. \tag{2.7}$$

Здесь вектор напряженности электрического поля представляется через скалярный и векторный потенциалы $E_i = \xi_{,i} + e_{imn}\eta_{n,m}$, удовлетворяющие уравнениям $\xi_{,rr} = -4\pi k P_{r,r}$, $\eta_{i,rr} = 4\pi k e_{imn} P_{n,m}$, где e_{imn} – единичный антисимметричный тензор Леви – Чивита.

Поляризация, порождаемая взаимным смещением связанных зарядов, может быть вызвана различными факторами – внешним электрическим полем или полем свободных зарядов, инерционными силами, деформациями диэлектрика, изменением температуры. Если предположить, что диэлектрик находится во внешнем статическом электрическом поле $E_i^{\text{в}}$, связанным с некоторой плотностью свободных электрических зарядов $\rho_e^{\text{в}}$ согласно теореме Гаусса

$$E_{i,i}^{\text{в}} = 4\pi k \rho_e^{\text{в}}, \tag{2.8}$$

а другие факторы, вызывающие поляризацию, отсутствуют, то, согласно опытному закону [4, 5], вектор поляризации единицы объема определяется формулами

$$P_i = \beta E_i^*;\; P_i = \varepsilon_0 \beta E_i^* \;\left(E_i^* = E_i^{\text{в}} + E_i\right) \tag{2.9}$$

соответственно в системах СГС и СИ, где β – поляризуемость или электрическая восприимчивость единицы объема диэлектрика. Тогда из (2.7) – (2.9) следует известное уравнение для вектора D_i так называемой электрической индукции, имеющее в системах СГС и СИ, соответственно, вид

$$D_{i,i} = 4\pi\rho_e^{\text{в}} \;\left(D_i = E_i^* + 4\pi P_i = \chi E_i^*,\; \chi = 1 + 4\pi\beta\right); \tag{2.10}$$

$$D_{i,i} = \rho_e^{\text{в}} \;\left(D_i = \varepsilon_0 E_i^* + P_i = \varepsilon_0 \chi E_i^*,\; \chi = 1 + \beta\right), \tag{2.11}$$

где χ – диэлектрическая проницаемость.

Как видим, согласно (2.7) – (2.11), имеют место равенства

$$D_i = E_i^{\text{в}};\; D_i = \varepsilon_0 E_i^{\text{в}}, \tag{2.12}$$

соответственно в системах СГС и СИ, т.е. вектор электрической индукции [4] – это просто заданная напряженность внешнего электрического поля свободных зарядов или пропорциональная ему величина.

Если в диэлектрике происходят динамические процессы, то на связанные заряды действуют также инерционные силы, в результате чего перестают быть справедливыми соотношения (2.9) – (2.11). В этом случае для определения вектора поляризации P_i или порождаемого им, согласно (2.7), электрического поля E_i необходимо строить динамические уравнения. Поэтому принятое в электродинамике определение тока смещения как производной по времени от электрической индукции $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial D}{\partial t}$ или $\dfrac{\partial D}{\partial t}$, соответственно, в системах СГС и СИ не является корректным, так как при динамических процессах понятие вектора электрической индукции теряет смысл. Кроме того, согласно (2.12) и принятому определению ток смещения определяется только внешним электрическим полем $E_i^{\text{в}}$ и при его отсутствии равен нулю.

К подобному выводу можно также прийти, исходя из известного обоснования тока смещения [5], базирующегося на законе сохранения электрического заряда. Действительно, закон сохранения электрического заряда (2.1) с учетом (2.5) можно представить в виде

$$\left(I_i^{\text{кон}} + I_i^{\text{см}}\right)_{,i} = 0 \tag{2.13}$$

где, согласно общепринятым представлениям, $I_i^{\text{см}} = \dfrac{1}{4\pi k}\dfrac{\partial E_i}{\partial t} + I_i^{\text{пол}}$ – ток смещения для диэлектрика. Принимая во внимание соотношения (2.3), (2.4), (2.7), приходим к выводу, что в диэлектрике ток смещения равен нулю.

На основе соотношений (2.4), (2.7) получим

$$u_i' = \frac{1}{2Nq} P_i = -\nu E_i \quad \left(\nu = \frac{1}{8\pi k N q}\right). \tag{2.14}$$

Объемные силы F_i^1, F_i^2 представим в виде суммы чисто механических и пондеромоторных составляющих, обусловленных электрическим полем, т.е.

$$F_i^1 = \overline{F}_i^1 + \overline{\overline{F}}_i^1;\; F_i^2 = \overline{F}_i^2 + \overline{\overline{F}}_i^2;\quad \overline{\overline{F}}_i^1 = -\overline{\overline{F}}_i^2 = Nqk\left(E_i + E_i^{\text{в}}\right), \tag{2.15}$$

где $E_i^{\text{в}}$ – заданная напряженность внешнего электрического поля. Тогда, приняв $\overline{F}_i^1 = \overline{F}_i^2$, согласно (1.16), имеем

$$F_i = \overline{F}_i^1 + \overline{F}_i^2;\quad F_i' = \overline{\overline{F}}_i' = 2Nqk\left(E_i + E_i^{\text{в}}\right). \tag{2.16}$$

Подставляя (2.1) – (2.16) в (1.14), (1.20) – (1.23), получим выражения кинетической и внутренней энергии

$$T = \frac{1}{2}\rho\left(\dot u_i \dot u_i + \nu^2 \dot E_i \dot E_i\right) - \nu\rho' \dot u_i \dot E_i;\quad U = \frac{1}{2}\lambda^*_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} + \frac{1}{2}\nu^2\lambda_{ijmn}E_{ij}E_{mn} -$$
$$-\nu h^*_{mij}\varepsilon_{ij}E_m + 2\nu^2\kappa_{ij}E_iE_j - \nu^2 h^*_{mnij}\varepsilon_{ij}E_mE_n \quad \left(E_{ij} = \frac{1}{2}\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)\right), \tag{2.17}$$

уравнения состояния

$$\sigma_{ij} = \lambda^*_{ijmn}\varepsilon_{mn} - \nu h^*_{mij}E_m - \nu^2 h^*_{mnij}E_mE_n;\quad \sigma'_{ij} = -\nu\lambda_{ijmn}E_{mn};$$
$$2R_i = 4\nu\kappa_{ij}E_j - h^*_{imn}\varepsilon_{mn} - 2\nu h^*_{ijmn}E_j\varepsilon_{mn}, \tag{2.18}$$

динамические нелинейные уравнения электроупругости соответственно для анизотропного и изотропного диэлектриков, т.е.

$$\rho\ddot u_i - \nu\rho'\ddot E_i = \lambda^*_{ijmn}u_{m,nj} - \nu h^*_{mij}E_{m,j} - \nu^2 h^*_{mnij}\left(E_mE_n\right)_{,j} + F_i;$$
$$\rho'\ddot u_i - \nu\rho\ddot E_i = -h^*_{imn}u_{m,n} - \nu\left(\lambda_{ijmn}E_{m,nj} - 4\kappa^*_{ij}E_j + 2h^*_{ijmn}E_ju_{m,n}\right) + 2NqkE_i^{\text{в}}; \tag{2.19}$$

$$\rho\ddot u_i - \nu\rho'\ddot E_i = \mu^* u_{i,rr} + \left(\lambda^* + \mu^*\right)u_{r,ri} - \nu^2\left[h^*\left(E_nE_n\right)_{,i} + 2l^*\left(E_iE_n\right)_{,n}\right] + F_i;$$
$$\rho'\ddot u_i - \nu\rho\ddot E_i = -\nu\left[\mu E_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right)E_{r,ri} - 4\kappa^*E_i + 2h^*E_iu_{n,n} + 2l^*E_n\left(u_{i,n} + u_{n,i}\right)\right] + 2NqkE_i^{\text{в}}, \tag{2.20}$$

а также уравнения электрогидромеханики для идеально жидкого диэлектрика

$$\rho\ddot u_i - \nu\rho'\ddot E_i = -p_{,i} + F_i,\quad \left(p = p_0 - \lambda^* u_{r,r} + \nu^2 h^* E_nE_n\right);$$
$$\rho'\ddot u_i - \nu\rho\ddot E_i = -\nu\left[\mu E_{i,rr} + \left(\lambda + \mu\right)E_{r,ri} - 4\kappa^*E_i + 2h^*E_iu_{n,n}\right] + 2NqkE_i^{\text{в}}, \tag{2.21}$$

где

$$\ddot u_i = \frac{\partial \dot u_i}{\partial t} + \dot u_{i,n}\dot u_n + \nu^2 \dot E_{i,n}\dot E_n;\quad \ddot E_i = \frac{\partial \dot E_i}{\partial t} + \dot u_{i,n}\dot E_n + \dot E_{i,n}\dot u_n;$$

$$\dot u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,n}\dot u_n + \nu^2 E_{i,n}\dot E_n;\quad \dot E_i = \frac{\partial E_i}{\partial t} + u_{i,n}\dot E_n + E_{i,n}\dot u_n; \tag{2.22}$$

$$\kappa^*_{ij} = \kappa_{ij} + 4\pi kN^2q^2\delta_{ij};\quad \kappa^* = \kappa + 4\pi kN^2q^2.$$

К уравнениям (2.19) – (2.22) необходимо присоединить уравнения сохранения массы, которые, как следует из (1.3), (1.11), (2.14), имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho \dot{u}_i - \nu \rho' \dot{E}_i \right),_i = 0; \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \left(\rho' \dot{u}_i - \nu \rho \dot{E}_i \right),_i = 0 . \qquad (2.23)$$

Уравнения (2.19) – (2.23) инвариантны относительно преобразований Галилея.

Если уравнения (1.13) умножить, соответственно, на $\dot{u}_{i,} - \nu \dot{E}_i$, сложить и проинтегрировать по некоторой области V диэлектрика, ограниченной поверхностью S , то получим закон сохранения энергии в виде

$$\int_V \left(\dot{T} + \dot{U}^* \right) dV = \int_V \left(F_i \dot{u}_i - 2\nu N q E_i^e \dot{E}_i \right) dV + \int_S \left(\sigma_{ij} n_j \dot{u}_i - \nu \sigma'_{ij} n_j \dot{E}_i \right) dS , \qquad (2.24)$$

где параметры T, σ_{ij}, σ'_{ij}, $\dot{u}_i$, $\dot{E}_i$ определяются формулами (2.17), (2.18), (2.22), а U^* выражением

$$U^* = U + \nu N q E_i E_i = \frac{1}{2} \lambda^*_{ijmn} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{mn} + \frac{1}{2} \nu^2 \lambda_{ijmn} E_{ij} E_{mn} -$$
$$- \nu h^*_{mij} \varepsilon_{ij} E_m + 2\nu^2 \kappa^*_{ij} E_i E_j - \nu^2 h^*_{mnij} \varepsilon_{ij} E_m E_n . \qquad (2.25)$$

Уравнение энергии (2.24) также следует из (1.6) с учетом соотношений (1.7) – (1.9), (1.11), (1.16), (2.14) – (2.16), (2.22).

Дифференциальные уравнения (2.19) – (2.21), описывают связанные динамические процессы механических перемещений нейтральных частиц диэлектрика и изменений электрического поля, обусловленного поляризаций. Линейные слагаемые с коэффициентами h^*_{mij} описывают пьезоэлектрические эффекты, а нелинейные слагаемые с коэффициентами h^*_{mnij}, h^*, l^* – эффекты электрострикции. Для однозначного решения задачи дифференциальные уравнения необходимо дополнить граничными условиями. Так как старшие производные по координатам, входящие в правые части уравнений (1.13), (2.19), (2.20), такие же, как в классической теории упругости, то на границе S области достаточно задать одно из двух условий $u_i|_S$, $\sigma_{ij} n_j|_S$ и $E_i|_S$, $\sigma'_{ij} n_j|_S$.

В случае идеально жидкого диэлектрика уравнения электромеханики (2.21) необходимо дополнить граничными условиями для механических параметров $\dot{u}_i$ или p аналогичными классической гидромеханики, а для электрических параметров E_i, σ'_{ij} – аналогичными классической теории упругости, т.е. задать одно из условий $E_i|_S$, $\sigma'_{ij} n_j|_S$.

На границе раздела двух различных диэлектриков при идеальном механическом и электрическом контакте, который следует из непрерывности перемещений зарядов u_i^1, u_i^2 , а также нормальных и касательных к границе напряжений $\sigma^1_{ij} n_j$, $\sigma^2_{ij} n_j$, задаются условия сопряжения

$$u_i^{(1)}|_S = u_i^{(2)}|_S ; \; \sigma_{ij}^{(1)} n_j |_S = \sigma_{ij}^{(1)} n_j |_S ; \; E_i^{(1)}|_S = E_i^{(2)}|_S ; \; \sigma'^{(1)}_{ij} n_j |_S = \sigma'^{(2)}_{ij} n_j |_S , \qquad (2.26)$$

где индексы в скобках относятся к контактирующим средам. При наличии уплотнения, проскальзывания, накопления зарядов одного знака на границе раздела условия сопряжения (2.26) перестают быть справедливыми. В этом случае необходимо построение соответствующей модели вместо условий (2.26).

Пьезоэлектрический эффект, описываемый в уравнениях (2.18), (2.19) слагаемыми с коэффициентами h^*_{imn} , проявляется только в твердых диэлектриках, кристаллическая решетка которых не имеет центра симметрии. В пьезоэлектрических преобразователях, применяемых в технике, наиболее широкое распространение получила предварительно поляризованная пьезокерамика, имеющая трансверсально-изотропную симметрию электроупругих свойств. Если ось x_3 направить вдоль оси симметрии такого материала, то уравнения состояния (2.18) будут иметь вид

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*\right)\varepsilon_{ij} + \left(\lambda_{12}^*\varepsilon_{kk} + \lambda_{13}^*\varepsilon_{33} - \nu\tilde{h}_{31}^* E_3\right)\delta_{ij} -$$

$$-\nu^2\left[\left(h_{11}^* - h_{12}^*\right)E_i E_j + \left(h_{12}^* E_k E_k + h_{31}^* E_3^2\right)\delta_{ij}\right];$$

$$\sigma_{33} = \lambda_{13}^*\varepsilon_{kk} + \lambda_{33}^*\varepsilon_{33} - \nu\tilde{h}_{33}^* E_3 - \nu^2\left(h_{31}^* E_k E_k + h_{33}^* E_3^2\right);$$

$$\sigma_{i3} = 2\lambda_{44}^*\varepsilon_{i3} - \nu\tilde{h}_{15}^* E_i - 2\nu^2 h_{55}^* E_i E_3;$$

$$\sigma'_{ij} = -\nu\left[\left(\lambda_{11} - \lambda_{12}\right)E_{ij} + \left(\lambda_{12}E_{kk} + \lambda_{13}E_{33}\right)\delta_{ij}\right]; \tag{2.27}$$

$$\sigma'_{33} = -\nu\left(\lambda_{13}E_{kk} + \lambda_{33}E_{33}\right);\ \sigma'_{i3} = -2\nu\lambda_{44}E_{i3};$$

$$2R_i = 4\nu\kappa_{11}E_i - 2\tilde{h}_{15}^*\varepsilon_{i3} - 2\nu\left[\left(h_{11}^* - h_{12}^*\right)\varepsilon_{ij}E_j + \left(h_{12}^*\varepsilon_{kk} + h_{13}^*\varepsilon_{33}\right)E_i\right];$$

$$2R_3 = 4\nu\kappa_{33}E_3 - \tilde{h}_{31}^*\varepsilon_{kk} - \tilde{h}_{33}^*\varepsilon_{33} - 2\nu\left(2h_{55}^*\varepsilon_{i3}E_i + h_{31}^*\varepsilon_{kk}E_3 + h_{33}^*\varepsilon_{33}E_3\right) \quad \left(i, j, k = 1, 2\right),$$

где для электроупругих постоянных λ_{ijmn}^*, λ_{ijmn}, h_{ijmn}^*, h_{imn}^* приняты матричные обозначения [7], причем $h_{imn}^* \to \tilde{h}_{ik}^*$.

Подставляя (2.15), (2.16), (2.27) в уравнения сохранения импульса (1.13), с учетом (2.22) получим

$$\rho\ddot{u}_i - \nu\rho'\ddot{E}_i = \frac{1}{2}\left(\lambda_{11}^* - \lambda_{12}^*\right)u_{i,kk} + \frac{1}{2}\left(\lambda_{11}^* + \lambda_{12}^*\right)u_{k,ki} + \left(\lambda_{13}^* + \lambda_{44}^*\right)u_{3,3i} +$$

$$+\lambda_{44}^* u_{i,33} - \nu\left(\tilde{h}_{31}^* E_{3,i} + \tilde{h}_{15}^* E_{i,3}\right) -$$

$$-\nu^2\left[\left(h_{11}^* - h_{12}^*\right)\left(E_i E_j\right)_{,j} + h_{12}^*\left(E_k E_k\right)_{,i} + h_{31}^*\left(E_3^2\right)_{,i} + 2h_{55}^*\left(E_i E_3\right)_{,3}\right] + F_i;$$

$$\rho\ddot{u}_3 - \nu\rho'\ddot{E}_3 = \lambda_{44}^* u_{3,kk} + \left(\lambda_{13}^* + \lambda_{44}^*\right)u_{k,k3} + \lambda_{33}^* u_{3,33} - \nu\left(\tilde{h}_{15}^* E_{k,k} + \tilde{h}_{33}^* E_{3,3}\right) -$$

$$-\nu^2\left[2h_{55}^*\left(E_{k,k}E_3 + E_i E_{3,i}\right) + h_{31}^*\left(E_k E_k\right)_{,3} + h_{33}^*\left(E_3^2\right)_{,3}\right] + F_3;$$

$$\rho'\ddot{u}_i - \nu\rho\ddot{E}_i = -\tilde{h}_{15}^*\left(u_{i,3} + u_{3,i}\right) - \nu\left[\frac{1}{2}\left(\lambda_{11} - \lambda_{12}\right)E_{i,kk} + \frac{1}{2}\left(\lambda_{11} + \lambda_{12}\right)E_{k,ki} +\right.$$

$$+\left(\lambda_{13} + \lambda_{44}\right)E_{3,3i} + \lambda_{44}E_{i,33} - 4\kappa_{11}^* E_i + \tag{2.28}$$

$$\left.+\left(h_{11}^* - h_{12}^*\right)\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)E_j + 2\left(h_{12}^* u_{k,k} + h_{13}^* u_{3,3}\right)E_i\right] + 2NqkE_i^{\text{в}};$$

$$\rho'\ddot{u}_3 - \nu\rho\ddot{E}_3 = -\tilde{h}_{31}^* u_{k,k} - \tilde{h}_{33}^* u_{3,3} - \nu\left[\lambda_{44}E_{3,kk} + \left(\lambda_{13} + \lambda_{44}\right)E_{k,k3} +\right.$$

$$\left.+\lambda_{33}E_{3,33} - 4\kappa_{33}^* E_3 + 2h_{55}^*\left(u_{i,3} + u_{3,i}\right)E_i + 2h_{31}^* u_{k,k}E_3 + 2h_{33}^* u_{3,3}E_3\right] + 2NqkE_3^{\text{в}}.$$

Уравнения (2.28) инвариантны относительно преобразований Галилея. Если же пренебречь нелинейными инерционными слагаемыми, т.е. вместо (2.22) принять $\ddot{u}_i = \partial^2 u_i / \partial t^2$, $\ddot{E}_i = \partial^2 E_i / \partial t^2$ в левых частях уравнений (2.28), то они теряют инвариантность относительно преобразований Галилея.

§3. Уравнения теории электричества.

В уравнения электроупругости (2.19), (2.20), (2.28) и электрогидромеханики (2.21) связанность механических и электрических процессов осуществляется как результат связанности уравнений состояния (2.18), а также инерционного взаимодействия, проявляющегося в левых частях уравнений. Отсюда следует, что даже чисто механические или электрические воздействия порождают в диэлектрике связанные электромеханические процессы. Тем не менее, представляет интерес хотя бы теоретически получить из построенных уравнений уравнения теории электричества с целью сравнения их с уравнениями Максвелла, построенных на основе опытных законов электродинамики и искусственного введения понятия тока смещения [8, 14]. Для этого предположим, что нейтральные частицы диэлектрика движутся с постоянной скоростью, т.е. $\dot{u}_i = U_i = \text{const}$, причем $F_i = 0$. Тогда уравнения (2.19) принимают вид:

$$\rho'\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + 2U_n\frac{\partial E_{i,n}}{\partial t} + U_n U_p E_{i,np}\right) - \nu\rho\dot{E}_{i,n}\dot{E}_n = h^*_{mij}E_{m,j} + \nu h^*_{mnij}\left(E_m E_n\right)_{,j};$$

$$\rho\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + 2U_n\frac{\partial E_{i,n}}{\partial t} + U_n U_p E_{i,np}\right) - \nu\rho'\dot{E}_{i,n}\dot{E}_n = \lambda_{ijmn}E_{m,nj} - 4\kappa^*_{ij}E_j - 2\frac{Nqk}{\nu}E^{\text{в}}_i. \quad (3.1)$$

Исключая из (3.1) слагаемые $\dot{E}_{i,n}\dot{E}_n$, получим уравнение электродинамики для равномерно движущегося упругого анизотропного диэлектрика с учетом эффектов пьезоэлектричества и электрострикции

$$\frac{4\rho_1\rho_2}{\rho}\left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + 2U_n\frac{\partial E_{i,n}}{\partial t} + U_n U_p E_{i,np}\right) =$$

$$= \lambda_{ijmn}E_{m,nj} - \frac{\rho'}{\rho}\left[h^*_{mij}E_{m,j} + h^*_{mnij}\left(E_m E_n\right)_{,j}\right] - 4\kappa^*_{ij}E_j - 2\frac{Nq}{\nu}E^{\text{в}}_i. \quad (3.2)$$

Однако вопрос о возможности одновременного существования эффектов пьезоэлектричества и электрострикции наряду с равномерным движением диэлектрика без деформаций требует отдельного изучения.

В случае изотропных упругого и идеально жидкого равномерно движущихся диэлектриков при пренебрежении эффектом электрострикции уравнение электродинамики, следующее из (2.20), (2.21), можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + 2U_n\frac{\partial E_{i,n}}{\partial t} + U_n U_p E_{i,np} = c_2^2 E_{i,rr} + \left(c_1^2 - c_2^2\right)E_{r,ri} - s^2 E_i - f_i, \quad (3.3)$$

где обозначено

$$c_1^2 = \frac{\left(\lambda + 2\mu\right)\rho}{4\rho_1\rho_2};\;\; c_2^2 = \frac{\mu\rho}{4\rho_1\rho_2};\;\; s^2 = \frac{\kappa^*\rho}{\rho_1\rho_2};\;\; f_i = \frac{4\pi k N^2 q^2\rho}{\rho_1\rho_2}E^{\text{в}}_i. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.2), (3.3) инвариантны относительно преобразований Галилея.

В случае, когда нейтральные частицы диэлектрика находятся в покое $\left(U_i = 0\right)$, уравнения (3.1), (3.3) теряют инвариантность относительно преобразований Галилея. В частности, из (3.3) имеем

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c_2^2 E_{i,rr} + \left(c_1^2 - c_2^2\right)E_{r,ri} - s^2 E_i - f_i. \quad (3.5)$$

Если ввести формальное обозначение

$$\operatorname{rot} E_i = -\frac{1}{c_2}\frac{\partial B_i}{\partial t} \quad \left(\operatorname{rot} E_i = e_{imn} E_{n,m}\right), \tag{3.6}$$

то приходим, по существу, ко второму уравнению Максвелла, являющемуся дифференциальной формой опытного закона электромагнитной индукции Фарадея, где B_i – вектор магнитной индукции; e_{imn} – единичный антисимметричный тензор. Тогда с учетом выражения

$$E_{i,rr} = E_{r,ri} - e_{ipq} e_{qmn} E_{n,mp} \tag{3.7}$$

из (3.5), (3.6) получим

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = c_2 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} B_i + c_1^2 E_{r,ri} - s^2 E_i - f_i . \tag{3.8}$$

Принимая $E_i^{\text{в}} = 0$ и пренебрегая слагаемыми $c_1^2 E_{r,ri}$, $s^2 E_i$, после интегрирования уравнения (3.8) по времени при нулевых начальных условиях получим первое уравнение Максвелла для диэлектрика

$$\operatorname{rot} B_i = \frac{1}{c_2}\frac{\partial E_i}{\partial t} . \tag{3.9}$$

Однако, как известно [5, 8], правая часть уравнения (3.9) введена Максвеллом в первоначальное уравнение для замкнутых токов искусственно под названием «ток смещения», хотя строгого обоснования существования токов смещения ни он, ни его последователи не дают. Более того, как показано в §2, ток смещения в диэлектрике равен нулю. В действительности же правая часть уравнения (3.9) является результатом интегрирования инерционной составляющей уравнения (3.8), характеризующей инерционность поляризации элементарного объема диэлектрика.

Таким образом, из уравнения электродинамики для неподвижного диэлектрика (3.5) или его модификации в виде уравнений (3.6), (3.8) следует как частный случай уравнения Максвелла. Уравнения (3.5), (3.6), (3.8), в отличие от уравнений Максвелла, описывают дисперсию поперечных электромагнитных волн и продольных электрических волн, связанных с распространением плотности поляризационного заряда. Слагаемое с внешним электрическим полем $E_i^{\text{в}}$ дает возможность описывать вынужденные процессы электродинамики в диэлектрике.

Заключение.

Применение в приборостроении различных электромеханических преобразователей, в основу которых положены эффекты пьезоэлектричества и электрострикции, требует дальнейшего более глубокого изучения и описания закономерностей электромеханического взаимодействия. Существующая теория электроупругости, описывающая электромеханическое взаимодействие, базируется на уравнениях статики или динамики упругого тела, уравнениях электростатики (акустическое приближение) и уравнениях состояния, связывающих тензор напряжений и вектор электрической индукции с тензором деформаций и вектором напряженности электрического поля. При этом предполагается, что внутренняя энергия является функцией деформаций и электрической индукции.

К недостаткам акустического приближения, базирующегося на уравнениях электростатики, следует отнести невозможность описать связанные акустические и электромагнитные динамические процессы, которые могут наблюдаться в виде возбуждения электромагнитных колебаний акустическими колебаниями. Кроме того, недостаточно обоснована зависимость внутренней энергии от электрической индукции, которая, как известно [4], представляет собой лишь ту часть электрического поля, которая создается свободными зарядами, т.е. представляет собой внешнее электрическое поле независимо от нахождения в нем диэлектрика.

Изложенный новый принцип построения теории линейной и нелинейной электроупругости, в основу которого положены уравнения двухконтинуумной механики диэлектриков как смеси положительных и отрицательных зарядов, попарно связанных в нейтральные молекулы или ячейки, позволяет устранить отмеченные недостатки. Здесь внутренняя энергия принимается функцией деформаций компонентов смеси, а также разности их перемещений, которая пропорциональна вектору поляризации и порождаемому им электрическому полю. Вектор электрической индукции, равный вектору внешнего электрического поля, входит в уравнения как составляющая объемной пондеромоторной силы, обусловленной суммарным электрическим полем. Построенные связанные динамические уравнения электромагнитомеханики диэлектриков описывают пьезоэлектрические и электрострикционные эффекты. В частном случае, когда в неподвижном изотропном диэлектрике отличны от нуля только взаимные перемещения зарядов, из них следуют уравнения Максвелла.

Р Е З Ю М Е . Викладено новий принцип побудови теорії зв'язаних динамічних процесів електропружності діелектриків, яким властиві п'єзоефект і електрострикція. В основу теорії покладено чисто механічні уявлення про двохконтинуумний опис деформування діелектрика як суміші попарно зв'язаних у нейтральні молекули чи елементарні комірки позитивних і негативних зарядів при умові існування пружного потенціала і лінійно-квадратичної залежності парціальних напружень від різниці переміщень зарядів. Виходячи з визначення вектора поляризації елементарного макрооб'єму діелектрика і породжуваного ним електричного поля, рівняння двохконтинумної механіки перетворюються у зв'язані динамічні рівняння відносно макропереміщень нейтральних молекул і напруженостей електричного поля, які описують п'єзоелектричні і електрострикційні ефекти.

1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость. – Т.5. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. – М.: Изд. иностранной литературы, 1952. – 447 с.
3. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
4. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. – М.: Физматгиз, 1963. – 432 с.
5. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
6. *Хорошун Л.П., Солтанов Н.С.* Термоупругость двухкомпонентных смесей. – К.: Наук. думка, 1984. – 112с.
7. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
8. *Шапиро И.С.* К истории открытия уравнений Максвелла // Успехи физ. наук. – 1972. – **108**, № 2. – С. 319 – 333.
9. *Haywang W.* Piezoelectricity. Evolution and technology / W. Haywang, K. Lubitz, W. Wersing. – Springer, 2008. – 579 p.
10. *Kaloerov S.A., Samodurov A.A.* Problem of Electromagnetoviscoelasticity of Multiply Connected Plates // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51,** N 6. – P. 623 – 639.
11. *Karnaukhov V.G., Kozlov V.I., Zavgorodnii A.V., Umrykhin I.N.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of Solids of Revolutions Made of Viscoelastic Piezoelectric Material // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51,** N 6. – P. 614 – 622.
12. *Katzir S.* The beginning of piezoelectricity. – Berlin: Springer, 2006. – 266 p.
13. *Khoroshun L.P* General Dynamic Equations of Electromagnetomechanics for Dielectrics and Piezoelectrics // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 4. – P.407 – 420.
14. *Maxwell J.C.* A Treatise on electricity and magnetism. – In 2 vol.: Vol. 2. – Oxford: Clarendon Press. – 445 p.
15. *Molchenko L.V., Loos I.I.* Axisymmetric Magnetoelastic Deformation of Flexible Orthotropic Shells of Revolution. // Int. Appl. Mech. – 2015. – **51**, N 4. – P.434 – 442.
16. *Wang Z.K.* A general solution and the application of space axisymmetric problem in piezoelectric material // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 1994. – **15**, N 7. – P. 615 – 626.
17. *Wen C.-W., Weng G.J.* Theoretical approach to effective electrostriction in inhomogeneous materials // Phys. Rev. B. – 2000. – **61**, N 1. – P. 258 – 265.
18. *Yamamoto Y.* Elektromagnetomechanical interactions in deformable solids and structures. – Amsterdam: Elsevier Science – North Holland, 1987. – 450 p.
19. *Yang J.* An introduction to the theory of piezoelectricity. – New York: Springer, 2005. – 299 p.
20. *Ye Z.G.* Handbook of advanced dielectric, piezoelectric and ferroelectric materials. Synthesis, properties and applications. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 1031 p.
21. *Zhang T.Y.* Fracture behaviors of piezoelectric material // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – **41**, N 1 – 3. – P. 339 – 379.

Поступила 20.12.2016 Утверждена в печать 30.01.2018